

## 第二章 高斯光線(Gaussian beam)

由波動光學與幾何光學的觀點來看，高斯光線的特性是最類似真實的雷射光。在高斯光線的光束束腰寬(*beam waist*)鄰近的波前(*wave front*)很像平面波，但是距離光束束腰寬越遠時，波前則會變成球面波。因此高斯光線的能量會被限制在一個角度內往外傳播。所以一般都使用高斯光線來表示雷射光，而本論文中也是由高斯光線代表。高斯光線可以使用傅利葉轉換來分析其振幅與特性，以下我就介紹傅利葉轉換和高斯光線的用法。

### 2-1 二維的高斯光線

雷射光在很多光學實驗中扮演者重要的角色，其分佈大多屬於高斯分佈。在這一節裡我們會探討高斯光線的基本特性[1][2]。純量波現象可由純量波動方程式(Helmholtz 方程) 了解，其方程如下：

$$\nabla^2 u(x, y, z) + k^2 u(x, y, z) = 0 \quad (2.1)$$

方程式中的  $k$  是傳播常數(propagating wave)且  $k=2\pi/\lambda$  ( $\lambda$  是介質中的光波長)，平面波是在沿  $z$  軸的方向前進，其形式如下：

$$u_{plane}(x, y, z) = A_p \exp(\pm ikz) \quad (2.2)$$

$A_p$  是常數。因為雷射光束有明確的傳播方向，所以通常可以假設它是沿  $z$  軸傳播，加上平面波已是波方程式的解，所以我們可以假設另一解形式如下：

$$u(x, y, z) = \varphi(x, y, z) \exp(-ikz) \quad (2.3)$$

在此  $\varphi(x, y, z)$  是可以用來表達平面波在相位與振幅上的差異。把 (2.3) 代入 (2.1)，可以看到  $\varphi(x, y, z)$  會滿足下列方程式：

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - 2ik \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \quad (2.4)$$

接下來我們就利用近軸近似的方法，也就是我們假設高斯光線是被侷限在  $z$  軸附近的區域內。所以  $\varphi(x, y, z)$  對  $z$  變成一個近軸方程式 (paraxial equation)：

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - 2ik \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \quad (2.5)$$

(2.5)式有很多解。但是我們可以依照幾何邊界條件找出(2.5)式的解，所求得的解可以用正交多項式及高斯函數的乘積來表示。假設解在  $x$  與  $y$  上對稱，則其場分佈  $u(r, z)$ 形如：

$$u(r, z) = \frac{w_0}{w(z)} \exp[-i(kz - \Phi(z)) - r^2(\frac{1}{w^2(z)} + \frac{ik}{2R(z)})] \quad (2.6)$$

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad \Phi(z) = \tan^{-1}(\frac{\lambda z}{\pi w_0^2}) \quad (2.7)$$

(2.6)式中， $w$ 和 $R$ 是 $z$ 的函數，而 $w_0$ 是高斯光束聚焦最小的情況而且 $w_0$ 是常數。我們可以從上式中看到 $w$ 界定了光束在徑向的振幅分佈。而 $R$ 是波前 (wave front) 的曲率半徑。在距離 $z$ 軸為 $w$ 時，振幅大小變成 $1/e$ ，因為雷射光強度是電場的平方，所以雷射光強度在徑向半徑 $r=w$ 處是 $1/e^2$ 。通常我們稱 $w$ 是高斯光線的斑點大小。由(2.11)式描述的高斯光線波前變成平面波時，其斑點大小為最小的情況，如果令斑點大小最小的位置為 $z=0$ ，則 $w(z)$ 與 $R(z)$ 可以有相當簡單的表示式。整個公式如下：

$$w^2(z) = w_0^2 [1 + (\frac{\lambda z}{\pi w_0^2})^2] \quad (2.8)$$

而

$$R(z) = z [1 + (\frac{\pi w_0^2}{\lambda z})^2] \quad (2.9)$$

(2.9)式說明了在 $z=0$ 時， $w^2(z)$  最小，如圖2.1所示，而且其值為  $w_0^2$ ， $w_0$  稱作光束束腰寬 (beam waist)，而從(2.9)式可知道在束腰寬處，波前曲率半徑為無窮大，而且此波前為平面。

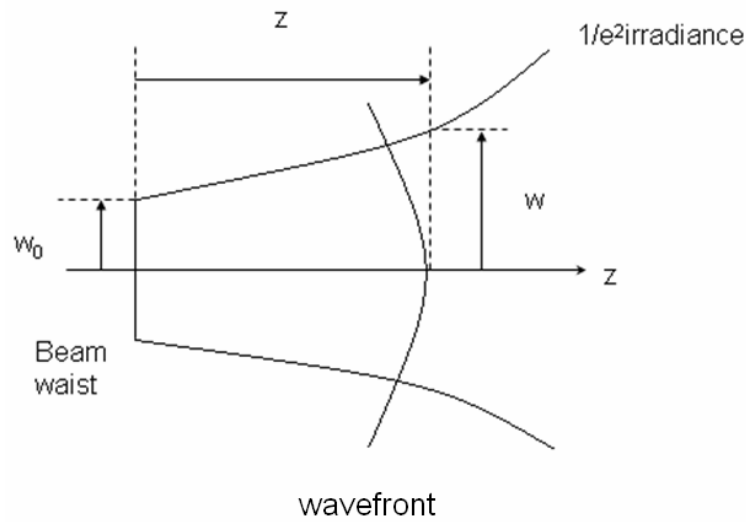


圖 2.1，在  $z=0$  時， $w^2(z)$  最小，而且在高斯光線束腰寬的位置時，波前曲率半徑為無窮大，而且此波前為平面的。

高斯光線完全下列四個參數  $w$ ,  $w_0$ ,  $z$  和  $R$ ，中的任兩個決定。當然波長  $\lambda$  也是要預先指名的。給定任兩個，其他兩個可以由(2.8)式與(2.9)式算出。另外也有幾個參數也是經常用到的。

(1)由  $z$  軸算起的遠場發射角  $\theta$ ，此時的輻射強度變成  $1/e^2$ ：

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\lambda}{\pi w_0}\right) \approx \frac{\lambda}{\pi w_0} \quad (2.10)$$

(2)瑞利尺寸(Rayleigh range) $Z_R$ ，他是從束腰處到最小波前曲率半徑的軸點之距離，亦即：

$$Z_R = \frac{\pi w_0^2}{\lambda} \quad (2.11)$$

表示從光線最窄處  $w_0$  到光束寬度變成  $\sqrt{2} w_0$  的距離。

在考慮通過光學系統的高斯光線的傳播時，經常使用的是複數光數束參數  $q$  其形式如下：

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{R} - i \frac{\lambda}{\pi w^2} \quad (2.12)$$

使用這樣的定意有幾個優點：

(1) 高斯光線在徑向部份可以寫成  $\exp(-ikr^2/2q)$ ，這跟近軸近似下的球面波一致。不過，對應於球面波的曲率半徑  $q$  參數確是複數。

(2) 高斯光束參數  $q$  隨  $z$  變化，其行形式可寫成：

$$q(z) = i \frac{\pi w_0^2}{\lambda} + z \quad (2.13)$$

其中  $q'$  表示通過某光學系統之後的高斯光線參數， $n'$  為介質折射率， $q$  是表示進入之前的光線參數，折射率為  $n$ ，到目前為止，高斯光線與一般光線分析時唯一的差別只是曲率半徑是實數現在換成  $q$  是複數，高斯光線中的  $q$  就好像點光源分析中的波前曲率半徑，所以  $q$  有時也被稱為複數曲率半徑。

### 2-1-1 數值孔徑

一個透鏡可由透鏡的直徑、屈光度、焦距( $f$ )來表示其特性。當平行光經過透鏡後，在屏幕上得到一個焦點，在透鏡與焦點之間的距離定義為焦距。一個透鏡的特性不只單單受任一因素影響。因此可以利用數值孔徑 [3](numerical aperture, 簡稱NA)來表示一個透鏡的整體特性。數值孔徑可定義為：

$$NA = n \times \sin \alpha \quad (2.14)$$

$n$  為透鏡的折射率、 $\alpha$  為繞射光可以通過透鏡的最大半角。從傅利葉光學的概念來說明，光學讀取頭上的透鏡所接受的繞射光是高斯光線經過傅利葉轉換後得到的結果，但是傅利葉轉換後的結果是以  $k$ -space(頻域)來表示。因為  $k$ -space 中的  $k_x$  為  $k$ (波數)的分量，所以每一個  $k_x$  值就可以對應一個平面波的行進角度。

$$\theta(\text{行進角度}) = \sin^{-1}(k_x/k), k \text{ 為波數}$$

因此只要有光學讀取頭上透鏡NA和n的數值就可以算出透鏡所對應的接收繞射光的最大半角  $\alpha$ ，再利用此角度  $\alpha$  對應到k-space的kx值，這樣可以很清楚的了解此光學讀取頭上的透鏡所能接收繞射光的範圍。當數值孔徑越大，透鏡所能接受的光也越多，解析度也越高。反之，當數值孔徑越小，透鏡所能接受的光也越少，解析度也越差。

## 2-2 傅利葉轉換

介紹將訊號由時域與頻域互相轉換的方法，其目的是為了把訊號分解成各個訊號，分解出來的訊號分量可以疊加回原本的高斯光束，所以傅利葉轉換可用來了解高斯光束的成分與特性，以下介紹連續傅利葉轉換[1]，離散傅利葉轉換，快速傅利葉轉換等 3 種方法。

### 2-2-1 連續傅利葉轉換

傅利葉轉換可以說是光電工程的基礎,除了光學外,包括電路學、電磁波、訊號分析、影像處理、通訊工程.....等,都會用到傅利葉轉換的觀念與理論。連續傅利葉轉換定義如下：

$$F\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt = F(\omega) \quad (2.15)$$

$$F^{-1}\{F(\omega)\} = \left(\frac{1}{2\pi}\right) \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t} d\omega = f(t) \quad (2.16)$$

上兩式中， $F\{f(t)\}$  表示對一時域函數  $f(t)$  取傅利葉轉換，轉換後的結果為頻域的函數稱為  $F(\omega)$ ， $F^{-1}\{F(\omega)\}$  表示將傅利葉轉換後的  $F(\omega)$ ，取傅利葉反轉換可得原來的時域函數  $f(t)$ 。這兩個式子稱為傅利葉轉換對 (Fourier Transform Pairs)。由上面的數學式知道，對時域函數  $f(t)$  取傅利葉轉換後為  $F(\omega)$ ，而  $F(\omega)$  為複數，可用極座標表示成大小與相位的組合，數學式如下：

$$F\{\omega\} = |F(\omega)|e^{i\varphi(\omega)} = |F(\omega)|\angle\varphi(\omega) \quad (2.17)$$

上式中， $|F(\omega)|$  為振幅， $\varphi(\omega)$  為相角， $|F(\omega)|$  之函數圖形稱為振幅譜， $\varphi(\omega)$  之函數圖形稱為相角譜，兩者合稱為頻譜。而頻譜是雷射光信號分析的重要基礎，因此傅利葉轉換後得到的振幅與相角，更是對於光碟機讀取頭接收到的訊號所分析出的循軌訊號(servo signal)的準確性有很大的幫助。

### 2-2-2 離散傅利葉轉換

在連續時間下的系統輸入之信號多為類比的方式，但是在許多情形下的某些系統輸入函數卻呈現著離散的型態，例如每隔一段時間間隔才量取的實驗數據，每隔一段距離間隔才量化的影像資料，這時候我們就必須將原來的傅利葉轉換作視當的修正，從連續時間下的傅利葉轉換轉到離散時間傅利葉轉換(discrete Fourier transform、簡稱：DFT)時。考慮有一個複數級數  $x(n)$  和  $N$  個取樣點，在取樣範圍外仍有  $N$  個週期的  $x(n)$  延伸，也就是對於全部的  $k$  值，此條件  $x_k = x_{k+N}$  都成立。

故離散傅利葉轉換定義為：

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x(k)e^{-jk2\pi n/N} \text{ for } n = 0 \dots N-1 \quad (2.18)$$

離散傅利葉逆轉換定義為：

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k)e^{jk2\pi n/N} \text{ for } n = 0 \dots N-1 \quad (2.19)$$

### 2-2-3 快速傅利葉轉換

2.18 式也就是離散傅利葉轉換。仔細觀察 2.20 式就可以發現，如果  $x(k)$  有  $N$  個數據點，所以要想得到  $N$  個獨立的正旋波的振幅值，它的計算時間是正比於  $N^2$  的，即要做  $N^2$  次乘法，這樣就必須要很龐大的運算時間。所

以人們一直在尋找可以減少離散傅利葉轉換運算時間的方法。在 1965 年，Cooley-Tukey 發表了他們的算法[4]，稱之為”快速傅立葉轉換” (fast Fourier transform、簡稱：FFT)。快速傅立葉轉換是一種可以減少離散傅立葉轉換計算時間的方法，它的計算時間正比於  $N \log_2 N$ 。接者我要利用快速傅立葉轉換與離散傅立葉轉換的差異來說明快速傅立葉轉換的基本思路：

以  $N=4$  的 DFT 為例，按照其定義用矩陣來表式(2.20)

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ X(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W^0 & W^0 & W^0 & W^0 \\ W^0 & W^1 & W^2 & W^3 \\ W^0 & W^2 & W^4 & W^6 \\ W^0 & W^3 & W^6 & W^9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ x(3) \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

上式中的矩陣  $W$  的各元素均為複數，故欲求  $X(k)$  的每一個值，均需做 4 次複數乘法和 3 次複數加法。所以要計算  $X(k)$  的 4 個值，需要做 16 次複數乘法和 12 次複數加法。以此類推，計算  $N$  點的 DFT，需要  $N^2$  次複數乘法和  $N(N-1)$  次複數加法。因此， $N$  越大，計算量增加的越多。但是在我們仔細觀察矩陣  $W$  後發現，它的矩陣元素  $W^{nk}$  具有週期和對稱的特性，因此  $W$  的許多元素都是相同的，所以就利用這一特性來簡化 DFT。

(1)  $W^{nk}$  的週期性

$$\begin{cases} W^{nk} = W^{n(k+N)} \\ W^{nk} = W^{k(n+N)} \end{cases} \quad (2.21)$$

若  $N=4$  則  $W^6=W^2, W^9=W^1$

(2)  $W^{nk}$  的對稱性

因為  $W^{\frac{N}{2}} = e^{-j\frac{2\pi}{N}\frac{N}{2}} = -1$

故有  $W^{(nk+\frac{N}{2})} = W^{nk} W^{\frac{N}{2}} = -W^{nk}$  (2.22)

若  $N=4$ ，則  $W^3 = W^{-1}, W^2 = -W^0$

利用  $W^{nk}$  的週期性與對稱性，式(2.20)中的矩陣  $W$  可簡化為：

$$\begin{bmatrix} W^0 & W^0 & W^0 & W^0 \\ W^0 & W^1 & W^2 & W^3 \\ W^0 & W^2 & W^2 & W^6 \\ W^0 & W^3 & W^6 & W^9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W^0 & W^0 & W^0 & W^0 \\ W^0 & W^1 & -W^0 & -W^1 \\ W^0 & -W^0 & W^0 & -W^0 \\ W^0 & -W^1 & -W^0 & W^1 \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

由此可見，矩陣中有很多元素是相同的。如果把序列  $x(n)$  分解為若干短序列，並與  $W$  矩陣元素結合起來計算 DFT，就可能簡化運算，這就是 FFT 的基本思路。我在下面舉一個簡單的例子來說明 DFT 與 FFT 的計算量的差別：假設  $N=8$

直接按照 DFT 的定義計算，8 點 DFT 所需要的總運算次數為

$$\text{複數乘法的次數} \quad N^2=64(\text{次})$$

$$\text{複數加法的次數} \quad N(N-1)=56(\text{次})$$

但是，8 點 FFT 所需要的總運算次數[5]為

$$\text{複數乘法的次數} \quad \frac{N}{2} \log_2 N = 12(\text{次})$$

$$\text{複數加法的次數} \quad N \log_2 N = 24(\text{次})$$

這樣就可以清楚地了解 DFT 與 FFT 的計算量的差別。

## 2-3 模擬平面波合成高斯光線的結果

當我們把高斯光束利用傅利葉轉換來分析，可以發現高斯光線是由很多不同振幅、不同角度入射的平面波組成的。所以我們就可以利用這個概念來把高斯光線的振幅方程式取傅利葉轉換，再把分析出來的各個平面波加起來，最後就可以得到原本的高斯光線。

### 2-3-1 利用電腦模擬重組高斯光線的過程

首先，我們先用高斯光線的振幅方程式(2.24)：

$$f[x, z] = \frac{w_0}{w(z)} * \text{Exp}[-i\phi + ik(z + r^2 / 2R(z)) - \frac{r^2}{w^2(z)}] \quad (2.24)$$

2.24 式中的參數，我在 2-1 節中就已經說明過了，但是在電腦模擬中，並不是把整個高斯光線直接代到程式中運算，而是要經過簡化的。所以在這裡，我只取整個高斯光線的一個振幅橫截面，所以要把  $z$  參數固定，當作常數(constant)。因為三維的高斯光線在任一  $z$  截面上是對稱的( $x$  與  $y$  對稱)，所以在把  $y$  這一維度忽略，只考慮  $x$ 。最後，我就可以把(2.24)式簡化成更簡單的模式，也就是我在電腦模擬中用來代表高斯光線的方程式：

$$g[x] = \text{Exp}\left[-\left(\frac{x}{w_0}\right)^2\right] \quad (2.25)$$

接著就對(2.25)式取傅利葉轉換，就可以得到高斯光線的頻譜分析圖。我就利用(圖2.2)來表示。由圖中可以很清楚的知道每一個  $k$  值代表一個入射的平面波還有平面波的振幅，每個平面波都有不同的入射角度。

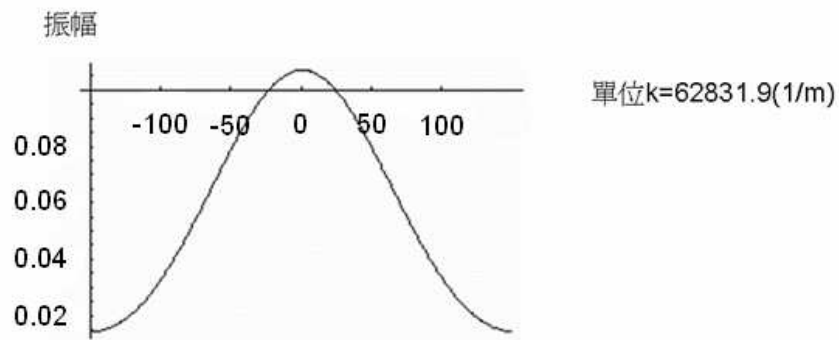


圖2.2為(2.25)式傅利葉轉換後的結果。圖中可知每一個  $k$  值代表一個入射的平面波還有其對應平面波的振幅。

有了這個頻譜分析圖後，我就可以把不同的平面波重組回原本的高斯光線。我利用(圖2.3)來呈現我重組後的高斯光線。

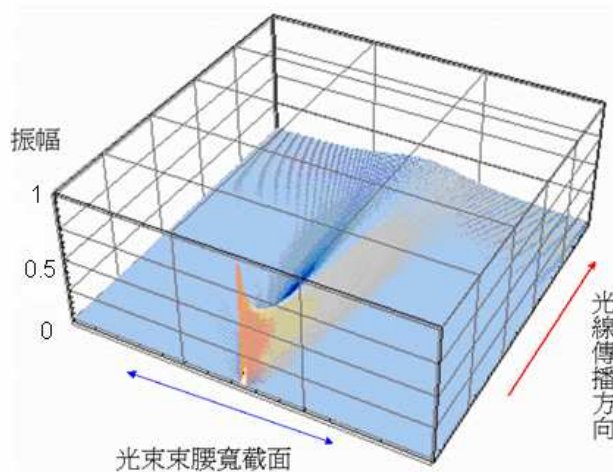


圖2.3，把不同的平面波重組回原本的高斯光線的結果示意圖。

為了要確定高斯光線在經過傅利葉轉換後，重組平面波所得到的的高斯光線是跟原本高斯光線一樣的，把兩個高斯光線的數值資料做作誤差分析後，可以得到一個誤差分析圖(圖2.4)。由圖可知，重組後的高斯光線與原本的高斯光線之間的誤差在 $10^{-15}$ 的尺度左右。

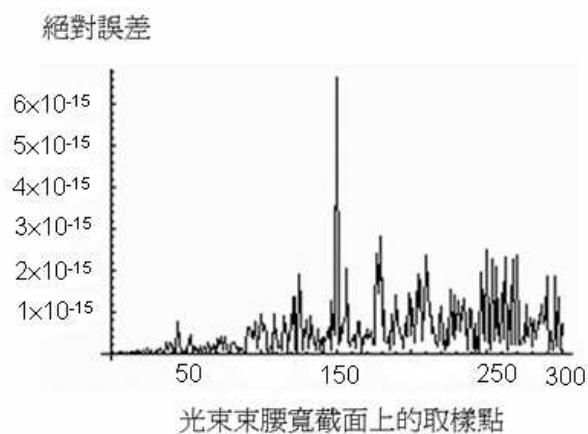


圖2.4，重組平面波所得到的的高斯光線跟原本高斯光線的絕對誤差圖，圖中誤差在 $10^{-15}$ 的尺度左右。

# Reference

- [1] J. W. Goodman, Introduction to Fourier optics (The McGRAW-Hill companies, Inc, 2002).
- [2] K. Iizuka, Elements of photonics, volume 1, in free space and special media (A John Wiley & sons, Inc, 2002).
- [3] A. B. Marehant, Optical recording, a technical overview (Addison-Wesley publishing company, 1990).
- [4] J. W. Cooley and J. W. Tukey, "An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series", Mathematics of Computation. **19**, 297(1965).
- [5] 姜建國, 曹建中, 高玉明, "信號與系統分析基礎", 清華大學出版社, 1996.