

## 第肆章 研究結果與討論

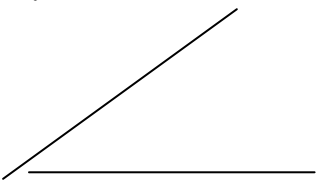

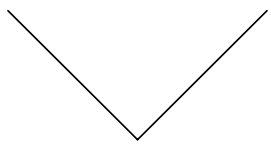
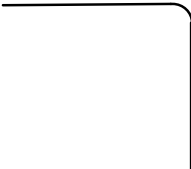

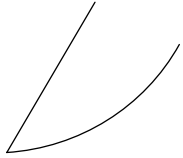
本章將依據紙筆測驗問題分析，將學童對於角的辨識—角的基本定義與判別、角的辨識—數角、角的辨識—直角的判別、角的辨識—圖形中角的判別、角的大小、角的測量等六個部份作答情形分別呈現，然後再根據統計結果並參考訪談時學童回答的資料，分析及討論學童對於角概念的認知情形，以及學習所遇到的困難，共分為六節。

### 第一節 角的辨識—角的基本定義與判別

#### 一、筆試題目與答題統計分析

在角概念紙筆測驗卷中，第一大題是屬於「角的基本定義與判別」，從各種簡單的角形中，判斷是角或非角，題目如下：

題目一、請在下面各圖形中，選出你認為是「角」的圖形，在（ ）中打✓。

<p>1.</p>  <p>( )</p>	<p>2.</p>  <p>( )</p>	<p>3.</p>  <p>( )</p>
<p>4.</p>  <p>( )</p>	<p>5.</p>  <p>( )</p>	<p>6.</p>  <p>( )</p>


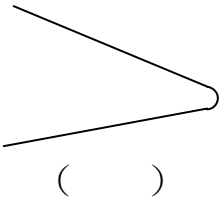
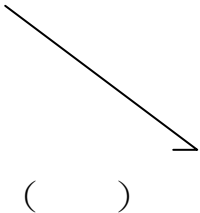

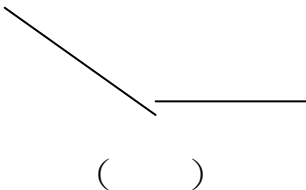
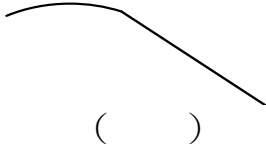
<p>7.</p> 	<p>8.</p> 	<p>9.</p> 
<p>10.</p> 	<p>11.</p> 	<p>12.</p> 

表 4-1-1 「角的基本定義與判別」答對率

是角或非角	題目	類型	張開角度	答對率 (%)
是角	一 (3)	典型角	$=90^\circ$	100
	一 (5)	兩邊均極短	$<90^\circ$	92.5
	一 (9)	一邊長一邊短	$<90^\circ$	83.0
	一 (10)	角度接近 $0^\circ$	$<90^\circ$	76.7
	一 (7)	角度接近平角	$>90^\circ$	49.1
非角	一 (11)	兩線不相交	$>90^\circ$	96.2
	一 (1)	兩線不相交	$<90^\circ$	93.1
	一 (12)	一直線一曲線	$>90^\circ$	98.7
	一 (2)	兩曲線	$<90^\circ$	83.6
	一 (6)	一直線一曲線	$<90^\circ$	82.4
	一 (8)	相交處圓滑	$<90^\circ$	94.3
	一 (4)	相交處圓滑	$=90^\circ$	89.3

由表 4-1-1 可知在角的基本定義與判別上，是角的圖形中，第一（3）題是典型的角（兩邊一樣長、張開角度大於  $10^\circ$  的銳角或直角）答對率是 100%；第一（5）題類似於典型的角，只是邊長非常短，答對率也很高，有 92.5%；第一（9）題則是兩個邊長差異較大的銳角，答對率低於兩邊等長的銳角，只有 83.6%；第一（10）題是張開角度小於  $10^\circ$  的銳角，答對率較低，只有 76.7%；第一（7）題是將近  $180^\circ$  的鈍角，答對率最低，只有 49.1%。

非角的圖形中，第一（1）、一（11）題是兩邊未相交的非角，答對率都很高，分別為 93.1%、96.2%，但是第一（1）題形近於銳角容易誤判，答對率較低；第一（11）題形近於鈍角，角度較大時學童容易判斷為非角，因此答對率較高。第一（4）、一（8）題為相交處圓滑的圖形，第一（4）題形狀近似直角，答對率為 89.3%，第一（8）題形狀近似銳角，答對率為 94.3%，此類型題目形近於直角較容易被誤判。第一（2）、一（6）、一（12）題是曲線與直線或兩曲線形成的非角，其中第一（2）、一（6）題形近於銳角，因此容易誤判為角，答對率分別為 83.6%、82.4%，而第一（12）題因為形近於鈍角，角度較大時學童容易判斷為非角，因此答對率較高，為 98.7%。

由以上結果可知，學童判斷是角的圖形，以典型的角最容易判斷，邊長的長短只會造成些微的干擾，但是角度過小（接近  $0^\circ$ ）或過大（接近  $180^\circ$ ）時，學童就會容易受到視覺的干擾，認為過大或過小的角不是角，特別是接近  $180^\circ$  的角，答對率不到一半。

而非角的圖形，有曲線邊又形近於銳角的圖形，約有二成的學童認為是角，最容易被誤判；相交處圓滑的圖形且形近於直角圖形，也容易誤判為角，可能和課本所舉的例子（桌面有角）有關；在兩線沒有相交的情況下，學童大都能正確判斷為非角。

綜合上述可知，學生最容易答對的題目類型有兩種：(1)典型角；(2)張開角度大於  $90^\circ$  的非角。而學童容易出現的錯誤依序為：(1)因為角度較大（接近  $180^\circ$ ）或角度較小（接近  $0^\circ$ ）就認為不是角，尤其在接近  $180^\circ$  時更為嚴重；(2)包含曲線邊的圖形只要看起來尖尖的，就容易誤判為角；(3)認為兩邊邊長相差太多的不是角（角要有對稱性）；(4)把相交處圓滑的圖形當成是角；(5)認為邊長太短的不是角。

## 二、訪談資料分析

為了進一步確認學生作答時的想法，以及發生錯誤和困難的原因，研究者依學生答題結果將其分成低分組、中分組、高分組三組，各找出 5 位學生訪談。

### (一) 正確答題的想法

在接受訪談的學生中，S01（高分組）、S02（高分組）、S05（高分組）這三個學生在第一大題角形判別中的 12 小題是完全正確的；而 S03（高分組）、S06（中分組）、S11（低分組）只錯了第一（7）題是角圖形張開角度接近  $180^\circ$  的題目；S04（高分組）只錯了第一（10）題是角圖形張開角度接近  $0^\circ$  的題目。整合第一大題正確答題學生的想法，學生認為角要符合下列條件：(1)邊要直直的不能彎；(2)兩個邊要連在一起；(3)相交處不能是圓滑的；(4)邊的長短沒有影響；(5)角度張開大小沒有影響。以下為 S01、S02 和 S05 的訪談部分摘要。這些學生可以分析角的構成要素，屬於 Van Hiele 幾何層次的第二層次分析期。

#### 1. 認為邊要直直的不能彎

S01(高分組、女)

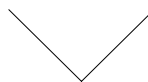
T：第 2 題你覺得它是角嗎？

S01：不是。因為它是彎的，兩個邊都是彎的。



T：第 3 題你覺得它是角嗎？

S01：是，因為它兩個邊都是直線，有夾成一個角。



**S02 (高分組、女)**

T：第 2 題你覺得它是角嗎？

S02：不是。因為它旁邊好像是彎曲的。



T：第 3 題你覺得它是角嗎？

S02：是，因為它兩條線是長.....就是直直的，角那邊又有連起來。



**S05 (高分組、男)**

T：第 6 題你覺得它是角嗎？

S05：不是。



T：為什麼？

S05：一邊有彎彎的。

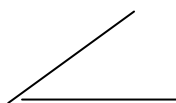
由 S01、S02 和 S05 的訪談中，可以知道這些學生認為角的邊要直直的，不能彎曲，如果邊彎彎的就不是角。

## 2. 認為兩個邊要連在一起

**S01(高分組、女)**

T：你覺得第 1 題是角嗎？

S01：不是。



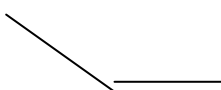
T：為什麼它不是角？

S01：因為它雖然有兩個邊，可是沒有連在一起。

**S02 (高分組、女)**

T：那第 11 題你覺得它是角嗎？

S02：不是，它沒有連接起來。



**S05 (高分組、男)**

T：第 3 題你覺得它是角嗎？

S05：有啊！

T：為什麼？

S05：嗯……因為它有兩個邊連在一起。

由 S01、S02 和 S05 的訪談中，可以知道這些學生認為角的兩個邊要連在一起，如果沒有連在一起就不是角。

**3. 認為相交處不能是圓滑的**

**S01(高分組、女)**

T：第 4 題你覺得它是角嗎？

S01：不是，它們有兩個邊，可是這裡是圓的。

**S02 (高分組、女)**

T：第 8 題你覺得它是角嗎？

S02：不是，它跟第 4 題一樣中間有圓弧。

**S05 (高分組、男)**

T：第 4 題你覺得它是角嗎？

S05：不是，它圓邊。

T：什麼？

S05：圓形的邊（相交處圓圓的）。

由 S01、S02 和 S05 的訪談中，可以知道這些學生認為角的相交處不能是圓滑的，如果沒有相交處圓圓的就不是角。

**4. 認為邊的長短沒有影響**

**S01(高分組、女)**

T：第 5 題你覺得它是角嗎？




S01：是。

T：為什麼？

S01：它是一個角只是邊比較短而已。

**S02 (高分組、女)**

T：好，第 5 題你覺得它是角嗎？ 

S02：是。


T：為什麼？

S02：因為它不管是線長線短，連起來就是角。

T：好，那第 9 題你覺得它是角嗎？ 

S02：第 9 題也是不管是線長線短都有角。

**S05 (高分組、男)**

T：第 5 題你覺得它是角嗎？ 

S05：是。

T：為什麼？

S05：嗯.....兩邊在一起。


T：好，那它很短你也覺得是角嗎？

S05：嗯，對！

由 S01、S02 和 S05 的訪談中，可以知道這些學生認為角的邊長長短和是不是角沒有關係。

**5. 認為角度大小沒有影響**

**S01(高分組、女)**

T：第 7 題你覺得它是角嗎？ 

S01：是。

T：為什麼？

S01：他只是張得比較大，讓人無法看出來而已。

T：好，那第 10 題你覺得它是角嗎？

S01：是。它只是角裡面比較小而已。

T：你認為什麼是角？角必須有什麼條件？

S01：要兩個邊都是直的，然後要夾成一個直角或是角，不可以分開。

### S02 (高分組、女)

T：第 7 題你覺得它是角嗎？

S02：是。

T：為什麼？

S02：因為它也是有角，它有直線。

T：好，那第 10 題你覺得它是角嗎？

S02：是。它小小的，也是有線有角。

### S05 (高分組、男)

T：第 7 題你覺得它是角嗎？

S05：有。

T：為什麼？

S05：有一點點斜斜的。

T：好，那第 10 題你覺得它是角嗎？

S05：是。

T：為什麼？

S05：也是連在一起。

由 S01、S02 和 S05 的訪談中可知，S01 明白的指出不管角角度大還是小都是角；S02、S05 沒有提到角的大小，而以是不是直線、有沒有連在一起來判斷第一（7）、一（10）題，可以知道 S02、S05 認為角度的大小和角的判別沒有關係，不會因為角度太大或太小就判別為非角。



綜合以上的訪談結果，學生認為角的基本定義是要有兩條直直的線（不能彎），而且要連在一起，相交的地方不能是圓滑的。此外，邊的長短、角度的大小和是角或非角沒有關係。

## (二) 容易產生的困難

有些學生在判別是角或非角時，會加上一些不適當的條件，研究者依照答對率和訪談結果，依照容易發生困難的順序將其分成五種類型。第一類學生判別是否為角時會受角度的大小影響，例如：角度過大或過小就不算角、角侷限於某些特定角；第二類學生認為只要有尖尖的感覺就是角，角可以有曲線邊；第三類學生認為角要有對稱性，例如：兩個邊要一樣長、兩邊同時彎彎的才算角；第四類學生認為相交處圓滑的是角；第五類學生會以邊的長短判別是不是角，例如：邊太短不能算角。這些學生都是依據圖形的外表輪廓來辨認角，屬於 Van Hiele 幾何層次的第二層次視覺期。

### 第一類：判別是否為角時受角度的大小影響

第一類會由角度的大小判斷是不是角的學生有：S03（高分組）、S04（高分組）、S06（中分組）、S07（中分組）、S08（中分組）、S09（中分組）、S10（中分組）、S11（低分組）、S12（低分組）、S13（低分組）、S14（低分組）、S15（低分組）。以下為 S07、S06、S04、S15、S14 的訪談部分摘要。

#### 1. 角度很大接近平角不是角

S07（中分組、男）

T：第 7 題你覺得它是角嗎？

S07：不是。



T：為什麼？

S07：是直直的（看起來像直線）。

T：是直直的，所以你覺得它不是角。

S07：對。

**S06 (中分組、女)**

T：第 7 題你覺得它是角嗎？

S06：不是。



T：為什麼？

S06：因為它這裡是平的，上面有一點點斜斜的。

T：為什麼這樣不是角？

S06：因為它沒有把角尖尖的地方畫出來。

第一大題第 7 小題是接近於  $180^\circ$  的角，S07 (中分組)、S06 (中分組) 都認為此題不是角，S07 的理由是因為看起來平平的，S06 已經看出一條線是平的、一條線有點斜斜的，仍然認為此題不是角，這兩個學生都覺得要有尖尖的形狀出來才能稱作是角。

**2. 角度很小接近  $0^\circ$  不是角**

**S04 (高分組、男)**

T：第 10 題是角嗎？

S04：不是，因為它太細又太長。



**S15 (低分組、男)**

T：請問你第 10 小題是角嗎？

S15：不是。



T：為什麼？

S15：因為已經合起來了。

第一大題第 10 小題是接近於  $0^\circ$  的角，S04 (高分組) 認為這題不是角，

因為太細又太長；S15（低分組）也認為此題不是角，理由是兩條線已經合起來了。

### 3. 角度侷限於某些特定角

#### S14（低分組、女）

T：你認為什麼是角？角必須符合什麼條件？

S14：有 90 度，兩邊的邊一樣長……。

T：還有其他條件嗎？

S14：……

T：有 90 度是什麼意思，不是 90 度就不是角嗎？

S14：不是。

T：你的意思是說不是 90 度就不是角嗎？

S14：對。

T：那 90 度是什麼意思？

S14：90 度是兩個的邊一樣長。

T：兩個的邊一樣長就是 90 度，那老師畫一個圖你覺得他有 90 度嗎？

S14：沒有。

T：那它是角嗎？

S14：是。

T：那你為什麼說角的條件要 90 度？90 度是什麼意思？

S14：是……

T：請你再說一次形成角的條件有什麼？

S14：角……要……角有 45 度和 60、30、90 度，還有兩個邊要一樣長。

S14 認為要  $90^\circ$  或是  $30^\circ$ 、 $45^\circ$ 、 $60^\circ$  才算是角，將角的定義侷限於某些特定的角度。

#### 第二類：認為角可以有曲線邊

第二類認為角可以有曲線邊的學生有 S06（中分組）、S08（中分組）、

S12 (低分組)、S14 (低分組)。以下為 S08 的訪談部分摘要。

S08 (中分組、女)

T: 第 2 題是角嗎?



S08: 是。

T: 為什麼這裡要畫一個星星?

S08: 我自己不太會。

T: 你可以講一下第 2 題, 為什麼你不太確定? 你是怎麼想的?

S08: 因為這裡彎彎的看起來很奇怪。

T: 彎彎的有點很奇怪, 那你覺得為什麼它又像角呢? 怎麼樣像角?

S08: 因為這兩條線黏在一起, 又有點像角?

T: 怎麼樣像角? 它看起來為什麼像角? 你最後為什麼還決定它是角, 是從那裡認為它是角的?

S08: 這裡。

T: 這裡怎樣? 有什麼特徵嗎? 可以形容一下嗎?

S08: 因為這邊弄起來就有點像三角形。

.....

T: 那第 6 題是角嗎?

S08: 是。



T: 為什麼?

S08: 因為它圈起來就變成一個角。

S08 雖然一開始覺得邊彎彎的好像有點奇怪, 可是後來他把角想像成三角形的一部份, 亦即把開口處封起來時, 如果看起來像三角形, 就判定是角, 即使有一邊是曲線也沒有關係。

### 第三類: 認為角要有對稱性

第三類認為角要有對稱性的學生有 S06 (中分組)、S12 (低分組)、S14

(低分組)。以下為 S14、S06 的訪談部分摘要。

### 1.認為角的兩邊要一樣長

S14 (低分組、女)

T：好，那第 9 題你覺得它是角嗎？

S14：不是。

T：為什麼？

S14：兩條線不一樣。

T：哪裡不一樣？

S14：這裡。

T：是什麼不一樣，可以說清楚一點嗎？

S14：兩條邊邊長不一樣長。

S14 受典型角的影響，會檢驗邊長的長短是否一樣來判斷是否為角，認為兩邊不一樣長不能算是角。

### 2.認為角的兩邊要同樣為直線或同樣為曲線

S06 (中分組、女)

T：那第 12 題你覺得是角嗎？

S06：它這個很像山丘，然後它這裡沒有跟它一樣彎彎的。

T：什麼意思？

S06：兩個如果都是彎的就是角了。

T：什麼意思？你可以畫給我看看嗎？

S06：如果這兩個是角的話，這裡就有一點點尖。

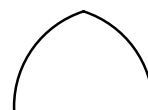
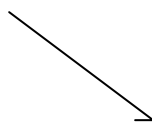
T：你的意思是這個線兩個都彎彎的，這樣就是角。

S06：對。

T：你的意思是（畫圖）這樣算是角嗎？

S06：算。

T：那為什麼第 2 題彎彎的不是角？它也是兩個都彎彎的呀！妳剛剛說的像耳朵這種形



狀為什麼就是角？

S06：因為它這兩條線沒有像這樣子（彎不同方向）。

T：要彎不同邊才可以嗎？

S06：對。

T：所以彎彎的也可以是角？

S06：對。

S06 認為角的兩邊必須同樣是直的，或者是兩邊同樣是彎的。在兩邊同樣是彎的情況下，還要彎不同方向才能算是角，換句話說，彎不同邊才能線對稱，因此將角限制為要有對稱性。

#### 第四類：認為相交處圓滑的是角

第四類認為相交處圓滑是角的學生有 S13（低分組）、S14（低分組）。

以下為 S14 的訪談部分摘要。

##### S14（低分組、女）

T：好，那第 4 題你覺得它是角嗎？

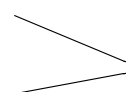
S14：是，這裡有一個角。

T：哪裡？

S14：這裡（指著第 4 小題圓弧處）。

T：好，那第 8 題你覺得它是角嗎？

S14：這裡有一個角（指著第 8 小題圓弧處）。



S14 指著兩線相交圓滑的地方，告訴研究者這裡有角，代表 S14 認為相交處圓滑的圖形也是角。

#### 第五類：以邊的長短判別是不是角

會以邊的長短判斷是不是角的學生有 S07（中分組）、S12（低分組）、S14（低分組）。以下為 S07 的訪談部分摘要。

S07 (中分組、男)

T: 好, 那第 9 題你覺得它是角嗎?

S07: 我不太確定, 我覺得這是一個角又覺得這不是一個角, 我就沒有給它打勾。

T: 為什麼會不確定?

S07: 因為我覺得這一條線, 它這裡有一個角, 但是量不出來, 因為很小。就看不到啊!

S07 (中分組) 認為線太短不是角, 理由是如果用量角器測量會量不出來, 可知他在判斷是否為角時, 會以是否能測量為判別的標準, 線太短時難以測量, 因此不是角。

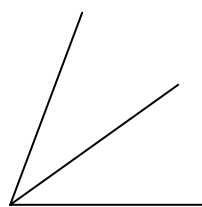
## 第二節 角的辨識—數角

### 一、筆試題目與答題統計分析

在角概念紙筆測驗卷中, 第三大題是屬於「數角」活動, 要數出圖形中角的個數, 題目如下:

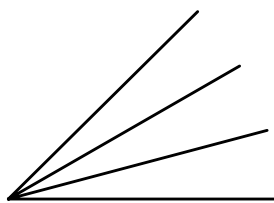
題目三、請問下面的圖形各有幾個角?

1.



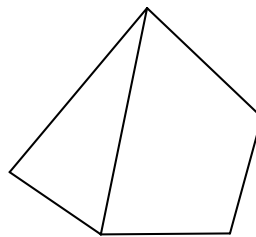
有 ( ) 個角

2.



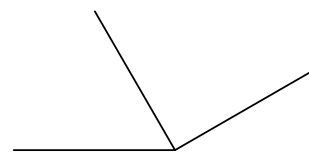
有 ( ) 個角

3.



有 ( ) 個角

4.



有 ( ) 個角

表 4-2-1 「數角」答對率

題目	三 (1)	三 (2)	三 (3)	三 (4)
答對率 (%)	32.1	8.2	22.0	30.8

由表 4-2-1 中可以看出，數角活動的答對率均偏低（8%到 32%），其中第三（1）、三（4）題都是三條線交於同一頂點的題目，第三（1）題中的角均為銳角，第三（4）題包含鈍角，第三（1）題答對率為 32.1%，略高於第三（4）題的 30.8%，可知銳角較容易被判別出來；第三（3）題為五邊形加一條對角線的數角問題，為三（1）題的延伸題，答對率為 22%；而第三（2）題是四條線交於同一頂點構成的題目，答對率只有 8.2%，可知增加一個邊數，題目複雜了許多，答對率也降低了許多，學童在課堂上所學三條線交於同一頂點的解題策略無法推演到較複雜的題目。

表 4-2-2 「數角」答案統計表

題目	三 (1)		三 (2)		三 (3)		三 (4)	
答案	答案	作答人數百分比	答案	作答人數百分比	答案	作答人數百分比	答案	作答人數百分比
最多答案	2	59.7%	3	57.9%	7	40.3%	2	59.1%
次多答案	★3	32.1%	4	23.9%	★9	22.0%	★3	30.8%
第三多答案	1	5%	★6	8.2%	5	12.6%	1	5%
其他答案	4	2.5%	1	4.4%	6	8.2%	4	4.4%
	0	0.6%	2	1.3%	8	3.8%	0	0.6%
			7	1.3%	1	3.1%		
			0	0.6%	4	3.1%		
			5	0.6%	2	1.3%		
			8	0.6%	3	1.3%		
			9	0.6%	10	1.3%		
			空白	0.6%	11	1.3%		
					12	0.6%		
					13	0.6%		
				空白	0.6%			

註：有★記號的表示該答案為正確答案。



因為國小三年級學童所學的角是  $180^\circ$  以內的角，所以本題數角的正確答案不考慮大於  $180^\circ$  的角，而學童的答案中，也沒有任何一個學童標示出大於  $180^\circ$  的角，所以在此方面沒有爭議。

由表 4-2-2 本題的答案統計表中，可以看出第三 (1) 題答案是 2 個角的最多，第三 (2) 題答案是 3 個角的最多，第三 (3) 題答案是 7 個角的最多，第三 (4) 題答案是 2 個角的最多。由此可見，學生在作答時傾向於只數個別分開的小角，容易忽略包含小角的大角。

第三 (2) 題答案是 4 個角的佔 23.9% (有 38 人)，根據原始答題資料的統計結果，發現這 38 人當中有 36 人在第三 (1) 題中能正確數出三條線相交於同一頂點時角的個數。

第三 (3) 題答案是 5 個角的佔 12.6%，可知這些學生在數角時，只判別出五邊形的五個內角，而沒有判別出被對角線分割的小角。

## 二、訪談資料分析

在數角的題目中，可以發現學生在這方面的答對率偏低，存在有學習困難。經過訪談之後，瞭解到老師在此類題目的教學中，一般都是以畫弧線標示角的方式做數角的教學，可是學生對於弧線所表達的意思卻有另外的詮釋，有時還會把弧線當成角來數，以致於未能達成預期的學習成效。以下分別為在數角問題中，正確答題的想法和容易產生的困難。

### (一) 正確答題的想法

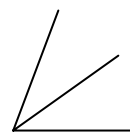
接受訪談的學生當中，第三大題數角問題完全答對的有 S02 (高分組)、S05 (高分組)，S01 (高分組) 因為粗心將第 3 小題算成 8 個角，S03 (高分組)、S07 (中分組)、S08 (中分組)、S09 (中分組) 只錯了第 2 小題 (較複雜的四條線交於同一頂點)，S05 雖然答案是正確的，可是訪談時又認為第 2 小題只有 4 個角。因此，本大題正確的答題的想法

以 S01、S02 的部分訪談摘要為例。

### 1. 將每個角標上號碼

S01 (高分組、女)

T: 妳這裡寫 1、2、1-2 是什麼意思?

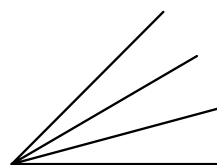


S01: 就是這裡有一個角，這裡有第 2 個角，再加上整個就是 3 個角。

T: 所以妳標 1、2、1-2 是什麼意思?

S01: 1-2 就是 1 和 2 合起來的角。

T: 好，那第 2 題有幾個角?



S01: 第 2 題就是這是第 1 個、第 2 個、這是第 3 個，然後 1 跟 2 就是第 4 個，1 到 3 就是第 5 個，2 跟 3 就第 6 個。

S01 先將每個個別的小角都標上編號，再開始數有幾個角，並且將數過的角寫在旁邊，寫法是先把個別的小角編號寫出來，再把合起來的大角寫出來，例如：「1-2」就是第 1 個角加上第 2 個角、「1-3」就是第 1 個角加第 2 個角再加上第 3 個角。S01 這樣編號，不僅非常清楚自己是在數哪一個角，而且也知道數過了哪些角，不會有重複數角的問題，是一種很好的數角策略。

### 2. 畫弧線標示

T: 請問第 1 題有幾個角?

S02: 3 個。

T: 你可以把第 1 題每個角指給老師看嗎?

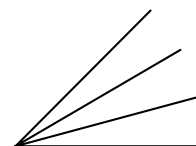


S02: 第 1 個在這裡、第 2 個在這裡，第 3 個在這裡 (清楚指出每個角)。

T: 好，那第二題有幾個角?

S02: 6 個。

T: 你可以把第 2 題每個角指給老師看嗎，把角的兩個邊指出來?



S02: 第 1 個在這裡、第 2 個在這裡，第 3 個在這裡，第 4 個、第 5 個、第 6 個 (清楚指出每個角)。

S02 在這一題的數角方式，就是依照老師所教的方式，把每個角用弧線標示出來數，為了確認 S02 是否真的知道自己標示的弧線是代表什麼，研究者請 S02 將每一個角指出來，不但如此，還要將角的兩個邊指出來，S02 回答時能夠清楚的指出自己數過的角，顯示 S02 明白標示弧線的意義，也能夠正確的數角。

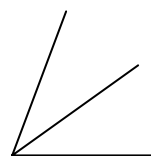
## (二) 容易產生的困難

由問卷答題統計的結果和訪談結果可知，學生在數角時較常發生的困難依序為：(1)只看到個別的小角；(2)個別的小角數完再加上一個大角；(3)只數多邊形的內角；(4)把弧線當成角來數。前面三種困難，是由答題統計結果得知，第四種困難，是研究者發現由訪談學生時發現的學習困難，學生不知道標示弧線的意義為何，把弧線當成是角來數。因為接受訪談的學生當中，並沒有學生出現第三種困難，因此只舉出第一種、第二種和第四種困難的例子，以下為 S11、S06、S14、S08 的訪談部分摘要。

### 1. 只看到個別的小角

S11 (低分組、男)

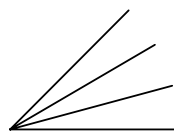
T：第 1 題你答案是 2 個角，你可以數給老師看嗎？



S11：這裡一個、這裡一個（只數個別分開的小角）。

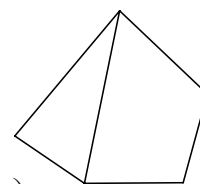
T：第 2 題，你可以數給老師看嗎？

S11：3 個（只數個別分開的小角）。



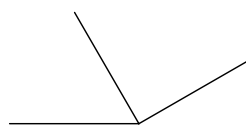
T：第 3 題，你可以數給老師看嗎？

S11：1 個、2 個、3 個、4 個、5 個 6、個、7 個（只數個別分開的小角）。



T：第 4 題，你覺得有幾個角？

S11：2 個（只數個別分開的小角）。



S11 在數角時，只會數出個別分開的小角，看不到有疊合部分的大角。在訪談的過程中，發現數角時只看到個別小角的學生有 S10(中分組)、S11

(低分組)、S12(低分組)、S13(低分組)、S14(低分組)、S15(低分組)，可知高分組的學生幾乎不會出現此問題，中分組、低分組的學生較不容易看到不明顯的大角，尤其以低分組的學生更為嚴重。

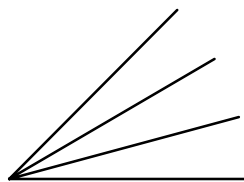
## 2.數角策略為個別的小角數完再加一個大角

S08 (中分組、女)

T：第 2 題有幾個角？

S08：4 個

T：怎麼數？



S08：因為這裡有一個、這裡有一個、這裡有一個，3 個合起來就變成 4 個

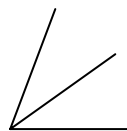
S08 對於多條線交於一個頂點的數角策略，就是將所有的小角分別數過一次，最後再加上一個包含全部的大角。因此 S08 在第三大題，只有第三(2)題是答錯的，其他三個小題都答對。由於課堂上做過類似第三(1)題的題目，因此 S08 把老師說的話記起來：「兩個小角合起來，也要算一個角。」再依此類推，有四條線交於一個頂點時，三個小角合起來也算一個角，所以會有 4 個角，可知 S08 並非真正的理解。研究者在訪談中發現除了 S08 (中分組) 之外，S03 (高分組)、S07 (中分組)、S09 (中分組) 也是利用此種策略來數角。根據量的統計，第三(2)題答案是 4 個角的 38 人當中，有 36 人在第三(1)題中能正確數出三條線相交於同一頂點時角的個數，換句話說，會使用此種錯誤策略的學生約有 36 人，佔全體學生的 22.6%，超過兩成的學生會使用這種錯誤策略，老師在教學時一定要更加謹慎。

## 3.把弧線當成角來數

S04 (高分組、男)

T：你第 1 題答案是 4 個角，你數給我看。

S04：1、2、3、4..... (把每個小角數兩次)。

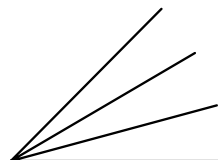


**S06 (中分組、女)**

T：好，那第2題有幾個角？

S06：8個。

T：妳怎麼數的？



S06：1、2、.....、8。

T：第2題的角在哪裡，指給老師看好嗎？

S06：這裡、這裡.....

T：可以說仔細一點嗎？

S06：第4個角就跟第1個角一樣，第5個角就跟第2個角一樣，第6個角就跟第3個角一樣，7和8一樣，就是全部合起來的大角。

**S14 (低分組、女)**

T：好，那第三大題第4題呢？

S14：4個。第1個、第2個、第3個、第4個。

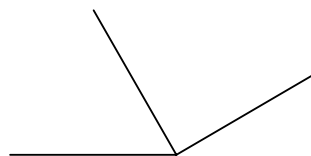
T：第4個在哪裡？

S14：在那個上面。

T：為什麼上面還有一個角？

S14：.....

T：那個角在哪裡？



S14：這裡 (第2個角上面)。

T：那為什麼這裡要多畫一條弧線？

S14：因為兩個看起來都很像角。

T：什麼意思？

S14：這兩個很像角

T：為什麼要畫 2 次，什麼原因？

S14：因為這幾個有角，看起來不像只有 2 個。

T：好，你說第 4 題有 4 個角，請你把第 4 題的每個角再指給老師看。

S14：這裡、這裡……（將每個角的 2 邊指給老師看，第 4 個角指弧線）。

S04 在數完個別的小角之後，把外圍畫的弧線當成兩個小角來數，因此把每個小角重複數了兩次；S06、S14 在數完個別的小角之後，會把數角時畫的弧線又當成角來數，因此最後數出來的角會比正確答案更多。訪談時研究者請他們明確指出角在哪裡，發現多出來的角都是因為不明白自己數角時所畫的弧線代表什麼而多數的。研究者與任教於三年級的老師討論之後，發現老師的教學方式幾乎都是畫弧線來數角。在深入訪談之後，發現會把弧線當成角來數的有：S04（高分組）、S06（中分組）、S14（低分組）三個學生，可知這些學生只看到了老師畫了弧線來數角，卻不明白為什麼要畫這些弧線，也不明白老師所畫弧線代表的意義。

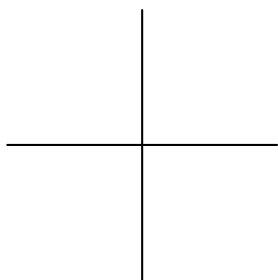
### 第三節 角的辨識—直角的判別

#### 一、筆試題目與答題統計分析

在角概念紙筆測驗卷中，第四大題是屬於「數角」活動，需辨識出圖形中的直角，並數出直角的個數，題目如下：

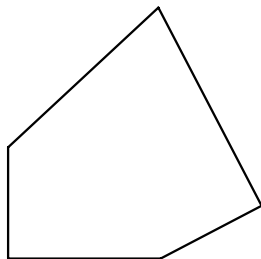
題目四、請在有直角的地方標上「 $\perp$ 」記號，再數一數圖形中有幾個直角。

1.



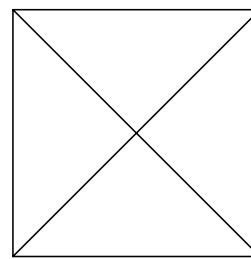
有 ( ) 個直角

2



有 ( ) 個直角

3



有 ( ) 個直角

表 4-3-1 「直角的判別」答對率

測驗題號	四 (1)	四 (2)	四 (3)
答對率 (%)	87.4	29.6	21.4

第四 (1) 題是由水平邊和鉛直邊形成的直角，答對率最高，為 87.4 %；第四 (2) 題修改翰林版數學習作題目，改為五邊形的五個內角中包含二個直角，此題有一傾斜的直角，因此答對率與第四 (1) 題比較，明顯降低許多，只有 29.6%；第四 (3) 題中不但有 4 個傾斜的直角，還有 4 個包含水平邊的直角被對角線分割，學童視覺上的干擾增加了，因此答對率僅有 21.4%。

表 4-3-2 「直角的判別」答案統計表

題目	四 (1)		四 (2)		四 (3)	
答案	答案	作答人數 百分比	答案	作答人數 百分比	答案	作答人數 百分比
最多答案	★4	87.4%	★2	29.6%	4	36.5%
次多答案	0	1.9%	1	23.9%	★8	21.4%
	2	1.9%				
	5	1.9%				
	6	1.9%				
第三多答案	1	1.3%	5	23.3%	12	17.0%
	8	1.3%				
其他答案	空白	2.5%	3	13.2%	0	3.1%
			4	6.3%	9	3.1%
			0	1.3%	5	2.5%
			6	0.6%	16	2.5%
			空白	1.9%	6	1.9%
					17	1.3%
					18	1.3%
					20	1.3%
					2	0.6%
					13	0.6%
					24	0.6%
					空白	6.3%

註：有★記號的表示該答案為正確答案。

由表 4-3-2 的各題答案統計可以看出，第四 (2) 題答案為 1 的學生有 23.9%，由於第四 (2) 題包含一個有水平邊的直角和一個沒有水平邊的直角，可知這些學生只看到了有水平邊的直角，所以答案為 1。第四 (3) 題答案為 4 的學生最多，有 36.5%，出現此答案有兩種情況，一是只數了中間「×」形的直角，一是只數了正方形外圍的直角。

在第四 (2) 題中，答案為 5 的學生也佔了不小的百分比，有 23.3%，這些學生把每個「角」都當成是「直角」，所以每個角都數，不知道直角是 90°的角。第四 (3) 題會數出 12 個直角的學生，也是把所有的「角」當成是「直角」，並且只數了個別的小角。



## 二、訪談資料分析

### (一) 正確答題的想法

接受訪談的學生當中，第四大題直角的判別完全正確的學生有 S01(高分組)、S02(高分組)、S03(高分組)，這些學生共同的特色有：(1)知道直角是  $90^\circ$  的角；(2)會利用工具輔助判斷是否為直角。以下為 S01、S02、S03 的部分訪談摘要。這些學童可以透過旋轉辨別出沒有水平邊的直角，也能以工具測量的實際操作方式，發現直角的共同性質和特徵，屬於 Van Hiele 幾何層次的第二層次分析期。

#### 1.知道直角是 $90^\circ$ 的角

##### S01 (高分組、女)

T：請你說一下直角是什麼？什麼叫直角？

S01：直角是有兩個直的邊，夾起來的角剛好是 90 度。

##### S02 (高分組、女)

T：請你說一下直角是什麼？什麼叫直角？

S02：直角就是 90 度的角。

##### S03 (高分組、女)

T：你知道什麼是直角嗎？

S03：知道。

T：是什麼？

S03：90 度的角。

S01、S02、S03 都能毫不猶豫的說出直角就是  $90^\circ$  的角，在本大題中能以是否為  $90^\circ$  來判別直角。

## 2.會利用工具輔助判斷是否為直角

### S01 (高分組、女)

T：你在做題目判斷是不是直角時，有沒有拿任何工具幫助你？

S01：我有拿尺的邊。

T：哪一種尺？

S01：直尺。

T：怎麼做呢？

S01：我是這樣一個一個去比。

S01 拿直尺的直角來比對每一個角，判斷是否為直角。

### S02 (高分組、女)

T：你在做題目判斷是不是直角時，有沒有拿任何工具？

S02：有，量角器。

T：那你怎麼量。

S02：每一個角量量看。

T：量給我看好嗎？

S02：(量角中)

T：那你怎麼判斷直角的？

S03：用量角器量。

S02、S03 拿量角器來把每一個角量量看，確認是否為  $90^\circ$ 。

S01、S02 和 S03 在本大題的答題表現是全對。S01 會想到直尺有直角，拿直尺的其中一個角來當作輔助工具，把每一個角對對看，這是很聰明的一種解題策略；S02 和 S03 會拿量角器來把每一個角量量看，確認是否為  $90^\circ$ ，雖然麻煩了一點，但是可以避免直覺由視覺判斷的錯誤。因此，會使用工具測量是比較好的解題方式，除了用量角器測量角度，若能找出身旁包含  $90^\circ$  角的工具，例如：三角板、直尺……，是一種更好的答題策略。

## (二) 容易產生的困難

由問卷答題統計結果及訪談的過程中，發現學生容易出現的學習困難依序為：(1) 認為直角要有水平邊；(2)認為所有的角都可稱為直角；(3)直接用視覺判斷是否為直角；(4) 把標示的直角記號也算進去；(5)直角記號可以畫成弧線。這些學童認為傾斜的直角看起來不像直角，根據圖形是否正立來判別，但是不瞭解直角真正的定義，屬於 Van Hiele 幾何層次的第一層次視覺期。

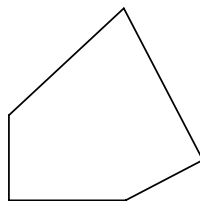
### 1. 直角要有水平邊

在訪談的學生當中，認為直角要有水平邊的有 S11（低分組）和 S06（中分組），以下為 S11 和 S16 的部分訪談內容。

S11（低分組，男）

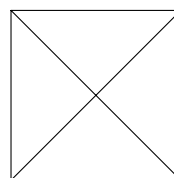
T：第 2 題有幾個直角？

S11：1 個（數有水平邊的角）。



T：第 3 題有幾個直角？

S11：4 個（數正方形外圍 4 個角，皆有水平邊）。



T：你知道什麼是直角嗎？

S11：一條線是直的、一條線是水平的。

T：所以你覺得直角是一條線是直的、一條線是水平的，你知道直角是幾度嗎？

S11：90 度。

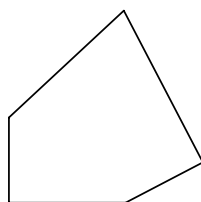
S11 在第四（1）題中，因為題目出現的都是有水平邊的角，因此答案正確，但是在第四（2）只數了一個包含水平邊的直角，第四（3）題只數了正方形四個包含水平邊的直角，他認為直角就是要有一條水平的邊和一條鉛直的邊。

S06（中分組、女）

T：請問第 2 題有幾個直角？

S06：1 個（數有水平邊的角）。

T：請問第 3 題有幾個直角？

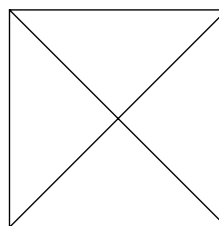


S06：9 個

T：為什麼？妳數給我看。

S06：1、2、3、4、5、6、7、8……。

T：第 9 個角在哪裡呢？



S06：1、2、3、4、5、6、7、8……，8 個（中間「×」形標示的直角的記號有水平邊，直接數標示的記號）。

T：所以妳現在數是 8 個？

S06：對。

T：這樣是 5，這樣是 6，7、8，妳是不是這樣數的？

S06：對。

T：請你說一下直角是什麼？什麼叫直角？

S06：直角就是兩條線像這樣子的，像第 1 題這樣。

T：那你知道直角是幾度嗎？

S06：90 度。

S06 比較特別，雖然在第四（2）只數了一個包含水平邊的直角，但是在第四（3）題中間「×」形的地方，他也標示了直角記號，但是這個直角記號是畫成有水平邊和鉛直邊的，並沒有正確將直角標示出來，而且數角的時候是數所畫的直角記號，並不是數題目裡的角，因此 S06 也認為直角就是要有一條水平的邊和一條鉛直的邊。

S11 和 S06 都知道直角是  $90^\circ$  的角，但是認為直角一定要有一個水平邊、一個鉛直邊，斜斜的就辨識不出是直角。

## 2.認為所有的角都可稱為直角

接受訪談的學生中，認為所有的角都可稱為直角的有 S05（中分組）、

S09 (中分組)、S10 (中分組) S14 (低分組)、S15 (低分組)，以下為 S05、S09、S10、S15 訪談的部分摘要。

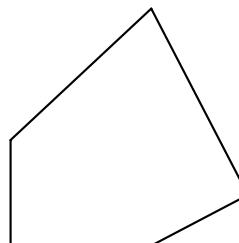
**S05 (高分組、男)**

T：請問第 2 題有幾個直角？

S05：5 個。

T：請你數給我看在哪裡？

S05：1、2、3、4、5 (指出每一個內角)。



.....

T：請你說說看什麼是直角？

S05：兩個邊合在一起，還有一個頂點就叫做直角。

T：這是三角板，請問裡面有直角嗎？請你指給老師看。

S05：有 3 個直角。

S05 數直角個數時，把每一個角都當成是直角來數，研究者請他指出三角板的直角，S05 也說三角板有三個直角。

**S09 (中分組、男)**

T：你認為什麼是直角？直角是什麼東西？

S09：就是有角的地方。

T：就是有角的地方就叫做直角是不是？那你看這三角板有沒有直角？

S09：有！

T：幾個？

S09：3 個。

T：指給我看好不好？

S09：這邊.....這邊.....這邊..... (指出三角板每一個角)。

T：你看另外一個三角板有幾個直角

S09：應該是 3 個。

T：我問你直角是什麼？

S09：90 度的。

T：不是 90 度的是直角嗎？

S09：也是直角。

T：直角是什麼意思？就是角的意思嗎？

S09：直的角度。

T：直的角度可不可以畫給我看看，這裡有嗎？

S09：是阿！

T：這個是直角嗎？

S09：是阿！

T：為什麼這是直角？你說直的是什麼意思？

S09：只要有直直的線就是直角。

S09 雖然說得出直角是  $90^\circ$ ，但是卻指出三角板有三個直角，認為不是  $90^\circ$  也算直角，最後為直角下了「有直直的線就是直角」的定義。

#### S10（中分組、男）

T：請你說說看什麼是直角？

S10：直角就是裡面的一部份。

T：裡面的一部份是什麼意思？

S10：就是角的裡面就是那個直角。

T：你可以畫一個直角給老師看看嗎？

S10：直角喔？

T：對，用這個三角板畫直角給老師看。

S10：（畫出 45 度角）

T：這是三角板，請問裡面有直角嗎？請你指給老師看。

S10：有，有 1 個。

T：好這是第 1 個，那有第 2 個嗎？

S10：沒有了，只有 1 個。

T：可是這個跟你剛剛畫的不一樣，你畫的是直角嗎？

S10：不是啊！

T：你剛剛不是說這是直角？

S10：我忘了怎麼畫了。

T：你剛剛把三角板轉來轉去，有什麼用處嗎？

S10：就是轉轉看，讓他有一邊是正的（看到三角板，轉一轉突然想起直角的定義）。

T：那你怎麼看它是不是直角？

S10：就看這個正方形的。

T：那你知道直角是幾度嗎？

S10：直角，90度啊！

T：那第四大題第2小題每個角都是90度嗎？

S10：不是。

T：那你為什麼突然知道直角是90度？

S10：因為我有用過那個什麼量角器量過啊！

T：請你現在告訴老師什麼是直角？

S10：直角就是有正的地方。

T：請說清楚一點

S10：就是例如有一個這邊（正方形）啊，這裡其中一個就是直角。

S10 一開始認為所有的角都是直角，請他畫一個直角，卻畫了一個 $45^\circ$ 的角，但是後來把三角板轉來轉去觀察，操弄的過程中認出三角板裡面的直角，接著想起課堂上量過直角就是 $90^\circ$ 的角。

**S15（低分組、男）**

T：你知道什麼是直角嗎？

S15：不知道。

T：這裡有一個三角板請問裡面有幾個直角？

S15：1個。

.....

T：那你怎麼知道這是直角？

S15：上課老師有教。

.....

T：那你現在知道什麼是直角嗎？什麼是直角？

S15：90度的就是直角。

T：那你覺得這題你做的對嗎？

S15：原本是做錯的。

T：你本來不知道什麼是直角，為什麼後來又知道什麼是直角了？

S15：看到三角板之後想起來了。

S15 不知道什麼是直角，但是看到直角三角板之後，想起直角就是  $90^\circ$  的角。

「直角」這個名詞在三年級上學期就已經出現過了，三年級上學期是從正方形、長方形、直角三角形中認識直角，並學會畫直角的記號；到了三年級下學期再用量角器量出直角是  $90^\circ$  的角。

但是由訪談結果可以看出，有些學生把「直角」和「角」的觀念混淆了，認為每一個角都是直角。S05 認為兩個邊合在一起，還有一個頂點就叫做直角；S09 雖然說得出直角是  $90^\circ$ ，卻又把不是  $90^\circ$  的角當成直角，最後為直角下了「有直直的線就是直角」的定義；S10 和 S15 一開始都認為直角就是角，但是看到直角三角板之後，在操弄的過程認出三角板裡面的直角，接著想起直角就是  $90^\circ$  的角。

### 3. 直接用視覺判斷是否為直角

在訪談的學生當中，完全不使用任何工具輔助，而直接用看的來判斷是不是直角。會直接靠視覺判斷直角的學生有：S04（高分組）、S07（中分組）、S08（中分組）、S13（低分組）、S14（低分組），以下為 S04 和 S07 的部分訪談內容。

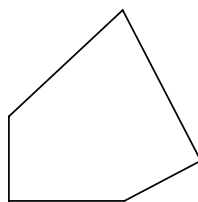
**S04（高分組，男）**



T：第2題有幾個直角？

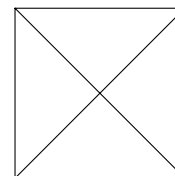
S04：1個.....2個.....3個

.....



T：這一題（第四大題第3小題）你怎麼判斷是不是直角？

S04：因為這樣（指著「×」）就會有直角。



T：如果我畫的又又是這樣，這裡會有直角嗎？

S04：沒有。

T：那你剛剛說又又就是直角，你的意思是它裡面的又又是直角是不是？

S04：嗯.....不是。

T：那你怎麼判斷是不是直角？有用工具嗎？

S04：用看的。

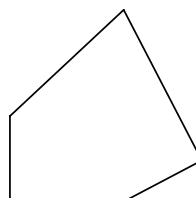
S04 在第四（2）題多數了一個直角，原本只有2個直角，卻數了3個直角，雖然知道直角就是  $90^\circ$  的角，但因為沒有使用任何工具來輔助測量角度，把接近直角的角也當成是直角。

**S07（中分組，男）**

T：第2題有幾個直角？

S07：3個直角。

.....



T：你在做題目時，有沒有拿工具測量？

S07：沒有。

T：都直接看嗎？

S07：對。

S04 和 S07 在第四（2）題都多數了一個直角，原本只有2個直角，卻數了3個直角，他們共同的特徵是都知道直角就是  $90^\circ$  的角，卻也都沒有使用任何工具來輔助測量角度，由於第四（2）包含一個  $75^\circ$ 、兩邊皆非水平邊的角，S04 和 S07 都誤判此角為是直角。由此可知，直接用視覺判斷，

會容易將接近  $90^\circ$ 、沒有水平邊的角誤判為直角。

#### 4.把標示的直角記號也算進去

在訪談的學生當中，會把標示的直角記號也當做角來算的學生有：

S06 (中分組)，以下為 S06 的部分訪談內容。

S06 (中分組)

T: 請問第 1 題有幾個直角?

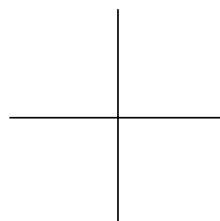
S06: 8 個。

T: 為什麼? 妳數給我看。

S06: 1、2、3、4.....、8 (每個角都數兩次)。

T: 妳好像每個角都數兩次，不一樣嗎?

S06: 一樣。




從訪談過程得知，S06 知道直角就是  $90^\circ$  的角，但是在標示直角記號之後，又把自己標示的記號當成直角來數，S06 在第三大題也曾經出現這樣的作答情形，把標示的弧線當角來數。由此可知，標示的弧線或是直角記號，都有可能干擾學生對角的辨識。

#### 5.直角記號可以畫成弧線

在接受訪談的學生當中，會把直角記號標示成弧線的學生有 S05(中分組)、S09 (中分組)、S10 (中分組)、S15 (低分組)，以下為 S15 的部分訪談摘要。

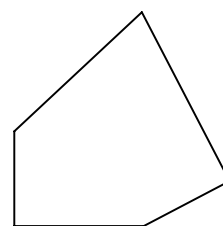
S15 (低分組)

T: 題目說要標上這樣的記號「」，為什麼你畫圓弧線?

S15: 一樣啊!

T: 一樣是什麼意思? 弧線也可以標示直角嗎?

S15: 可以啊!



S15 認為直角記號「┘」和弧線是一樣的，弧線也可以用來標示直角。研究者檢視 S05、S09、S10、S15 的問卷後發現，這四個學生同樣都認為直角就是角，因為如此，所以直角記號也可以畫成弧線來標示。

## 第四節 角的辨識—圖形中角的判別

### 一、筆試題目與答題統計分析

在角概念紙筆測驗卷中，第五大題是屬於「圖形中角的判別」，要從圖形中辨識出有哪裡有角，題目如下：

題目五、請找出圖形中的角，在角的頂點畫上小點「•」，並且把角的邊描出來。(每個圖形可能不只一個角，請盡量找出來。)

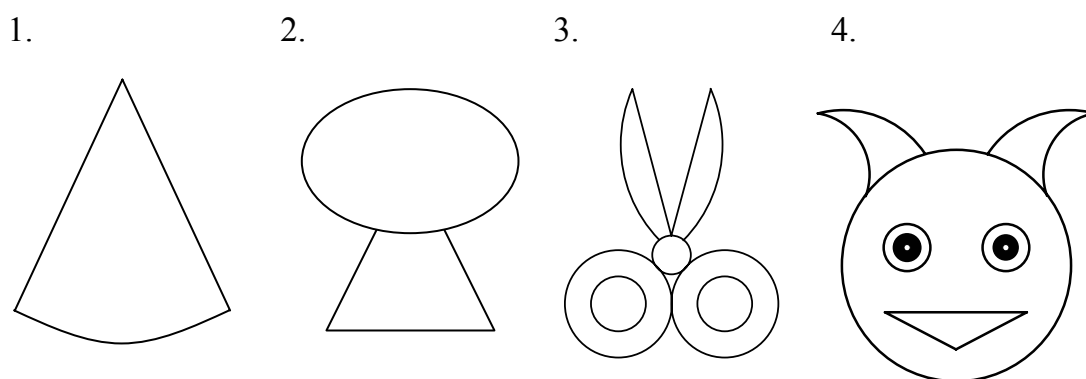


表 4-4-1 「圖形中角的判別」答對率

題目	五 (1)	五 (2)	五 (3)	五 (4)
項目	頂點	頂點	頂點	頂點
答對率 (%)	55.3	84.3	34	50.9
項目	邊	邊	邊	邊
答對率 (%)	61.6	73	49.1	54.1

研究者在分析本題時，將學生所標示「角的頂點」和「角的邊」分開計分。由表 4-4-1 可知，第五 (2) 題無論是頂點 (答對率 84.3%) 還是邊

(答對率 73%) 的答對率都最高；而第五 (1)、五 (3)、五 (4) 題的答對率明顯較低，大約介於 35% 至 61%。大致上來說，邊的答對率高於頂點，學生容易認為只要兩線相交的地方都是「角的頂點」，也有學生會誤判曲線為「角的邊」。

表 4-4-2 「圖形中角的判別」答案統計表

	五 (1)		五 (2)		五 (3)		五 (4)	
	頂點	邊	頂點	邊	頂點	邊	頂點	邊
	人數 答案 百分比 (%)	人數 答案 百分比 (%)	人數 答案 百分比 (%)	人數 答案 百分比 (%)	人數 答案 百分比 (%)	人數 答案 百分比 (%)	人數 答案 百分比 (%)	人數 答案 百分比 (%)
最多答案	★1 55.3	★2 61.6	★2 84.3	★3 73	2 37.1	★2 49.1	★3 50.9	★3 54.1
次多答案	3 42.8	3 28.9	4 13.8	0 9.4	★1 34.0	4 22.6	5 29.6	7 21.4
第三多答案	2 1.9	0 9.4	1 1.3	2 7.5 4 7.5	3 14.5	0 21.4	1 7.5	0 8.8
其他			0 9.4	1 2.5	0 13.2	9 3.8	2 6.3	2 5.7
					4 1.3	1 1.3	9 3.1	10 2.5
						8 1.3	4 2.5	4 1.9
						5 0.6		5 1.9
								6 1.3
								8 1.3
							1 0.6	
							12 0.6	

註：有★記號的表示該答案為正確答案。

由表 4-4-2 可以看出，第五 (1) 題除了正確的答案外，答案畫 3 個頂點的也有四成以上 (42.8%)，畫 3 個邊的學生則有 28.9%，可知認為有 3 個頂點的部分學生，看到曲線邊還是會猶豫該不該算是角的邊。

第五 (2) 題除了正確的答案外，答案畫 4 個頂點的有 13.8%，雖然都是曲線邊和直線邊的交點，但是和五 (1) 題相較之下，比較少學生會認為此處曲線邊和直線邊的交點是頂點，因為這題的曲線形成一個橢圓形，因此不容易誤判為角，本題畫角的頂點和描出角的邊的答對率都是最高。

第五(3)題答案為2個頂點的學生有37.1%，答案為3個頂點的學生有14.5%，會出現這兩種答案都是將剪刀圖案的尖端當成角，差別在於答案為3個頂點的學生還有看出真正的角，這題視覺上對學生的干擾很大，因此答對率偏低。

第五(4)題除了正確的答案外，答案畫5個頂點的有29.6%，會有5個頂點，就是把圖形耳朵部分也當成兩個角，因此總共會有7個邊，答案是7個邊的學生有21.4%，比答5個頂點的29.6%少了一些，可以知道部分學生看到曲線會認為不算角的邊，於是出現了只畫頂點沒畫邊的現象。

本題和第一大題都是屬於角的判別，題目中的圖畫含有曲線與直線或兩曲線形成的「非角」，此類型題目在第一大題的第一(2)、一(6)、一(12)題出現過，第一大題包含曲線邊的三個小題答對率都有85%以上，相較之下，第五大題的答對率明顯低了許多，可知學童能直接判別「是角、非角」的角形，不代表在圖形中就能正確判別出角。

## 二、訪談資料分析

本題對照於第一大題，都是要做角的判別，但是第一大題只給單一個角形，要學生判斷是不是角，這一大題則是要從圖形中找出角來。研究者發現，在第一大題學生認為非角的角形，放在圖形中就會誤判為角，顯示出學生的角概念前後矛盾，沒有清楚的概念。

### (一) 正確答題的想法

接受訪談的學生當中，第五大題圖形中角的判別完全正確的學生有S01(高分組)、S02(高分組)、S03(高分組)、S04(高分組)，這些學生共同的特色都是認為角的邊要直直的，不能有曲線邊。以下是S01、S02的部分訪談摘要。這些學生可以分析角的構成要素，不會受到圖形視覺上的干擾，屬於Van Hiele 幾何層次的第二層次分析期。

**S01 (高分組、女)**

T: 你覺得第 1 題下面這個算不算是角?

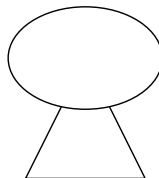
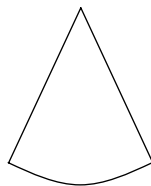
S01: 不算。

T: 為什麼?

S01: 因為它的下面是圓的。

T: 那你覺得第 2 題上面這裡算不算角?

S01: 不算。因為它也是圓的。



**S02 (高分組、女)**

T: 第 1 題角在哪裡?

S02: 這邊 (指出上面的角)。

T: 邊在哪裡?

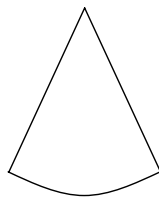
S02: 這邊 (指出兩個邊)。

T: 那你覺得下面這個算不算是角?

S02: 不算。

T: 為什麼?

S02: 因為它那個，有一條線是圓的。



在第五大題圖形中角的判別，最主要的干擾就是有曲線邊的圖形，S01、S02、S03、S04 在本題都能很肯定的說出有圓圓的邊就不是角，因此能正確畫出所有圖形中角的頂點和角的邊。

## (二) 容易產生的困難

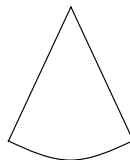
訪談後，研究者將學生錯誤類型歸類如下：(1)角可以有曲線邊；(2)認為包含曲線的部分是角但曲線不是邊；(3)不會依據角的定義和條件判別圖形中的角。這些學童覺得只要看起來尖尖的，又有兩條線（不論是曲線或直線）夾起來，看起來就像角，屬於 Van Hiele 幾何層次的第二層次視覺期。

## 1.角可以有曲線邊

在訪談的學生當中，認為角可以有曲線邊的有：S06（中分組）、S08（中分組）、S09（中分組）、S11（低分組）、S12（低分組）、S13（低分組）、S14（低分組）、S15（低分組），以下為 S11 的部分訪談內容。

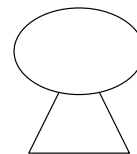
T：第 1 題你覺得有幾個角？

S08：3 個（包含兩個一邊是曲線的角）。



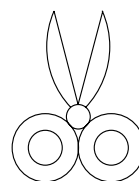
T：好！那...你把它頂點跟邊畫出來。那第 2 題你覺得有幾個角？

S08：2 個。



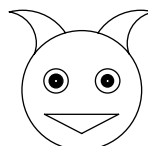
T：你把它頂點跟邊畫出來，第 3 題你覺得有幾個角？

S08：2 個（兩個都是一邊為曲線的角）。



T：那第 4 題呢？

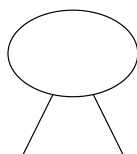
S08：5 個（包含兩個兩邊都是曲線的角）。



### S11（低分組、男）

T：第 2 題你覺得它有幾個角？

S11：4 個。



T：那 4 個？

S11：這裡一個、這裡一個、這裡一個、這裡一個（包含兩個一邊是曲線的角）。

.....

T：你認為什麼是角？

S11：角就是像直角一樣，但是是有彎的、有直線的，這樣的。

T：彎的是什麼意思？

S11：像這個的話都可以（彎的線）。

S08、S11 在本題從圖形辨識出來的角，包含了兩邊都是直線的角、兩邊都是曲線的非角、一邊為直線一邊為曲線的非角。在這一題認為角的邊可以有彎的、有直的，只要具有尖尖的形狀即可。S08 在第一題即出

現過這樣的判別標準，但是 S11 在第一大題角的判別並沒有出現此種現象。

訪談的學生當中，大約有一半的學生在這一題認為角可以有曲線邊，但是 S06 認為如果該曲線是圓或橢圓的一部份，就不能是角的其中一邊，以下為 S06 的部分訪談內容。

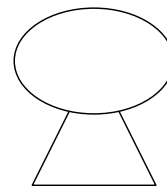
**S06 (中分組、女)**

T: 好，第 2 題你覺得它有 2 個角，上面為什麼不是角？

S06: 因為它上面這裡是圓的。

T: 那第 1 題圓圓的妳覺得它是角啊？

S06: 那第 2 題這裡是一個橢圓形，第 1 題只有一點點彎彎的。



S06 認為第五(2)題上面有一個橢圓，和一般看到的圓弧是不一樣的，一般的圓弧可以是角的一邊，但是如果橢圓形或圓形是沒有角的，因此不能成為角的一部分。S06 的想法，對第五(2)題的答對率高於此大題其他小題，提供了很好的解釋。

## 2.認為包含曲線的部分是角但曲線不是邊

收回的問卷當中，有一些學生畫了許多角的頂點，卻沒有把邊描出來。S10 是接受訪談的學生當中，唯一出現此現象的，以下是 S10 的部分訪談內容。

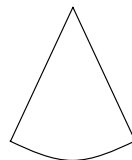
**S10 (中分組、男)**

T: 請你告訴老師第 1 題有幾個角？

S10: 3 個。

T: 在哪裡？

S10: 1、2、3。



T: 題目說把角的邊描出來，為什麼只有描這兩個邊。

S10: 因為下面是圓弧。

T: 那這樣還是算角嗎？



S10：嗯……算吧！

……

T：你覺得第一大題的第 6 小題是角嗎？

S10：不是。

T：為什麼不是？

S10：因為有一個圓弧啊！

T：那在這裡和第一大題的第 6 小題一樣嗎？

S10：一樣啊！

T：那為什麼你在第一大題認為不是角，在這裡就是角了？

S10：因為我覺得它看起來很像角？

T：那為什麼覺得是角，圓弧又不描？

S10：因為看到是圓圓的就不會描。

S10 認為第五 (1) 題有 3 個角，因此在他認為是角的地方畫了 3 個頂點，照理說這一題如果畫了 3 個頂點，應該也要描出 3 條邊才對，可是 S10 又覺得圓弧不能是邊，不可以描。該生的口氣十分確定包含圓弧的部分是角，但也堅決的說看到圓圓的就不會畫，絲毫沒有察覺到自己的矛盾之處。

### 3. 不會依據角的定義和條件來辨別圖形角

部分接受訪談的學生，在這一題對角的判別，會出現和第一大題不一致的標準，這些學生有：S05 (高分組)、S06 (中分組)、S07 (中分組)、S09 (中分組)、S10 (中分組)、S11 (低分組)、S12 (低分組)、S13 (低分組)、S14 (低分組)、S15 (低分組)。以下為 S06、S05 的部分訪談內容。

#### S05 (高分組)

T：那你認為頭上像耳朵這邊是角嗎？

S05：是。

……

T：(與第一大題第 2 小題對照) 和耳朵像不像？

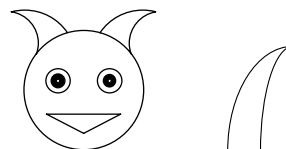
S05：像。

T：在第一大題你覺得不是角，為什麼在這裡你覺得是角？

S05：嗯.....好像畫錯了。

T：那你覺得它是角嗎？（第五大題第4小題）

S05：不是，這3個才是（嘴巴的三角形）。



T：可是剛剛老師問你，你覺得是角，為什麼？

S05：.....

T：你是怎麼想的，為什麼在耳朵點2個點？

S05：好像是錯的，又好像是對的。

T：所以你作答的時候很猶豫嗎？

S05：沒有辦法確定是不是角。

T：是哪裡讓你覺得不確定呢？

S05：有尖尖的看起來很像角。

S05 在第五（4）題作答時，因為圖形看起來尖尖的，一再的猶豫之後認為雖然是曲線，但是看起來像角，所以把兩條曲線形成的非角當成是角。但是在訪談時，研究者拿出第一（2）題請他自己看看兩邊的圖形不像時，突然驚覺自己想錯了。

### S06（中分組、女）

T：我們看第一大題第6小題，這邊一個直的、一個彎的你就說他不是角，那在這裡（第五大題第1小題），為什麼你就覺得下面彎彎的是角？

S06：它只有這裡彎一點點而已。

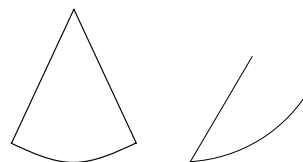
T：所以覺得它還是角。

S06：對。

.....

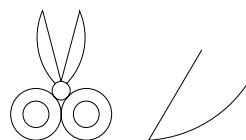
T：第3題呢？像第一大題第6小題，妳覺得不是角，可是這裡又覺得是角？

S06：.....



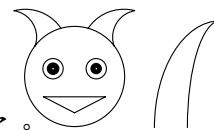
T：妳覺得這兩個有什麼不一樣嗎？

S06：它（第五大題第3題）這個沒有那麼彎。



T：好那我們看第4題耳朵的地方，和第一大題第2題有什麼不一樣嗎？

S06：它（第4題）這裡沒有像它（第一大題第2題）這樣尖尖的，太尖了。



S06 在第五（1）、五（3）、五（4）題中，把一邊為曲線或兩邊皆為曲線的非角都誤判成是角，而在第一（2）、一（6）卻又能正確判斷出非角。當研究者拿出第一大題讓 S06 比較兩者有何不同時，S06 並沒有發現自己的錯誤。例如第五（1）題下面的曲線部分形成的非角，類似於第一（6）題的角形，S06 認為此處不像第一（6）題那麼彎；而第五（4）題上面尖尖的耳朵，類似於第一（2）題，S06 又認為第一（2）題太尖了，第五（4）題沒有那麼尖。

第一大題學生的答題狀況十分良好，對於題目提供的角形大都能夠正確判斷是角或非角，接受訪談的時候，也都能侃侃而談正確說出是角或非角的理由。但是在作第五大題圖形角的判別時，許多學生不會依據角的定義和條件來辨別圖形角，誤把圖形中曲線與直線交會的部分認為是角。

## 第五節 角的大小比較

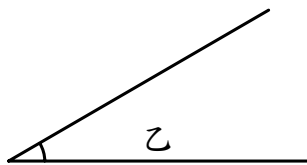
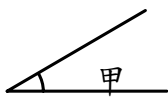
本節依據紙筆測驗的題目，第二大題為「角的大小比較」，其中第二（1）、二（5）題是「邊長不同兩角的比較」，第二（2）題是「弧線長短不同兩角的比較」，第二（3）題是「邊粗細不同兩角的比較」，第二（4）題作為對照組，以了解學童是否具有角的保留概念，以及判斷角的大小是否受直覺法則影響。

## 一、筆試題目與答題統計分析

### (一) 邊長不同兩角的比較

此類型題目有兩題，第二(5)題為第二(1)題衍生出來的，不同的地方在於第二(5)把邊長較短的角放在邊長較長的角裡面，這兩題目的都是要測試學童是否具有角的保留概念，以及是否會受「直覺法則」中「more A-more B」的影響，認為邊長較長角會比較大。題目如下：

題目 1. 甲角和乙角都是用三角板的同一個角描下來的，請問哪一個角比較大？題目



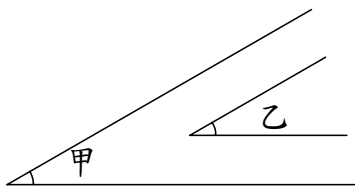
- ( ) 1. 甲角比較大
- ( ) 2. 乙角比較大
- ( ) 3. 兩個角一樣大
- ( ) 4. 無法比較

理由：\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

題目 5. 甲角和乙角都是用三角板的同一個角描下來的，請問哪一個角比較大？



- ( ) 1. 甲角比較大
- ( ) 2. 乙角比較大
- ( ) 3. 兩個角一樣大
- ( ) 4. 無法比較

理由：\_\_\_\_\_

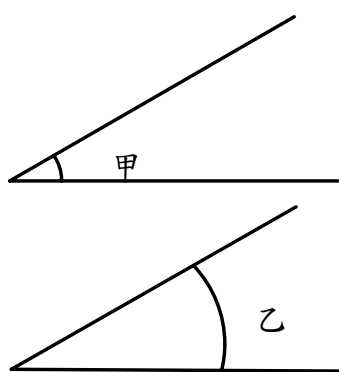
\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

(二) 弧線長短不同兩角的比較

此類型題目目的是要測試學童是否具有角的保留概念，以及是否會受「直覺法則」中「more A-more B」的影響，認為弧線較長角會比較大。題目如下：

題目 2. 甲角和乙角都是用三角板的同一個角描下來的，請問哪一個角比較大？



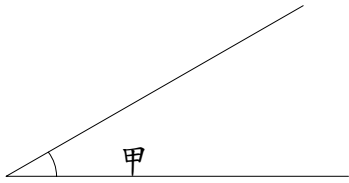
- ( ) 1. 甲角比較大
- ( ) 2. 乙角比較大
- ( ) 3. 兩個角一樣大
- ( ) 4. 無法比較

理由： \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_

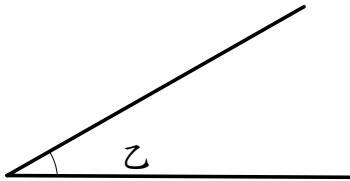
(三) 邊粗細不同兩角的比較

此類型題目目的是要測試學童是否具有角的保留概念，以及是否會受「直覺法則」中「more A-more B」的影響，認為邊長較粗角會比較大。題目如下：

題目 3. 甲角和乙角都是用三角板的同一個角描下來的，請問哪一個角比較大？



- ( ) 1. 甲角比較大
- ( ) 2. 乙角比較大
- ( ) 3. 兩個角一樣大
- ( ) 4. 無法比較



理由：\_\_\_\_\_

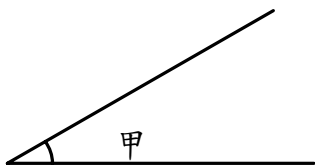
\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

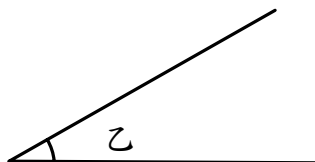
(四) 兩個一模一樣的角

這一大題所有的題目都是本題的衍生題，目的是要測試學童是否具有角的保留概念，可做為其他題目的對照組。題目如下：

題目 4. 甲角和乙角都是用三角板的同一個角描下來的，請問哪一個角比較大？



- ( ) 1. 甲角比較大
- ( ) 2. 乙角比較大
- ( ) 3. 兩個角一樣大
- ( ) 4. 無法比較



理由：\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

表 4-5-1 「角的大小比較」答案選項統計表

題目 選項	二 (1)	二 (5)	二 (2)	二 (3)	二 (4)
1 甲角大	4.4%	49.1%	16.4%	15.7%	27.0%
2 乙角大	40.9%	2.5%	37.7%	10.1%	13.2%
3 一樣大	★54.7%	★42.8%	★40.9%	★71.1%	★57.9%
4 無法比較	0%	2.5%	5%	1.3%	0.6%

註：有★記號的表示該答案為正確答案。

由上表 4-5-1 可以看出，在邊長不同的兩角比較上，第二 (1) 題的答對率為 54.7%，二 (5) 題的答對率為 42.8%，再深入看學生選答的理由，只有 11% 到 14% 的人能正確說出理由，答對率明顯偏低。由於第二 (5) 題邊長較短的角包含在邊長較長的角，學童更容易受到直覺法則影響，因此答對率較低。第二 (1) 題有 40.9% 的學生認為邊長較長的乙角比較大，第二 (5) 題有 49.1% 學生認為邊長較長的甲角比較大，顯示受了直覺法則 more A-more B 的影響。

在弧線不同的兩角比較上，第二 (2) 題的答對率為 40.9%，是本大題中答對率最低的。此題有 37.7% 學生認為弧線較大的乙角比較大，顯示受了直覺法則 more A - more B 的影響。

在邊粗細不同的兩角比較上，第二 (3) 題的答對率在此題型中明顯高於其他小題，為 71.7%，可知邊長粗細在視覺上較不會影響學生判斷角的大小。

第二 (4) 題是兩個一模一樣的角，答對率為 57.9%，還比邊粗細不同的第二 (3) 題答對率低，是比較奇怪的現象。有 27.0% 的學生認為在上面的甲角比較大，13.2% 的學生認為在下面的乙角比較大。

表 4-5-2 是角的大小比較這一大題選答的理由統計表，研究者在設計題目時，因為怕所寫的理由會侷限於研究者個人的想法，故理由並未附上選項，而是讓學生自行填寫並在圖形中標示出來，藉由學生的填答和圖形上的標示交叉比對，希望藉此瞭解學生真正的想法。

研究者依據學生填寫的問卷，將其比較角的大小理由整理成八類：(1)同一個角描下來的；(2)比較弧線大小、弧線內的區域的大小；(3)比較邊長的長短；(4)比較開口大小；(5)比較角的包含區域大小；(6)用比的——用手指、筆芯盒比比看；(7)用看的、感覺；(8)其他（未填寫理由、看頂點……）。

表 4-5-2 「角的大小比較」理由統計表

理由	題目	二 (1)	二 (5)	二 (2)	二 (3)	二 (4)
同一個角描下來的		★13.8%	★11.9%	★12.6%	★13.2%	★11.3%
弧線大小、弧線內區域大小		30.8%	23.3%	44.0%	27.0%	27.7%
邊長長短		18.9%	18.9%	13.2%	20.1%	15.7%
開口大小		8.8%	7.5%	9.4%	10.7%	9.4%
整個角的包含區域大小		0.6%	5.7%	0.6%	0%	0%
用比的		4.4%	5.7%	6.3%	8.8%	7.5%
用看的、感覺		5.7%	7.5%	1.9%	4.4%	9.4%
其他		17.0%	18.2%	11.9%	14.5%	17.6%

註：有★記號的表示該答案為正確答案。

由表 4-5-2 學生所持的理由可知，第二 (1) 題有 30.8% 的學生因為兩個角的弧線大小一樣大，或是弧線內部區域的大小一樣大，而認為兩個角一樣大，這是受了直覺法則 same A - same B 的影響。有 18.9% 的學生是看邊長長短的，認為邊長較長的乙角較大；有 8.8% 的學生是看開口大小，認為開口較大的乙角較大，這都是受了直覺法則 more A - more B 的影響。



由此可知第二(1)題不但受直覺法則 more A - more B 的影響，也受直覺法則 same A - same B 的影響。

同樣的，從表 4-5-2 中，可以看出第二(5)題的答題理由和第二(1)題類似，但是由於圖形的關係，有些以弧線判斷角的大小之學童，會改以包含區域的大小(甲角包住乙角)這種方式來判斷角的大小，相較於其他各題，本題以包含區域來判斷角的大小比率較高。在第二(5)題，學生認為邊長較長、開口較大或是包含區域較大的甲角較大，是受直覺法則 more A - more B 的影響；同時，也有學生因為兩個角的弧線大小一樣大，或是弧線內部區域的大小一樣大，而認為兩個角一樣大，這是受直覺法則 same A - same B 的影響。

在弧線不同的兩角比較上，第二(2)題有 44.0%的學生以弧線的大小來比較角的大小，可見學生會因為圖形的不同，選擇不同的策略來比較角的大小，此題受直覺法則 more A - more B 的影響較大。

第二(3)、二(4)題的答題理由，和第二(1)題類似，比較特別的是，這兩題都沒有學生用包含區域來比較角的大小。在這兩題，學生受直覺法則 same A - same B 影響較大，認為弧線一樣、邊長一樣開口大小一樣，所以角度會一樣大。

綜上所述，學生在比較角的大小時，受給定的圖形影響很大，而且會因為給定的圖形不同，而選擇不同的方式來作比較。或許是因為課堂上、教科書上都提醒學童角的大小和邊長無關，因此本大題中，學生較常以弧線來比較角的大小。在比較角的大小時，不但受直覺法則 more A - more B 的影響，也受直覺法則 same A - same B 的影響。

此外，這五題都只有 11~13.8%的學生知道同一個角描下來的兩個角會一樣大，能寫出正確理由的學生很少，顯示學童「角的保留概念」需要加強。

## 二、訪談資料分析

### (一) 正確答題的想法

在接受訪談的學生當中，S01（高分組）、S02（高分組）、S06（中分組）是具有保留概念的學生，以下為 S02、S06 的部分訪談摘要。

#### S02（高分組、女）

T：第 1 題哪一個角比較大？

S02：兩個角都一樣大。

T：為什麼？

S02：因為它在題目中就有寫了，兩個角都是三角板的同一個角描下來的。

T：這樣會一樣大嗎？

S02：對，都會一樣。線長和線短沒有差別。

#### S06（中分組、女）

T：妳看得懂題目嗎？

S06：看得懂。

T：那他說甲角和乙角都是用三角板的同一個角描下來的，這句話是什麼意思？

S06：就是同一個角畫下來。

T：好，這是三角板，同一個角描下來是什麼意思？可以描給老師看嗎？

S06：（三角板的同一個角畫圖）。

T：第 1 題哪一個角比較大？

S06：兩個角都一樣大。

T：為什麼？

S06：因為它是同一個三角板的角畫下來的。

T：不管邊長邊短都一樣大嗎？

S06：對。

由 S02、S06 認為兩個角都是三角板的同一個角描下來的，所以會一

樣大，可知該生具有角的保留概念。此外，S02 還會主動補充說明線長和線短不會影響角的大小。

## (二) 容易產生的困難

研究者在深入訪談之後，發現學生的困難可分為三類：(1)受直覺法則 more A - more B 的影響；(2)受直覺法則 same A - same B 的影響；(3)尚未具有角的保留概念。

### 1. 受直覺法則 more A - more B 影響

接受訪談的學生當中，S03 (高分組)、S04 (高分組)、S05 (高分組)、S07 (中分組)、S08 (中分組)、S09 (中分組)、S10 (中分組)、S11 (低分組)、S12 (低分組)、S13 (低分組) 會受直覺法則 more A-more B 的影響來判斷角的大小，以下為 S03、S07、S10 的部分訪談內容。

#### S03 (高分組、女)

T：第 1 題那一個角比較大？

S03：乙(邊長較長的角)。

T：為什麼？

S03：因為開口和邊比較大。

T：第 2 題那一個角比較大？

S03：乙(弧線較大)。

T：為什麼？

S03：因為它斜線(弧線內區域)的範圍比較大。

S03 認為邊比較長、開口比較大，角就會比較大，受直覺法則 more A - more B 的影響。

#### S07 (中分組、男)

T：第 2 題你認為哪一個角比較大？

S07：乙比較大。

T：為什麼？

S07：因為它這裡比較大（指著弧線）。

T：什麼意思？你是說哪裡？

S07：這裡（指著弧線）裡面的大小。

T：你每一題都是這樣判斷嗎？

S07：對。

S07 認為弧線裡面的區域較大，角就會比較大，到受直覺法則 more A-more B 的影響。

**S10（中分組、男）**

T：第 1 題你認為乙角比較大，為什麼？

S10：因為它們的大小不一樣，長度不一樣。

T：你說的大小是指哪裡？

S10：大小就是這整個角。

T：可以再說清楚一點嗎？

S10：就是這個邊線比較長，又很大，整個區域都很大。

S10 認為邊較長、整個區域較大，角就會比較大，到受直覺法則 more A - more B 的影響。

## **2.受直覺法則 same A - same B 影響**

接受訪談的學生當中，S03（高分組）、S04（高分組）、S05（高分組）、S07（中分組）、S08（中分組）、S09（中分組）、S10（中分組）、S11（低分組）、S12（低分組）、S13（低分組）會受直覺法則 same A - same B 的影響來判斷角的大小，以下為 S05、S13 的部分訪談內容。

**S05（高分組、男）**

T：第 1 題你認為哪一個角比較大？說說看你是怎麼想的？

S05：一樣大，我是看弧線。

T：看弧線的什麼？

S05：嗯……

T：你可不可以比給我看？

S05：比長短（指弧線的長短）。

S05 在比較角的大小時，會看弧線的長短，因為第二（1）題所畫的弧線都一樣長，因此 S05 認為弧線一樣長，角也會一樣大，這是受了直覺法則 same A - same B 的影響。

**S13（低分組、女）**

T：第 1 題那一個角比較大？

S13：一樣大。

T：你是怎麼比的？

S13：我是比它的面積（弧線裡面的區域面積）。

T：第 5 題那一個角比較大？

S13：我覺得一樣大，我都會看弧線。

S13 在比較角的大小時，是看弧線裡面區域面積的大小，認為弧線裡面的面積一樣大，角也會一樣大，受了直覺法則 same A - same B 的影響。

### 3.尚未具有角的保留概念

在第二大題角的比較大小題目中，研究者為了再次確認學生是否了解題意，在剛開始訪談本題時，會先請學生用三角板依題意畫出甲角和乙角。訪談時有的學生畫出兩個角後，會說這兩個角一樣大，但是在作答判斷角的大小時，又會受直覺法則干擾以看到的圖形來作判斷；有的學生依題意畫出兩個角後，並不知道這兩個角是一樣大的，S09（中分組）、S10（中分組）、S12（低分組）、S13（低分組）、S14（低分組）就是這一類的學生，可以說他們尚未具有角的保留概念，以下為 S10 的部分訪談摘要。

**S10 (中分組、男)**

T：請你說說看這題的題目要你做什麼？

S10：甲、乙哪一個角比較大？

T：題目的意思是什麼？

S10：選出哪一個是比較大的？

T：那題目說甲角和乙角都是用三角板的同一個角描下來的，這句話你看得懂嗎？

S10：就是把他們同一個角描下來。

T：好，這是三角板，題目的意思是怎樣？

S10：把這個邊線描下來變成甲，乙的話也是一樣從這個角再描一次（指著三角板同一個角）。

T：第一題你認為那個角比較大，為什麼？

S10：乙角。因為它們的大小不一樣，長度不一樣。

T：你說的大小是指哪裡？

S10：大小就是這整個角。

T：可以再說清楚一點嗎？

S10：就是這個邊線比較長，又很大，整個區域都很大。

S10 能夠正確操作用三角板的同一個角描出甲角和乙角，可是問他甲角和乙角哪一個較大時，卻不會想到同一個角描下來的甲角和乙角應該一樣大，可知 S10 尚未具有角的保留概念。

## 第六節 角的測量

在紙筆測驗的題目中，第六大題和第七大題（題目詳見附錄四）是關於「角的測量」，題目分為「一邊為水平方向的角測量」，以及「兩邊皆非水平方向的角測量」。

研究者發現數學課本和習作上，給定的角邊長都小於 3 公分，而量角

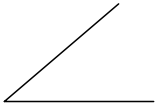
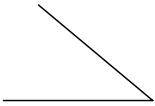
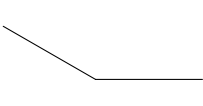
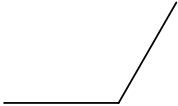
器的半徑長度大約是 5 公分，因此想要知道若是角的邊長再長一點，對學生而言是否會更易於測量。故六、七大題均有 8 個小題，第六大題的邊長為 3 公分以下，和課本、習作上的差不多；第七大題的邊長為 5 公分以上。除了 8 個小題的排列順序及邊的長短不同，所測量的角度是一模一樣的，目的是想知道邊的長短是否會影響測量結果，以期更進一步了解學童在「角的測量」方面的學習狀況及學習困難。

### 一、筆試題目與答題統計分析

#### (一) 一邊為水平方向的角測量

題目六(2)、六(6)、六(7)、六(8)以及七(1)、七(2)、七(6)、七(7)是一邊為水平方向的角測量，其中又分成「讀內圈角度」及「讀外圈角度」的題目，以供互相對照。

表 4-6-1 「一邊為水平方向的角測量」答題統計表

題目圖形				
角度	銳角 40° (內圈刻度)	銳角 40° (外圈刻度)	鈍角 150° (內圈刻度)	鈍角 120° (外圈刻度)
測驗題號(短邊)	六(6)	六(2)	六(7)	六(8)
答對率(%)	93.1	89.9	88.7	76.1
測驗題號(長邊)	七(2)	七(6)	七(7)	七(1)
答對率(%)	91.2	91.2	90.6	86.2

註：同一欄為相同角度，例如：六(2)、七(6)為相同的角度，只是邊長長短不同。

從表 4-6-1 中可以發現，銳角題六(2)、六(6)、七(6)、七(2)的測量正確率較高，約為 90% 以上；鈍角題六(7)、六(8)、七(7)、七(1)的正確率略低一點，約在 76% 到 90% 之間。

判讀外圈數字的題目有：第六(2)、七(6)、六(8)、七(1)題。第六(2)、七(6)題是相同的題目，此題的角度是 $40^\circ$ ，測量時要看量角器外圈的數字。由表4-6-1顯示，第六(2)題的答對率是89.9%，第七(6)題的答對率是91.2%，第七(6)題的答對率略高於第六(2)題的答對率，邊長較長的題目答對率較高。

第六(8)、七(1)題是相同的題目，此題的角度是 $140^\circ$ ，測量時要看量角器外圈的數字。由表4-6-1顯示，第六(8)題的答對率是76.1%，第七(1)題的答對率是86.2%，第七(1)題的答對率略高於第六(8)題的答對率，邊長較長的題目答對率較高。

判讀內圈數字的題目有：第六(6)、七(2)、六(7)、七(7)題。第六(6)、七(2)題是相同的題目，此題的角度是 $40^\circ$ ，測量時要看量角器內圈的數字。由表4-6-1顯示，第六(6)題的答對率是93.1%，第七(6)題的答對率是91.2%，第六(6)題的答對率略高於第七(2)題的答對率，邊長較短的題目答對率較高。

第六(7)、七(7)題是相同的題目，此題的角度是 $150^\circ$ ，測量時要看量角器內圈的數字。由表4-6-1顯示，第六(7)題的答對率是88.7%，第七(7)題的答對率是90.6%，第七(7)題的答對率略高於第六(7)題的答對率，邊長較長的題目答對率較高。

綜上所述，可以知道邊長較長的題目似乎比較有利於學生測量，特別是在要看外圈數字的時候，邊長較長的題目答對率都較高。

## (二) 兩邊皆非水平方向的角測量

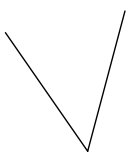
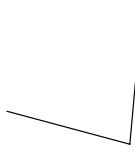
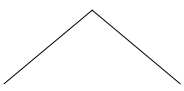

題目六(1)、六(3)、六(4)、六(5)以及七(3)、七(4)、七(5)、七(8)是兩邊皆非水平方向的角測量，其中有 $80^\circ$ 、 $100^\circ$ 等接近 $90^\circ$ 的角，目的是想知道學生是否依直覺判斷鈍角或銳角，由此判讀角度，或是會從



0°開始數角度。

從表 4-6-2 中可以發現，「兩邊皆非水平方向的角測量」正確率較「一邊為水平方向的角測量」為低，都在 90%以下，其中題六（5）、七（3）為鈍角 100°的角度測量，正確率最低（66.7%至 78.6%），可知接近 90°的鈍角容易測量錯誤。

表 4-6-2 「兩邊皆非水平方向的角測量」答題統計表

題目圖形				
角度	銳角 50°	銳角 80°	鈍角 100°	鈍角 160°
測驗題號（短邊）	六（4）	六（1）	六（5）	六（3）
答對率（%）	87.4	86.2	66.7	81.8
測驗題號（長邊）	七（5）	七（4）	七（3）	七（8）
答對率（%）	88.1	85.5	78.6	89.9

註：同一欄為相同角度，例如：六（4）、七（5）為相同的角度，只是邊長不同。

在「兩邊皆非水平方向的角測量」的題目中，第七大題答對率整體而言高於第六大題，換句話說，邊長較長的題目答對率整體而言高於邊長較短的題目。此結果和「一邊為水平方向的角測量」是一致的，因此邊長較長的題目可能對學生較有利，比較好測量。

## 二、訪談資料分析

### （一）正確答題的想法

接受訪談的學生當中，第六、七大題角的測量完全正確的學生有 S01

(高分組)、S03 (高分組)、S08 (中分組)、S09 (中分組)、S02 (高分組) 不小心將第七(3)題  $100^\circ$  寫成  $10^\circ$ ，否則也應該全對。這些學生測量角度主要有兩種方法：(1)從對齊標 0 的邊開始數；(2)以  $90^\circ$  判斷角的大小。

### 1.從對齊標 0 的邊開始數度數

接受訪談的學生當中，會先看角的一邊是對齊內圈還是外圈標 0 的線，再從 0 開始數的學生有：S01 (高分組)、S02 (高分組)、S03 (高分組)、S04 (高分組)、S06 (中分組)、S07 (中分組)、S08 (中分組)、S09 (中分組)、S10 (中分組)、S11 (低分組)。以下為 S01、S03、S04 的部分訪談內容。

#### S01 (高分組、女)

T：可不可以請你說一下，你在量角度的時候，有什麼方法？步驟是怎樣？

S01：有，頂點對齊角的頂點，把量角器的一邊對齊角的一邊，看出它的角度。

T：怎麼看？

S01：從它的 0 在哪裡看出來。

T：像第 1 題要怎麼看？

S01：0 在這邊 (外圈)，到這裡是 80 度。

T：為什麼不會看成 100 度呢？

S01：因為 100 度的 0 是從這裡開始的。

T：所以你每次都會先看 0 在裡面還是外面嗎？

S01：會。

#### S03 (高分組、女)

T：可不可以請你說一下，你在量角度的時候，有什麼方法？步驟是怎樣？

S03：中心點跟頂點先對好，0 在內圈，我就會看內圈的數字。

#### S04 (高分組、男)

T：可不可以請你說一下，你在量角度的時候，有什麼方法？步驟是怎樣？

S04：我會先看 0 是在外面還是裡面，再從 0 對過來，看是幾度。

S01 的量角步驟，是先把量角器的中心點對齊角的頂點，再把量角器標 0 的邊對齊角的一邊，判讀角度會從 0 開始數，S03、S04 量角的步驟和 S01 是一樣的。

由於課本上指導量角器的使用步驟中，有提到量角度要先看角的一邊是對齊內圈還是外圈標 0 的線，老師在教學時也都有強調，因此接受訪談的學生中，有一半以上會使用這種策略來判讀角度。

研究者發現，會使用此方式量角的學生，在角的測量方面的題目答題表現都很好，其中 S01、S03、S08、S09 在第六、七大題測量角度的題目完全答對，其他使用此策略的學生，答題表現也都不錯，即使沒有全對，也大概只寫錯 1-2 題，可知這種此方式量角是非常有效的策略。因此教師在指導學童使用量角器量角時，應強調要從 0 開始數。

## 2.以 90°為標準判斷角的大小

**S05 (高分組、男)**

T：請問你在量角度的時候，怎麼看它是幾度？有沒有什麼技巧？

S05：因為它比 90 度還小，所以是 80 度。

T：第 8 題呢？

S05：60 度，比 90 還小。(正確答案為 120 度)

T：第七大題第 1 題？

S05：120 度，比 90 還大。

S05 會以 90°當作區隔的標準，先判斷角度比 90°大還是比 90°小，若是比 90°大，就選擇量角器上較大的刻度，比 90°小，就選擇量角器上較小的刻度。可惜 S05 是以估測的方式判別比 90°大或小，在角度測量的題目當中，錯了一題，若是能以量角器中間的 90°線為判別標準來看角的大小，

較不容易出錯。以  $90^\circ$  當作標準來判斷角的大小，也可說是一種好的量角策略。

## (二) 容易產生的困難

透過訪談實際觀察每個學生測量角度的方法，研究者發現訪談學生在使用量角器測量角度時，可分為以下幾種策略來判讀角度：(1)直觀判斷角度大小；(2)邊長比量角器短的看內圈數字，比量角器長的看外圈數字；(3)沒有先對準就開始測量。

### 1. 直觀判斷角度大小

接受訪談的學生當中，會先判斷角度大小，再看選擇量角器上內圈或外圈數字的學生有：S05（高分組）、S07（中分組）、S13（低分組）。以下為 S05、S13 的部分訪談內容。

#### S13（低分組、女）

T：可不可以請你說一下，你在量角度的時候，有什麼方法？步驟是怎樣？

S13：就是先對齊這個點（量角器中心點對角的頂點），然後再對齊這個線（量角器標 0 的線對齊角的一邊），然後再看角是大的還是小的，如果看起來是大的，就會選大的數字。

T：可不可以請你說一下，你在量角度的時候，有什麼方法？步驟是怎樣？

#### S15（低分組、男）

T：那你怎麼知道這個角度是 80 不是 100？

S15：自己覺得。

T：那你會覺得這是 100 度嗎？

S15：不可能。

T：為什麼不可能？你從那裡覺得它應該是 80 度？

S15：從它的角。

T：可以說清楚一點嗎？

S15：如果是 100 度，它應該要大一點。所以我覺得它應該是 80 度。

T：你有把它用 90 度來比嗎？你有想過比 90 度大還是 90 度小嗎？

S15：沒有想過。

T：所以這裡有 80 跟 100 度那你覺得是小的就選比較小的數字？

S15：嗯……

T：第 2 題呢？

S15：80 度。

T：為什麼？可是你答案寫 100 現在說 80 度。

S15：我覺得它現在開口大小就覺得它是 80 度。

S13 和 S15 在量角度的時候，都會先看角的大小，但是純粹憑感覺判斷，覺得角是大的，就報讀量角器上較大的角度，覺得角是小的，就報讀量角器上較小的角度。

雖然 S13 和 S15 也是先判斷角的大小，可是並沒有一個標準來決定什麼是大的角、什麼是小的角，因此在角度測量的題目當中，錯了比較多題。

## 2. 依角的邊長長短，選擇看量角器內圈或外圈的度數

接受訪談的學生當中，會依角的邊長長短，選擇看量角器內圈或外圈度數的學生有 S12(低分組)、S14(低分組)。以下為 S14 的部分訪談內容。

**S14 (低分組、女)**

T：請問你在量角度的時候，怎麼看它是幾度？步驟是怎樣？

S14：頂點對要量的那一個圖形的頂點，然後就看這條線對在哪裡。

T：那例如這樣指過來，有可能是 40 度或 140 度，你要怎麼判斷要寫那個度數？

S14：看這個線比到哪裡。

T：例如第七大題第 1 題(邊較長)你怎麼判斷？

S14：我判斷是外面這裡。

T：為什麼？

S14：因為這條線比較長已經超出外面。

T：這樣就要看外面嗎？

S14：對。

T：好，那我們來看第六大題第 8 題（邊較短），是幾度？

S14：40 度。

T：為什麼？

S14：因為頂點對中心點，這條線還沒有超出外面，所以要看內圈。

T：所以如果線比較長，你會看外圈；線比較短就看外圈，這樣嗎？

S14：對。

S14 在使用量角器量角度的方法為：當線段比較短時，看量角器內圈的數字；線段比較長時，看量角器外圈數字。我們可以說 S14 並不懂得如何使用量角器。

研究者在實際測量課本和習作上的角度時，發現教科書上所提供待測量的張開角邊長都小於 3 公分，而之前又有研究（黃金泉，2003）指出學童傾向於以量角器內圈的數字判讀角度，綜合這兩項發現，研究者懷疑學生會傾向於以量角器內圈的數字判讀角度，可能是因為題目所給的邊長較短。再對照學生的答題狀況，短邊題目中，第六（2）、六（8）題需判讀外圈刻度，不過各有 7.5%、19.5% 的學生將答案寫成內圈刻度的度數；長邊題目中，第七（2）、七（7）題需判讀內圈刻度，不過各有 6.3%、6.3% 的學生將答案寫成外圈刻度的度數，平均約有 10% 的學生會依角的邊長長短，選擇看量角器內圈或外圈度數。

### 3.沒有先對準就開始量角

S15（低分組、男）

T：第 3 題可以量給我看嗎？

S15：165 度（問卷上答案為 175 度，正確答案為 160 度）。

T：為什麼？

S15：因為它打開很大，就覺得它是 165 度。

.....

T：那第 6 題呢？

S15：45 度（問卷上答案為 40 度，正確答案為 40 度）。

研究者觀察 S15 在量角度時，往往沒有先對好就開始報讀角度，所以每次測量出來的結果都不一樣，例如第六（3）題，問卷上的答案是 175°，訪談時測量的結果是 165°，可是正確的答案應該是 160°。S15 在角的測量方面錯誤非常多，有時候量出來的角度是對的，有時候量出來的角度是錯的，就是因為他沒有先將量角器和角的邊對齊就開始量角。

### （三）題目邊長的影響

研究者將第六大題設計為邊長為 3 公分以下的角，第七大題設計為邊長 5 公分以上的角，除了題目所給的邊長長短不同，第六大題和第七大題的題目是一樣的。接受訪談的學生當中，認為邊較長比較好量的有：S04（高分組）、S05（高分組）、S06（中分組）、S08（中分組）、S10（中分組）、S11（低分組）、S14（低分組）。以下為 S04、S06、S05、S10 的部分訪談內容。

#### S04（高分組、男）

T：你覺得線長一點比較好量還是短的？

S04：長的比較好量。

T：為什麼？

S04：因為長的線會凸出量角器，這樣比較好對。

#### S06（中分組、女）

T：好，妳看那第六題的第 4 題和第七題的第 5 題，妳再量一次看看？妳覺得那個比較好量？

S06：這題（第七題的第 5 題）。

T：為什麼？

S06：因為它線比較長，比較大，比較跟量角器有一點.....可以跟他比較好對。

T：你會覺得比較好對嗎？

S06：對。

T：好那老師問你最後一個問題，像你這個第六題變的比較短，第七題變比較長，那你覺得這兩個那一個比較好量？還是沒差。

S08：這個比較好量。

T：第七大題比較好量。為什麼？

S08：因為它的比較大一點，然後線比較長，比較好看到。

T：你覺得線比較長比較好看到？線比較短為什麼比較不好看到呢？

S08：因為要是有的比較短一點點，然後要量的時候沒看到它的黑線會比較不明顯。

#### **S05（高分組、男）**

S05：大的比較好量

T：為什麼？

S05：比較清楚

T：怎麼說呢？

S05：.....

T：例如你量量看第和第七大題第 1 小題，會覺得那個比較好量嗎？清楚在哪裡

S05：大的會有一點突突的，會突出量角器。

T：這樣有差別嗎？

S05：嗯.....可以看得比較清楚。

T：那六大題第 8 小題呢？為什麼會不清楚？

S05：有兩個併在一起有點不清楚

T：什麼意思

S05：量角器的線和題目的線併在一起，所以會看錯，突出來比較不會看錯。

T：好，謝謝你！



**S10 (中分組)**

T：好，那老師告訴你第六大題線比較短，第七大題線比較長，你覺得那個比較好量？

S10：嗯.....長的比較好量。

T：為什麼長的比較好量？

S10：空間比較大。

T：空間比較大是什麼意思？

S10：就是那個什麼，就是還有線突出來，要不然如果線全部蓋住可能會看不清楚。

S04、S06 均認為角的邊長如果比較長，測量角度的時候會比較好對齊量角器的線，S05、S10 覺得角的邊長如果比較長，邊會突出量角器，這樣量角時不會被量角器的線遮住而看不清楚。

接受訪談的學生當中，認為角的邊長長短不會影響角度測量的有：S01 (高分組)、S02 (高分組)、S03 (高分組)、S07 (中分組)、S09 (中分組)、S15 (低分組)。以下為 S02、S03、S09 的部分訪談內容。

**S02 (高分組、女)**

T：那你在量第六大題和第七大題時，有覺得哪裡不同嗎？

S02：那個，他的角變大了，就是線變長了。

T：好，第六大題線比較短，第七大題線比較長，你覺得那個比較好量？

S02：都一樣。

**S03 (高分組、女)**

T：你覺得這題短的線比較好量還是長的線比較好量？

S03：沒有影響

**S09 (中分組、男)**

T：那你覺得線長比較好量還是線短比較好量？

S09：兩個都很好量。

S02、S03、S09 均認為角的邊長長短對量角時沒有影響，研究者發現認為邊長長短不會影響角度測量的學生，除了 S15 以外，在測量角度的題目答題表現都很好。由此可知，對於熟悉使用量角器的學生而言，角的邊長長短是不會造成影響的。