第三章　1×n 的 Light Up 一致性問題

第一節 符號定義

1×n的Light Up一致性問題（1×n Light Up Consistency Problem，簡稱1×n LCP）與m×n LCP相同，僅是將其盤面大小限制為1×n。因此問題定義如下：給定一個1×n的Light Up盤面，判定其是否存在有解。由於1×n的盤面沒有上下方向的影響，只考慮左右方向鄰近方格，所以產生不一致的情況種類僅限於數字之正確性以及燈泡互相照射之狀況是否會發生。在此我們考慮用一個自動機來解決此問題。

首先，我們必須將一個1×n的Light Up盤面轉換為一列字串，並且以部份符號來定義：α={w, b, c, 0, 1, 2, ⊥}（如表1），以圖15(a)為例，該1×20的Light Up盤面以上述符號來代表則可表示為“w2www1www0wwbwbwww1w⊥”。

表 1. 符號定義

w	白色方格
b	黑色方格
c	燈泡
0,1,2	黑色方格上所示數字
⊥	字串結尾

第二節 1×n LCP 之 DFA

對於1×n LCP，我們考慮用一個Finite State Automaton (FSA)來認知此盤面，而由第一節中所定義之符號α = {w, b, c, 0, 1, 2, ⊥}，我們能將一個一維盤面表示成一個字串δ，即FSA之輸入字串，每次讀取一個字元，因此一個1×n LCP看似是能在線性時間內解決的。

接著我們設計一個Deterministic Finite Automaton (DFA)來認知此1×n Light Up盤面，對於一個長度為n之1×n Light Up盤面轉換成長度為n+1的字串δ作為輸入，其DFA包含五項元素＜Δ_{in}, S, Δ, $\Delta_{acp,}$ η＞，Δ_{in}代表輸入之符號集合，即Δ_{in} = {w, b, c, 0, 1, 2, ⊥}；S代表所有狀態之集合，即S = {S_0, D_0, D_1, P, L, F, N_1, N_2, ？}；Δ代表初始狀態；Δ_{acp}代表可被接受之狀態集合，即Δ_{acp} ={S_0, D_0, P, L, N_1, N_2, ？}；以及η:S×Δ_{in}→S代表轉換的函數。其中狀態（如表2）“S_0”即初始狀態；“D_0”表示該輸入之下一個方格所需放置燈泡數目為‘0’顆，意即下一個方格不可以放置燈泡，例如數字‘0’之下一個空白方格是不可放置燈泡的；“D_1”表示該輸入之下一個方格所需放置燈泡數目為‘1’顆，意即下一個方格一定需要放置燈泡來滿足，例如當數字‘1’之左邊並未放置燈泡時，其右邊之方格則必須放置燈泡；“P”表示該方格已經放置燈泡或者必須放置燈泡之狀態，例如當狀態D_1之下一個輸入為白色方格即輸入字元為w時，由於D_1代表下一個方格一定需要放置燈泡來滿足，因此該白色方格（即輸入字元w）為必放燈泡之狀態，即進入狀態P；“L”表示左邊有燈泡照射之光線，即表現燈泡向水平方向照射之狀態，例如當狀態P之下一個輸入為白色方格即輸入字元為w時，則進入狀態L；“F”為「禁區」，表示該處白色方格為禁止放置燈泡之狀態，例如當狀態D_0之下一個輸入為白色方格即輸入字元為w時，則進入狀態F，以記錄該方格為不可放置燈泡並且尚未被照明，其後所紀錄之狀態必須確保將有右方之光源將此方格照明；“N_1”表示該白色方格不是禁區並且未放置燈泡亦無光線照明，其後所紀錄之狀態必須確保將有右方之光源將此方格照明或者可放置燈泡於該位置；“N_2”表示該方格為連續之白色方格並且皆非禁區，以及未放置燈泡亦無光線照明，其後所紀錄之狀態必須確保將有右方之光源將此方格照明或者可放置燈泡於該連續白色方格之任意位置，若遇到輸入

字元為‘1’則進入？之狀態；“？”表示當輸入字元為‘1’但其左右皆有尚未照明之白色方格因此尚且無法判別燈泡放置位置為‘1’之左邊或者右邊。表3為1×n LCP之狀態轉換表；圖16為1×n LCP之狀態轉換圖。

表 2. 各個狀態之意義

狀態	狀態意義
S_0	初始狀態
D_0	下一個方格所需放置之燈泡個數為‘0’顆
D_1	下一個方格所需放置之燈泡個數為‘1’顆
P	該白色方格必須放置燈泡或者已放燈泡之狀態
L	左邊有燈泡照射之光線
F	『禁區』，該白色方格禁止放置燈泡
N_1	該白色方格非禁區且尚未放置燈泡亦無光線照明
N_2	該方格為連續之白色方格並且皆非禁區，以及尚未放置燈泡亦無光線照明
?	輸入字元為‘1’但尚且無法判別燈泡放置位置為‘1’之左邊或者右邊

表 3. 1×n LCP 之狀態轉換表

Symbol / State	0	1	2	w	b	c	⊥
S_0	D_0	D_1		N_1	S_0	P	T
D_0	D_0	D_1		F	S_0		T
D_1				P		P	
P		D_0	D_1	L	S_0		T
L	D_0	D_1		L	S_0		T
F				N_1		P	
N_1		D_0	D_1	N_2	S_0	P	T
N_2	D_0	?	D_1	N_2	S_0	P	T
?	D_0	D_1		N_1	S_0	P	T

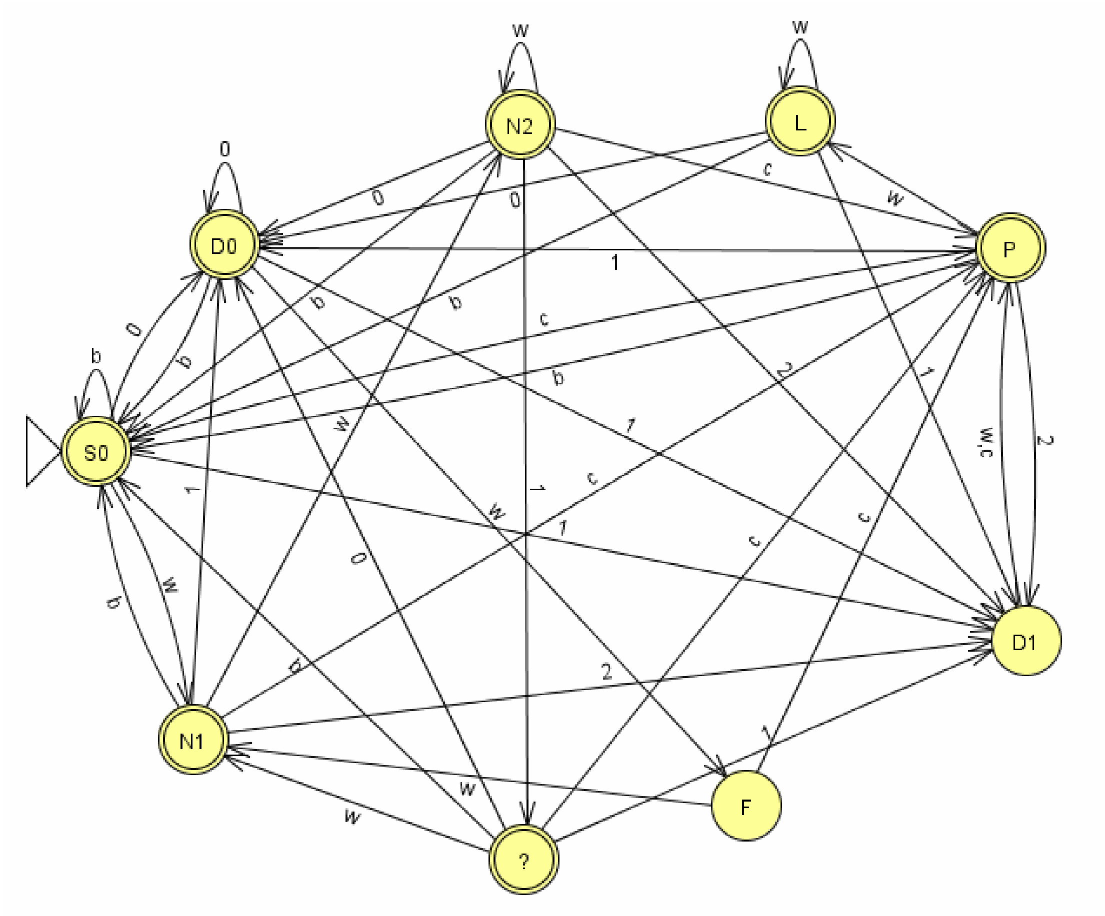

圖 1. 1×n LCP 之狀態轉換圖

若以圖17(a)與(b)兩個1×4的Light Up盤面為例，其輸入字串分別為<‘0’, ‘w’, ‘w’, ‘b’>與<‘1’, ‘w’, ‘w’, ‘b’>，依照狀態轉換表可知狀態變化為（如圖17(c)與(d)）：

(a)“S_0”→“D_0”→“F”→“N_1”→“S_0”（$S_0 \in \Delta_{acp}$，可被接受）

(b)“S_0”→“D_1”→“P”→“L”→“S_0”（$S_0 \in \Delta_{acp}$，可被接受）

因此此兩盤面皆存在有解，意即具有一致性，我們可以找到其解如圖17(e)與(f)。

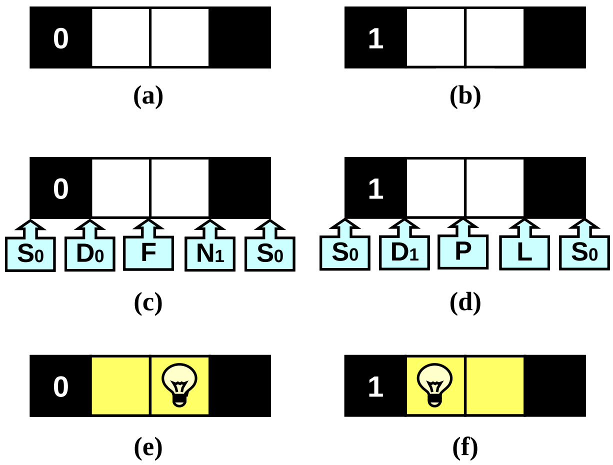

圖 2. 兩個 1×4 Light Up 盤面範例

在1×n Light Up盤面中，前後皆非白色方格的單一一個白色方格與連續兩個以上白色方格是不一樣的情況，如圖18(a)與(b)。圖18(a)是一個不一致的盤面，而圖18(b)為一致的盤面，我們設計出“N_1”與“N_2”兩種狀態來辨別，因此可得知圖18(c)將不被此DFA接受，而圖18(d)可被此DFA接受並進入終止狀態；其輸入字串分別為：<‘w’, ‘1’, ‘w’ >與<‘w’, ‘w’, ‘1’, ‘w’>，依照狀態轉換表可知狀態變化為：

(a)“S_0”→“N_1”→“ D_0”→“F”（$F \notin \Delta_{acp}$，不被接受）

(b)“S_0”→“N_1”→“N_2”→“？”→“N_1”（$N_1 \in \Delta_{acp}$，可被接受）

此二盤面的解如圖18(e)與(f)，可看出圖18(e)無法按照規則將所有白色方格照亮。

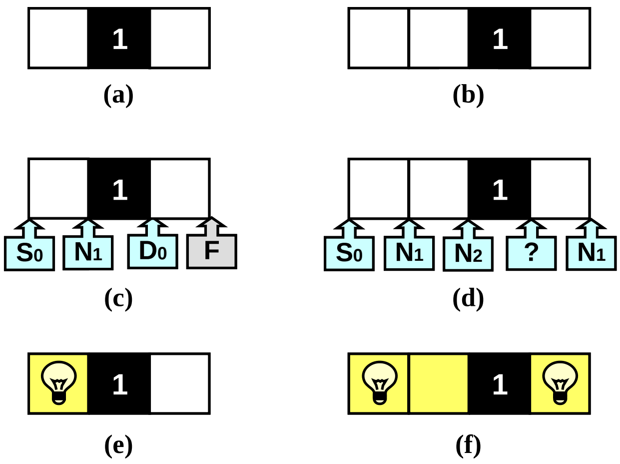

圖 3. 1×3 與 1×4 的 Light Up 盤面範例

另外一種特殊狀況如圖19(a)，由於尚未分析完所有輸入前無法確定燈泡必須放置在'1'之左邊或右邊或者左右任意皆可，直到分析至最後一個輸入得知燈泡必須放置在'1'之右邊時，前面皆有可放置燈泡的位置而不會出現沒有被照射到的白色方格，因此可被接受，如圖19(c)。

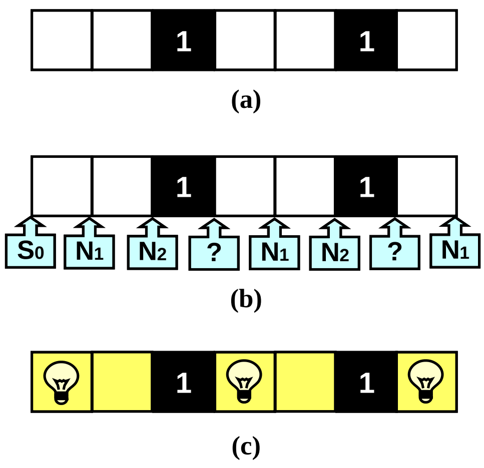

圖 4. 1×7 的 Light Up 盤面範例

由上述分析以及諸多實際測試結果可得知任意一個1×n Light Up盤面皆可在線性時間內處理完畢，即我們能在線性時間內判別一個1×n的LCP是否具一致性。