中學生通訊解題第八十期題目參考解答及評註

臺北市立建國高級中學　數學科

問題編號
8001

撞球協會根據撞球運動員的水準給他們編號：最強的運動員排名為第 1 號，其次為第 2 號，依此類推。設在號碼之差大於 2 的兩名運動員比賽時，號碼較小的運動員得勝。現有 256 名運動員參加單打比賽。比賽按淘汰制進行：參賽者根據抽籤結果分成若干對，每對中的兩人比賽一場，勝者進入下一輪，於是每進行一輪比賽後，運動員人數減半，經過 8 輪比賽後產生冠軍。問冠軍的最大可能號碼是多少？

參考解答：

(1) 因為號碼為 k 的運動員只可能敗給號碼不超過 $k+2$ 的運動員，故在每輪比賽之後，獲勝運動員中的最小號碼至多增加 2，於是 8 輪比賽之後最強運動員的最小號碼至多為 17。

下面我們指出，第 17 號運動員不可能成為冠軍。

若不然，則第 1 輪比賽後，第 1,2 號運動員應被淘汰，但他倆只能分別輸第 3,4 號運動員；第 2 輪比賽後，第 3,4 號運動員應被淘汰，但他倆只能分別輸第 5,6 號運動員；繼續下去，第 7 輪比賽後，最後只剩第 15,16 號這兩名運動員並在第 8 輪由二人進行決賽。故冠軍不可能是第 17 號運動員。

(2) 最後我們舉一個第 16 號運動員成為冠軍的例子。

將全體運動員分成兩組：

第一組由第 16 號及 128~256 號運動員共 128 人組成，另外的 128 人為第二組。

前 8 輪的每場比賽都在組內進行。第一組賽過 7 輪之後剩下的唯一運動員是第 16 號。

而第二組中的比賽可以這樣來設計：第 1 輪使第 3,4 名分別贏第 1,2 名，第 2 輪讓第 5,6 名分別贏第 3,4 名，...，第 6 輪中第 13,14 名分別贏第 11,12 名，第 7 輪中第 14 名贏第 13 名。

最後第 8 輪決賽中，第 16 名贏第 14 名。

綜上可知，冠軍的最大可能號碼是 16。

問題編號
8002

求使得方程組

$$\begin{cases} p+1=2x^2 \\ p^2+1=2y^2 \end{cases}$$

有整數解的所有質數 p。

參考解答：

不妨設 x、y 為正整數

① $\because p+1=2x^2 \quad \therefore p$ 是奇質數

② 兩式相減 $p(p-1)=2(y-x)(y+x)\ldots\ldots(*)$

$\Rightarrow p|y-x$ 或 $p|y+x$

③ $\because x>1$, $y>1$

$\therefore \ p=2x^2-1>x$

$p^2=2y^2-1>y^2, p>y, 2p>y+x>y-x$

若 $p|y-x$，則 $p=y-x$，由(*)式得

$p-1=2(y+x)$，矛盾

若 $p|y+x$，則 $p=y+x$，由(*)式得

$p-1=2(y-x)$，於是

$p^2=2y^2-1=2(p-x)^2-1=$

$2p^2-4px+2x^2-1=2p^2-4px+p$

故 $p+1=4x$

$\Rightarrow 4x=2x^2$

$\Rightarrow x=2$，$p=7$，$y=5$

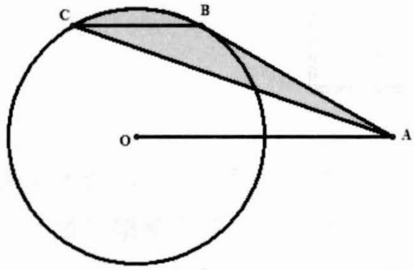
所求的質數 $p=7$

解題評註：

1. 此題首先由奇偶性得 p 是奇質數，又利用因數性質『設 a,b 為正整數，p 為質數，若 $p|ab$，則 $p|a$ 或 $p|b$』，再由方程組得 $p=y+x$，$p-1=2(y-x)$，進而得到 p 值。
2. 參與徵答的同學中有兩位在『$p=y+x$，$p-1=2(y-x)$』這部份沒有說明清楚。

問題編號
8003

如圖，A 是半徑為 1 的圓 O 外一點，$\overline{OA}=2$，$\overline{AB}$是圓 O 的切線，B 是切點，弦 BC 平行$\overline{OA}$，連接$\overline{AC}$，則陰影部分的面積等於多少？



參考解答：

設$\overline{OA}$與圓 O 的交點為 D 點

連 OC、BO、BD

因為$\overline{AB}$是圓 O 的切線，B 是切點，，$\overline{OA}=2$

所以$\overline{BD}=1$，又$\overline{OC}=1$，弦 BC 平行$\overline{OA}$

故 ODBC 為平行四邊形，且∠BOC=60°

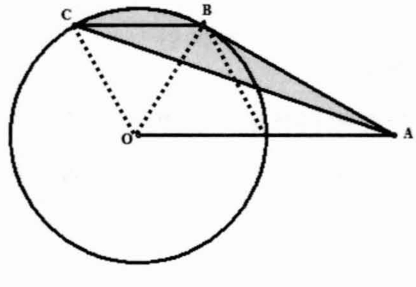
因為$\overline{OA}//\overline{BC}$，所以ΔBOC 面積=ΔABC 面積

陰影部分的面積

=弓形 BC 面積+ΔABC 的面積

=弓形 BC 面積+ΔBOC 面積

=扇形 BOC 的面積$=\dfrac{60^\circ}{360^\circ}\times\pi\times1^2=\dfrac{\pi}{6}$。



解題評註：

本題屬幾何的基本概念題型，關鍵在於如何適當分割一些適當的常見圖形，徵答的同學中，均能適切表達分割的方法，亦能清楚表達。

問題編號
8004

ΔABC 的一邊長為 5，另外兩邊長恰好是方程式 $2x^2-12x+m=0$ 的兩根，試求出滿足上述條件中 m 的範圍？

參考解答：

設另兩個邊長分別是 $a,b \Rightarrow a+b=6>5$，$ab=\dfrac{m}{2}>0$ 又

$$|a-b|<5 \Rightarrow (a-b)^2<25 \Rightarrow (a+b)^2-4ab<25$$

$$\therefore 6^2-4\cdot\frac{m}{2}<25 \Rightarrow m>\frac{11}{2}$$

而 $\Delta=12^2-4\times2\times m\geq 0 \Rightarrow m\leq 18$，則 $\dfrac{11}{2}<m\leq 18$

解題評註：

本題應從根與係數、三角形三邊長的關係以及配合乘法公式，最後再以實根特性導入判別式大於等於 0 即可找出 m 值的範圍。

問題編號
8005

已知自然數 n 除以 7 餘 3，n 除以 13 餘 8，n 除以 19 餘 13，則 n 之最小值為 $\dfrac{7\times13\times19\times5-17}{6}$，

(1) 試說明或分析此推論的道理；

(2) 並從而尋求滿足「m 除以 11 餘 9，m 除以 13 餘 8，m 除以 15 餘 7，m 除以 17 餘 6，m 除以 19 餘 5」五條件之最小自然數 m。(將此 m 之值以仿如 n 值之算式表示，不要乘開)

參考解答：

(1) 依題意，根據除法原理：被除數 ＝ 除數 × 商 ＋餘數，得 $n=7a+3=13b+8=19c+13$

$\Rightarrow n=7(a+1)-4=13(b+1)-5$
$=19(c+1)-6$

$\Rightarrow 6n=7\times6(a+1)-24$
$=13\times6(b+1)-30$
$=19\times6(c+1)-36$

$\Rightarrow 6n=7\times(6a+5)-17$
$=13\times(6b+5)-17$
$=19\times(6c+5)-17$

$\Rightarrow 6n+17$ 是 7、13、19 之公倍式

$\Rightarrow 6n+17=7\times13\times19\times t$

$\Rightarrow n$ 最小時，$t=5$，即 n 最小時，$6n+17=7\times13\times19\times5$，故 n 之最小值為 $\dfrac{7\times13\times19\times5-17}{6}$。

(2) 仿如(1)，根據除法原理：被除數 = 除數 × 商 + 餘數，得 $m = 11a+9 = 13b+8 = 15c+7 = 17d+6 = 19e+5$

$\Rightarrow 2m = 11\times 2a+18 = 13\times 2b+16 = 15\times 2c+14 = 17\times 2d+12 = 19\times 2e+10$

$\Rightarrow 2m-29 = 11(2a-1) = 13(2b-1) = 15(2c-1) = 17(2d-1) = 19(2e-1)$

$\Rightarrow 2m-29$ 是 11、13、15、17、19 之公倍式

$\Rightarrow 2m-29 = 11\times 13\times 15\times 17\times 19\times t$

$\Rightarrow m$ 最小時，$t = 1$，故 m 之最小值為 $\dfrac{11\times 13\times 15\times 17\times 19+29}{2}$。（即最小之 $m = 346432$）

解題評註：

本題解題的主要概念是「除法原理」。這一類有「韓信點兵」之稱的問題，在各個除數成等差，相對餘數亦成等差的條件下，如題目所示，有較為特殊的解法，這種解法的著眼點在於：藉由等差數列的性質，將各除數下之「餘數」化為同一數，進而以「答數」與「餘數」表示各除數的公倍數。根據中國剩餘定理，可知韓信點兵問題中的各除數如果兩兩互質，則無論餘數為何值該題有解；否則餘數必須有限制才有解。以下在各除數兩兩互質的條件下，討論此一特殊的解法。

設自然數 n 除以 a_0 餘 R_0，除以 a_1 餘 R_1，除以 a_2 餘 R_2，…，除以 a_p 餘 R_p，求 n 之最小值，其中 $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_p$ 成等差，公差為 d；$R_0, R_1, R_2, \ldots, R_p$ 成等差，公差為 D，則根據除法原理，存在 $Q_0, Q_1, Q_2, \ldots, Q_p$，使得下列各式都成立：

$n = a_0Q_0+R_0$、$n = a_1Q_1+R_1$，$n = a_2Q_2+R_2$，…，$n = a_pQ_p+R_p$，即

$n = a_kQ_k+R_k$、$n = a_{k+1}Q_{k+1}+R_{k+1}$，對於所有的 $k = 0,1,2,\ldots,p-1$ 都成立，兩式分別乘以 a_{k+1}、a_k，得 $a_{k+1}n = a_ka_{k+1}Q_k+a_{k+1}R_k$、$a_kn = a_ka_{k+1}Q_{k+1}+a_kR_{k+1}$，相減，由 $a_{k+1}-a_k = d$ 且 $a_{k+1}R_k-a_kR_{k+1} = (a_k+d)R_k-a_k(R_k+D) = dR_k-a_kD = dR_0-a_0D$，

得 $dn = a_ka_{k+1}(Q_k-Q_{k+1})+dR_0-a_0D$，可知 dn 除以 a_k、a_{k+1} 之餘數都是 dR_0-a_0D，即 $dn-dR_0+a_0D$ 是 a_k、a_{k+1} 的公倍數，對於所有的 $k = 0,1,2,\ldots,p-1$ 都成立，故 $dn-dR_0+a_0D = a_0a_1a_2\ldots a_p\,t$，是即含有二未知數 n 與 t 之不定方程式，利用除法原理再解此不定方程式求出 t 值，即得 $n = \dfrac{a_0a_1a_2\cdots a_pt+dR_0-a_0D}{d}$。

本題(1)中，$dR_0-a_0D = 6\times 3-7\times 5 = -17$；(2)中，$dR_0-a_0D = 2\times 9-11\times(-1) = 29$，此二關鍵數據皆可採取如上方法求得，原【解答】中所用的方法不同於此，主要是本題中之數據較為簡易，只要把握相關的算理，其中規律不難觀察歸納得知，而如何探索找出相關規律，此一發現過程應有參考價值，寫下以供參考。