

## 第五章 討論與建議

以下將就本研究的研究成果，提出討論與建議。其中第一節為結果討論，分別就一般中學生的邏輯推理能力、對數解題能力及其成因解釋予以論述，第二節則針對研究結果予以教學上建議，並針對日後可研究之方向提供建議。

### 第一節 研究結果的討論

#### 一、一般中學生的邏輯推理能力

整體而言，研究三的受試者在「推理問題乙」的得分表現偏低，此現象是否意味著國中生的推理能力有待加強？以困難度來說，「推理問題乙」中的第二、三部份較為困難，相對而言，其第一部份則較為簡單，但與其他國外的文獻相較之下，此群台北市某中學學生在第一部份中某些題型的答對百分比卻出奇地低，似乎意味國內國中生的推理能力似乎是需要加強訓練的，此推論可與 Wildman & Fletcher (1977) 的研究比較而得，將其針對 8 年級學生的推理表現的研究成果，與本研究中研究三的國二學生在推理問題中的表現比較後（見表 5-1-1），有如下的發現：

表 5-1-1 台北市某國中之國二生與國外 8 年級學生推理問題答對百分比之對照表

第二前提 第一前提	MP	DA	AC	MT
AA (P → Q)	87.5 87.0	7.1 16.0	25.0 18.0	5.4 73.0
AN (P → ~Q)	62.5 84.0	23.2 13.0	55.4 33.0	39.3 76.0

NA ( $\sim P$ Q)	23.2	8.9	16.1	3.6
	80.0	6.0	13.0	51.0
NN ( $\sim P$ $\sim Q$ )	14.3	37.5	26.8	41.1
	80.0	16.0	24.0	56.0

註：每小格的「第一行」數字為台北市某國中之國二生的答對百分比，而「第二行」數字為國外 8 年級學生的答對百分比

從表 5-1-1 發現，在 MP 與 MT 兩題型中，台北市學生的推理表現遠低於國外學生，除了屬於 MP 的 AA 題型外，其答對百分比的差異從 15% 到 65.7%，但另一奇特的現象是，在 DA 與 AC 的表現，卻顯示出台北市的學生表現較優於國外學生。但這並不意味著兩國學生的推理能力相當，相反地，它顯示出台灣學生的推理能力較之為差，此論述乃根據 Evans 等人 (1993) 所提出的，學生在面對 DA 或 AC 題型時，當遇到一個與題目第一前提前後件皆不相符合的情形，則易傾向於選擇「資料不足」，因此，雖然學生能回答正確，但並不表示其推理能力較高，有可能是一種碰巧的情形。從 MP 的回答也可支持上述之論述，在各推理文獻中多指出，MP 應是最為容易的題目，但國內國二生的表現卻顯示出他們並無法掌握此命題，故其推理能力的確有其可訓練的空間

另外一個奇特的現象是，在三個年級中，其在各題的表現並沒有一定的優劣順序 (見表 5-1-2)，此與 Wildman & Fletcher 的研究中，所呈現出在 MP、AC 與 DA 題型中，推理表現會年齡增加而有所增進的情形有異。

表 5-1-2 台北市某國中之各年級學生推理問題答對百分比之對照表

第二前提 第一前提	MP	DA	AC	MT
	AA (P Q)	85.5	12.9	30.6
87.5		7.1	25.0	5.4
95.9		9.6	34.2	4.1
AN (P $\sim Q$ )	48.4	25.8	54.8	33.9
	62.5	23.2	55.4	39.3
	56.2	30.1	68.5	42.5
NA ( $\sim P$ Q)	14.5	14.5	30.6	6.5
	23.2	8.9	16.1	3.6
	26.0	12.3	20.5	9.6
NN ( $\sim P$ $\sim Q$ )	9.7	35.5	25.8	41.9
	14.3	37.5	26.8	41.1
	15.1	39.7	19.2	56.2

註：每小格的「第一行」數字為國一學生的答對百分比，「第二行」數字為國二學生的答對百分比，「第三行」數字為國三學生的答對百分比

從此群學生的表現中發現，年級較為低的學生在某些題型的表現上反倒優於較高年級的學生，依照 Wildman & Fletcher (1977) 的說法，這是與低年級學生所具有的孩童邏輯有關，由於較低年齡的學生其推理能力較為差，因此他們會用一種較為直覺的方式來進行思考，故此雖然低年級學生在某些題型的表現上優於高年級的學生，但並不意味著他們較能掌握該推理能力。從表 5-2 中，特別可以觀察到，在有關於 DA 的 NA 題型中，以及有關 AC 的 AA 與 NA 題型裡，一年級學生的表現皆高於其他兩個年級，另外二年級學生在有關於 DA 的 NN 題型中其表現地較三年級為佳。

因此，整體來說，邏輯推理對於台北市的一般國中學生似乎有其困難，而在台灣目前的國中數學教材中，並沒有正式關於邏輯推理的單元，但從上述國中生在推理能力上的表現，是否應考慮將推理能力放入教材單元中，用以訓練國中生的推理能力，這一點值得數學教育工作者與教材編寫者深思。

## 二、推理錯誤是一種合理的錯誤

從研究三的受試者在「推理問題乙」的表現中發現，受試者可能有幾個錯誤推論的特徵，一是視「 $P \rightarrow Q$ 」為「 $P \rightarrow Q$ 」；二是會忽略第一前提中的部份資訊，只擷取其中部份資訊，例如：他們可能忽略正反面的限制，只注意到題目中所出現的數字；三是遇到與第一前提的前後件表面形式不相符時，會傾向於不加以考慮。

第一個特徵顯示有可能是因為學生受過太多的計算訓練，而缺乏思維的訓練，因此容易視在不同兩邊的語句是可以互相推演的，如果這猜想屬時，那麼教師宜多加培養學生有解決問題的邏輯思維。針對學生所出現的第二個特徵，學生在推理的過程中可能會有意或無意地選擇性注意題目資料，例如，他們會

重數字而忽略文字，如果這與學生在解文字題時的反應相彷彿，那麼教師對於學生解文字題時，與其主動地告知他們有哪些條件需注意，還不如藉由推理能力的思維訓練，教導學生主動地注意各個明顯或不明顯的解題關鍵還要來的積極、有效。第三個特徵可能反映出部份學生的解題態度——「遇到困難即宣告放棄」，放棄有等級之分，有的學生會直接空白不作答，有的學生則胡亂選擇一個答案，造成學生有如此反應的因素有很多，最主要的原因應是學生在數學成就上得不到滿足，如果數學學習的目標不再只是強調解題的正確性，而也能鼓勵學生主動地的推理思考，或許能稍加改變。

### 三、一般中學生的對數解題能力

整體來說，由於本研究採用一群未學過對數的國中生，觀察其在抽象對數問題中所產生的錯誤類型，藉以瞭解一般中學生，在尚未完全進入對數單元的學習時，有哪些先備因素會影響其未來之對數解題表現，結果發現，這些國中生易犯交換律（C型）、分配律（D型）與轉換型（T型）三種主要的錯誤類型。而產生這三種錯誤的原因主要有二，一是與學生過去所學的知識與其解題經驗有關，其中包括有基本分配律、交換律及代數之運算技巧與知識，二是與學生對於抽象對數公式的詮釋建構有關，包括學生易將對數公式詮釋為「加變乘，減變除；乘變加，除變減」，意即他們會把公式詮釋為一個對他而言較有意義的法則。

在與李芳樂高中生的研究結果相比較之下發現，此三種錯誤類型經由教導後，其錯誤發生率還是極高，故教師在教導對數單元時，除了要注意學生是否會按其背景知識而建構出錯誤的解題法則，並宜特別留意學生對於對數公式的錯誤推論。

另外，若是單就國中生本身處理抽象對數公式的能力來看，發現數學成就是一個重要的影響因素，其中，高數學成就的學生在詮釋正確的抽象對數符號能力，的確較低數學成就的學生為高，但從另一層面觀之，若是學生在看到抽象的公式時，都能憑過去的背景知識，嘗試詮釋公式的運用法則，則為一值得擔憂之處，因為這會影響到正式教學的成效，故此，若教師教導時並沒有正確

教導學生使用公式的條件，則學生極易因著他的主動建構而產生錯誤，且此錯誤不僅只發生於對數的領域當中，在其他的單元中亦如是，故教師實宜避免純粹的示範練習。

#### 四、對數錯誤的成因解釋

關於錯誤成因之理論，在第貳章文獻探討的部份已有提及，共分四種，包括生產系統理論、修補理論、內隱模式及類化理論。因此，以下將針對 C、D 與 T 等三類型錯誤，用不同錯誤理論予以論述，以尋找一個能說明此三種對數錯誤類型之錯誤成因理論。

以生產系統理論來看，Young & O'Shea (1981) 認為學生錯誤的產生是因為在運算過程中，對於正確的條件行動規則予以增加或減少，因此而產生錯誤。以此理論來看待上述的 C、D 與 T 型錯誤，乍看之下，似乎皆能合理的解釋，因為對於 C、D 型的錯誤，可說是學生沒有使用正確的對數運算法則，而選擇使用交換律或分配律來進行解題，但可惜的是它卻無法說明為什麼學生會增加或減少規則，其選用或不選用的標準在哪。以分配律型錯誤為例，在研究一中，學生在使用分配律進行解題時，可能是有意，也可能是無意，前者是在看到「小括號」的情形之下，做出選用分配律的動作，換句話說，在滿足「若有小括號」的前提下，他做出「則使用分配律的動作」，但對於後者而言，該學生並沒有一定的準則來判定要不要用？該不該用？他憑的純粹是他的直覺，因此生產系統理論似乎只能解釋部份錯誤。

以修補理論來看，它認為學生在不完整的學習與遺忘之下，會遇到解題的瓶頸，因此他會嘗試進行修補，修補不成，錯誤就因而產生。Ben-Zeev (1995) 更進一步地運用此理論說明，在修補的過程中，學生利用過去知識或經驗對所遭遇的解題困難進行過度推論，最後形成一個「合理的錯誤」，根據此說法，在本研究中所出現的 C 與 D 型錯誤應可算是一種「合理的錯誤」，但對於 T 型錯

誤仍無法有一完全合理的解釋，因為根據本研究結果顯示，T 型錯誤的產生是學生自行建構出一個解題規則，而對於一個未學過對數運算的國中生而言，如果他產生 T 型錯誤是因為他利用過去知識或經驗過度推論而得，那麼他所依持的知識或經驗為何？似乎也無法有一合理解釋。

從類化理論來看，學生在碰到一個不熟悉的計算題時，會因為能力不足而產生認知負荷，此時，他會沿用舊的方法來解決新的問題。在對數運算的範疇內，C 與 D 型錯誤應可算是符合此項解釋，但同樣的對於 T 型錯誤來說，仍有其限制在，故類化理論也只能解釋部份成因。

以內隱模式來看，Fischbein, et al., (1985) 認為學生在做每一個基本的運算都與一個內隱的、不自覺的、原始直覺的模式有關。因此，在對數運算的範疇內，C、D 與 T 型錯誤，皆為其內隱模式，但此理論的「不自覺的」、「原始直覺」定義的分野在哪？實令人有無所適從之感。根據 Fischbein, et al., (1985) 的說法，此模式的來源有二，一是學生在學校教學中所最先習得的概念，二是與人類最原始的、自然的、最基本的心智行為有關，更明確地說，人類會用一個有結構的模式對一些事實或想法加以詮釋，且此詮釋是主動的、積極的具意義的詮釋。其中第一個來源解釋，可以瞭解 C 與 D 型錯誤皆為對數運算的內隱模式，而對於第二個來源解釋，似乎也可將 T 型錯誤歸為內隱模式之一，因為根據研究二的訪談中發現，受試者會從所給定的抽象對數公式中，自行將之詮釋為「加（減）變乘（除），乘（除）變加（減）」，因為對他而言，這是一個較具意義的詮釋。故雖然此理論可說明 C、D 與 T 型錯誤，皆為對數運算的內隱模式，但卻仍然無法瞭解何時學生會使用此三個內隱模式，因為根據在研究二中，一位剛學過對數的高一生，他同時產生 D21 與 T21 型的錯誤，意即當他面臨到如  $\log 2 \times \log 5$  的算式時，他可能寫出  $\log(2 \times 5)$  或者是  $\log(2+5)$  的答案，前者是受 D 型內隱模式的影響，後者是則受 T 型內隱模式的影響，如是看來，內隱模式的解釋還是稍有不足。

總括來說，用上述四種理論解釋對數運算的錯誤時，皆有其限制之處。產品系統理論只能說明現象，但是無法說明為什麼；修補理論與類化理論也只能說明 C 與 D 型的錯誤，但對於 T 型錯誤仍有所限制；對於內隱模式來說，C、

D 與 T 型三者皆為對數運算的內隱模式，因此受試者皆有機會產生這三種錯誤，但此理論並未對於何時產生何型錯誤加以解釋，意即學生在選用此三種模式的判準為何。因此，如果上述的數種理論皆無法完全解釋對數的錯誤成因，則有兩方面的意涵，一為各理論間可能必須相互補足，才能對於錯誤類型全然解釋；二為也許存有另一更佳的理論，可以解釋這兒所討論的對數運算的錯誤，而關於第二方面的意涵，研究者相信此理論應有關乎於學生的推理。

#### 四、對數解題能力與邏輯的關係

按常理來說，當一個人看到一個陌生的公式時，如果他的解題動機被激發，很可能會促使他主動詮釋該公式，而在詮釋的過程中，由於此公式對他會有一定程度的困難，因此他會動用過去的先備知識或經驗來進行解題，如果因之而產生錯誤，那麼這個錯誤應可算是一種「合理」的錯誤。另外，如果詮釋的過程並不能產生什麼結果，那他很可能會動用到他的推理能力，使他能繼續向前邁進，因此在產生「合理」的錯誤之同時，學生不但會動用到他的先備知識，也極可能會運用他的推理能力來進行解題。故此本研究猜想，在面對陌生的新對數情景之下，學生或多或少都會運用其推理能力來進行解題，但本研究三的資料卻顯示，學生在新對數題目當中，雖犯很多錯誤，但其所產生的錯誤類型似乎比較可歸因為與他們所學過的分配律、交換律、甚至是與他們主動詮釋的能力有關，而其與邏輯之間的關係卻不是十分明顯。本研究只從迴歸分析中發現邏輯推理能力對於預測新對數表現有顯著的貢獻，可是他們兩者之間的關係卻似乎還是很弱。此結果之產生，有可能是因為本研究尚未掌握到在他們兩之間較為深層的關係，例如，本研究尚未掌握邏輯推理中哪一個錯誤類型與新對數的錯誤類型有關，不過這部份所分析的結果已稍微指出，訓練學生的邏輯思維對於學習新對數可能會有正面的幫助，因此從此層面來看，是否也應考慮在課程之中加入有關推理能力的單元？另外，此兩能力呈現出其相關性稍弱的現象，也有可能是因為兩類題目對國中生而言都很難，因此在其得分普遍偏低的情形下，也不容易發現他們之間的關係。

## 第二節 建議

### 一、對教學的建議

本研究中結果呈現，一般學生在面對或處理抽象對數公式時所遇到的困難，因此，此結果應可成為日後教學者的部份建議。

在有關公式的運用方面，本研究顯示，學生並不覺得公式是友善的，而其所運用公式的方法皆是採用「記憶」的方式，包括死記、多做練習題加深印象等，但當考試結束後，即會產生遺忘，因此，教師在教導有關公式的單元時，實需注意如何呈現公式，不能單只在講台上做示範練習，也需注意其呈現方式是否在一開始便使學生產生恐懼，另外，教師也需自省對於學生的要求，也許教會學生如何查閱公式，如何活用公式，比要求學生記住公式用以計算來得實際且重要。

關於學生對公式的不友善感覺，一方面來自於教師教法的影響，一方面也與公式本身的符號有關，本研究的結果顯示，學生對於新對數符號皆感其為無意義，並認為符號要有意義才好，但同時也指出，此符號雖然要有意義，但是最好僅代表一個意義，不能太多，否則在運算過程中易感困惑。因此，教學者在課堂中宜注意其所使用的代號，是否會容易造成學生的混淆，另外，在教科書方面，也許有些使用符號可以做部份修改，例如小刮號可以是代表平面座標，也可以代表兩數的最大公因數，諸如此類會引起學生誤解的符號實皆需考慮之。



而在研究一中對於四位資優生的解題表現觀察後發現，若學生能對於抽象對數公式進行左右互換時，其所產生的錯誤較少，因此，教導有關公式的運用時，也需注意避免總是要求學生從公式等號的某邊，推到另一邊，也需要考慮教導學生能同時注意兩邊，並予以靈活運用，另外，在這四位資優生中，有一位學生在運用公式時，初感困難，但在研究者允許他延長時間繼續解題後，其最後表現成果是四人當中最好的，其原因除了他能對公式進行正確的轉換外，給予學生足夠的時間，也許是一大影響因素，特別地在台灣的教學環境中，樣樣講求迅速確實，在此外在環境因素影響下，學生並無動機進行解題，因此可以預見當其遇逢困境時，會急於放棄，而不願多加思索，故教師也多需留意此現象。

## 二、日後研究方向

在研究一的四位數學資優生的訪談中，有一位學生在運用公式時顯示他能對公式進行正確的轉換，主要原因除了他有足夠的時間解題、能對於抽象公式作正確詮釋外，最重要的是，他有想到要進行轉換，但在研究中，並無法深究其原因，故日後的研究也可朝此方向，不但能瞭解學生的推理歷程，也許能從中探究錯誤產生的深層成因。

由於本研究尚未掌握到對數與邏輯之間較為深層的關係，故此應可為日後研究之方向。另外，不論在有關對數的表現方面，年齡與數學背景似乎都會影響學生在對數的表現，但影響對數錯誤表現的因素應不僅只於此二者，故日後對於其錯誤原因的研究也可從較為寬廣的角度來看，甚至也可多考慮邏輯推理的影響層面。值得一提的是，本研究三所呈現的結果雖然只對六個國中班級進行研究分析，但研究者也利用此工具對於學過對數的專科生進行施測，同時也包括問卷，故此研究成果只是一個開端，日後若有機會，將陸續呈現其他成果。