第二章　相關研究探討

第一節 Light Up 一致性問題

首先，定義出何謂Light Up一致性問題，我們將「給定一個Light Up的盤面判定此盤面是否存在合理的解？」問題定義為一個「Light Up之一致性問題(Light Up Consistency Problem)」，針對一個存在合理之解的盤面則稱其具有一致性；而不存在一個合理之解的盤面則稱其不具有一致性。以圖7與圖8為例，圖7(a)為一尚未放置燈泡之3×3的Light Up初始盤面，圖7(b)為圖7(a)盤面放置燈泡的情形，由於數字與相鄰方格之燈泡數相等，且為終止盤面，因此稱此盤面具有一致性；圖8(a)為一尚未放置燈泡之3×3的Light Up初始盤面，圖8(b)為圖8(a)盤面放置燈泡的情形，由於與數字'0'相鄰之方格不應放置燈泡，即此盤面無論如何放置燈泡，數字與相鄰方格之燈泡數都有不相等之狀況，所以稱此盤面不具有一致性。

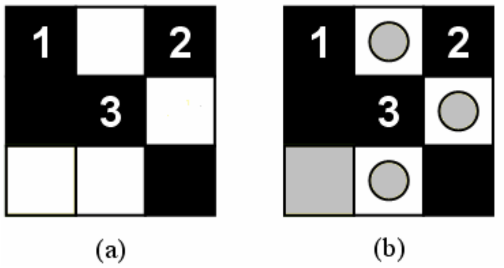


圖 1. (a) 3×3 的 Light Up 初始盤面 (b)具一致性之 3×3 的 Light Up 盤面

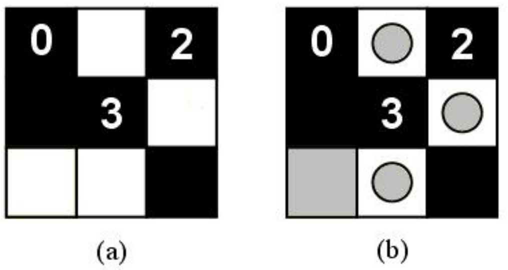


圖 2. (a) 3×3 的 Light Up 初始盤面 (b)不具一致性之 3×3 的 Light Up 盤面

在Brandon McPhail的論文[4]中，證明了「給定一個Light Up的盤面判定此盤面是否存在合理的解？」是NP-complete，意即「Light Up之一致性問題(Light Up Consistency Problem)」是NP-complete，其證明方法為將電路滿足問題(Circuit-SAT)在polynomial的時間內轉換成Light Up問題，下一節將簡略介紹此證明。

第二節 Light Up 一致性問題為 NP-complete

在Brandon McPhail的論文[4]中，將電路滿足問題(Circuit-SAT)在polynomial的時間內轉換成Light Up問題，其方式為將Boolean Circuit-SAT之性質，完全按照Light Up遊戲規則表示出來，意即給定一個Boolean circuit，可在polynomial time內建構出一個與此circuit相符合的Light Up盤面，以圖9為例，電路圖中的線路，可以圖9(b)與(c)的兩種盤面來表示，但是圖9(c)的盤面則可任意延展，在此皆使用圖9(c)的盤面代表電路圖中的線路。

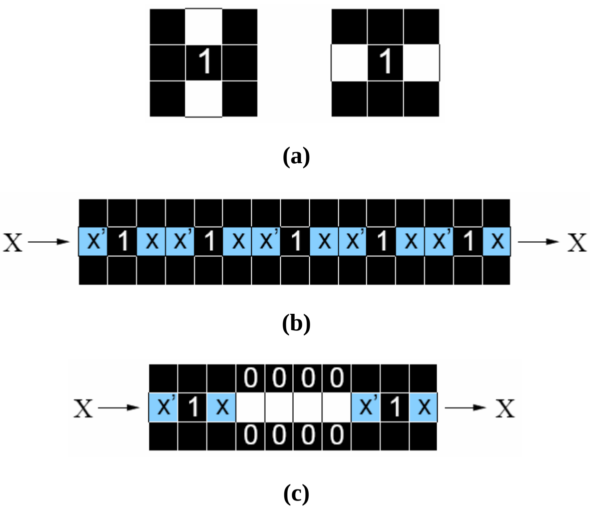


圖 3. 參考[4]
(a)代表電路圖線路端點，只有兩個空白方格可放置燈泡，
(b)將(a)的盤面合併串聯便可表現出 Boolean signal，
(c)亦可利用數字’0’表示對鄰近方格的限制，同樣表現電路圖中的線路

依照Light Up遊戲規則所建構成的電路圖線路中，包含兩種可能狀態，假如方格X代表燈亮，則狀態為True，假如方格X'代表燈亮，則狀態為False。此Boolean circuit假設被滿足，若且唯若該Light Up盤面存在有解。利用圖9中的盤面組合，可以造出可彎曲的電路圖線路，並延續此truth assignment，如圖10。另外亦可造出各種電路圖中所需之邏輯閘，如branch/NOT gate（圖11）、OR/XNOR gate（圖12），而有了branch gate與XNOR gate，便可利用三個branch與三個XOR gates建構出組合電路(combinational circuit)（圖13）。

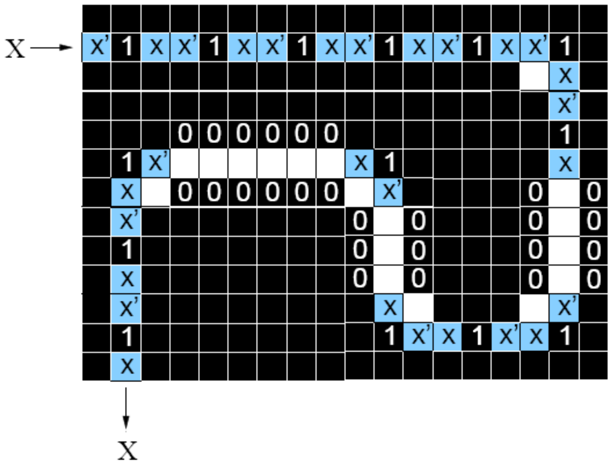


圖 4. 模擬可彎曲的電路圖線路；參考[4]

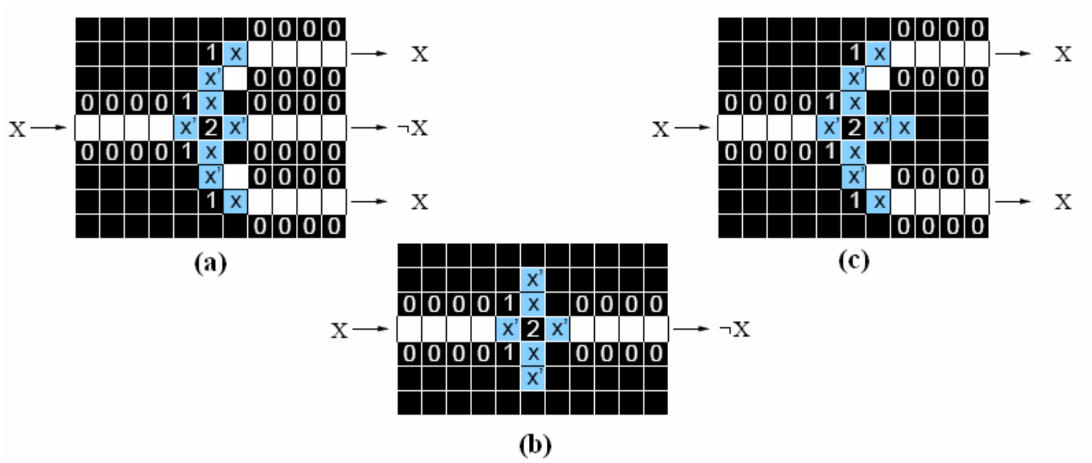


圖 5. (a) branch/NOT gate (b) NOT gate (c) branch gate；參考[4]

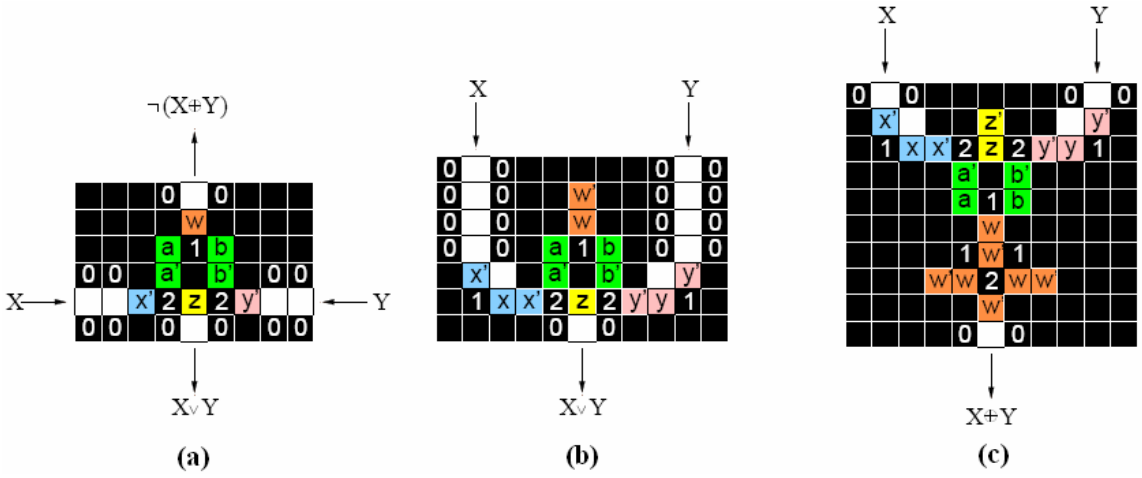


圖 6. 參考[4]

(a)輸入 X 與 Y，OR/XNOR gate 之 outputs 分別為 exclusive NOR 和 inclusive OR，
(b)利用圖(a)盤面組合出 OR gate，
(c)利用圖(a)盤面組合出 XOR gate

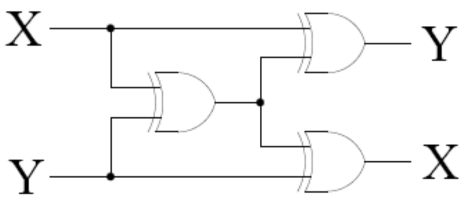


圖 7. 利用圖 9 之 XOR gates，建構出組合電路；參考[4]

有了以上邏輯閘之單元，我們便可建構出所有可能之Boolean circuits所對應之Light Up盤面，以下列式子為例，假設存在一個滿足此Boolean式子之敘述：

$$\neg x \vee ((x \wedge y) \vee z)$$

若且唯若一個Light Up盤面（圖14）存在有解。

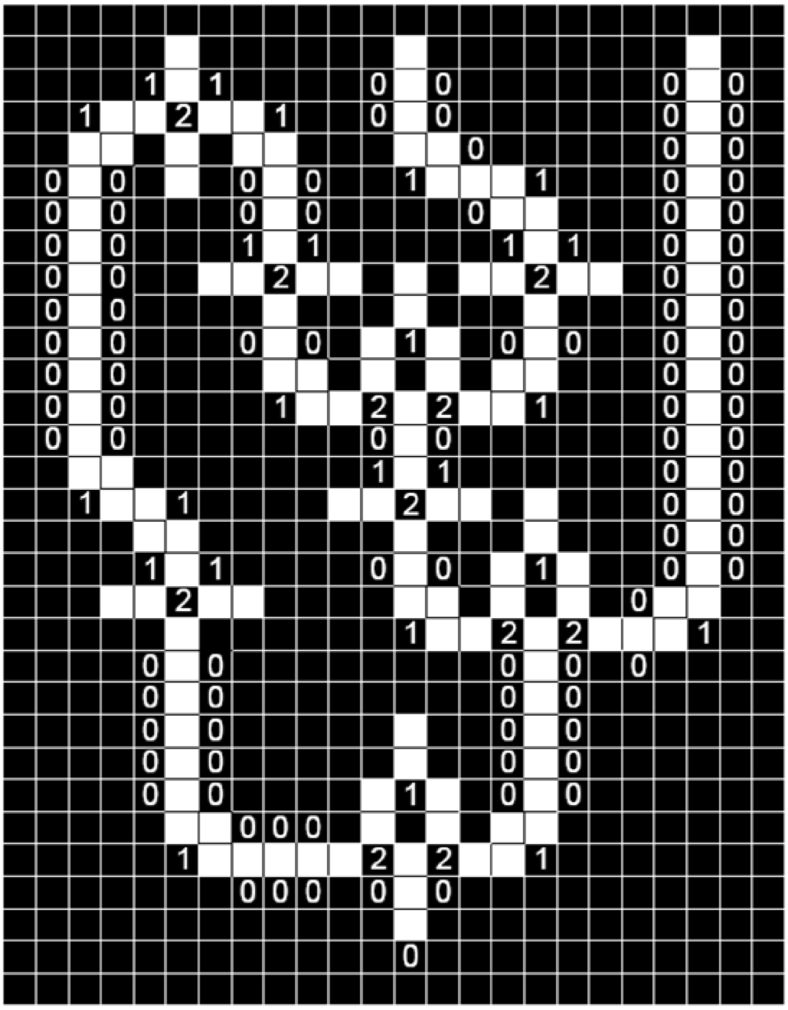


圖 8. 參考[4]

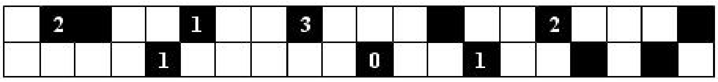
由此證明了「給定一個Light Up的盤面判定此盤面是否存在合理的解？」的難度是NP-complete，意即「Light Up之一致性問題(Light Up Consistency Problem)」是NP-complete。

第三節 1×n 與 2×n LCP

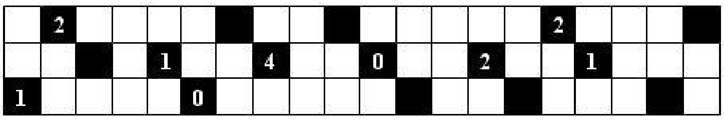
一個一般性的二維Light Up盤面的一致性問題，我們在此稱之為一個m×n Light Up盤面一致性問題(m×n Light Up Consistency Problem，簡稱m×n LCP)，而一個一般性一維Light Up盤面的一致性問題，我們在此稱之為一個1×n LCP，若

將一個m×n Light Up盤面其中一個維度限制為2，則在此我們稱之為一個2×n LCP，依此類推。由於Brandon McPhail證明出一個m×n LCP為NP-complete，因此我們考慮將盤面縮小，如範圍1×n、2×n或3×n的盤面。1×n的盤面我們以一個1×20的盤面為例（圖15(a)），白色方格代表能夠放置燈泡的位置；黑色方格代表屏蔽之障礙物，可阻擋光源；部分黑色方格中之數字代表對相鄰方格燈泡數目的限制。而在此盤面例子中，由於每一個方格都不會受到上下方向的影響，而只需要考慮左右方向鄰近方格之變化，黑色方格內的數字因為鄰近最多僅會有兩顆燈泡，所以數字至多為2，因此問題似乎能變得比較簡單。而2×n的盤面我們以一個2×20的盤面為例（圖15(b)），除了左右鄰近位置外，另外多了上方或者下方其中一個方向的影響，因此黑色方格的數字最大值增加到3，其變化性較1×n而言多出許多，但問題似乎尚且不像m×n的盤面那般困難。但問題範圍若增加到3×n的盤面，以一個3×20的盤面為例（圖15(c)），其影響方向來自上、下、左、右，因此黑色方格的數字最大值增加到4，其變化程度則已經接近m×n的盤面。

(a)



(b)



(c)

圖 9. (a)1×20 的 Light Up 盤面 (b)2×20 的 Light Up 盤面 (c)3×20 的 Light Up 盤面

在接下來的章節中，我們將把問題範圍縮小，針對 1×n 與 2×n 的盤面作討論，並利用有限狀態自動機(Finite state automaton)來完成。