

第壹章 緒 論

Brown & Burton (1978) 提到一個學生在加法上的表現：

$$\begin{array}{r} 7 \\ +8 \\ \hline 15 \end{array} \quad \begin{array}{r} 9 \\ +5 \\ \hline 14 \end{array} \quad \begin{array}{r} 8 \\ +3 \\ \hline 11 \end{array} \quad \begin{array}{r} 6 \\ +7 \\ \hline 13 \end{array} \quad \begin{array}{r} 8 \\ +8 \\ \hline 16 \end{array}$$

當我們看到上述的加減法表現，很容易可以推得一個結論：「這個學生有正確的加法概念」。而此學生果然也不負眾望，在以下的三題裡，皆能作出正確的回答（ $9 + 9 = 18$ ； $17 + 8 = 25$ ； $19 + 4 = 23$ ），但接著他的表現就有點出乎意料之外，請看他的回答：

$$\begin{array}{r} 87 \\ +93 \\ \hline 11 \end{array} \quad \begin{array}{r} 365 \\ +574 \\ \hline 819 \end{array} \quad \begin{array}{r} 679 \\ +794 \\ \hline 111 \end{array} \quad \begin{array}{r} 923 \\ +481 \\ \hline 114 \end{array}$$

如果只看第一個式子 $87 + 93 = 11$ ，也許會認為這個學生可能是在頭腦混沌的情形之下做題目，不然就是他隨便作答，亦或是他一時疏忽，因為從他在前面五題中的表現，實在很難推論出 $87 + 93$ 是經過何種運算歷程，而得到 11 這樣的答案？但基本上，還是會認為這個學生應該還是擁有正確的基本加法知識，這題會出錯只是一時的不小心罷了！可是在接下來的三題裡，讓我們不禁開始對他加法能力產生懷疑，他是真的知道加法的運算規則嗎？

經由 Brown & Burton 的診斷結果發現，此學生的確擁有錯誤的加法運算知識，但這些錯誤只有在某些題目中才看得出來，在其他題目裡，卻會讓教師以為學生已經學會了加法運則。因此從上面的例子裡，隱約透露出一些現象與問題：

1. 學生回答出正確答案，意味著什麼？他真的瞭解教師所傳達的概念訊息嗎？
2. 學生的錯誤答案是一時混沌、疏忽還是他根本無意去算？或者是有其他更為深層、基本的因素存在？
3. 學生的錯誤是因為他自己所引起的？還是教師也必須負一部份責任？
4. 從學生的答案中，教師可以得到什麼樣的訊息？教學能否因此而更為精進？
5. 學生從教師對於錯誤答案的回饋，可以得到什麼樣的樣的訊息？

第一節 研究動機

一、為什麼要研究錯誤？

對於學生所持有而異於教學者之想法，曾有學者將其稱之為「另有架構」(alternative frameworks)、「學童科學」(children's science)、「迷思概念」(misconception)、「錯誤概念」..等。其中更有學者將這些有關科學概念的研究分為四種，分別為人種誌進程、迷思想法、社會效應及心智表徵，在這四個架構中，各有其關注的焦點，但卻有所關連 (Solomon, 1993 ; 許榮富、黃芳裕，民 84)。從「人種誌進程」來看，研究者對學生擁有哪些科學想法較有興趣，但並不想對於他們的想法是對還是錯予以判準；而「迷思想法」的研究則較偏重於教學的角度，也因此必須判斷學生所持有的概念是錯誤還是正確的，正確的概念要努力地傳授，錯誤的概念則必須加以改變；在「社會效應」方面，則是希望從社會文化的層面，更加深入瞭解學生想法的緣由，而所謂的社會文化，大至一個民族的文化與社會風俗習慣，小至學校文化、班級文化或學生所處的環境文化；在「心智表徵」方面，則是受到認知心理學發展的影響，希望藉由研究學習者的心理層面來更深一層地瞭解學習者的想法。

而在數學錯誤的研究領域當中，研究者的基本假設是希望透過對於學生錯誤概念的瞭解，使教師的教學能更為有效，而學生也能透過犯錯，學習到正確的知識 (李芳樂，1993 ; Brown & Burton, 1978 ; Fishbein, Deri, Nello, & Marino, 1985 ; Blando, Kelly, Schneider, & Sleeman, 1989 ; Ben-Zeev, 1995)。因此，研究

的進行方式也不離上述的四個架構，大部分皆是先透過瞭解學生的解題行為表現，再經由訪談或推論的方式，將他們所犯的錯誤予以歸類（如梁淑坤，民 85；張景媛，1994），之後再試圖找出影響學生犯錯的因素（Fayol, Abdi, & Combert, 1987），或是為學生錯誤的表現提出一個合理的解釋（Fishbein et al., 1985；Brown & VanLehn, 1980；Ben-Zeev, 1995）。

因此，如何對學生的錯誤做出正確診斷就顯得十分重要，若教學者無法正確地瞭解學生犯錯的因由，則便無法做出正確的治療（楊瑞智，1990；Brown & Burton, 1978），而在這樣的情形之下，不但無法有效預防，還可能引導學生犯另類的錯誤，或者在補救教學的過程中，造成師生雙方的挫折感。但學生的錯誤因由究竟是什麼？是外在環境（例如：教材、教師、教學...）？還是內在因素（例如：學生的解題習慣、心理機制...）？能否有一個錯誤理論能解釋學生所產生的錯誤？影響學生犯錯的機制又是什麼？

二、錯誤的成因

在數學上，關於學生錯誤表現的研究大抵分為計算題的錯誤和文字題的錯誤兩種。在計算題方面，學者認為學生的錯誤應是與工作記憶(working memory)（Fayol, et al., 1987）教學法（呂溪木，民 72；Fichbein, et al., 1985）過去解題經驗（張景媛，民 83；Ben-Zeev, 1995；Zhu & Simon, 1987）符號（Fuson, 1992）等等有關。在文字題方面，一般的研究者又分成計算部份和概念部份來進行討論。在計算部份所發生的錯誤，和在計算題所發生的錯誤大致一樣；在概念部份則與題意的瞭解（呂玉琴，民 78）性別（張景媛，民 83）有關。此外，亦有學者認為學生所犯的錯誤，並非是錯誤地遵循正確規則，而是正確地遵循錯誤規則（張景媛，民 83；張素鎔，民 76；古明峰，民 87；Ben-Zeev, 1995）。但這些因素是否真的涵括了所有學生發生錯誤的因由？還是有一個更廣泛的理論能對學生的錯誤加以解釋？意即是否有一個更深層的機制在影響學生的解題表現？如果有，這個機制又是什麼？

三、學生的推理能力

關於邏輯推理能力的研究，遠從 1950 年代即開始，包括歸納推理及演繹推理兩大部份，然大部份的研究結果並未與數學領域有所相關。之後，數學與哲學大師羅素將數學邏輯化，而創立了所謂的數理邏輯；NCTM 則於 1989 年提出「數學即推理」(Mathematics as Reasoning) 為其課程標準之一；學者們也提出透過數學，可以讓學生培養邏輯推理能力（如王九達，民 83）。這是否顯示在數學解題能力和邏輯推理能力之間，存在著其密不可分的关系？因此，學生在數學領域中的表現，是否和其邏輯推理能力相關？如果有相關，那麼又是哪一種推理能力？

綜上所述，在學生錯誤的研究中，以研究學生在加減法基本運算中所犯的錯誤佔大多數，其他還有如乘除法、代數以及對數等等，而在這些研究中，研究者通常是先對學生的錯誤表現加以分類，接著分析成因，最後並提出在教學上的建議。而鑑於加減法的錯誤類型已相當具有規模，且本研究希望在數學解題能力與邏輯推理能力間做初步的探討，因此，本研究將研究的焦點放在對數的領域上。再者，為了清楚地瞭解受試者的推理過程，故本研究以較高年級的學生為研究對象，以便進行解題後之訪談。

此外，在李芳樂(1996)探討學生在對數上所犯的錯誤之研究指出，當學生在解題時，應該是有一個內在控制系統、反射性機制在影響著學生選擇計算法則，但他並沒有對此內在系統、機制做進一步的驗證。其中，他已將學生在對數裡的錯誤加以分類，並找出學生產生錯誤時所採用的主要誤則，更進一步地對學生的錯誤原因加以分析。因此，本研究除了探討學生在對數領域中所犯的錯誤並加以歸類外，也將試圖找出一個較為具體的深層影響機制——邏輯推理。如果數學是推理，如果學生的錯誤是合理的錯誤 (rational error)，那麼學生在邏輯推理方面的表現應該與學生解題能力的表現有著某種程度的相關性。

另外，Ben-Zeev (1995)的研究指出，學生在遇到一個新的計算問題時，會正確地遵循錯誤的法則，這個法則發生的原因可能是受到學生過去的先備知識

和過去的經驗、例子影響所致。因此，此錯誤成因也會在本研究的研究範圍中呈現。

第二節 研究目的

本研究的最終目的是希望找尋一個能說明學生為何犯錯的最佳解釋，有鑑於現有的解釋理論都有其各自的限制與專注的領域，所以研究者希望透過一個全新的角度來看待錯誤，進而探討錯誤成因，也許能有一些不同的發現與詮釋。

在 Ben-Zeev (1995) 的研究中，他設計了一個新數系 (NewAbacus)，欲證實錯誤的產生是否可歸因為學生過去的先備知識或經驗；而在李芳樂 (1997) 的研究裡，則探討高一學生在有關對數的運算過程中出現哪些誤則 (mal-rules, 錯誤的解題法則)，並將誤則的發生歸因為數個主要誤則 (prime mal-rules) 的不同組合。因此，根據上述的兩個研究，研究者設計了一份與對數運算有關的題目，稱之為「新對數問題」，並以未學過對數的國中生為研究對象，探討對數錯誤的原始成因。有鑑於此批受試者並未學過有關對數的概念，且本研究中乃用另一符號「peculiar」來取代原本的對數符號「log」，因此，從研究結果中可以得知促使學生在對數運算時產生錯誤表現的先備知識有哪些？此外，本研究亦設計了一份與邏輯推理有關的題目，期待能從此一新的角度，來看學生的錯誤產生。

因此本研究乃專注於驗證初步假設（數學解題能力與邏輯推理能力有相關）以及尋找更為適當的錯誤成因解釋。由於此為一初探性質的研究，為避免研究者的初步假設乃為過度的推論，本研究將分為三個階段進行，此三階段是一連串不斷探索的過程，但其最終目標是一致的。總括來說，本研究希望達到下列目的：

1. 探討對數的錯誤類型及其成因。
2. 探討邏輯推理的錯誤類型及其成因。
3. 探究邏輯推理能力與對數運算能力之間的關係。

其中，三個階段由於其各自不同的專注焦點，故各有其不同的研究目的，分述如下：

研究一

1. 探討國一數學資優生的對數錯誤類型及其成因。
2. 探討國一數學資優生的邏輯推理錯誤類型及其成因。
3. 探究國一數學資優生的邏輯推理能力與對數運算能力之間的關係。

研究二

1. 探討一般中學生的對數錯誤類型及其成因。
2. 比較不同背景之中學生所產生的對數錯誤類型之異同。
3. 探究一般中學生在抽象對數運算的困難原因。

研究三

1. 探討一般國中生的對數錯誤類型及其成因。
2. 探討一般國中生的邏輯推理錯誤類型及其成因。
3. 探究一般國中生的邏輯推理能力與對數運算能力之間的關係。

第三節 研究問題

根據本研究三個不同階段所欲達到的研究目的，研究者針對不同的目的提出其各自的研究問題，分述如下：

研究一

- 1-1. 國一數學資優生有哪些對數錯誤類型？
- 1-2. 國一數學資優生所產生對數錯誤類型之成因為何？
- 2-1. 國一數學資優生有哪些邏輯推理錯誤類型？
- 2-2. 國一數學資優生所產生邏輯推理錯誤類型之成因為何？

- 3-1. 國一數學資優生在邏輯推理問題與新對數問題的表現之相關性為何？
- 3-2. 國一數學資優生在邏輯推理問題與新對數問題推理的表現之相關性為何？

研究二

- 1-1. 一般中學生有哪些對數錯誤類型？
- 1-2. 一般中學生所產生對數錯誤類型之成因為何？
- 2-1. 學過對數的高中生與未學過對數的國中生所產生對數錯誤類型有何不同？
- 2-2. 學過對數的高中生與未學過對數的國中生所產生對數錯誤類型為何？
- 3-1. 一般學生對於新對數符號的看法為何？
- 3-2. 一般學生在應用抽象公式時的困難為何？

研究三

- 1-1. 一般國中生有哪些對數錯誤類型？
- 1-2. 一般國中生所產生對數錯誤類型之成因為何？
- 2-1. 一般國中生有哪些邏輯推理錯誤類型？
- 2-2. 一般國中生所產生邏輯推理錯誤類型之成因為何？
- 3-1. 年齡是否為影響一般國中生在新對數問題得分的因素？
- 3-2. 數學成就是否為影響一般國中生在新對數問題得分的因素？
- 3-3. 邏輯推理能力是否為影響一般國中生在新對數問題得分的因素？

研究者希望透過上述各研究問題之探究，能達到本研究所提出的三大目的，即瞭解對數錯誤類型及其成因、瞭解邏輯推理錯誤類型及其成因以及瞭解邏輯推理能力與對數運算能力之間的關係，特別是第三個目的，希望在透過這一連串的探索過程，能對此兩能力間關係有更進一步的瞭解。