遞迴點線面

許介彥

大葉大學　通訊與計算機工程學系

前言

平面上的 n 條直線最多可將平面劃分成幾個區域？空間中的 n 個球面最多可將空間切割成多少塊？這類計數問題常可透過遞迴關係來解決。本刊第 243 期「遞迴關係在計數問題的應用」一文中，筆者曾經舉了兩個這方面的例子；本文中，讀者將看到更多遞迴關係在此類問題的應用。

例題

問題一：

對任意大於 2 的正整數 n，一個凸 n 邊形總共有幾條對角線？

解：

一個凸 n 邊形有 n 個頂點及 n 條邊。假設 a_n 代表一個凸 n 邊形的對角線個數；由於三角形沒有對角線，因此 $a_3 = 0$；由於四邊形有兩條對角線，$a_4 = 2$。我們希望能求得數列 $a_3, a_4, a_5, \ldots$ 的一般式。

假設我們已知一個凸 $(n-1)$ 邊形的對角線有 a_{n-1} 條；如果再增加一個新的頂點而使得多邊形成為凸 n 邊形，對角線會增加幾條呢？新加入的頂點與原來的 $(n-1)$ 個頂點中某兩個頂點的連線構成了 n 邊形的兩條邊；這兩個舊頂點的連線原來是 $(n-1)$ 邊形的一條邊，在新的頂點加入後，這條線卻成了 n 邊形的一條對角線。除了這兩個舊頂點不算，新加入的頂點與其他的 $(n-3)$ 個舊頂點的每個點的連線都會是新多邊形的一條對角線，因此新加入的第 n 個頂點使得對角線增加了 $1+(n-3)=(n-2)$ 條，也就是說，$a_n = a_{n-1}+(n-2)$；再配合數列的初始條件，我們有了完整的遞迴定義：

$$a_n = \begin{cases} 0 & n=3 \\ a_{n-1}+(n-2) & n>3 \end{cases}$$

由此不難解得數列的一般式為

$$a_n = \frac{n(n-3)}{2}, \quad \forall n \ge 3.$$

因此，任意一個凸 n 邊形的對角線總共有 $n(n-3)/2$ 條。

讀者也許已經察覺，就這個問題而言，遞迴的作法未必是最好的作法。一個更「漂亮」的作法是注意到由 n 個頂點可決定 $C(n,2)$ 條線段，這 $C(n,2)$ 條線段當中只有 n 條不是 n 邊形的對角線，它們是做為圍成 n 邊形的 n 條邊，因此一個凸 n 邊形的對角線總共有 $(C(n,2)-n)$ 條，而

$$C(n,2)-n = \frac{n(n-1)}{2} - n = \frac{n(n-3)}{2}$$

與遞迴作法的答案相同。

問題二：

對任意大於 3 的正整數 n，一個凸 n 邊形的所有對角線在多邊形內部總共有幾個交點？（假設對角線之間在多邊形內部沒有三

線共點的情形。)

解：

假設 a_n 代表一個凸 n 邊形的所有對角線之間的交點數；由於四邊形的兩條對角線之間有一個交點，很顯然 $a_4 = 1$。

考慮任意一個凸 $(n-1)$ 邊形。假設我們將其頂點依順時鐘方向編為 V_1，V_2，...，V_{n-1}，而且已知它的所有對角線之間有 a_{n-1} 個交點。如果我們在 V_1 與 V_{n-1} 之間插入一個新的頂點 V_n，對角線的交點會增加幾個呢？很明顯，新的交點必定全都位於與 V_n 相連的「新」對角線上；與 V_n 相連的新對角線總共有 $(n-3)$ 條，分別是 V_n 與 V_2，V_3，...，V_{n-2} 等 $(n-3)$ 個點的連線，我們希望能夠知道在這 $(n-3)$ 條對角線上總共增加了多少個交點。

假設 V_n 與 V_k 的連線（即線段 $\overline{V_nV_k}$）是任意一條新的對角線，其中 $2 \le k \le (n-2)$；這條對角線將凸 n 邊形一分為二，也將其他 $(n-2)$ 個頂點分成了兩群，其中一群含有 V_1，V_2，...，V_{k-1} 等 $(k-1)$ 個頂點，另一群則含有 V_{k+1}，V_{k+2}，...，V_{n-1} 等 $(n-k-1)$ 個頂點。由於所有與 $\overline{V_nV_k}$ 有交點的對角線的兩個端點必定分別屬於被 $\overline{V_nV_k}$ 隔開的兩群，因此線段 $\overline{V_nV_k}$ 上總共有 $(k-1)(n-k-1)$ 個與其他對角線的交點；這些交點都是「新」的，都是由於加入新的頂點 V_n 而產生的。以上的論述對所有的 k 都適用，因此，新加入的頂點 V_n 總共可讓對角線的交點增加

$$\sum_{k=2}^{n-2}(k-1)(n-k-1)$$

個，而

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{n-2}(k-1)(n-1-k) &= \sum_{k=1}^{n-3}k(n-2-k) \\
&= (n-2)\sum_{k=1}^{n-3}k - \sum_{k=1}^{n-3}k^2 \\
&= \frac{(n-2)^2(n-3)}{2} - \frac{(n-3)(n-2)(2n-5)}{6} \\
&= \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6}
\end{aligned}$$

再配合數列的初始條件，我們有了完整的遞迴定義：

$$a_n = \begin{cases} 1 & n=4 \\ a_{n-1} + \dfrac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6} & n>4 \end{cases}$$

由這個遞迴定義我們已經可以求出任意一個凸 n 邊形的所有對角線間的交點個數。另外，由於

$$\begin{aligned}
\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6} &= \frac{4(n-1)(n-2)(n-3)}{24} \\
&= \frac{(n-(n-4))(n-1)(n-2)(n-3)}{24} \\
&= \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24} \\
&\quad - \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{24} \\
&= C(n,4) - C(n-1,4)
\end{aligned}$$

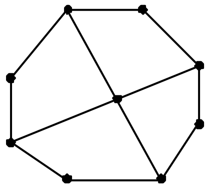
我們又可以將數列的遞迴定義改寫為

$$a_n = \begin{cases} 1 & n=4 \\ a_{n-1} + C(n,4) - C(n-1,4) & n>4 \end{cases}$$

由這個定義很容易可以推導出數列的一般式為（$\forall n \ge 4$）：

$$a_n = C(n,4) = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}.$$

既然一般式這麼簡單，一定有一個簡單的解釋；仔細一想，我們就了解為什麼 a_n 會等於 $C(n,4)$ 了，因為一個凸多邊形的任意四個頂點恰好決定了一組（兩條）相交的對角線，因此也恰好決定了對角線之間的一個交點（見下圖）。



當我們求出與 V_n 相連的對角線上有 $(n-1)(n-2)(n-3)/6$ 個交點後，如果不用遞迴的觀點，其實也可以求得 a_n 的一般式，因為根據相同的推導過程，其實不只是 V_n，與其他任何一個頂點相連的 $(n-3)$ 條對角線上也都有 $(n-1)(n-2)(n-3)/6$ 個交點；不過全部對角線的交點個數並不是 n 乘以 $(n-1)(n-2)(n-3)/6$，這樣算的話每個交點都被算了四次，因此再除以 4 就對了：

$$\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6}\times\frac{n}{4}=C(n,4)\,.$$

附帶提供讀者一個思考問題：一般凸 n 邊形的對角線可能有三線共點的情形，請問：一個凸 n 邊形的所有對角線在多邊形內部最少有多少個交點？

本刊第 243 期「遞迴關係在計數問題的應用」一文中的第三個及第四個例題是有關切割平面的問題，由遞迴的作法不難得知 n 條直線最多可將平面切成 $1+n(n+1)/2$ 個區域，而如果任意兩個橢圓之間都正好有兩個交點，那麼 n 個橢圓可將平面切成 n^2-n+2 個區域。以下是另外三個相關的問題。

問題三：

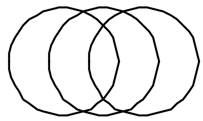
對任意正整數 n，平面上的 n 個圓最多可將平面切成幾個區域？

解：

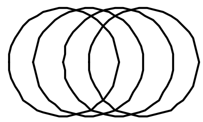
為了要讓切成的區域數儘量多，這 n 個圓當中不應該有任何兩個圓互相重合，也不應該有任何三個圓交於同一點，而且這 n 個圓之間的交點數應該儘量多。

既然任意兩個不重合的圓之間的交點數最多為二，這個問題其實和有 n 個橢圓且任意兩個橢圓間都正好有兩個交點的問題在本質上是一樣的，因此 n 個圓最多可將平面切成 n^2-n+2 個區域。

也許有讀者會懷疑是否對任意正整數 n，我們都能在紙上畫出 n 個兩兩之間各有兩個交點的圓，這是辦得到的；以下是 $n=3$ 及 $n=4$ 時可能的情形：



三個圓，區域數為8



四個圓，區域數為14

讀者不難看出這樣的畫法可以輕易地擴展到更大的 n 值。

問題四：

對任意正整數 n，空間中的 n 個平面最多可將空間切成幾個區域？

解：

為了要讓切成的區域數儘量多，這 n 個平面當中不應該有任何兩個平面互相平行或重合，也不應該有任何三個平面共線。

假設 a_n 代表空間中的 n 個平面最多可將空間切成的區域數；很明顯 $a_1=2$。我們希望能求得數列 $a_1,a_2,a_3,\ldots$ 的一般式。

以遞迴的方式來思考。假設空間中已經存在 n 個平面，而且它們之間位置的安排使得空間被切成了 a_n 個區域。現在我們要再加

入一個平面，而且希望這個第 $(n+1)$ 個平面能夠讓空間中新增加的區域數儘量多。

由於這個新的平面不與任何已存在的平面平行或重合，因此它與原來的 n 個平面交於 n 條直線，這 n 條直線都落在這個新的平面上，而且沒有任何兩條直線互相平行或重合。我們已經看過，這樣的安排會將平面劃分為 $1+n(n+1)/2$ 個區域，而新平面上由這 n 條直線劃分出來的每個區域其實都會將空間中由原來的 n 個平面切出來的某個區域一分為二，因此新加入的第 $(n+1)$ 個平面會讓空間中增加 $1+n(n+1)/2$ 個區域；再配合數列的初始條件，我們有了完整的遞迴定義：

$$a_{n+1}=\begin{cases}2 & n=0\\ a_n+1+n(n+1)/2 & n>0\end{cases}$$

由此不難推導出數列的一般式為

$$a_n=1+\frac{n(n^2+5)}{6},\quad \forall n\geq 1.$$

因此，空間中的 n 個平面最多可將空間切成 $1+n(n^2+5)/6$ 個區域。

問題五：

對任意正整數 n，空間中的 n 個球面最多可將空間切成幾個區域？

解：

為了要讓切成的區域數儘量多，這 n 個球面當中不應該有任何兩個球面互相重合，或完全不相交，或只交於一點（相切）。

假設 a_n 代表空間中的 n 個球面最多可將空間切成的區域數；很明顯 a_1 = 2。我們希望能求得數列 $a_1,a_2,a_3,\ldots$ 的一般式。

以遞迴的方式來思考。假設空間中已經存在 n 個球面，而且它們之間位置的安排使得空間被切成了 a_n 個區域。現在我們要再加入一個球面，而且希望這個第 $(n+1)$ 個球面能夠讓空間中新增加的區域數儘量多。

由於這個新的球面不與任何已存在的球面重合，或完全不相交，或只交於一點，因此它與原來的 n 個球面交於 n 個「圓」，這 n 個圓都落在這個新的球面上，而且沒有任何兩個圓互相重合，或完全不相交，或相切；換句話說，球面上的這 n 個圓當中，任意兩個圓之間都正好有兩個交點。我們由問題三知道，這樣的安排會將球面劃分為 n^2-n+2 個區域，而新球面上由這 n 個圓劃分出來的每個區域其實都會將空間中由原來的 n 個球面切出來的某個區域一分為二，因此新加入的第 $(n+1)$ 個球面會讓空間中增加 n^2-n+2 個區域；再配合數列的初始條件，我們有了完整的遞迴定義：

$$a_{n+1}=\begin{cases}2 & n=0\\ a_n+n^2-n+2 & n>0\end{cases}$$

由此不難推導出數列的一般式為

$$a_n=\frac{n(n^2-3n+8)}{3},\quad \forall n\geq 1.$$

因此，空間中的 n 個球面最多可將空間切成 $n(n^2-3n+8)/3$ 個區域。

結語

本文的寫作動機是由於有讀者來信詢及八個球面最多可將空間分割成幾個區域，由問題五可知當 n = 8 時，有 $8(64-24+8)/3$ = 128 個區域。

遞迴的思考方式對處理計數問題而言確實相當重要，可以有效地解決許多不同類型

的難題，不過畢竟不是萬靈丹；我們在本文的問題一及問題二也看到，有些問題用遞迴的方式做起來就不是那麼漂亮，不見得是最好的作法。作數學題目本來就應該多方嘗試，不拘泥於定法，隨時要能敞開心胸，保持彈性；這才是真正不變的法則。

參考資料

1. 許介彥（2001），遞迴關係在計數問題的應用，科學教育月刊，第 243 期。
2. C. L. Liu, Introduction to Combinatorial Mathematics, McGraw-Hill, 1968.
3. J. L. Mott, A. Kandel, and T. P. Baker, *Discrete Mathematics for Computer Scientists*, Prentice-Hall, 1983.

作者信箱：chsu@mail.dyu.edu.tw