第參章　研究方法

研究者在研究進行之初，原想針對四位經由篩選後的國一數學資優生作其錯誤類型之分析探討，但由於錯誤類型的研究領域相當廣泛，且不同領域有其不同的錯誤類型，因此在整個探索過程中，研究者嘗試將焦點鎖定某特定的數學領域之主題。另由於研究者有參與一針對此群資優生的課程設計小組，而在這一系列針對這些資優生所設計的課程中，也包含有研究者所負責設計的邏輯推理單元，因此在觀察這四位國一數學資優生於邏輯推理單元中的推理表現及其平時的數學解題表現後發現，其數學解題能力與邏輯推理能力的表現間，似乎有所關連，故乃產生一個最初始的研究假設 —「數學解題能力與邏輯推理能力是有相關的」。

之後，便進一步地設計與此假設相關之研究工具，包括一個能代表數學解題能力的「新對數問題甲」及代表邏輯推理能力的「推理問題甲」兩份測驗卷，藉以了解這群資優生的數學解題能力與邏輯推理能力，並希望對於上述之假設能加以驗證或修改。其研究結果顯示，對這些資優生而言，此兩能力確有關連，但在研究結果中，同時也引發研究者思考一些問題，例如：學生是如何看待公式？學生在運用公式進行解題時有什麼樣的困難？在面對一個明顯與公式不符合的題目時，學生又是如何進行轉換？這些都促使研究者想做更進一步地瞭解。

因此，根據上述的發現與一些待答問題，研究者乃進行進一步的驗證與探

索研究。針對學生在運用公式方面的困難與如何進行轉換的問題，研究者設計了另一研究予以探索之，同時希望能藉此瞭解一般學生在對數方面的錯誤類型，而並非只侷限於針對資優生所收集的錯誤類型。再者，根據上述研究的發現 —「數學解題能力與邏輯推理能力確有關連」，研究者並設計了一較適於大範圍施測的工具，希望針對該發現予以量方面的證實。

故本研究中可分為三個子研究。第一個是最先針對國一數學資優生所進行的研究，稱為「研究一」；接著根據時間的進程，進行了「研究二」，藉由研究二，可對於學生在運用公式方面的困難與如何進行轉換的問題有所瞭解，同時，也希望在此能收集到一般學生的對數錯誤類型；最後是「研究三」，在此階段裡，針對在研究一裡已得到驗證的假設，希望予以量的支持。

整體來說，本研究從研究一的提出假設，到驗證假設階段，有了一初步的結果並產生一些待答問題；接著進入研究二，除了探討學生在對數題的錯誤類型外，同時也對研究一之待答問題有了一些解答；最後進入研究三，希望透過一屬於量的研究，能對研究一中已初步獲得證實的假設，再予以檢驗之。換句話說，本研究的進行是具有階段性的，因為每個子研究雖各有其專注焦點，但研究一的結果引發研究者產生研究二與研究三的行動，意即研究二與研究三是以研究一為發展中心，繞著此發展中心，我們將此圓不斷地擴大，同時透過上一個子研究的結果，適切地修改研究工具，以進行下一階段的研究。因此以下將就研究一、研究二及研究三之研究對象、研究步驟與流程、研究工具以及資料處理等四個主題予以個別說明。

第一節　研究一

一、 研究對象

此階段的受試者是從 87 年代表台北市及北台灣地區參加香港保良局所舉辦的「第二屆小學數學世界邀請賽」，以及在大陸天津所舉辦的「我愛數學少年夏令營」共 18 位競賽選手中，依據本研究之目的挑選出 4 位學生。基於研究者的

研究主題主要是針對學生的錯誤類型，因此在遴選時，並不打算尋找此批學生中表現最好與最差的學生，故乃從中挑選屬於中高與中低能力的學生各兩位，並在考慮性別因素的情形下，代表中高能力的兩位學生中，有男女各一名，同樣地，代表中低能力的學生也是一男一女，故研究一所形成的假設是經由長時期的觀察及評量這 4 位數學資優生所獲得的。

二、 研究步驟與流程

這部分將就研究一的假設形成階段以及驗證假設階段兩部分來加以說明。

（一）假設形成階段

基於在選擇研究一的研究對象時，已對受試者進行篩選，包括有兩位在此批資優生中屬於中高解題能力的學生，及另兩位屬於中低解題能力的學生。而透過平時觀察四位受試者數學解題表現也發現四位受試者的解題能力確如先前篩選之標準，前兩位之解題能力的確較高於另外兩位受試者，另外又根據此批受試者在研究者所設計的邏輯推理課程之表現結果呈現出，兩位原屬於中高表現的資優生在三個邏輯推理的問題中，其表現的確明顯地優於另兩位屬於中低能力之資優生，故引發研究者產生一初步假設 —「數學解題能力高（低）　邏輯推理能力強（弱）」。

促使研究者產生上述假設的邏輯推理問題包括有 Adi 等人（1980）所提及的新 Wason's four card problem、Griggs & Cox 改良式的四張卡片問題，以及另外一個由研究者自行設計出來抽煙問題，此三問題恰皆屬於條件式推理的範疇，因此在有了一個初步假設後，研究者即積極地設計適切的研究工具，期待對此假設有進一步地驗證。

（二）驗證假設階段

1. 研究工具的發展

Ben-Zeev（1995）的研究提到，學生所犯的錯誤是一種「合理的錯誤」（rational error），也就是他們會正確地遵循錯誤的法則來進行解題，此法則之形成乃是根據他們過去的知識與經驗。另外，在有關條件推理的文獻中也指出，學生的錯誤是受到過去經驗、知識的影響（Gleitman, 1981），而至於對於學生為何會選擇錯誤的法則來進行解題，學者提出應有一個心理機制在影響人的選擇（李芳樂，1996）。因此研究者有一個支持上述初始假設的論點是：「如果人的解題過程是『合理的』，那麼在其背後應有一個看不見的手在主宰著判斷、選擇。而此判斷選擇的結果，在數學題與推理問題上是否有相關性，或者我們可以進一步的說，如果解題過程是由許多判斷、選擇所串聯起來的，那麼從人們在邏輯推理的表現是否能對其數學解題能力窺知一二？」而在此論點之影響下，也促使研究者相信初始假設具有部份真實性，但為了找尋支持或不支持的證據，研究者繼續發展兩個研究工具，希望一個是能代表受試者某方面的數學解題能力，另一個則可代表受試者的邏輯推理能力。

在 Ben-Zeev（1995）的研究中，他設計了一個新數系（NewAbacus），欲證實錯誤的產生應可歸因為學生過去的先備知識或經驗之影響；而在李芳樂（1997）的研究裡，則探討高一學生在有關對數的運算過程中，出現哪些誤則（mal-rules，錯誤的解題法則），並將誤則的發生歸因為數個主要誤則（prime mal-rules）的不同組合。因此，根據上述此兩研究，研究者設計一有關對數運算之題目，稱之為「新對數題甲」，作為代表學生的數學解題能力之工具。另外，也參照 Evans 在 1972 的研究設計（引自 Evans, 1989），設計出一個「推理問題甲」，作為代表學生的邏輯推理能力之工具。

2. 進行施測

在此階段裡，我們對所遴選出來的四位受試者，進行「新對數題甲」和「推理問題甲」的紙筆測驗，且在施測後進行立即訪談，希望對於學生解題時的想法能更有掌握。其中，「新對數題甲」於 2 月 13 日施測，「推理問題甲」則於 2 月 27 日進行。

在施測進行期間，為了得到詳盡的資訊，研究者讓每位受試者皆能有充分的時間運算，因此並沒有加以限制時間，故每一題皆經過受試者的深思熟慮。同時為了掌握資訊取得的時效性，在受試者完成「新對數題甲」及「推理問題甲」後，立即針對他們在各題的表現予以深入訪談，希望在受試者在記憶猶新的情形下，能給予研究者一些寶貴的資訊，特別是對於那些錯誤的題目，在受試者說出他們的解題歷程後，能對他們的想法及錯誤因由有更進一步的認識，而不單只是得到書面的解題訊息而已。

3. 後續檢討

透過受試者在平時課堂及邏輯前測問題中的表現，研究者提出一個研究假設，同時透過他們在「新對數題甲」與「推理問題甲」的表現結果發現，研究者的初始假設也能得到驗證。此外，在分析其研究結果的過程中，也引發研究者對一些問題感到興趣，例如：學生是如何看待數學公式？學生在解題的過程中，數學公式對他們產生了什麼樣的困擾？學生在面對給定的數學題、數學公式時，他們的思考模式為何？此思考模式是否與某類的邏輯推理問題有相關？學生又是如何透過題目公式來進行轉換？為了回答這些新問題，且能對一般學生進行對數錯誤類型的收集，研究者開始思考如何進行下一階段的後續研究。

三、 研究資源與工具

Ben-Zeev（1995）設計了一個新數系（NewAbacus），此新數系的運算不同於一般的四則運算，不但有它自己獨特的表示方式，同時在運算規則上也有所不同，Ben-Zeev 的假設是，學生在面對一個較為新奇的題目時，可能會遭逢解題困境時，此時他會採用過去的一些先備知識或經驗來進行解題，在他的研究成果中，此假設也獲得了證實；另外在李芳樂（1997）的研究裡，則探討高一學生在有關對數的運算過程中，出現哪些誤則（mal-rules，錯誤的解題法則），並將誤則的發生歸因為數個主要誤則（prime mal-rules）的不同組合。

根據上述此兩研究，研究者設計一有關對數運算之題目，此題目保持原來的對數運算法則，稱之為「新對數題甲」，謂之為「新」是因為研究者將對數的運算號「log」改為「peculiar」，之所以要做如此之修正，乃是希望使此新對數題對於受試者而言，是一個新奇的、全新的題目，如此一來，不但能收集一些有關於對數的錯誤類型，同時也能瞭解部份對數錯誤的產生，是受了哪些先備知識與經驗的影響。另外，根據受試者在假設建立之初，已做過部份推理問題，其中發現有關於演繹推理中的條件式推理（若 P 則 Q）的表現與其解題能力相比，似乎存有其關係，故研究者將焦點專注於條件式推理的題型，並參照 Evans 在 1972 的研究（引自 Evans, 1989），設計出一個有關於條件推理的題目，稱之為「推理問題甲」。透過上述兩研究工具的資料收集，研究者除了想對兩類題目的錯誤表現予以掌握外，同時也希望探討解「新對數題甲」的解題能力與解「推理問題甲」的推理能力間，是否有其關連性存在，因此，以下將針對此兩研究工具詳加說明。

（一）新對數題甲

此對數新對數題乃依 Ben-Zeev（1995）新數系的設計理念予以設計，同時研究者也參照現行高中課本的對數單元，設計一些屬於基本運算的對數題，並依照題目之不同難度，將之區分為四個等級，當中且從李芳樂（1997）的對數研究中擷取部份題型，最後形成「新對數題甲」。

Ben-Zeev（1995）認為，當學生面對一個不熟悉的計算問題時，會有系統地、慎重地運用他們的法則庫（rule-based）來進行解題，此法則庫可能是學生先前的先備知識，也可能是學生過去的一些解題經驗，因此 Ben-Zeev 乃設計了一個新數字系統：「NewAbacus」（新阿拉伯數系），在這個系統之下，有著與一般四則運算不一樣的運算規則，而透過其巧妙的研究設計，Ben-Zeev 不但對 VanLenhn（1982）的歸納假設（學生會利用過去的解題經驗，經由過度推論，最後自行歸納出一個錯誤的解題法則）加以驗證，同時也對此歸納假設予以修正擴充，提出學生的先備知識亦是影響學生產錯誤的一個重要因素，其研究成果顯示他的想法可得到證實。

因此，本研究鑑於對數運算的規則與一般學生所熟悉的四則運算規則有所不同，且在國中階段的學生並未學習過對數，所以將錯誤類型研究的焦點放在對數的領域中，但為避免還是有學生已學習過對數或看過對數，慎重起見，將對數的符號 log 換為一個學生所不熟悉的符號 ——「peculiar」。而關於對數的錯誤研究，李芳樂（1997）曾經針對高一學生進行電腦診斷，收集了許多學生的誤則（mal-rules），其研究假設是，學生所製造的每個誤則背後都有一個或數個最原始的誤則（prime mal-rule），且透過教過對數的教師與電腦的雙重診斷下，判斷是哪些或那個原始誤則的影響，使學生產生各式誤則。有鑑於他的研究對象為一群高一學生，且其所提出來的原始誤則是經由一些研究者和部份教師所提出，並沒有實際針對產生此誤則的學生做一探索性研究，故此也讓研究者想針對此對數領域做有關錯誤類型的研究，希望透過不同受試者的一些對比，能對於對數的錯誤類型有不同角度的詮釋與發現。因此，研究者參照現行高中教材，設計一些有關於對數基本運算的題型，同時也採用李芳樂研究中的部份題型，並依照不同難度的題目，將之區分為Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ等四大題型，期待透過最基本題型中所呈現出來的錯誤類型，能對學生的錯誤類型有根本的掌握同時對其成因也有更進一步的瞭解。

故「新對數題甲」中包含有 16 題，其中除了第 1、4、9、12 題是採用李芳樂的題目外，其餘各題皆是由研究者所自行發展出來的基本題型。而為了更清楚瞭解受試者所產生的錯誤，是否有題型上的差異，研究者將這 18 題區分為四個等級Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ，難度最低為第Ⅰ等級，最困難的則屬於第Ⅳ等級。各題型如下表 3–1–1 所示：

表 3–1–1　「新對數題甲」之題目層級對照表

層級	原　型	題　目	題號
Ⅰ	logA＋logB	peculiar5 + peculiar2 =	1
		peculiar8 + peculiar125 =	4
		peculiar7.5 + peculiar4/3 =	5
		peculiar3 + peculiar3 =	6
	logA–logB	peculiar60 – peculiar5 =	2
		peculiar12.5 – peculiar1/8 =	3
		peculiar3 – peculiar30 =	9
	logA±logB±logC	peculiar10 + (peculiar4 + peculiar2) =	11
		peculiar3/5 – peculiar12 + peculiar2 =	16

II	log (A × B) log (A ÷ B)	peculiar(6 × 20) = peculiar(30 ÷ 7) =	8 13
III	log (A±B)	peculiar(2 + 3) = peculiar(20 – 4) =	14 10
IV	C(logA＋logB) ClogA＋logB Clog(A＋B)	2(peculiar7 + peculiar2) = 2 peculiar3 + peculiar 2 = 3 peculiar(9 + 6) =	7 12 15

上表 3–1–1 中的第 I 、II 等級題目是屬於最基本的題型，因為其形式恰與所給的新對數基本運算公式相符合，且分別為公式等號之右邊與左邊，其難度的差別在於第 I 等級的題目，只需利用一次公式即可化簡，第 II 等級的題目則可能需利用兩次公式才能完成；第III、IV等級則比前兩個等級的題型難度為高，其困難處在於它們所代表的題目形式與給定的對數公式等號之兩邊皆不符合，一個是「log (A±B)」，另一個是屬於前面有係數的題目，當學生面對此兩類型題目時，無法直接利用公式解題，困難就此產生，此時受試者必須完全依照自己的推論來完成化簡工作，。

在施測進行時，研究者除了列出表 3–1–1 所提及的 16 題計算題外，在新對數題前面也給予受試者一個故事情境，使受試者不會覺得相當冒然，為何要用此奇特的運算規則來加以運算，同時也列出新對數題的運算規則（規則如下），並告知受試者，請利用此規定的運算規則進行化簡運算。

peculiar(A×B) = peculiarA + peculiar B　【log(A×B)=logA+logB】

peculiar(A÷B) = peculiarA – peculiarB　【log(A×B)=logA+logB】

上述的運算規則是連同題目一起給受試者，因此在施測過程中，受試者隨時可以翻閱公式，以避免受試者因為記錯規則而出現更多研究變因。

雖然新對數題的設計理念來自於 Ben-Zeev 的「新數系」，但兩研究間還是有所不同，因為 Ben-Zeev 新數系運算規則有經過教學，本研究則是採取書面敘述的方式，將運算規則列於試卷上，學生隨時可以回去翻閱運算規則。有趣的是，學生即使是有公式讓他可以對照著看，面對一些與公式相同的基本題型時，

還是有些人會採用其他解題步驟來進行解題，這樣的結果也引發研究者思考一些問題：例如，學生是如何使用公式？學生在使用公式上，存在著什麼樣的困難？這個困難是怎麼樣形成的？教師應如何來教導公式？

（二）推理問題甲

有鑑於研究者發現研究一的四位受試者在部份推理問題的表現，與其解題能力相比，似乎存有一關係，研究者乃將焦點專注於條件式推理的題型；另外，透過他們在「新對數題甲」中的表現，研究者除了分析其錯誤類型外，也對他們面對新對數題時的反應，做了四個初步的推理模型，模型如下：

(1)看到與給定公式相同形式的題目時，做出正確推論，其思考模式為 P →Q
(2)看到與給定公式相同形式的題目時，做出錯誤推論，其思考模式為 P →~Q
(3)看到與給定公式不同形式的題目時，做出正確推論，其思考模式為 ~P → Q
(4)看到與給定公式不同形式的題目時，做出錯誤推論，其思考模式為 ~P→ ~Q

因此，根據上述的四個模型，研究者參照 Evans（1972）的研究（引自 Evans, 1989），設計出一個有關於條件式推理的題目，稱之為「推理問題甲」。其中，包含有四大類型的題目，即 P → Q、P → ~Q、~P → Q 和 ~P → ~Q 等四種，每種型式包括兩題，題目如下表：

表 3–1–2　「推理問題甲」之問題形式對照表

型式	題號	問題
P → Q	3	如果左邊是藍色的三角形，那麼右邊會是紅色的星形。
	8	如果左邊是藍色的三角形，那麼右邊會是紅色的圓形。
~P → ~Q	5	如果左邊不是黑色的圓形，那麼右邊不會是綠色的梯形。
	7	如果左邊不是紅色的星形，那麼右邊不會是藍色的正方形。
P → ~Q	1	如果左邊是藍色的正方形，那麼右邊不會是綠色的梯形。
	4	如果左邊是綠色的正方形，那麼右邊不會是藍色的圓形。
~P → Q	2	如果左邊不是紅色的正方形，那麼右邊會是黑色的圓形。
	6	如果左邊不是藍色的正方形，那麼右邊會是綠色的三角形。

研究進行時，研究者給予每位受試者四種不同顏色的筆，每一題皆要求受

試者畫出左右兩邊的圖形，並要求受試者所畫出的圖形能必須反證每一小題的論證。研究者的假設是，若上述所推論出來的四個模型是正確的話，那麼受試者在「新對數題甲」及「推理問題甲」中所犯的錯誤應有一致性，意即受試者在「新對數題甲」中所產生的錯誤類型與受試者在「推理問題甲」的錯誤類型表現，應有其相同之處。

四、資料處理

研究一可分成兩階段，第一階段為假設形成階段，在此階段中對於受試者的推理表現以其得分高低來比較其各自的推理能力，評分方式有兩種，一是針對答案的對錯予以兩個等級分數（答對 1 分，答錯 0 分），一是依據 Adi 等人（1980）的評分標準予以給分，兩評分方式都顯示出相同的結果。第二階段為驗證假設階段，收集到的資料包括「新對數題甲」、「推理問題甲」兩份測驗卷的回答，以及兩次晤談結果，其中，兩份測驗卷以研究者與專家共同擬定的給分方式為評分標準，並以得分之高低比較其對數解題能力與邏輯推理能力，同時針對其錯誤，歸納整理初期錯誤類型，而晤談資料則在將之全部謄錄後，分析探討其對數錯誤成因。

第二節　研究二

一、　研究對象

根據研究一的結果，研究者對於數學解題能力與邏輯推理能力間相關性已有初步驗證，但對於學生在對數題的表現還想有更進一步的研究，特別是在研究一中，所挑選出來的受試者並無法代表一般的普通學生，所以在此階段中乃針對普通學生予以施測，希望瞭解一般的學生在解有關對數的題目時，是否也會產生同樣的錯誤類型，另外由於研究一的結果顯示，學生在運用公式解題時，會有不一樣的表現，因此在研究二中，研究者想找尋一些學過對數的學生和一些未學過對數的學生，希望透過對不同背景學生的研究，能有更多層面的對比，同時也能與研究一中四位受試者的表現相互引證。

基於上述理念，研究者選擇一位代表未學過對數的國二生與一位學過對數的高一生作為此階段的受試者，而選擇此兩位的原因除了因為他們各自代表不同的背景外，為了能有後續的深入訪談，研究者也以是否樂意合作為考慮因素，請兩位與研究者本身熟識之學生為研究二的對象。其中，國二生在學校中的表現屬於中上程度，而由於他尚未學過對數，因此可從他的表現中，收集許多錯誤類型，並將之與研究一的四位受試者相對比，藉以瞭解不同層度學生產生的錯誤類型是否相同，同時也能探討影響學生產生對數錯誤的先備知識有哪些。高一生在學校的表現則屬於中等程度，且在施測階段已學完對數，透過對他的深入訪談不但能瞭解其錯誤的成因，同時也提出對於對數教學的一些建議。

二、 研究步驟與流程

（一）研究工具的發展

在分析探討研究一的受試者在「新對數題甲」中的表現時，研究者發現受試者對於所給予的對數公式詮釋皆有不同，例如：有受試者從給定公式中，自行推論出「加變乘，減變除」的規則；另外在使用公式時，也有受試者產生一些困難，例如：有受試者對於利用兩次公式來進行解題的作法感到疑惑，而不予以採用，因此只能從公式的一邊推到另一邊，但卻無法逆推回去解題。因此，針對上述受試者的反應，研究者開始思考一些問題：學生是如何看待公式？他們是如何運用公式進行解題？當題目形式無法直接使用公式進行解題時，學生如何進行下一步驟？是想盡辦法將題目作一轉換？還是有其他反應？新對數的符號在受試者眼中看來，具有什麼樣的意義？另外，由於在研究一中只針對四位資優生收集其對數錯誤類型，因此，為了瞭解一般學生在對數題中的錯誤類型，引發研究者籌畫研究二的進行。

故為了回答上述經由研究一結果刺激下所反應出來的問題，同時也為了收集一般學生在新對數題的錯誤類型，研究者希望尋找一些能代表一般普通學生的受試者，對其在新對數題的表現收集資料，同時透過訪談或問卷的形式，能對其想法與思路有較為深刻的認識。因此，在此階段的工具包括有「新對數題

乙」及「問卷甲」，其中，「新對數題乙」乃是以研究一的「新對數題甲」為基礎，針對部份題型加以修改，同時也增加了某一層級的題型，希望透過多樣化的題目，能收集到更多的錯誤類型，以作為研究三工具的改進基礎；「問卷甲」則是針對受試者平時的數學解題習慣、遇到困難的反應、新對數題的部份解題步驟及數學測驗之錯誤原因等做一概括性的瞭解，當中除了有選擇題外，同時也包含一些開放式的問題。

（二）進行施測

針對研究一所延伸出來的主題，研究者乃籌畫研究二的進行，在發展上述兩個研究工具的同時，也多方尋找合適的受試者，但在考量此研究必須能有深入訪談的原則下，研究者選了兩位與研究者熟識者，且相當樂意盡力配合的學生為本階段的受試者，其中一位為國二學生，另一位為高一學生，兩位受試者恰代表著不同知識背景的學生，前者尚未學過對數，後者則剛剛學完對數，且在學校中剛舉行完包含對數單元的段考考試。

施測時間分為兩次，紙筆施測安排在 3 月 21 日，其研究工具包括已研發出來的「新對數題乙」及「問卷甲」，另外並於 4 月 8 日進行半結構式的訪談，因此研究者有設計出一系列的問題架構，除避免有所遺漏外，也希望能得到更豐富的資訊。研究結果顯示，受試者在「新對數題乙」中的表現，其錯誤類型確比研究一中四位資優生的錯誤類型來的多，此結果是否意味著不同能力學生在新對數題中會有不同表現？此問題有待於研究三中繼續回答。另外在深入的訪談中，受試者的回答也讓此階段的研究有豐富的成果，此成果之豐富對於一些有關於對數的教學與學習，有其建設性的建議。

（三）後續檢討

根據研究二受試者在「新對數題乙」中的表現，使得研究者對於不同能力學生在面對同樣不熟悉的新對數題時，其表現是否有差異的問題感到相當有興趣，另外由於此兩位受試者代表著一般的普通學生，故所收集到的錯誤類型不但能與研究一的資優生做對比，同時也能作為研究三之錯誤類型研究的一個基

礎，更重要的是，由於此階段中包含有訪談，因此，對於一些現象能有質方面的解釋。

總括來說，研究二的結果的確回答了研究者在最初所欲探討的問題，故接下來的工作就是針對研究一、二的研究成果與一些待答問題來進行研究三。而有鑑於「新對數題乙」在錯誤類型的收集上確有其成效，因此研究者並不打算對此工具做太大幅度的修改。另外，「問卷甲」也使研究者對受試者的解題習慣與解題困難有一初略瞭解，故研究三也會採用部份「問卷甲」的題目。

三、　研究資源與工具

有鑑於研究者於研究一中，對於數學解題能力與邏輯推理能力間相關性已有初步驗證，但對於學生在對數題的錯誤類型表現並沒有收集到廣泛的資料，主要是因為研究一所遴選出來的四位受試者並無法代表一般的普通學生，因此在此階段中乃針對普通學生予以施測，希望瞭解一般的學生在解有關對數的題目時，是否也會產生同樣的錯誤類型。另外，研究一的結果亦顯示，學生在運用公式解題時，會有不一樣的表現，因此在研究二中，研究者想找尋一些學過對數的學生和一些未學過對數的學生，希望透過對不同背景學生的研究，能有更多層面的對比，同時也能與研究一中四位受試者的表現相互引證。

因此，本階段的研究，將焦點放在新對數題，故研究工具有二，一為「新對數題乙」，一為「問卷甲」，說明如下：

1. 新對數題乙

根據第一階段的研究結果，我們已能掌握住受試者的部份基本錯誤類型，因此本階段中的新對數題乃以研究一中的「新對數題甲」為基礎，進行題型的增減，包括增加不同層級的題型及減少一些重複性的題目，最後形成「新對數

題乙」。因此「新對數題乙」與研究一中的對數題目基本上沒有太大差異，在新對數題前面也給予受試者一故事情境，同時也列出新對數題的運算規則（規則如下），並告知受試者，請利用此規定的運算規則進行化簡運算，其差別只在於題目從原本的 16 題增為 22 題，同時，也增加了一個等級，其題目層級對照表如下：

表 3–2–1　「新對數題乙」題目層級對照表

層級	原　型	題　目	題號
I	logA＋logB	peculiar5 + peculiar2 =	1
		peculiar7.5 + peculiar4/3 =	4
	logA–logB	peculiar60 – peculiar6=	5[a]
		peculiar4.5 – peculiar3/2 =	2[a]
	logA±logB±logC	peculiar10 + peculiar4 + peculiar2 =	3
		peculiar3/5 – peculiar12 + peculiar2 =	9
II	log (A × B)	peculiar(6 × 20) =	8
		peculiar(2^3 ×3) =	16[a]
	log (A ÷ B)	peculiar(30 ÷ 7) =	10
		peculiar(8/2) =	7[a]
III	log (A±B)	peculiar(2 + 3) =	6
		peculiar(20 – 4) =	11
		peculiar(10× 10/10+10) =	13[a]
IV	C(logA＋logB)	2(peculiar7 + peculiar2) =	15
	ClogA＋logB	2 peculiar3 + peculiar 2 =	12
	Clog(A＋B)	3 peculiar(9 + 6) =	19
V	logA/logB	peculiar2/(3 peculiar2+ peculiar4)	14
		peculiar(4×2)/ peculiar2	17
		peculiar27/ peculiar3	18
		peculiar(100/10)× (peculiar100/ peculiar10)	20
		peculiar16/ peculiar64	21
		peculiar(4+2)/ peculiar2	22

註：題號一欄中，數字的右上方出現「a」之題目，表示其在「推理問題甲」中並未出現

2. 問卷甲

有鑑於在大量施測中無法對受試者作一一的訪談，故希望透過本問卷的設計，能較為清楚掌握受試者他們的解題步驟、想法，並對於受試者的一些解題習慣加以瞭解，藉以尋找學生的錯誤成因，乃研擬「問卷甲」的形成。

因此，本問卷的設計旨在瞭解學生過去的一些數學解題習慣，並瞭解學生過去犯錯誤的原因，另外，為避免受試者並沒有在「新對數題乙」中寫下詳細的計算過程，也設計了一些類似於新對數題的題目，讓受試者勾選其認為合適的選項，藉以推論受試者的解題過程，此舉在研究二實屬多餘，因為可以透過訪談得知受試者的想法，但這是為了在研究三中，無法做一一訪談的情形下，希望能有一個有效的工具，來蒐集受試者其它一些相關資料之變通方法。

四、資料處理

研究二所收集到的資料包括兩位受試者在「新對數題乙」測驗卷的回答、「問卷甲」的回答以及一次晤談資料，其中，「新對數題乙」測驗卷主要是歸納出此兩位一般中徐生的錯誤類型，而晤談資料及「問卷甲」的回答則輔以瞭解錯誤類型的形成原因。

第三節　研究三

一、　研究對象

根據研究一的研究結果顯示，邏輯推理能力與數學解題能力間應有所關連；同時研究二的結果也使研究者對於一般學生的對數錯誤類型能有初步的掌握，因此，研究者欲以此兩研究的研究結果為基礎，希望透過大範圍的施測能對於研究一、二的成果能有量的支持。此外，由於已有其他研究針對學過對數的高一生探討對數的錯誤類型，因此本研究乃欲尋找一批未學過對數的學生為受試者，一方面可以與高一生的對數錯誤類型作一對比，另一方面透過對這些未學過對數的學生施測，將可以瞭解是哪些先備知識影響著學生在產生對數錯誤。

因此研究者選擇了一批國中生作為本研究階段的受試者，而為了探討邏輯推理能力與數學解題能力是否會因年齡或不同層級之學生而有所影響，因此選擇一所位於台北市且願意配合的國中，從中挑選六個班級，其中每個年級（國一、國二、及國三）各有兩班，且在同年級的兩班中，一班的數學平均成績為全年級中最高，另一班則是為最低的。

二、 研究步驟與流程

（一）研究工具的發展

研究三的形成主要是想針對在研究一中已證實過的初始假設予以量方面的支持，因此在此階段中有一個代表數學解題能力的工具 —「新對數題丙」及一代表邏輯推理能力的工具 —「推理問題乙」，另外，為了對於學生在應用公式的困難有進一步的瞭解，同時在考量研究三的進行較難尋求個別訪談時間的因素下，也著手籌畫「問卷乙」工具的形成。

其中，「新對數題丙」乃以「新對數題乙」的題目為基礎，進行增加或刪減的工作，而由於研究二的受試者在解抽象對數題時，所需時間頗長，因此在時間因素的考量下，乃將題數予以刪減。「推理問題乙」的形成乃是在多方參考文獻後，所自行設計出的，共有九大題合 38 小題，且依各大題之題目性質的不同，將之分成三大部份，其中第一部份乃是以 Wason’s four card 問題之精神為主，但將之從是否翻卡片的具體回答行為，改變為推理卡片背後的數字可能為多少；至於第二、三部份，則是參照新對數題工具中所給的抽象對數公式設計而成的。「問卷乙」的設計重點主要有：詢問學生平時在解題方面的困難，特別是在面對抽象對數公式時，學生的感覺是什麼？他們如何依照此抽象公式進行推論？較特別的是，在當中也請學生尋找錯誤的算式，試圖從另一層面來看受試者的推理歷程，另外，也列出某位學生的運算式，請受試者嘗試解釋該生的想法，此設計也是希望能從中得到更多有關受試者的思考歷程。

（二）進行施測

在研究三進行發展工具的同時，即多方尋找研究對象，根據研究一、二的研究結果，乃將受試者的背景訂為未學過對數的國中生，另為了方便施測之故，以位於台北市的國中為第一優先考慮，幸運地，找到一個十分樂意配合的國中，且主動提供研究者所需的背景資料（該群學生的月考分數），因此，本研究乃以該國中的六班學生（國一、國二及國三生各兩班）為受試者，以「新對數題丙」、「推理問題乙」及「問卷乙」為工具，來進行施測，基於時間的考量，將此三工具分成兩次舉行，每次時間皆為一堂課（45 分鐘），第一次施測以瞭解國中生在抽象對數題中的表現為主，故採用「新對數題丙」與「問卷乙」兩工具進行施測；第二次施測以瞭解國中生在邏輯推理問題中的表現為主，故採用「推理問題乙」工具進行施測，兩次施測之流程如下所述。

1. 第一次施測

在該國中的建議下，施測日期選定在剛考完第一次段考的第一個星期六（4 月 3 日），且於自習課中進行，其主要原因是學生在段考後，心情不會過於緊張，且由於尚未知曉段考成績，故較能以一種輕鬆的態度來參與施測。另由於各班的自習課時間不盡相同，分散於上午的一、二、三、四節，因此研究者較有充裕的時間能夠親自到各受試班級巡視，但由於有部份班級的自習課安排於同一節，故研究者乃在進行施測前，即訓練四位皆具教學經驗的監考者，此四位監考者中有三位是研究生，其中兩位研究生曾分別擔任中小學的數學教師，另一位研究生則具有多年家教經驗並現任某家教班的數學教師，至於另一位監考者則是一位與研究者熟識，且具有四年教小學生經驗的社會工作者。在此四位監考者的幫助下，第一節的一個班級由研究者親自監考；第二節的兩個班級請其中兩位經訓練的監考者主持，而由研究者親自巡視；第三節的兩個班級請另兩位經訓練的監考者主持，同樣的也由研究者親自巡視；第四節的一個班級則由研究者親自監考。

整體來說，施測進行的過程尚屬流暢，四位幫忙的監考者都能掌握施測的進行流程，除了其中一位三年級的受試者由於身體不適，因而中斷該生之施測

外，其餘參與施測的受試者也大多願意盡其所能地填寫，但在分析資料時，並不將該生之資料列入結果分析中。另外，在施測進行時，有部份學生對於題目並不十分瞭解，會向監考者詢問一些問題，此舉已在預料之中，故各監考者的回答方式皆為一致，不正面回答該生的問題，而是請該生依照自己的判斷來詮釋題目，此乃為避免各受試者在不對等的先決條件下，其表現會受影響。

2. 第二次施測

第二次施測以「推理問題乙」工具為主，原訂於 4 月 17 日星期六進行，但其中有一班三年級已預定好在當天進行該班之團體活動，故此班改為 5 月 15 日進行。施測時間同樣皆為一堂 45 分鐘的自習課，但由於這五個受試班級的自習課多有重疊，因此邀請在第一階段中的其中兩位監考者予以協助，其中由研究者親自監考兩班，另三班則請這兩位樂意幫忙的研究生負責，由於此兩位監考者已在上一次施測前訓練過，因此，研究者在此次的施測過程中，在時間重疊的情形下，只對其中兩班有參與巡視的工作，並於施測結束後詢問研究者未能巡視班級的監考者，詢問結果並沒有出現重大問題，故整個施測過程算是順利。

至於尚未施測的一班學生，則由研究生親自監考，由於上次也是由研究者擔任此班的監考工作，故與部份學生已熟識，施測過程也相當順利。在施測結束後，該班學生也十分好奇此「古怪」的運算規則是否真的存在？真的有一個叫「迦南村」的村落使用此運算規則，由於已經施測完畢，研究者即向他們解釋其實此「古怪」的運算規則是屬於高中的某個教學單元之一，而研究者由於想瞭解對於尚未學習對數的國中生，對於此抽象的對數公式有何反應？並想瞭解是哪些先備知識會造成高中生犯對數錯誤，故此他們的寶貴資料是相當重要的，而為了避免造成該班學生對於數學的抽象性有所恐懼，並於結束後，對他們說一個有關某數學概念的笑話，學生們對此笑話皆覺得有趣，且反應在接受完這兩次施測後並不會對於數學產生恐懼。至此，整個施測到此告一段落。

（三）後續分析

在收集完資料後，即從「推理問題乙」中，受試者的表現進行編碼，在與

專家討論完應如何將此龐大資料進行分析後，隨即將之鍵入電腦。另外的「新對數題丙」的處理程序則較為複雜，由於研究三的受試者是在未學過對數的前提之下，接受施測，故其在此工具中產生許多錯誤類型是可以預見的，因此在進行錯誤類型編碼之初，其進度相當緩慢，因為，該群受試者除了產生在研究一、二曾出現過的錯誤類型外，也增添了許多錯誤類型，但主要還是以其中的三種類型錯誤所犯之次數最多，另由於受試者的總人數高達 191 名，因此也是使研究者倍感吃力的地方，故在對「新對數題丙」的錯誤進行編碼、批改試卷、鍵入電腦即花了將近一個月的時間，接著才依各種變因，進行其相關性分析，這也是為何在資料呈現時，並沒有將「問卷乙」的施測結果予以呈現的主要原因。

三、 研究資源與工具

本階段的研究工具共有三個，皆是從研究一與研究二所用的工具中加以改良而成的。包括有「新對數題丙」、「推理問題乙」及「問卷乙」等三個研究工具，故以下將就此三個工具之形成予以論述。

（一）新對數題丙

「新對數題丙」的形成乃是以研究二的「新對數題乙」工具加以改良。在題型上，並沒有多所變更，但在施測時間有所限制的考量上，乃將「新對數題乙」中的 22 題刪減為 20 題，所刪減的題型是屬於第Ⅴ層級中的兩題，因為前四個層級的題目，其困難度及複雜程度不及第Ⅴ層級，在為了能得到最原始、完整的資訊，且為了避免受試者產生恐懼的情況下，選擇此層級的題目予以刪減，其最後所底定的 20 題題目如表 3-3-1 所示：

表 3–3–1 「新對數題丙」題目層級對照表

層級	原　　型	題　　　　目	題號
Ⅰ	logA＋logB	peculiar5 + peculiar2 = peculiar7.5 + peculiar4/3 =	1 11
	logA–logB	peculiar60 – peculiar6= peculiar4.5 – peculiar3/2 =	2 12
	logA±logB±logC	peculiar10 + peculiar4 + peculiar2 =	7

層級	原　　　型	題　　　　　　　目	題號
		peculiar3/5 – peculiar12 + peculiar2 =	20
Ⅱ	log (A × B) log (A ÷ B)	peculiar(6 × 20) = peculiar(2^3 ×3) = peculiar(30 ÷ 7) = peculiar(8/2) =	3 15 14 8
Ⅲ	log (A±B)	peculiar(2 + 3) = peculiar(20 – 4) = peculiar(10× 10/10+10) =	13 5 16
Ⅳ	C(logA＋logB) ClogA＋logB Clog(A＋B)	2(peculiar7 + peculiar2) = 2 peculiar3 + peculiar 2 = 3 peculiar(9 + 6) =	4 9 18
Ⅴ	logA/logB	peculiar2/(3 peculiar2+ peculiar4) peculiar(4×2)/ peculiar2 peculiar27/ peculiar3 peculiar(100/10)× (peculiar100/ peculiar10)	10 19 6 17

（二）推理問題乙

「推理問題乙」是在多方參考文獻後，所自行設計出的，共有九大題合 38 小題，且依各大題題目性質的不同，將之分成三大部份，第一部份包括第一大題到第四大題合 16 小題，第二部份從第五大題到第八大題，合 16 小題，第三部份則為第九大題有 6 小題。其中的第一部份乃是以 Wason's four card 問題之精神為主，但將之從是否翻卡片的具體回答行為，改變為推理卡片背後的數字可能為多少；至於第二、三部份，一方面考慮條件式推理的形式，另一方面則是參照新對數題工具中，所給定的抽象對數公式設計而成的，此兩部份的設計其靈感來自於研究二兩位受試者的訪談記錄，從他們敘述如何從給定的抽象對數公式中，將其轉換為一個可以與之對應的條件推理問題。以下將針對此三不分的題目發展予以詳述之。

1. 第一部份

第一部份的基本題型概念為「給與受試者一個條件句（第一前提），再給一

個起始條件（第二前提），最後請受試者斷結果」。例如：

1. 如果卡片的正面是 4，那麼反面一定是 9。　（第一前提）
   <u>已知正面是 4　　　　　　　　　　　　</u>　　（第二前提）
   那麼反面一定是________　　　　　　　　（受試者推論結果）

其中，第一前提共有四個形式，包括 P → Q、P → ~Q、~P　Q 和 ~P → ~Q，其中在「→」左邊的是為前件，在其右邊的為後件，而英文字前具有「~」之符號者，代表此敘述為一否定語氣；而第二前提也有四種形式，分別為肯定前件（MP）、肯定後件（AC）、否定前件（DA）與否定後件（MT）等四種，因此在兩大前提的組合之下，共有四大題，4×4 個小題（16 種組合）。

除了上述對於受試者的新對數題推理過程做出推論模型外，此新對數題的設計也參考 Wason 的 four card problem 加以改編而成。我們的假設是，當受試者看到公式時，他心中可能出現一個條件行動法則（如果 ..，那麼 ..。），接著，當他繼續看到題目時，題目的表面形式可能和公式相同（P）、也可能不同（~P）；或者題目的形式是條件敘述的後件，可能與之相同（Q）、也可能不同（~Q），例如：受試者看到一個題目，其表面形式與公式相同，則其推論模式可能如下：

∵　**P→Q**　（第一前題）
<u>　**P**　</u>　（第二前題）
∴　**Q**　（受試者推論結果）

此推論模式如果與受試者在新對數題及推理問題中的表現對應，其情形如下：

∵　**peculiarA＋peculiarB →peculiar(A×B)**　（第一前題）
<u>　**peculiar2＋peculiar3**　</u>　（第二前題）
∴　**peculiar(2×3)**　（受試者推論結果）

上述情形描述了在眾多推理過程中的一個情形，即受試者看到與條件相符，最後並採用規則進行解題，而在上述概念的限制下，在「推理題目乙」中，只有那些屬於 MP、DA 的題目似乎才與解有關抽象對數公式的情形有關。因此基於上述理念，「推理問題乙」的第一部份就此形成。

2. 第二部份

第二部份的題型概念是「給予四個條件句（第一前提），再給一個起始條件（第二前提），最後請受試者推論結果」。

例如：

∵

條件	
如果 A 是紅色，那麼 B 一定是黃色。 如果 C 是黃色，那麼 A 一定是紅色 如果 D 是藍色，那麼 E 一定是白色。 如果 F 是白色，那麼 D 一定是藍色。	（第一前提）

已經知道 A 卡是紅色　　　　　　（第二前提）

∴ 那麼 B 卡是 _____色　　　　　（推論結果）

此部份題目設計的理念是基於在研究一、二、三的新對數題受試結果一再顯示，受試者在面對不熟悉的計算題公式時，很容易依照表面特徵予以推論，因此，研究者希望從受試者在推理問題中的表現，能回答他們在「新對數題丙」所犯錯誤的成因，並藉以推論邏輯推理能力與數學解題能力間的相關性。

3. 第三部份

另外，研究者一直思考受試者究竟是如何進行轉化？特別在碰到與公式不符合的題目時，他們是如何運用現有的條件來進行問題解決。因此，在第二部份的題目中，也包括一些必須靈活運用四個命題的題目，如：

∵
如果 A 是黃色，那麼 B 一定是紅色。
如果 C 是白色，那麼 D 一定是藍色。
如果 D 是藍色，那麼 A 一定是黃色。
如果 B 是紅色，那麼 C 一定是白色。
（第一前提）

已經知道 C 是白色　（第二前題）

∴　那麼 A 卡是 _____色　（推論結果）

上述題型設計之背後假設是，受試者如果能利用現有公式推論出正確解答，那麼他在此類的推理問題也能表現良好，因此基於上述理念與想法，我們形成了「推理問題乙」中的第三部份問題，合 6 小題。

（三）問卷乙

「問卷乙」乃是以「問卷甲」為基礎，加以改編而成的，除了保持原有的題型外，只對一些選項加以修改，也增加一些題目，其中比較特別的是，根據在研究二兩位受試者的訪談結果，設計出了兩個較為不一樣的題型，其一是列出三個人在某題的算法，請受試者選出他認為正確的算式，並說明為什麼，其二是列出某人的算式，請受試者嘗試說出此解題者的想法。總括來說，其主要設計理念是為了更進一步地了解受試者的解題習慣、運用公式的困難及如何在抽象對數公式中進行推論，故形成「問卷乙」。

四、資料處理

研究三所收集到的資料包括 191 位學生在「新對數題丙」和「推理問題乙」

兩測驗卷的答案、「問卷乙」的資料、各受試者第二次月考的數學成績及其性別。其中，兩測驗卷的答案先經編碼處理，而後鍵入電腦，同時併入其性別及數學成績之資料，最後以 SAS 予以處理分析，分別針對年齡、數學成績、邏輯推理能力等因素，包括得分、錯誤類型、平均以及標準差，同時亦進行回歸分析，用以尋找影響對數解題能力之因素，由於分析已有部份結果顯示，且此分析時間共歷經兩個月之久，故並沒有呈現「問卷乙」之成果，日後若有機會，將陸續呈現其結果。

第肆章　研究結果

本研究包含有三個子研究，根據施行時間之先後順序依次為研究一、研究二與研究三，這一連串的探索過程源自於研究一裡對四位國一數學資優生的觀察，而逐漸形成一初始假設，接著透過研究者所發展的兩類研究工具，針對不同受試者在邏輯推理能力、對數解題能力的表現並兩能力之間的關係做後續之探討研究，因此每個子研究可說是相互獨立但卻又有所關連，因為它們有其各自的待答問題與受試者，且上一個研究成果是下一個研究設計的改進基礎，因此，以下將以研究進行的時間進程為主軸，個別討論其研究結果，其節次如下：

第一節　假設形成
第二節　國一數學資優生的對數解題能力及其錯誤成因
第三節　國一數學資優生的邏輯推理能力
第四節　國一數學資優生的對數解題能力與邏輯推理能力間之相關性
第五節　一般中學生的對數錯誤類型