

第二章 理論介紹

2-1 磁力探勘理論與方式

地球本身就具有磁場，其磁力的強度會隨著時間與空間的不同而有所變化，除此之外，地表下物質的組成、分布以及地層的構造也會影響磁力強度。若將地球磁場因時間與空間變化的因素去除後，便可得到地表下物質組成、分布和地層構造等因素所造成的磁力異常分布，將這些異常數據加以分析有助於了解地表下的地層構造及物質組成。

由於不同物質具有不同的磁感率，所以地下物質組成與分佈，甚至地層構造會造成磁力的異常變化。所謂的磁感率意指於物質因外加磁場（地球磁場）的影響所表現出的磁化強度大小，這就猶如重力場下的密度一般；磁化強度是因為物質內組成原子的電子繞原子核旋轉及電子本身自旋所造成的磁效應總和，其磁化方向和外磁場平行，所以磁感率就是物質的磁化強度和外磁場的強度之比值（Lowrie, 1997）。

舉例來說，當有外來磁場存在時，順磁性的物質會因磁感應而獲得與外加磁場同方向並成正比的磁感量，如此便會增強週遭的磁場；相對於逆磁性物質來說，則會產生與外加磁場正比卻反方向的磁感量因而減弱了週遭磁場的強度。除了上述所提及的兩種磁性物質，額外還有鐵磁性物質與剩餘性磁性物質的存在，這些都是影響野外磁力測量的因素(李德貴，1996)。

地殼內部因為組成物質的磁力特性不均勻，若將地磁觀測紀錄剔除掉時間變化及人為干擾的因素後，再利用數學方法分析模擬，便可能獲得地下得磁力資料，這樣的方式我們便稱為磁力探勘（陳宗元，2000）。

從事磁力測勘前必須先對施測區的地質背景及野外的狀況做了解，以便決定測線的位置、長度、密度等等施測的參數。如果在地表上的作業有困難時，如干擾過多或者地形過於複雜等不易作業的因素，則可採用空中磁測的方式來進行測勘（陳培源，1992）。大多數的野外測勘，多數採用質子進動式磁力儀來進行量測磁場強度。

實施磁力測勘時必須注意下列幾件事：

第一、測點施測時必須記錄時間並且要訂時的返回基點(通常為測點的起點)測量，好作為將來處理資料時提供日變化及儀器偏移的誤差做修正之用。

第二、施測時，要避開磁暴及其他不必要的人為干擾，這些會對地球磁場產生劇烈即不規則的影響以致於增加我們資料處理及分析上重大的麻煩，更會加重辨識上的困擾與誤判。

一般處理磁力數據時必須先做各種修正，以消除地球磁場的短期變化及儀器產生之誤差，然後利用國際地磁參考場之參數算出施測區應有之地磁強度以做出剩餘磁力分佈圖表現出區域的地磁特性（陳宗元，2000），但這個步驟只能得到初始的資料所以往往只提供做最初步的參考，接下來必須對磁力數據細部上做分析，才能進一步去判讀信號的意義。本研究採取兩種種濾波方式，其分別為小波以及適應性濾波中的中值以及維那濾波來做資料上更精緻的分析；下面的各小節將對這三種濾波原理作進一步的介紹。

2-2 小波理論

2-2-1 小波簡介

傳統的信號分析大都建立在傅立葉轉換的基礎上，傅立葉轉換是一種全域的分析，它雖然能將完整的時間序列轉換成頻率域的信息，但無法完全表達出信號的時頻域特性，而這種性質恰恰是非穩態信號最關鍵的性質，在大多數的信號中，均含有大量的非穩態成分，例如偏移、趨勢、突變、事件的起點與終止等情況（唐周宜，2004）。為了解決傅氏轉換在分析非穩態信號上的不足，並求得信號在局部時間上的頻率特性，因此而發展出所謂的「加窗傅氏轉換」(windowed Fourier) 或稱為「短時傅氏轉換」(short time Fourier transform)，其原理是以固定的微小視窗對原信號作滑移及轉換，此方式雖然成功的解決了傅氏轉換在空間域一波數域之間無法對應的問題，但它仍然是以傅氏轉換的基礎上做空間域的局部（小範圍）分析。小波分析是一種時間窗和頻率窗都可以改變的時頻局部分分析方法，且小波分析與傅立葉分析在數學上是相似的，只是傅立葉分析是以三角函數為基底函數，而小波分析是以小波函數為基底函數。相較於傅立葉分析，使用不規則小波函數來逼近尖銳變化的信號顯然要比光滑的正、餘弦曲線要好，同樣的，信號局部特性用小波函數來逼近的效果也較佳（圖 2-1）。

小波的英文為 wavelet，其翻譯自法文 ondelettes 或 petites，意即為很小的波。小波是使用平移(translation)與延伸(dilation)參數所組成的相似函數，該原始的單函數(single function)稱做母波(mother wavelet)(Denath, 2002)。

小波分析具有下列特性：

- (1) 具有多尺度的特點，可以由粗到細的逐度觀察信號。
- (2) 可以看成基本頻率特性為小波函數的帶通濾波器在不同尺度下對信號作濾波。
- (3) 選擇適當的小波，使小波函數在時間域上為有限支撐，在頻率域上也比較集中，可以使小波轉換在時、頻域具有表徵信號局部特性的能力，有利於檢測信號的瞬態或奇異點。

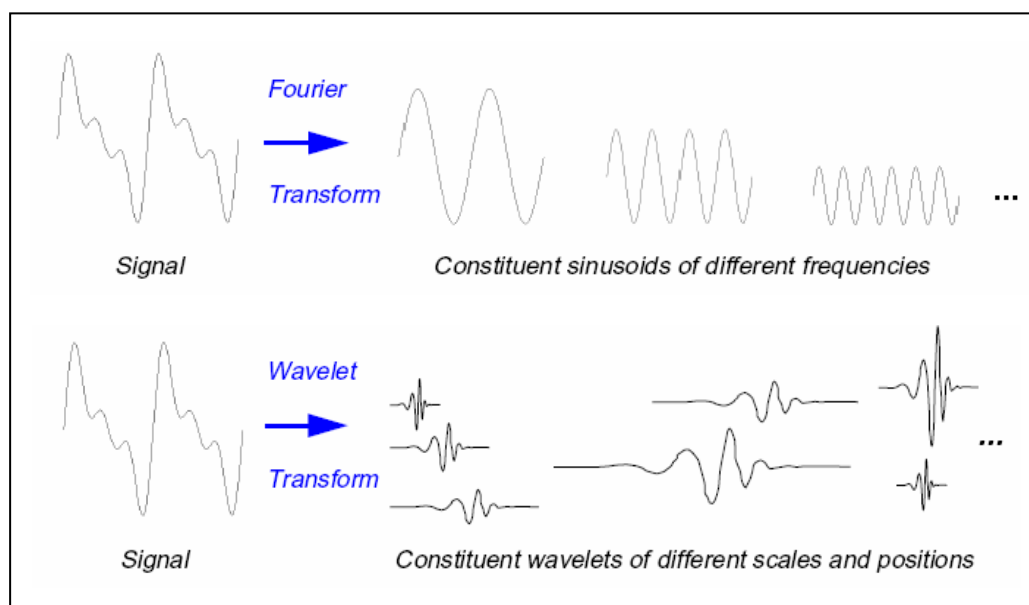


圖2-1 傅立葉與小波轉換之比較 (WaveletToolbox User's Guide)

2-2-2 小波轉換 (wavelet transform) (WaveletToolbox User's Guide)

所謂的小波轉換就是把某一個稱為基本小波 (或稱母小波mother wavelet) 的函數 $\psi(t)$ ，做位移 t 後，在不同的尺度 a 下，與待分析的信號做褶積 (convolution)。

小波(wavelet)顧名思義指的是「小區域的波」，這是一種特殊的波形，它的長度有限，平均值為零，它有兩個特點，一個是小，即在時域都具有緊支集 (compactly supported) 或近似緊支集；另一個是正負交替的**波動性**，也就是直流分量為零。

基本小波的函數 $\psi(t)$ 必須符合下列二項的特性：

(1) 母波函數的無限域積分值必須為零，也就是說 $\psi(t)$ 對時間軸的平均值為零，並且具有正負交替的波動性；代表此函數為具振盪性猶如上下起伏之波浪形狀。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0 \quad (2.1式)$$

(2) 母波函數的絕對值平方積分為有限能量， $\psi(t)$ 在時間域上具有緊支集或近似緊支集的特性，即 $|\psi(t)|$ 所佔面積不大且衰減迅速；代表此函數是被限制在有限區域內，「小波」名稱就由此而來。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t)^2 dx = 1 \quad (2.2式)$$

小波轉換是將時序函數 $f(t)$ 與小波函數 $\psi_{a,b}(t)$ 做內積 (inner product)，經轉換後所得的 $CWT_f(a,b)$ 即為小波係數。

時序函數 $f(t)$ 的小波轉換數學表示式：

$$\begin{aligned} CWT_f(a,b) &= \int \frac{1}{\sqrt{|a|}} \cdot f(t) \cdot \psi^*\left(\frac{t-b}{a}\right) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \psi_{a,b}^*(t) dt \quad (2.3式) \\ &= \langle f(t), \psi_{a,b}(t) \rangle \end{aligned}$$

在上式中， $a, b \in \mathbb{R}$ ， $a \neq 0$

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi^*\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad \text{為小波函數} \quad (2.4式)$$

a 為尺度參數 (scale factor)，用以擴張、壓縮小波函數

b 為平移係數 (shift factor)，用以移動小波函數(圖2-2)

*為共軛複數、 $f(t)$ 為時序函數

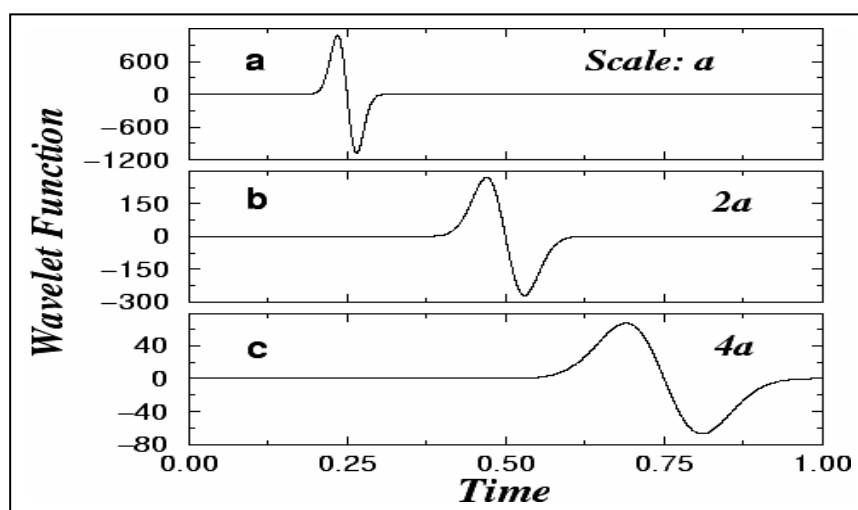


圖2-2 wavelet的尺度參數 a 用以擴張、壓縮小波函數的示意圖 (WaveletToolbox User's Guide)

進行小波轉換時，可以調整尺度參數與平移係數，用移動小波函數來涵蓋觀察的時間位置與頻率位置，當尺度愈大時，小波函數在時間軸上相對也就會愈長，被分析的信號區間也愈長。因此，尺度愈大代表頻率的分辨率愈低，主要獲得為信號中的低頻特性；反之，尺度愈小時，小波函數只與很小的局部信號進行比對，因此，所獲得大都為信號中的高頻特性（圖2-3）。

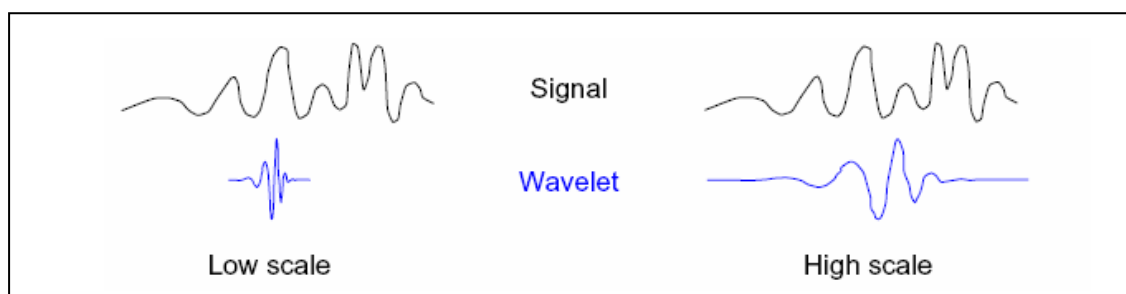


圖2-3 不同尺度之小波函數示意圖（WaveletToolbox User's Guide）

因此，我們可以將尺度與頻率的關係可歸納如下(圖2-4)：

小尺度 a → 壓縮的小波 → 快速變換的細節 → 高頻部分

大尺度 a → 拉伸的小波 → 緩慢變換的細節 → 低頻部分

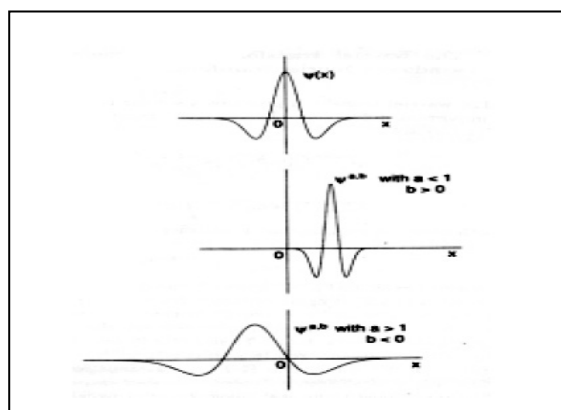


圖2-4 調整尺度參數與平移係數示意圖。（Daubechies，1992）

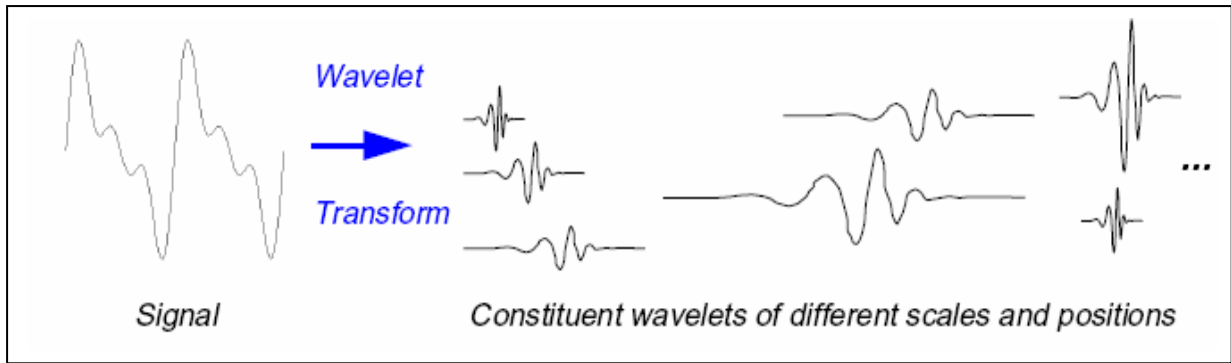


圖 2-5 小波轉換示意圖 (WaveletToolbox User's Guide)

2-2-3 一維信號小波轉換與分析

2-2-3.1 一維信號小波轉換

信號 $f(x)$ ，其連續小波轉換的定義為：在一個平方可積的 Hilbert 空間 $L^2(R)$ 中之內積過程 (Miao et al., 1998)：

$$CW_{a,b} = \langle \psi_{a,b}(x), f(x) \rangle = \frac{1}{\sqrt{a}} \int \psi \left[\frac{x-b}{a} \right] f(x) dx \quad (2.5式)$$

其中， $a, b \in R \times R$ ， $a > 0$ ， $\psi_{a,b}(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi \left(\frac{x-b}{a} \right)$ 為母小波經由伸縮及平移參數所產生一系列的小波基底函數，換句話說，小波轉換即是將輸入的信號函數對不同寬度及移動因子的基底小波函數作摺積 (convolution)，所得到輸出的就是此信號函數對不同小波的投影量/貢獻量 (鄭軒儒，2004)。

小波的逆轉換式為 (Leblanc et al., 2001) :

$$f(x) = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} CW_{a,b} \psi_{a,b} \frac{dadb}{a^2} \quad (2.6式)$$

其中，當 $a > 0$ 時，常數 $C_\psi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{k} |\psi(k)|^2 dk$ ， $\psi(k)$ 為 $\psi(x)$ 的傅氏轉換。

使用電腦計算小波轉換時，離散小波轉換是較為容易的。因此，進行離散小波轉換時，得先對參數 a 、 b 進行離散取 (Daubechies, 1992) :

$$a = a_0^m, \text{ 一般取 } a_0 = 2, m \in Z$$

$$b = nb_0 a_0^m, \text{ 一般取 } b_0 = 1, n \in Z$$

其中， m 、 n 為整數，分別代表兩個解析度之間的差異，以及控制平移的位置， a_0 、 b_0 分別為代表波數範圍的指數與位置移動變化的間隔指數。

。依此，可將 $\psi_{a,b}(x)$ 改寫成為二進制小波 (dyadic wavelet) :

$\psi_{m,n}(x) = 2^{\frac{-m}{2}} \psi(2^{-m}x - n)$; 其離散小波轉換可定義為 (Kumar et al., 1994) :

$$DW_{m,n} = a_0^{\frac{-m}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \psi(a_0^{-m}x - nb_0) dx \quad (2.7式)$$

2-2-3.2 多層次分析 (multiple-level decomposition)

多重尺度分析是由 Meyer (1990) 與 Mallat (1989b) 所提出，他們指出藉由多層次分析可以將信號透過濾波器的分解成近似信號 A (Approximationspace) 與細節信號 D (Detail space) 兩個部分 (圖 2-6)。

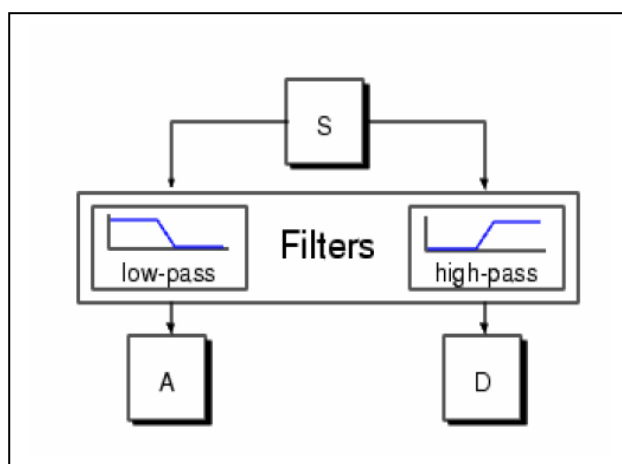


圖 2-6 信號的濾波過程 (Misiti, 1996)

根據連續小波轉換式為線性系統原理形式，我可以將其改寫成為 (Abbate et al., 2002)：

$$CW_{a,b} = f(x) \otimes \psi_{a,b}(x) = f(x) * \psi_{a,b}(-x) \quad (2.8式)$$

因此，小波轉換可視為在時間域中信號 $f(x)$ 輸入到一脈衝響應為 $\psi_{a,b}(-x)$ 的濾波器。原始信號 $f(x)$ 通過兩互補的濾波器後得到一組代表低頻的近似信號與代表高頻的細節信號 (Daubechies, 1992) (圖 2-7)：

(1) 細節信號： $D_m f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_{m,n} \psi_{m,n}(x)$ (2.9 式)

(2) 小波係數： $c_{m,n} = \sqrt{2^m} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \psi(2^m x - n) dx$ (2.10 式)

(3) 近似信號： $A_m f(x) = \sum_{b \in \mathbb{Z}} s_{m,n} \phi_{m,n}(x)$ (2.11 式)

(4) 尺度係數： $s_{m,n} = \sqrt{2^m} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \phi(2^m x - n) dx$ (2.12 式)

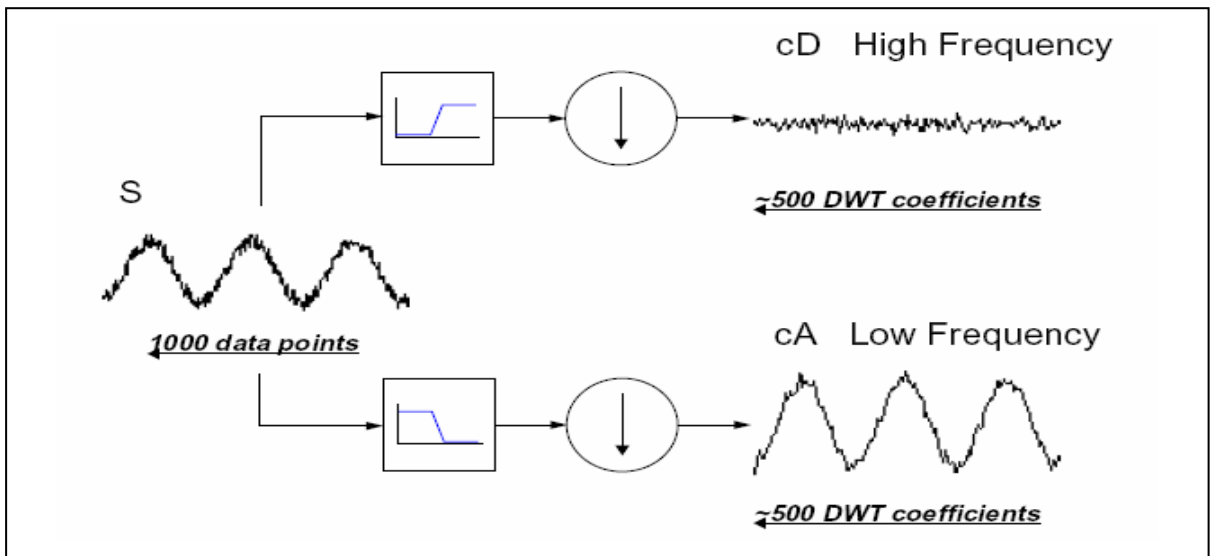


圖 2-7 小波轉換可視為一濾波器。

原始信號通過兩互補的濾波器後得到一組代表低頻近似信號與代表高頻的細節信號 (WaveletToolbox User's Guide)

原始信號 $f(x)$ 可表示成：

$$f(x) = A_m f(x) + \sum_m^{+\infty} D_m f(x) \quad (2.13 \text{ 式})$$

即可將原始信號的近似信號進行多次分解，因此可得到多層的近似信號及細節信號，這就是所謂的多層次分解（圖 2-8）而信號分解的層數限制為 $\log_2 N$ 層， N 為原始信號長度。

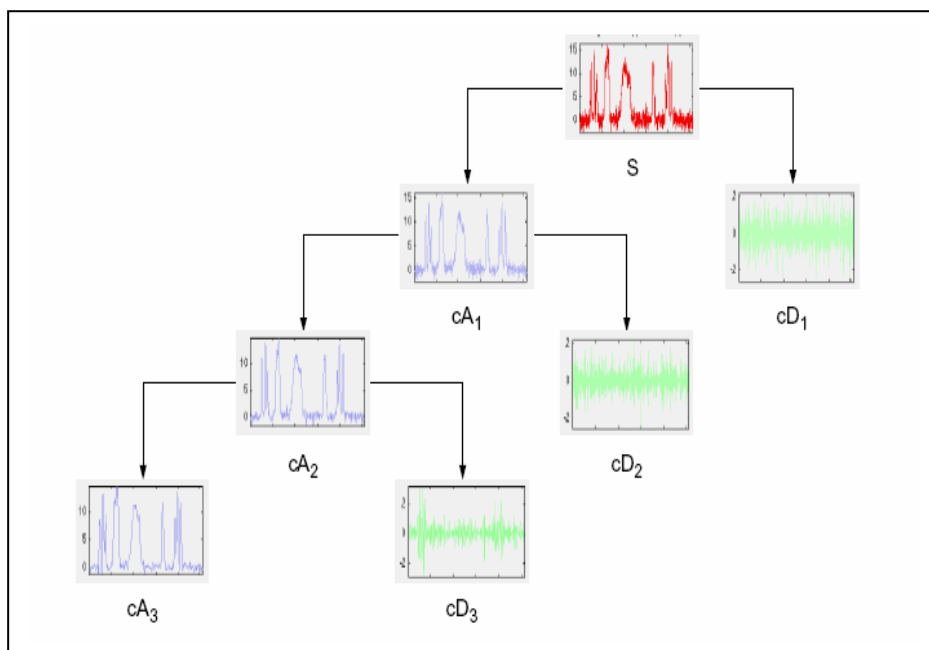


圖2-8 1D小波多層次分析示意圖 (WaveletToolbox User's Guide)

2-2-4 二維信號小波轉換與分析

2-2-4.1 二維信號小波轉換（鄭軒儒，2004）

對於平面磁力資料的處理，必須擴展至二維的小波轉換，這可由兩個一維模式之乘積來定義（紀凱瓶，2001），若以 $\phi(x)$ 和 $\phi(y)$ 分別表示一維尺度函數與小波函數，則二維尺度函數與 x 、 y 、 xy 三個方向上的小波函數可分別定義如下（繆紹鋼，2003）：

$$\begin{aligned}\phi(x, y) &= \phi(x)\phi(y) \\ \psi^1(x, y) &= \phi(x)\psi(y) \\ \psi^2(x, y) &= \psi(x)\phi(y) \\ \psi^3(x, y) &= \psi(x)\psi(y)\end{aligned}\quad (2.14 \text{ 式})$$

此時，可經過相對應的濾波器來實現二維離散小波轉換是比較簡單又有效率。將原先對一維信號的濾波器分別用於二維信號的行與列，如圖 2-9 所示：

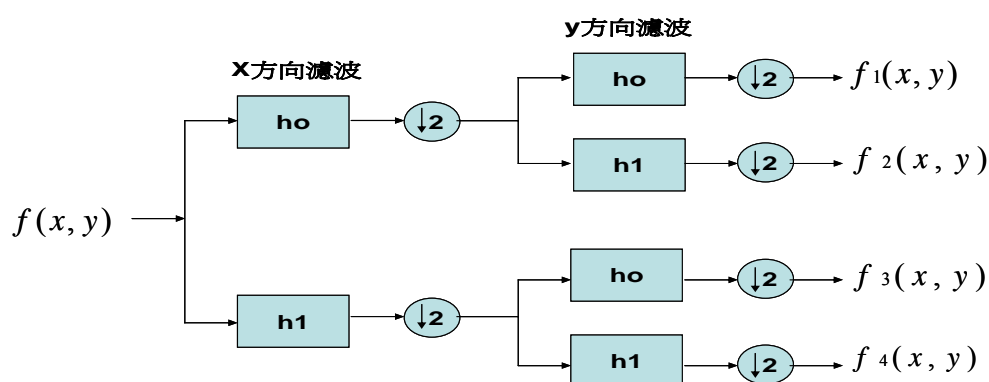


圖2-9 二維單尺度小波分解信號濾波示意圖

$f(x, y)$ 為原來的信號， $h1$ 和 $h2$ 為分頻濾波器組的係數， f_1 、 f_2 、 f_3 、 f_4 分別為分解後的信號成分，圖中 \downarrow 表示縮減取樣（downsample）。

2-2-4.2 二維小波分析

依據 Matlab 的手冊及師大地球物理實驗室的講義，本節將 2D 小波分析常用的名詞概念說明整理。

對一個 2D 的平面圖形，進行 2D 小波分析時，有兩個主要的步驟：

- (1) **橫向小波轉換**：所謂的橫向小波轉換，是把影像看為一個陣列，對陣列上 橫向的每一列，看做是互相獨立的一系列原始數列，然後對每一個獨立的原始數列，進行個別的小波轉換。經過橫向的小波轉換後，一張原始的圖片資料，會分為低頻資料區與高頻資料區(圖 2-10A)。
- (2) **縱向小波轉換**：縱向小波轉換如圖橫向轉換，也可分為低頻資料區與高頻資料區(圖 2-10B)。

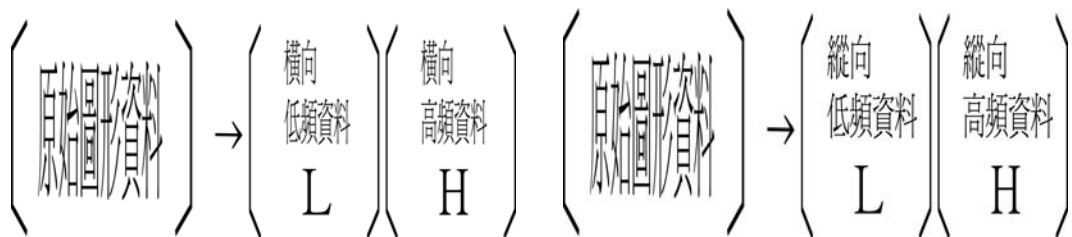


圖 2-10A 橫向小波轉換

圖 2-10B 縱向小波轉換 (唐周宜 2004)

L 為低通 (low pass)，H 為高通 (high pass)

原始信號在進行 2D 小波拆解後，會被拆解成低頻的近似信號（ A_1 ）和高頻的細節信號兩個部分。另外，細節信號還被拆解為三個方向：水平的細節信號（ H_1 ）、垂直的細節信號（ V_1 ）及對角的細節信號（ D_1 ），這是第一層；接下來的第二層的信號則由第一層的（ A_1 ）拆解出來。以此類推到第 N 層，如圖 2-11 所示。

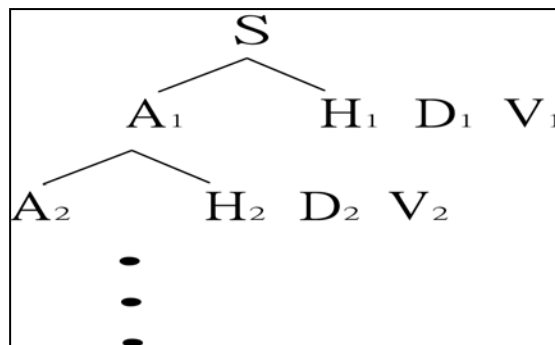


圖 2-11 2D 小波分解示意圖

近似信號 (Approximation component) :

近似信號 (A)，是先將輸入數據的列 (rows)，做橫向的低通濾波後，並其行 (columns) 降低取樣，然後再對行 (columns) 做低通濾波後，一樣將列 (rows) 降低取樣之後再輸出，即列和行都做低通濾波，如圖 2-12。

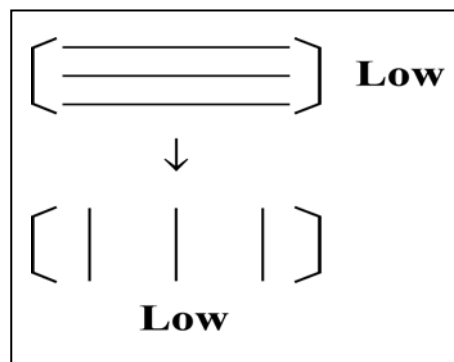


圖 2-12 近似信號 (A) 採樣示意圖

水平細節信號 (Detail horizontal component) :

水平細節信號(H)，是先將輸入數據的列 (rows)，做橫向的低通濾波後，對其行 (columns) 降低取樣，然後再對行 (columns) 做高通濾波後，再將列 (rows) 降低取樣之後輸出。即對列做低通濾波，行做高通濾波，如圖 2-13 所示。

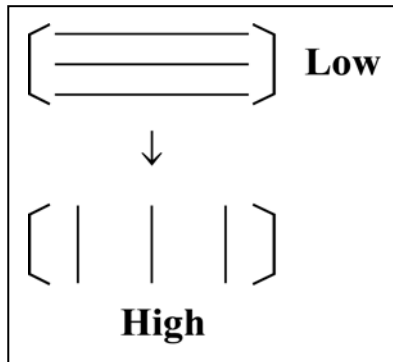


圖 2-13 水平細節信號 (H) 採樣示意圖

垂直細節信號 (Detail vertical component) :

垂直細節信號 (V)，是先將輸入數據的列 (rows)，做橫向的高通濾波後，將行 (columns) 降低取樣，然後再對行 (columns) 做低通濾波後，再將列 (rows) 降低取樣之後輸出。即對列做高通濾波，行做低通濾波，如圖 2-14 所示。

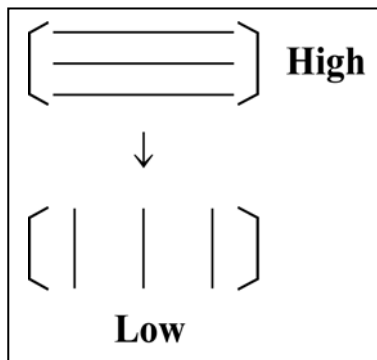


圖 2-14 垂直細節信號 (V) 採樣示意圖

對角細節信號 (Detail diagonal component) :

對角細節信號 (D)，是先將輸入數據的列 (rows)，做橫向的高通濾波後，將行 (columns) 降低取樣，然後再對行 (columns) 做高通濾波後，再將列 (rows) 降低取樣之後輸出。即對列和行都做高通濾波，如圖 2-15 所示。

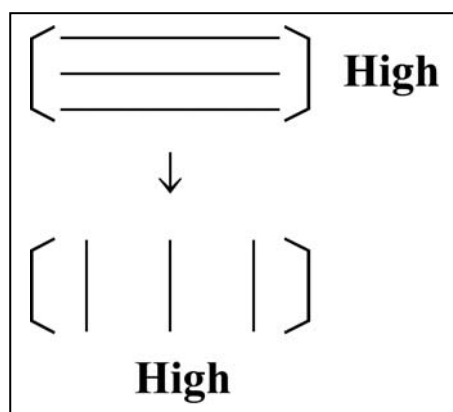


圖 2-15 對角細節信號 (D) 採樣示意圖

2-3 二維適應性濾波

2-3-1 維那濾波(2D Adaptive Wiener filter)

假設接收到信號的模型為，

$$g(n_1, n_2) = f(n_1, n_2) + v(n_1, n_2) \quad (2.15 \text{ 式})$$

其中 $f(n_1, n_2)$ 為局部信號， $v(n_1, n_2)$ 為白色且平均值(mean)為零，變異數(variance)為 σ_v^2 的雜信，其功率譜 (power spectrum) $P_v(\omega_1, \omega_2)$ 定義為

$$P_v(\omega_1, \omega_2) = \sigma_v^2 \quad (2.16 \text{ 式})$$

假設局部信號 $f(n_1, n_2)$ 是穩定的，在這個小區域中，給定維那濾波器 $H(\omega_1, \omega_2)$

$$H(\omega_1, \omega_2) = \frac{P_f(\omega_1, \omega_2)}{P_f(\omega_1, \omega_2) + P_v(\omega_1, \omega_2)} = \frac{\sigma_f^2}{\sigma_f^2 + \sigma_v^2} \quad (2.17 \text{ 式})$$

脈衝響應 $h(n_1, n_2)$ 可寫為下式， $\delta(n_1, n_2)$ 為

$$h(n_1, n_2) = \frac{\sigma_f^2}{\sigma_f^2 + \sigma_v^2} \delta(n_1, n_2) \quad (2.18 \text{ 式})$$

濾波器處理結果定義如下 (如圖 2-17 所示)，

$$\begin{aligned} p(n_1, n_2) &= m_f(n_1, n_2) + (g(n_1, n_2) - m_f(n_1, n_2)) * \frac{\sigma_f^2(n_1, n_2)}{\sigma_f^2(n_1, n_2) + \sigma_v^2} \delta(n_1, n_2) \\ &= m_f(n_1, n_2) + \frac{\sigma_f^2(n_1, n_2)}{\sigma_f^2(n_1, n_2) + \sigma_v^2} (g(n_1, n_2) - m_f(n_1, n_2)) \end{aligned} \quad (2.19 \text{ 式})$$

又 $\sigma_g^2 = \sigma_f^2 + \sigma_v^2$ 且 $m_g = m_f$ ，可得

$$p(n_1, n_2) = m_g(n_1, n_2) + \frac{\sigma_g^2(n_1, n_2) - \sigma_v^2}{\sigma_g^2(n_1, n_2)} (g(n_1, n_2) - m_g(n_1, n_2)) \quad (2.20 \text{ 式})$$

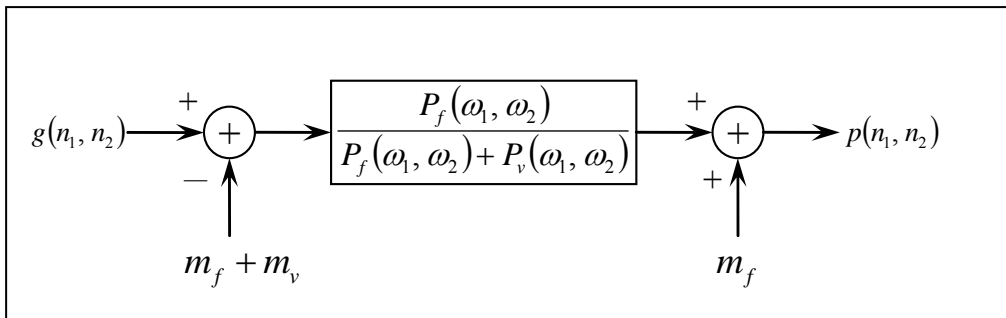


圖 2-16 維那濾波器

2-3-2 二維中值濾波器(2D median filter)

假設 $x(\cdot, \cdot)$ 是一個二維的信號，在 $(2N+1) \times (2N+1)$ 大小的濾波器視窗中心的點為 (n_1, n_2) ，定義其基本視窗如下，

$$W[n_1, n_2] = \{x(n_1 + k, n_2 + k) : -N \leq k \leq N\} \quad (2.21 \text{ 式})$$

二維中值濾波器的處理結果定義如下 (圖 2-18)，

$$Y_{MF}(n_1, n_2) = \text{median}[x(\cdot, \cdot) \in W[n_1, n_2]] \quad (2.22 \text{ 式})$$

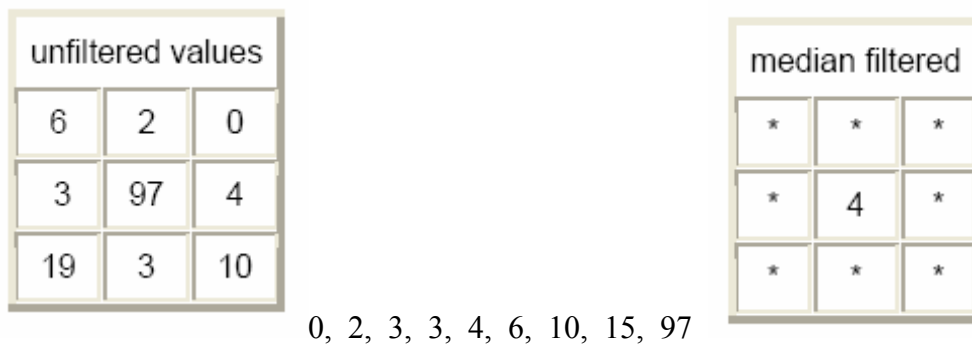


圖 2-17 二維中值濾波實際運算的方式