第貳章　文獻探討

本章旨在探討本研究之相關文獻，以做為本研究之理論基礎，並藉以建立本研究之研究架構。本章共分四節，第一節探討角概念的意義；第二節探討兒童幾何認知概念的發展；第三節探討角概念的相關研究；第四節為國小數學科角的教材內容分析。

第一節　角概念的意義

本節先解釋概念的意義，接著說明有關角的定義。

一、概念的意義

概念是人類思考和瞭解的工具，亦是學習的基本單位，經由有意義的學習而獲得的概念，使得人類能夠更深入思考，所以概念對我們的學習是很重要的（張鳳燕，1991）。概念會因為學習者的年齡、性別、經驗、能力、學習方法、學習歷程、學習者的文化環境、學習事物本身的性質……等，而有顯著的差異。因為概念是我們建構知識、技能的催化劑，所以概念形成的多少、正確與否，在在都會影響學習的效果。

我國心理教育學者張春興與林清山（1993）認為概念一詞具有廣義和狹義兩種意義：廣義的概念指個體對同類屬性事物獲得的概括性的單一經驗；狹義而言，以單一概括的名稱或符號，代表具有共同屬性事物的全體時，此名稱或符號所代表的就是概念(conception)。

概念是包括主要屬性(attribution)或特徵(features)的同類事物之總稱（鄭麗玉，1993），例如，椅子有許多種類與造型，有四隻腳的椅子、三

隻腳的椅子、有圓形的椅子、有方形的椅子……等，但是它們有共同的特徵，有一個朝上的平面，可以讓人們坐著休息，這就是「椅子」的概念。

Gagne 認為概念的基本意義為個人對一組觀察事物或其特質的行為反應，可分為具體的概念(concrete concept)與定義的概念(defined concept)，前者如「鳥」、「圖」、「顏色」等，以知覺上的特徵為分類的依據；後者如「溫度」、「舅舅」，無法從視覺上予以界定，而必須以語言或文字來說明（徐綺穗，1995）。

另外根據Vergnaud(1983, 1987)所提，構成一個概念的意義包含三個特性：(1)不變性：包含定義概念的性質；(2)符號的表示：表示概念的特殊方式；(3)情境：使概念有意義。根據Vergnaud的理論，概念形成時，不變性會出現，不變性的形式包含「基模的不變性」和「概念的不變性」，基模的不變性與能力有關，在特定的情境，兒童能有正確的作為；概念的不變性與兒童行為的效能有關，能將情境通則化。Vergnaud認為在概念的形成中，能夠以物體的性質和關係來描述，並藉由文字和其他表徵來表達，就是符號化，此為概念形成的完成部分。

一個概念是一個象徵的建構(symbolic construction)，它用來代表外界事物或事件的共同性，概念之所以形成，是由於我們能夠對外界的事物進行歸類(categorization)（鄭昭明，1997），藉著概念的形成，我們將訊息按概念分類處理，不須每一事物給一個名稱，可節省許多字彙及記憶上的負擔，因此可據以進行推理、決策或問題解決等思考活動，故概念形成可說是思考的基礎（鄭麗玉，1993）。

本研究綜合以上所述，「概念」是一種分類與整理個人抽象的或具體的經驗所得的觀念或想法，不論concept或conception，它們都是指一個獨特的心智表徵特質(idiosyncratic mental presentation)，亦是一個認知學習的

動態過程，平時隱藏於人類心智的觀念或想法中，只有在某一需求（例如測驗、競賽）時才會被人類表現於外，所以本研究以筆試測驗與個別訪談活動，來瞭解學童內心中對角的概念。

二、角概念的發展史

Matos(1990)將角概念的發展史，整理如下：

(一) 新石器時代的角度與方向

角度的觀念雖然在近代熱烈的討論，但是早在新石器時代就已經用有獨特的方法來解決有關於角度的問題。其中包括了利用星辰與行星的運行來預測天氣的變化，進而影響其文明文化的運作。較早期的文化，如Uaxactun 的馬雅人用角度的觀念所構造的建築物來解決他們居住的問題，例如：從金字塔頂端的中央來觀察，他們可以在夏天和冬至的天象上找出日出的時刻及晝夜平分點(Aveni, 1980; Broda, 1982; 引自Matos, 1990)，另外像雅典人也是將曆法的安排結合至天文星象的變化上，由這些文獻的記載可以看出古代對於角度的概念大多起源於要解決天文與曆法的問題。

(二) 埃及建築使用傾斜的技巧

在埃及，從牆壁傾斜的金字塔和其他建築物的構造看來，他們好像沒有利用到角度觀念(Robins & Shute, 1985)，而且埃及人也沒有留下與角度相關的具體文字。

在西元前2400年(Neugebauer, 1957; Krupp, 1977)埃及的天文學家發明一個「對角線的星象時鐘」，這個星象時鐘與埃及的日曆相互協調，係將365天納入十二個月裏面，每個月又分為三個十天的星期，再另外加上五天。每「星期」（十天） 用太陽的上升地點作記號，將天球粗糙的區分

為36個帶。這個星象時鐘是由一個個的小格子所構成，每個正方形代表一個日期和一個時間，使用者只需知道太陽從哪裡升起，對照著星象時鐘，就可以知道現在的日期時間。這個方法在西元前約1500年被Ramsside星象的時鐘所取代，新的系統藉由南北兩個天文學家的互動觀測，以星辰的起落為基礎來製作。

(三) 巴比倫發明的十二宮圖(圓形黃道帶)測量法

雖然巴比倫人像埃及人一樣在角度方面沒有留下文字記載(Bruins, 1964)，但是他們發展了一套非常複雜的技術來記錄以及預測天體的運動。Chaldean 楔形文獻上可看出木星的運動記載表，此表也包括了星座宮圖的位置與在弧上的度數。另外，蘇美人在西元前3000年前，即將「哩」的單位定義為大約10公里的長度，不過這個單位似乎最後也演變為時間的單位，一「哩」就相當於走一哩所花的時間長。西元前一千年左右，巴比倫的天文學家將「哩」視為是對天象事件測量的單位，規定哩與天空星辰的運行是相關的。每個日子包含了12「哩」(danna) ，因此天空的圓周也包含12「哩」，每一個哩被細分為30個部分，名為「length」，把整個天空劃分了360個部份。這看起來似乎是將時間做天文學上的分割，亦即區分為360°的起源，「度」的單位現在看來不僅是測量弧的單位，也是時間測量的基本單位。

從那個時候起，巴比倫人就做了正確的表格，給在每一個黃道帶上的日子和位置做角度的測量。他們的理論模型涉及不同時候太陽速度變化的鋸齒狀變化。而它的預言幾乎精確，巴比倫人為月亮和幾顆行星的天文事件製作了詳盡的表格(Seidenberg, 1975)。他們的計算還涉及了天體角速度的複雜概念，但是他們在天文學方法上的複雜性並沒有轉移到其他幾何學問題。

(四) 希臘人歐幾里得前期(pre- Euclidean) 角度和方向的概念

希臘的天文學相較於巴比倫人來說還是基本的，可是希臘的幾何學家似乎是第一個使用「角」這個名詞的(Gray, 1979)，如希臘的幾何學家柏拉圖，首先提出角度論點：將角區分為銳角、直角和鈍角(Heath, 1956)。此外，希臘人也是第一個提出證明的，如畢達哥拉斯(Pythagoras)證明三角形角度總數等於二個直角(Gray, 1979)。

亞里斯多德對角亦作了清楚的解釋：從函數中的獨立變數能有效證明等邊三角形的底角是相等的。他們在討論亞里斯多德的觀點後自然決定幾何學主題中的重要爭議：「角度、直線和圓形是相同圖形類型」。亞里斯多德的學生歐德孟斯(Eudemus)提出角度是線的裂縫或偏轉的主張(Heath, 1956; Morrow, 1970)。

另一個爭議是「不同類型的角度與彼此間的關係」。亞里斯多德分析了直角的優先次序，因為直角首先被確定，因此應該有優先權；但由於直角由銳角組成，又好像是銳角優先。亞里斯多德暗示直角的定義是一個美好的東西。

(五) 歐幾里得對於角的概念

根據Heath(1956)所翻譯歐幾里得的幾何原本(Elements)，該書在卷Ｉ中對角的定義為：「 一個平面的角度是在一個平面上針對二條彼此不在於同一條直線上的適宜傾角……，當角度包含直線時，角度便可視為以直線構成。」

歐幾里得幾何學並沒有提及平角的概念，當二條直線在相等的角度相交，歐幾里得稱這些角為直角，而且這二條直線被視為垂直（定義10）。歐幾里得認為「垂直」的意思是「使降落」 (Heath, 1956)，Proclus指出在遠古的時候垂直線被叫做「gnomon-wise」，因為gnomon（日規）的設立

是在水平線向上的直角 (Morrow, 1970) 。

在歐幾里得的時代，「角有直線的邊」是不被接受的，歐幾里得稱圓形的部分（扇形）為角的基礎。

(六) 在印度和中國的角度

在十六世紀末，歐幾里得的幾何原本以及關於算術的書被翻譯為中文，這是第一次西方著作被翻譯成中文，因此必需創造新的文字，例如：點、線、直線、曲線、平行線、角度、直角、銳角、鈍角、三角形和四邊形……等，來表達適當的概念(Yan & Shiran, 1987)。

中國的數學包括了比率的幾何學問題（決定山的高度和距離、發現水流的寬度、測量正方形和圓形的城鎮）。在西元前第二世紀結束前，中國的數學書：周髀算經 (Zhoubi Suanjing) (早期一些歷史學家大多擱置它)，使用比例計算一些三角形之間的距離(Yan & Shirin, 1987) ，中國的數學家利用適當的相似三角形為基礎，廣泛使用三角法和商高(畢氏)定理。但是用線段作為角度函數的比率觀念卻完全不存在(Libbrecht, 1973)。

西元第四世紀末期和第五世紀初期，印度人也使用比率。Siddhantas 發展在一半的弦和一半的角度之（弦、邊）對（弧、角）之間的關係研究的一項研究，也獲得與三角法類似的結論(Boyer, 1968)。印度天文學測量「徑向距離」，使用如同圓周長的單位。他們類似巴比倫人把圓周分為 360 °來使用，他們使用半徑是57°18′來算圓周($2\pi\times57°18'=360°$)，獲得360°的圓周(Neugebauer, 1983)

由歷史來看，人類是先由應用、操作、實踐中，認識各種幾何要素與性質，彼此之間並沒有一定的先後關係。歐氏幾何的價值，首先是對這些先民知識的歸類與整理，其次才是作為知識典範的演繹系統。

因此小學的幾何教學，可以參考幾何歷史發展的軌跡與學童認知發展階段，盡量讓學童發揮、拓展其幾何直覺，在操作中，認識各種簡單幾何形體與其性質，再慢慢加入簡單的推理性質與彼此之間的關係，為以後銜接國中幾何的教學，打下良好的基礎。

三、角的定義

數學家歐幾里得(Euclid)給予角的定義為：角是平面上具有共同端點的兩條不重疊直線的傾斜度(inclination)；當這兩條直線重疊時則稱為「成直線的角 (rectilinear) 」(Matos, 1990)。

從實際經驗及數學上的定義，角的意義可分成以下三方面來說明(Michael, 1989；引自劉好，1997)

(1) 是一雙定出兩個方向間的差量之射線。

(2) 是自同一端點射出的兩射線圍出的一個平面區域。

(3) 角是一射線繞其端點旋轉一個程度的量。

由於角度的旋轉量是以「有方向的箭頭(arrow)」來表示，所以角也就有了順時針與反時針方向之區別，而且角度的表示也超越360度的限制。

在我國數學科八十二年版的課程標準中，則提出了「圖形角」、「張開角」與「旋轉角」三種範疇：

(一) 圖形角

數學新課程在最初引出角的概念的時候，由圖形角出發，採取角是多邊行頂點的局部之觀點，由描出凸多邊形各角的活動引出角度小於 180 度角的部分形象以認識角。

(二) 張開角

數學新課程首先以可開合呈現角形的物件，如扇子的開合現象，讓兒童察覺角的形成過程。

(三) 旋轉角

表示一個旋轉的記錄中起始位置的線段（射線）稱為「始邊」，表示終止位置的線段（射線）稱為「終邊」，兩線段的交點成為「旋轉中心」或「頂點」，若不考慮其旋轉方向，僅記出其起始的兩邊，則形象和靜態的圖形角相似，故一般旋轉角亦簡稱「角」。

現在的九年一貫暫行綱要課程，也是延續八十二年版課程標準中對角的定義，以「圖形角」、「張開角」與「旋轉角」等觀點來定義角。

綜上所述，本研究所採用角的定義為八十二年版及九年一貫課程中的角定義：角蘊含了圖形角、張開角與旋轉角的意義，抽象化的角概念，可簡單說成是自一點朝兩個不同的方向延伸出兩條射線的結構，角的邊是射線而不是線段(在旋轉產生角的情況下，雖然旋轉是一種動作，動作停止，其現象即消失，但它有一個起始方向和終止方向，此二方向可用兩條射線來表示)，此兩射線是製成角的張開活動的限制邊界。不論代表此射線的線段長短(此時的長短，只是線段的另一端點的不同而已)如何，均可完成同樣的限制活動。同時，角與角的內部是共生的(二者同時出現)，角的兩邊之張開程度大小，不因為邊長的差異而有所不同（劉好，1997）。

第二節　兒童幾何認知概念的發展

一、皮亞傑(Piaget)的研究

(一) 保留概念

在皮亞傑的認知發展理論中，將智能的發展從出生開始到十五歲分為：感覺動作期、運思前期、具體運思期和形式運思期四個階段。在這些過程中知識結構不斷的重組，每個新階段統整前一階段之發展。其中由運思前期轉型至具體運思期最顯著的特徵是各種保留概念的發展。保留概念是皮亞傑認知能力發展理論中的重要概念，又因為保留概念首先是由皮亞傑所提出來的，所以一提到保留概念就必須談到皮亞傑的理論。而所謂的保留概念就是指兒童在面對物體的某種轉換（如位置、方向、形狀等）時，瞭解其原有的特質（如量、數、長度、大小等）仍然保持不變的認知能力。

皮亞傑發現，若要具有保留概念，兒童的思考程序應包括認同、補償、反覆自如的逆轉力及穩定的理解力，因此，皮亞傑提出兒童常利用三種論證來支持其保留判斷，即同一論證(identity argument)、簡單的可逆性論證(argument of simple reversibility)和補償作用(compensation)的論證(Piaget, 1967)。如以皮亞傑的黏土球實驗來說，一個已經充份建構保留概念的兒童將能夠告訴你，香腸（泥球變的）與原來泥球的量相等是因為：(1) 香腸能回到原來的形狀(可逆性)；(2) 香腸在長度方面增加了，在寬度方面卻減少了(補償性)；(3) 香腸仍是相同的原料━沒有增加或取走(同一性）。皮亞傑即據此推論運思結構的存在，不過，這些運思結構用在各種具體的內容上，通常需幾年的時間（引自王欽麟，2002）。

(二) 認知保留概念出現的階段

既然從運思前期轉型到具體運思期的重要特徵是各種保留概念的發展，以下就介紹這二個時期兒童的特徵（王文科，1981）。

1. 運思前期

根據皮亞傑的理論，運思前期是指二至七歲的小孩。這時期的小孩，雖然能從口頭表達他所知道的事物名稱，但是還未具有心智轉換操作的能力。心智操作包括各種能力，比如會從不同觀點上面對一個問題，或者是了解數量、重量、體積等守恆概念。所以說這時期的小孩是搞不清楚有關「守恆」的概念。如果拿兩個玻璃杯擺在小孩的面前，口徑較小的高杯裡裝有水，另一杯較矮，口徑較大，不裝水。將高杯中的水全倒入矮杯中。問「水少了？或多了？或一樣？」通常小孩子會說：「高杯中的水較多。」問他說：「杯中的水有增加或減少嗎？」小孩會說：「沒有。」，我們重覆小孩的話，並問他說：「但是你認為高杯中的水較多嗎？」小孩又會說：「是呀！」小孩的回答明顯地不合邏輯，因為他還不了解：改變事物之外觀，並不能影響物質呈現的量。另外，因為這時期的小朋友他們容易受到知覺差異所矇騙，主要的原因是在於他們無法做可逆性的思考，所以他們常常靠外界所看到的東西而判斷結果，這時期的小孩子他們只能做單向思考，不會應變。

2. 具體運思期

根據皮亞傑的理論，大部份的兒童，其具體運思期約始於七歲，終止於十一歲。這時期的小孩子能逐漸表現心智操作的能力，換句話說，他們的保留概念也在逐漸的發展當中。具體運思期的兒童不像運思前期的兒童那麼容易被知覺的差異所矇騙。例如以口徑較小、高杯的水倒入口徑較大、矮杯時，他們會覺得兩個杯內的液體體積是相同的，因為他們知道根

本沒有什麼東西從容器裡面增加或減少。對於具體運思期的兒童而言，刺激的限制是減少了，但是他們的思考仍與刺激有關，因為他們還是很依賴知覺的。另外，具體運思期的兒童知道，改變物體的形狀並不會改變物體原來的量，這種運用思考判定事物的合理性，與較低齡兒童全然依賴知覺判斷的方法相比較，顯然是好得多了。因此，具體運思時期的兒童在面對問題時，會在回答之前先考慮問題，他們的答案和解釋也因而比較合理。

此外，皮亞傑認為兒童由運思前期發展到具體運思期時，會具有下列三種特徵：

(1) 由片面專注到多面兼顧

運思前期的兒童思考程序是片面專注的，對物體的瞭解僅憑有限的觀察，且有濃厚的自我中心觀念，只憑知覺的直接印象判斷事物。而具體運思期的兒童能專注一個問題之各種角度，思考方式已由知覺轉為心智的操作。例如在液體的保留概念實驗中，能連繫長度與寬度之間的關係；在體積的保留概念實驗中，能注意大小與寬扁之間的關係。

(2) 由靜態到動態

運思前期兒童的思考結構是靜態的，只注意事物的靜態表現；具體運思期的兒童則能注意到物體形狀變化的過程。例如在體積保留概念的實驗中，運思前期的兒童只注意開始的黏土球與變形後的黏土，而忽略了其改變的過程。

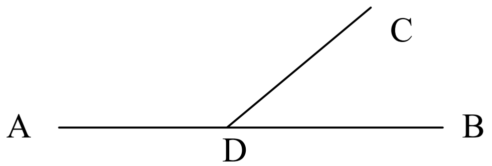
(3) 由無可逆性到可逆性

運思前期的兒童在思考結構中缺乏可逆性，而具體運思期的兒童則具有可逆性。例如在液體保留概念的實驗中，先將液體由容器 A 倒入一個完全不同形狀的容器 B，再將容器 B 中液體倒回容器 A 時，運思前期的兒童不瞭解此兩個動作之間存在的逆轉關係，從而無法據以判斷等量液體雖經

形態改變而仍舊相等。

(三) 皮亞傑對於角概念發展的研究

皮亞傑認為兒童角概念的發展是相當緩慢的，在他的實驗中呈現兩個互為補角的∠ADC 和∠CDB，要學生畫另一幅與下圖(a)相同的圖，越高年級的學生越懂得利用直尺、紙、線、三角板、圓規等來輔助作圖，大多需要重複嘗試操作三遍，才能接近原圖(Piaget, Inhelder, & Szeminska, 1960)。



圖(a)

實驗發現：

1. 學齡前到低年級的學童（約 4 到 7 歲）是以視覺的估測來判斷線段 CD 的傾斜度(slope)，他們沒有測量的行為，不會嘗試去思索和運用各種策略來測量角傾斜度。
2. 中年級（約 7 到 9 歲）的學童會嘗試去複製線段 CD 的傾斜度，但卻無法思索出較有效的策略來幫助他們的測量。
3. 在更高的年級（約 9 到 11 歲）的學童對「角」有較深入的了解，並能夠運用一些策略來比較角的大小，有些年齡較長的學生能夠利用線段 AC、線段 CB、線段 AD 的長度來找出 D 點和 C 點的位置，而精確的畫出線段 CD 的傾斜度，有些學生則會畫出各種垂直於線段 AB 的直線來幫助他們畫出線段 CD 的傾斜度。

由上述皮亞傑的研究，我們可以知道學童角度概念發展的順序依序是「從無法知覺角的存在」、「以目測知覺兩線之間的傾斜」、「利用視覺以外的方法來覺知角度，但尚無法利用測量工具來精確的測出角度」進而「能正確利用測量工具來測出角度」，隨著年齡的增加，大約到 9 歲（約國小

三年級）以後，學童才漸漸對角的存在及角度概念有所理解（引自張家燕，2004）。

國小三年級學童的年齡介於 9～10 歲，依皮亞傑的理論屬於具體運思期，此時他們的保留概念正在逐漸的發展中，也漸漸對角的存在及角度概念有所理解。

二、Van Hiele 的幾何概念發展層次

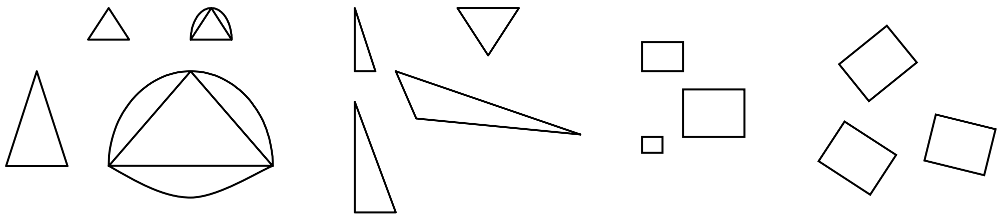
荷蘭教育家 Dina van Hiele-Geldof 及其先生 Pierre Marie van Hiele 根據 Piáget 的認知理論與完形心理學的結構論，在 1975 年提出一套有系統的幾何思維發展理論，依其理論幾何思維發展有五個階段。van Hiele 夫婦將學習幾何的過程區分為五個層次，對於這五個層次，國內外學者有不同的說法，一部分學者用「層次一、層次二、層次三、層次四、層次五」來表示這五種幾何思考層次(van Hiele, 1986；吳德邦，1998)，而另一部分學者則用「層次○、層次一、層次二、層次三、層次四」來代替（劉湘川、劉好、許天維、易正明、阮淑宜，1994；劉好，1998）。這些層次均有其發展特徵，且 van Hiele 在不同地方，及後續研究者都曾詳加描述(Wirszup, 1976; Hoffer, 1983; Fuys, & Geddes, 1984; Burger & Shaughnessy, 1986; Crowley, 1987; Fuys, Geddes & Tischler, 1988; 劉秋木，1996；譚寧君，1993；王欽麟，2002)，本研究採用前者的說法，將其整理如下：

第一層次：視覺期(visualization)

此階段的兒童可以依據圖形的外表輪廓來辨認圖形，即他們可以分辨、稱呼、比較及操弄幾何圖形，但其辨認只是依其形狀，並不能了解真正的定義。

以三角形為例，他們會覺得只要有三個邊，又是正立的，不管圖形的邊是否為直線，這些圖形就是三角形，如：圖形(a)─他們會覺得這些圖形是三角形（因為它們看起來像△），而圖形(b)─這些圖形就不是三角形(因為它們看起來不像△)。

以正方形為例，他們是根據圖形是否正立來辨別是否為正方形，一定要像□的圖形才是正方形，如圖形(c)─這些圖形是正方形（因為它們看起來像□），而旋轉過後的正方形就不是正方形，如圖形(d)─這些圖形不是正方形（因為它們看起來不像□）。



圖形(a)　　圖形(b)　　圖形(c)　　圖形(d)

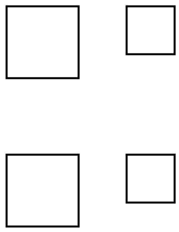
因此，這個階段的兒童應多安排一些感官操作的活動，讓他們可以透過視覺進行分類、描繪、著色等的活動，以得到適當的概念。

第二層次：分析/描述期(analytic/descriptive)

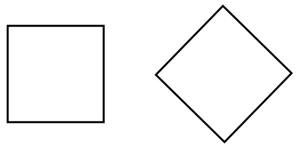
此階段的兒童可以分析圖形的性質與組成要素，但是不能解釋性質之間的關係。他們能以測量、觀察、作圖、繪畫等實際操作的方式，來發現圖形的共有性質或特徵。例如圖形(e)─這些圖形是正方形(因為有四個相等的邊和四個直角)。

此階段的兒童可以從圖的構成要素分析圖形，並且發現某個圖形的性質，他們能從圖形的構成要素去分析，如此階段的人還可以透過實體物操作，以正方形為例，他們可以透過旋轉，來辨別圖形之異同，如：圖形(f)─

這些圖形是正方形(只要把右邊圖形旋轉一下就會跟左邊的正方形是一樣的)。



圖形(e)



圖形(f)

此階段的兒童只知道利用圖的構成要素來分析圖形，而不能運用圖形的定義來判斷圖形，所以，此階段的人沒有圖形的包含關係，也就是說此階段的兒童不能理解圖形和圖形之間的關係，如：不知道長方形是平行四邊形的一種，只是覺得這是兩種不一樣的圖形。

第三層次：非形式演繹期(informal deduction)

此階段的兒童可以透過非正式的論證把先前發現的性質作邏輯地聯結，建立圖形類別間的包含關係，即其可以運用圖形的定義來判斷圖形。例如：他們知道四邊相等的圖形為「菱形」，然後四邊等長且四個角是直角的圖形為「正方形」，所以正方形可算是菱形的一種。此外，他們可以透過非正式地論證，將先前發現的性質作邏輯地連結。例如：他們知道三角形的內角和為 180 度，然後四邊形可分解成兩個三角形，所以四邊形的內角和是 360 度，進而可以知道 n 邊多邊形的內角和為$(n-2)\times180$度的概念。

第四層次：形式演繹期(formal deduction)

達到此階段的學生，能用邏輯推理解釋幾何學中的公理、定義、定理

等，正式演繹邏輯證明定理，並且建立相關定理的網路結構。他們不只是記憶圖形的性質，而且可以在一個公設系統中建立幾何理論，也能夠理解証明中的必要與充分條件。

此外，他們了解一個證明的可能性應該不只一種方法，也能發現正逆命題間的差異性。例如：正五邊形的邊長一定均相等，但邊長均相等的五邊形不一定是正五邊形。

第五層次：公理性(axiomatic)或嚴密性(rigor)

此階段的學生，不僅可以在某一幾何系統(如歐式幾何)內推演及建立定理，也能思考不同公設化的幾何系統，並且分析或比較這些系統的特性。例如：他們可以比較出歐式幾何與非歐幾何間的不同，也可以了解抽象推理幾何，甚至可以自創出一套幾何公設系統。實際上，能達到此階段的人很少，一般人很難達到，即使是以數學為專業者亦不易達成，所以通常不是教學研究上的重點。

根據 van Hiele 研究顯示，由於這五個層次有其順序性，學習者必須擁有前一層次的各項概念與策略，才能有效進行下一層次的教學活動。國小低年級學童大都在第一層次的視覺期，中年級學童大約可以達到第二層次，高年級學童大約在第二層次至第三層次的過渡時期。

本研究之工具即是根據上述的理論，並考量國小三年級學童的特性，以不超過該階段學童之認知能力為原則，進行問卷內容題型的選定，以免影響學童的答題表現與研究結果。

三、直覺法則對學童角的概念之影響

國外學者Gardner(1991)（引自陳瓊森、汪益譯，1995）曾把學習分成

三種類型：「直覺學習者」、「學校學習者」和「學科學習者」，學校教育的目的，應設法使大多數的學生能從「直覺學習者」 轉變成為「學校學習者」，進而成為「學科專家」。但是，Gardner 發現這三種類型之間存在著鴻溝，許多的學生透過學校教育並未能達到「理解的學習」，所學的知識、技能等不會應用到實際的生活情境或新的情境上。為了「追求理解的教育」，Gardner認為在學校教育中即應注意：(1)連結學生的舊經驗；(2)以多種的表徵形式呈現教材；(3)提供現場化、臨場化的教學情境；(4)應用到新（生活）情境做為檢證。

最近一、二十年來許多數學和科學教育研究方面，國內、外學者觀察到學生在各種與概念相關的問題上有著相當類似的反應，亦即所謂的迷思概念。以色列學者Stavy, Tirosh, Tsamir & Ronen(1996)；Tirosh & Stavy(1996)，Tirosh & Stavy (1999)在研究觀察了學生的這些迷思概念後，發現這些問題的內容領域和推理的需求是不同的，但是它們卻有一些共同的外在特徵。基於這些現象，提出了一個另類的理論：直覺法則理論 (the theory of intuitive rules)，藉以解釋和預測學生對於數學和科學測驗的反應。根據這些研究顯示，迄今已證實了四個直覺法則：(1) More A – More B；(2) Same A – Same B；(3)有限細分法則(Everything comes to end)；(4)無限細分法則(Everything can be divided)。其中More A – More B和Same A – Same B這兩種是和比較型的問題有關，而有限細分法則和無限細分法則這兩種則是和連續細分型的問題有關，這些直覺法則在許多情況下會引導著學生的反應（引自謝展文，2000）。以下將針對和比較型問題有關的More A – More B和Same A – Same B這兩種直覺法則作詳細介紹：

(一) 直覺法則 More A – More B

More A – More B的直覺法則主要反應在比較型的問題上，在比較型的問題中，兩個被比較的物體在一明顯的、確定的A量上不同（A1＞A2）時，學生被要求去比較此二物體關於B量的大小（B1＝B2或B1＜B2）。研究發現，許多學生在這種比較型的問題上，會做出不適當的反應。Tirosh和Stavy(1996)做了下面幾個比較角的大小試驗，如圖2-2-1（引自黃金泉，2003）：

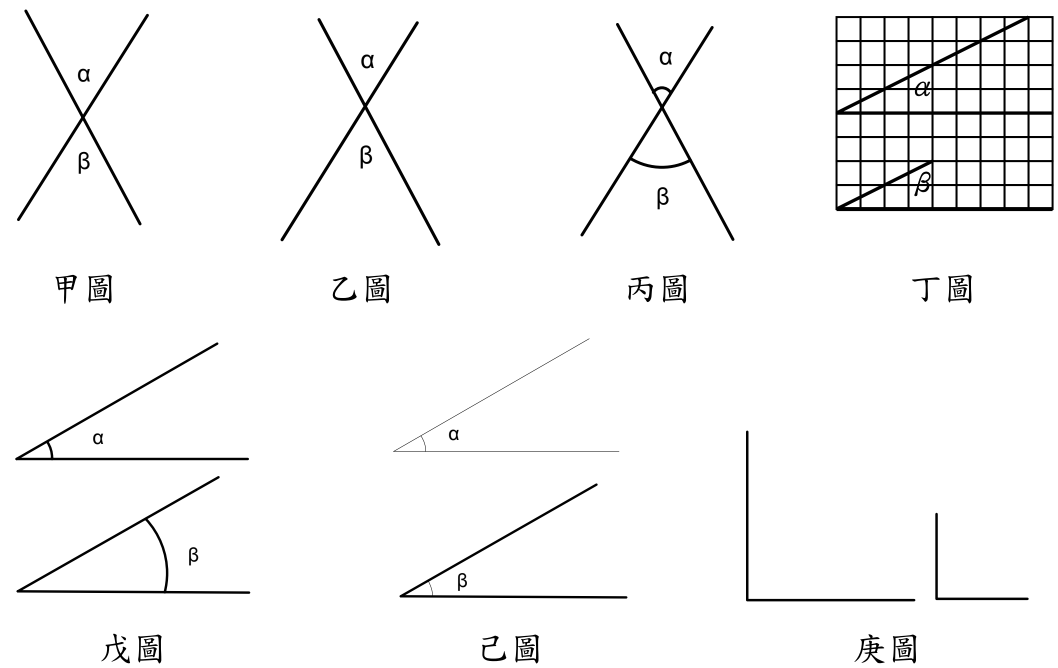
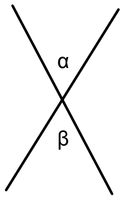
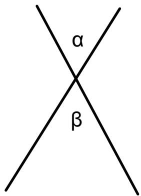
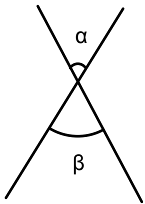
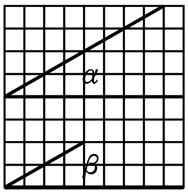
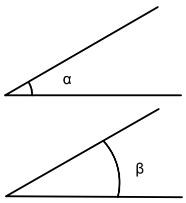
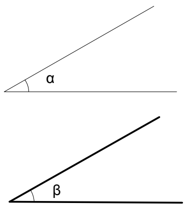
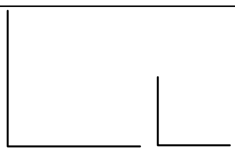


圖2-2-1 Tirosh和Stavy(1996)所做比較角的大小的試驗

在上面七個圖當中，Tirosh和Stavy(1996)所得到的數據如表2-2-1：

表2-2-1 Tirosh & Stavy (1996) 研究角的比較大小結果數據統計表

 甲圖	認同$\angle\alpha=\angle\beta$ 的判斷程度很高： 幼稚園(84%) 二年級(78%) 四年級(91%) 六年級(91%) 九年級(99%)
 乙圖	認同$\angle\alpha=\angle\beta$ 的判斷程度就低於甲圖了： 幼稚園(13%) 二年級(12%) 四年級(62%) 六年級(68%) 九年級(82%) 很多人認為$\angle\beta$的線比$\angle\alpha$的線長，所以$\angle\beta>\angle\alpha$。
 丙圖	認同$\angle\alpha=\angle\beta$ 的判斷程度也不高： 幼稚園(4%) 二年級(11%) 四年級(60%) 六年級(69%) 九年級(85%) 很多人認為$\angle\beta$的弧線比$\angle\alpha$的弧線長，所以$\angle\beta>\angle\alpha$。
 丁圖	$\angle\alpha>\angle\beta$ 的有33%，$\angle\alpha<\angle\beta$ 的有4%，$\angle\alpha=\angle\beta$ 的有52%，無法判別的有4%，其它6%。
 戊圖	認同$\angle\alpha=\angle\beta$ 的判斷程度也不高：大致上與丙圖差不多，為數不少的學生認為「$\angle\beta$比較大，因為它的弧度比較大」，但是有一些兒童認為「$\angle\alpha$比較大，因為它沒有被圍起來的區域比較大」。
 己圖	為數不少的學生認為「下面的角比較大，因為它的線比較粗」。
 庚圖	為數不少的學生認為「左邊的角比較大，因為它的線比較長」，並沒有看出這二個角都是直角。

Stavy 等(1996)認為，此直覺法則的可能來源，可能是我們的認知系統一種外推的自然趨勢，我們的認知系統暗自假設兩個物體之間在一個量上有某種關係，相同的關係也將在其他量上成立。因此，在直覺法則 More A – More B 的例子中，回答 B1＞B2，大概是外推自量 A 的立即的、感知的差異，例如：邊長大小、弧線大小……等。Stavy 等(1996)建議，學生對於這種問題的反應，並非取決於學生在該問題上特定內容的理念或概念，而是取決於問題特定的、外在的特徵，他們活化了直覺法則。這種類型的反應，雖然在一些情況下是正確的，但並非全然適用（引自謝展文，2000）。

(二) 直覺法則 Same A – Same B

Same A – Same B 的直覺法則也是反應在比較型的問題上，在比較型的問題中，兩個被比較的物體的某一 A 量相同（A1＝A2），但是，另一個量 B（B1≠B2）。學生被要求去比較此二物體關於量上的大小。研究發現，許多學生在這種比較型的問題上，會做出不適當的反應。

Tirosh 和 Stavy(1996)也作以下有關角的試驗：把圖 2-2-1 呈現在 4-12 年級學生的面前，正確的答案是「∠1=120° > 108 °=∠2」， 但是 4、6、8 年級的學生中約有 50%，10 年級約有 25%的學生認為∠1=∠2 ，他們大致的答案幾乎都是：「因為它們的邊長一樣，所以它們的角也一樣」。

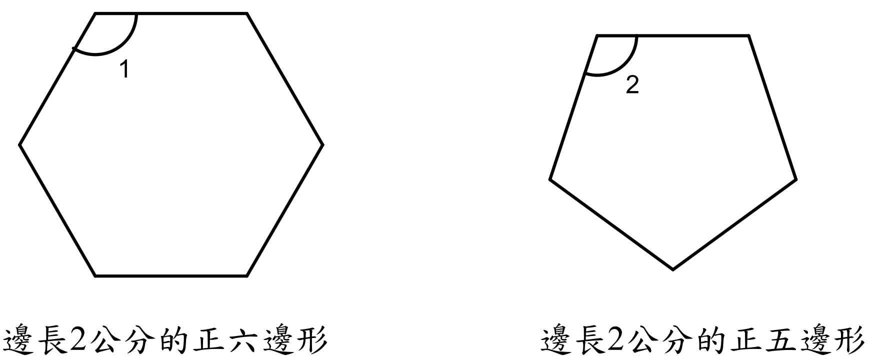


圖2-2-2 Tirosh & Stavy (1996)角的大小測試圖

從上面比較型問題的例子中可以發現，學生的錯誤是因為 A1＝A2，所以選擇了 B1＝B2。這類反應就是直覺法則 Same A – Same B 的反應類型，Stavy 等(1996)指出，此直覺法則的可能來源，可能是我們的認知系統一種外推的自然趨勢，我們的認知系統暗自假設兩個物體之間在一個量上相等，同樣的其他量也會相等。這種類型的反應，雖然在一些情況下是正確的，但並非全然適用。

(三) 直覺法則理論在學童角的概念上之應用

直覺法則使我們可以預見學生正確和錯誤的答案。它的預測效果可以用在教學上來幫助學生克服直覺法則的副作用。要達成此目標，有兩種教學取向已證明是有效的，即類比的教學和衝突的教學。

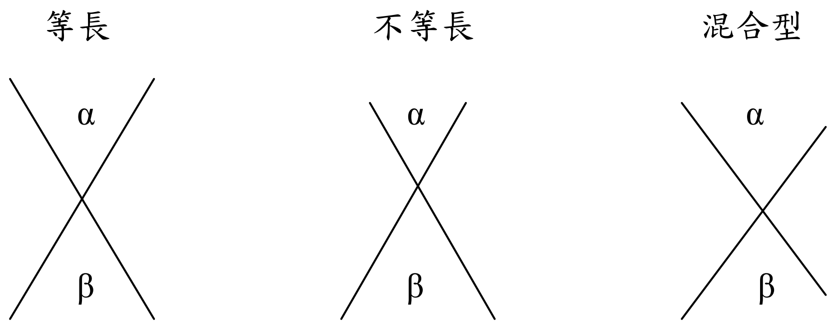
1.類比的教學

在類比取向的教學中，首先呈現一個定錨的問題，這個定錨問題的形式已除去不相干的特徵，即已經沒有讓學生一看到就會想用直覺法則的特徵(定錨問題通常會引出正確答案)。接著，呈現一系列本質上相似的搭橋問題，在這些搭橋問題中，不相干的特徵會引出直覺法則，而且會逐漸明顯。最後，引進強烈暗示直覺法則的標的問題。

類比取向的教學是用來幫助學生在比較兩對頂角時能克服More A – More B這個直覺法則的作用。在Tirosh & Stavy(1999)的研究中，如果兩個對頂角夾角的邊等長，學生就會視為角相等；如果有一個角夾角的邊較長，他們就會解釋為「β的角比較大，因為它的邊比較長」。這樣的解釋符合了More A – More B的直覺法則。

在這個類比教學的案例中，夾對頂角的兩邊等長的例子被用來作為定錨問題；而不等長的例子被用來作為搭橋問題；混合型的例子被呈現在學生面前，並且旋轉90°，得到了一個對頂角的不同例子，即標的問題。這一

系列的問題，始於一個定錨問題，經過一個搭橋問題，最後再到標的問題。上述的過程明顯地改善學生在標的問題的反應。



定錨問題　　搭橋問題　　標的問題

2.衝突的教學

在衝突的教學取向中，先出一個問題來引出學生的錯誤答案，接著呈現一個和學生最初的答案衝突的情境。如此的表現會讓學生察覺他們最初的答案是不充分的(Piaget, 1980；引自 Tirosh & Stavy, 1999)。直覺法則的應用在於呈現學生容易使用直覺法則的問題來誘導出他們的錯誤答案，而產生衝突。矛盾的產生可以有很多方式，例如：呈現矛盾的具體證據；呈現和原問題類似題目，但是要能誘出正確答案；或者展示正式的相關知識。

第三節　角概念的相關研究

國內有部分學者對學童角概念進行研究，研究者將其蒐集整理分析如後：

陳錦傳（1995）研究國小四、六年級學童角度大小比較的解題策略與理解情形發現：(1)學童角的大小比較的解題策略計有：邊的張開度策略、弧線標示策略、兩邊夾線段策略、邊線策略、同邊垂線線段策略、參考角策略、量角器策略、疊合策略，少數學童特有的解題策略則歸入「其他策

略」，共九種策略，顯示有些學童對於角的概念並不清楚且相當複雜，大多習慣以目測方式比較角的大小，較少以輔助工具策略來比較角的大小。(2)國小四、六年級學童使用解題策略的百分比並無明顯差異，但是六年級對於解題策略的理解程度與應用情形優於四年級。(3)「角的邊長長短不同」與「角的方位與角的弧線標示兩因素的交互作用」會造成學童角的大小比較結果的差異。

蔡明哲（1998）對一名國小四年級學童進行角概念的個案研究，得到該名學童具備的角概念為：角是鄰近頂點的封閉區域，其構成要素是頂點、兩邊與兩邊之間的弧線，能察覺旋轉、打開與張開活動中的角，具有邊長不同、方位不同與弧線標示不同的角度保留概念，能以個別單位進行角的大小比較。研究顯示該生具備良好的角概念，唯該研究是屬於個案研究，無法據以類推到所有四年級學童的角概念。

柯慶輝（2000）採取臨床晤談法，以六個真實情境為題材，探究 12 名被隨機分派為三組的國小三年級學童的角概念。發現兒童對於角概念的建構，受個體、情境以及社會文化等因素的影響，研究結果顯示，兒童對於角的認知，是「形的角」先於「定義的角」，而其研究對象角概念的發展，則平均分佈於 Mitchelmore 的角概念發展理論的三個階段中，及情境的角概念、脈絡的角概念以及抽象的角概念。研究顯示三年級學童角概念的形成，可藉由不同角脈絡具體物的觀察與操作，知覺其中的角相似性，再藉由角情境的擴展，分類個體的角經驗，而後經由抽象角模擬活動與造角形活動，個體能夠從具體物中抽離出角形，形成抽象角的心像，最後以圖像、符號或口語的方式將此抽象角表徵出來。研究建議，輔以適當的課程與教學設計，亦即配合兒童形成知識的歷程，三年級學童具備藉由教育歷程學習抽象角概念的可行性。

黃金泉（2003）研究國小四年級學童的角概念，其研究樣本取自南部四所國小 9 個四年級班級，學童人數共 253 人。研究發現：(1)用量角器測量角度時，約有三成六的學童看量角器內線刻度來報讀。(2)56%的學童使用「直覺法則」之「A 比較多，B 就會比較多」的概念，比較角的大小。(3)45.8%的學童對角度的意義，仍有釐清的必要。(4)約二成的學童對構成圖形角的觀念仍不甚清楚。(5)在一個多邊形內能正確指出直角的學童約佔四成五。(6)在同一頂點的數個角中，能正確分辨出直角的約三成。(7)大部份學童用直覺判斷直角，只有少數學生會用直角三角板檢測直角。(8)學童在角方向改變的保留概念約五成五，在切割後再組合的保留概念約四成七。(9)接近五成的四年級學童會畫出指定度數的角。(10)大部分國小四年級學童，具有「找出教室內有角的地方」的辨別能力。

張家燕（2004）對國小三年級學童做角概念的診斷教學研究，研究樣本為台北市北區某國小三年級兩班學生共 68 位進行實驗教學，其中一班為實驗組，所採用的教學方法為診斷教學；另一班為控制組，所採用的教學法為一般教學法。依據診斷教學的設計模式，先診斷學生的迷思概念，接著製造認知衝突來澄清學童的迷思概念。研究診斷出三年級學童具有 22 個角迷思概念，研究發現，藉著製造學童的認知衝突，能達到概念澄清與糾正的效果。兩組學生教學後均有顯著的立即成效與保留成效，但實驗組角概念的學習成效均顯著優於控制組，診斷教學對澄清三年級高、中、低等不同能力學童的角迷思概念都有立即成效和良好的保留成效。

從國內角概念的相關研究可發現，兒童常以直覺的視覺來判斷角，對於角的大小比較、角度的測量和作圖等常產生困難，可見學童在學習「角」時，常會伴隨著許多迷思概念阻礙學童的學習。文獻中建議在教學時，可由兒童所熟知的具體物著手，讓學童漸漸抽離出角形而形成角的概念心像，亦可由認知衝突的教學方式，澄清學童角的迷思概念，以進一步建構

相關的角概念知識。

第四節 國小數學科角的教材內容分析

一、八十二年版角的教材內容分析

八十二年版角的教材教學程序為：三年級上學期，從三角形及四邊形的構成要素引出角形及角的命名；三年級下學期，建立張開角概念，進行角度的直接與間接比較，介紹直角並察覺直角三角形、正方形與長方形上角的特徵；四年級上學期，利用直角特徵引出直線的垂直與平行關係，進行量角器上角度的報讀，角量的合成、個別單位的累積活動，並比較角的大小，量角器上刻度意義的認識、角度的實測及畫指定度數的角；四年級下學期，引出旋轉角概念，進行旋轉角量的比較，利用鐘面來介紹180度與360度間的旋轉角量（劉好，1997）。

(一) 八十二年版課程標準中角概念的定義：

從生活上之應用與數學上的觀點來看，角的定義可以分成以下三種情況（國立編譯館，1999；引自柯慶輝，2000）：

(1)角是一種圖象的表徵，從某一方向轉至另一方向，如圖2-4-1(a)。

(2)角是自一端點射出的兩條射線間的差量，如圖2-4-1(b)。

(3)角是一射線繞其端點旋轉一個程度的量，如圖2-4-1(c)。

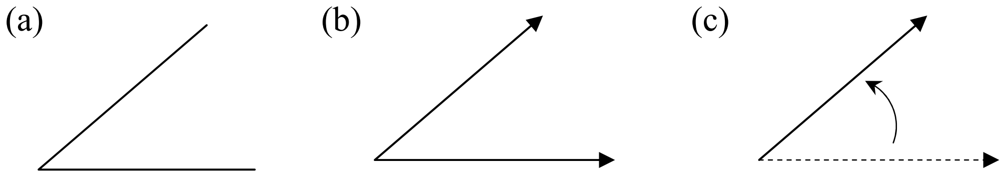


圖2-4-1　八十二年版角的定義下之角形

(二) 八十二年版角的教材分布：

八十二年版角的教材分布在三、四年級實施教學，其教材綱要如表2-4-1（教育部，1993）。本表是依據民國八十二年教育部頒佈之「國民小學課程標準」所編製，從表中可以發現一、二、五、六年級並未列入，一、二年級主要在介紹基本的幾何圖形，在此階段的兒童具有具體角和圖形角的經驗，但是在課程中並未正式介紹「角」，對於數學課程中所提到的「角」是陌生而模糊的。到了三年級才進一步分析幾何圖形的構成要素而正式介紹抽象的角，國小的角教材集中於中年級的數學課程中。

表2-4-1 八十二年版角的教材綱要

年級	教材綱要
三年級	‧角度的認識 ‧角的張開程度的直接比較 ‧使用以度為刻度單位的工具 ‧角的張開程度的間接比較
四年級	‧角的旋轉程度的直接比較 ‧角的旋轉程度的間接比較 ‧認識角度的意義 ‧以度為單位，進行實測及估測的活動

國立編譯館依據民國八十二年教育部頒佈之「國民小學課程標準」所編寫的教材內容，分別見於三、四年級的教材中，角概念的相關教材地位配置如表 2-4-2。

表 2-4-2 八十二年版國編版角概念相關教材地位配置

教材位置	角的概念內容
三上 第5冊 第6單元	1.三角形、四邊形的構成要素。 2.角的命名。 3.認識圖形角。
三下 第6冊 第7單元	1.認識角及其構成要素。 2.直接比較角的大小。
三下 第6冊 第9單元	1.間接比較角的大小。 2.認識直角。 3.用量角器量角
四上 第7冊 第7單元	1.認識旋轉角。 2.旋轉角量的直接和比較。
四下 第八冊 第3單元	1.認識角度的意義 2.以度量化解決角的分解、合成問題。 3.以度量化描述鐘面上的旋轉角量。

這個版本的角教材設計，是依據學童的認知發展程序，從圖形角的認識到張開角以至旋轉角，分成三階段來引導，採用製作、描繪及觀察等活動，自實際生活現象中抽離出概念的原則，讓學童對角度的意義及角的內涵有正確的認識。

二、九年一貫數學領域有關角方面教材分析

現在的九年一貫暫行綱要課程，也是延續八十二年版課程標準中對角的定義，以「圖形角」、「張開角」與「旋轉角」等觀點來定義角。

(一) 九年一貫數學領域有關角的教材能力指標

九年一貫數學領域五大主題有關角方面的能力指標如表2-4-3與表2-4-4（教育部，2001，2003）：

表2-4-3 九年一貫數學領域角的教材綱要（90年版暫行綱要）

課程	指標	綱要
90 年版暫行綱要	N-1-9	能透過感官活動感覺一個量，並能對兩個同類量作直接比較，進而對一個量作複製活動(量：長度、容量、重量、角度、面積、體積)。
	N-1-10	能使用生活中常用的測量工具(刻度尺的方式，即不涉及其結構)，以一階普遍單位描述一個量(量：長度、容量、重量、角度、面積、體積；普遍單位：米、厘米、分公升、千克、克、度、平方厘米、立方厘米)。
	N-2-9	能在保留概念形成後，進行兩個同類量的間接比較(利用完整複製)及個別單位的比較(利用等量合成的複製)(量：長度、容量、重量、角度、面積、體積)。
	N-2-10	能認識各種量的普遍單位，應用在生活中的實測和估測活動，並培養出量感(普遍單位：千米、毫米、公升、毫公升、時、分、秒)
	N-2-11	能理解生活中，各種量的測量工具上刻度間的結構，進而對以同單位表達的量作形式計算。
	S-1-5	能察覺在生活情境或形體中的角。
	S-2-2	能依基本形體的組成要素之間的關係比較兩形體的異同。
	S-2-5	能瞭解兩鉛垂直線及兩水平直線互相平行。
	S-2-6	能瞭解張開程度、旋轉程度和角的關係。

表2-4-4 九年一貫數學領域角的教材綱要（92年版課程綱要）

92 年版課程綱要	N-1-14	能對兩個同類量作直接比較。
	N-1-15	能作兩個同類量的間接比較與個別單位的比較。
	N-1-16	能使用日常測量工具進行實測活動，理解其單位和刻度結構，並解決同單位量的比較、加減與簡單整數倍的問題。
	N-1-17	能作量的估測。
	N-2-15	能認識測量的普遍單位，並處理相關的計算問題。
	N-2-16	能理解普遍單位間的關係，並在描述一個量時，作不同單位間的換算。
	S-1-01	能由物體的外觀，辨認、描述與分類簡單幾何形體。
	S-1-02	能描繪或仿製簡單幾何形體。
	S-1-03	能認識周遭物體中的角、直線和平面。
	S-1-07	能認識生活周遭中水平、鉛直、平行與垂直的現象。
	S-2-01	能運用簡單幾何形體的組成要素，作不同形體的分類。
	S-2-02	能理解垂直與平行的意義。
	S-2-03	能透過操作，認識簡單平面圖形的性質。
	S-2-05	能理解旋轉角的意義。
	S-3-01	能利用幾何形體的性質解決簡單的幾何問題。
	S-3-02	能認識平面圖形放大、縮小對長度、角度與面積的影響，並認識比例尺。

依據民國 92 年 11 月教育部（2003）修訂頒佈的九年一貫數學領域能力指標，教育部同時訂定並公布各年級的分年細目，以確切掌握各年級進階式的教學進度與目標。研究者將相關的分年細目整理如表 2-4-5：

表 2-4-5 九年一貫數學領域分年細目及對應指標

年級		分年細目	對應指標
二年級	2-s-01	能認識周遭物體上的角、直線與平面（含簡單立體形體）。	S-1-03
	2-s-02	能認識生活周遭中水平、鉛直、平行與垂直的現象。	S-1-07
三年級	3-n-17	能認識角，並比較角的大小。（同 3-s-04）	N-1-14 N-1-15 S-1-03
	3-s-04	能認識角，並比較角的大小。（同 3-n-17）	N-1-14 N-1-15 S-1-03
四年級	4-n-14	能認識角度單位「度」，並使用量角器實測角度或畫出指定的角。（同 4-s-04）	N-1-16 S-2-05
	4-s-01	能運用「角」與「邊」等構成要素，辨認簡單平面圖形。	S-2-01
	4-s-02	能透過操作，認識基本三角形與四邊形的簡單性質。	S-2-03
	4-s-04	能認識角度單位「度」，使用量角器實測角度或畫出指定的角。（同 4-n-14）	N-1-16 S-2-05
	4-s-05	能理解旋轉角的意義。	S-2-05
	4-s-06	能理解平面上直角、垂直與平行的意義。	S-2-02
五年級	5-s-01	能透過操作，理解三角形三內角和為 180 度。	S-2-03
	5-s-03	能認識圓心角，理解 180 度、360 度的意義，並認識扇形。	S-2-03 S-2-05

在九年一貫正式綱要能力指標的分年細目中，二年級就開始出現角的相關課題，二年級的相關細目 2-s-01「能認識周遭物體上的角、直線與平面（含簡單立體形體）。」是讓學童察覺生活周遭物體上的角，並能辨識簡單立體形體的角，例：指出課桌的角、直線與平面的所在，並能使用「角」、「直線」與「平面」的名詞與人溝通。此時也進行在簡單立體形體中，認識「角」、「邊」（刪除頂點）與「平面」的教學活動。這部分主要是察覺和辨識，並未涉入角的基本性質和構成要素，而且是從具體情境中的立體角進入角的課題。

三年級的相關細目 3-n-17「能認識角，並比較角的大小。(同 3-s-04)」分別列於「數與量」(3-n-17)和「幾何」(3-s-04)兩大主題中，此時進入平面幾何圖形的圖形角，並介紹角的構成要素，對角形成概念再作兩個角的直觀比較，接者是直接比較、間接比較、個別單位比較，而常用單位的比較則至四年級才介紹。

四年級的相關細目 4-s-01「能運用「角」與「邊」等構成要素，辨認簡單平面圖形。」，一方面是針對前階段的檢查性細目，但也是後階段幾何教學的開始，強調由構成要素來刻畫一簡單幾何圖形，例如：有一個直角的三角形是直角三角形、有四個直角的四邊形是長方形。4-s-02「能運用「角」與「邊」等構成要素，辨認簡單平面圖形。」本細目開始探討基本三角形與四邊形的幾單性質，操作直尺、三角板、量角器、圓規、模型(圖板的或骨架的)、摺紙、剪裁等。其簡單性質如：正三角形三角相等；等腰三角形兩底角相等。4-s-04「能認識角度單位『度』，使用量角器實測角度或畫出指定的角。(同 4-n-14)」此細目分別列於「數與量」(4-n-14)和「幾何」(4-s-04)兩大主題中，此時進入常用單位的比較，能夠使用量角器作為測量角度的工具。4-s-05「能理解旋轉角的意義。」是從動態的觀點來介紹角，並與鐘面上的指針旋轉作連結，認識順時針、逆時針的意義，進而認識旋轉角度是沿著順時針或逆時針方向轉動的角度。4-S-06「能理解平面上直角、垂直與平行的意義。」是讓學童從周遭物件中察覺直角，並能以三角板來檢驗直角，利用三角板來輔助垂直的理解。例：透過直角、垂直與平行的概念，認識直角三角形、平行四邊形、梯形。

五年級的相關細目 5-s-01「能透過操作，理解三角形三內角和為 180 度。」是以測量、剪裁等方式進行來發現三角形三內角和為 180 度。5-s-03「能認識圓心角，理解 180 度、360 度的意義，並認識扇形。」是讓學童認識圓心角、平角與周角的意義。

92 年版課程綱要的修訂增加了對立體角的察覺與認識（二年級），原本暫行綱要三年級就出現的部分內容，延後至四年級出現，並將部分教材列入五年級的教材內容。就角的課程內涵而言，整體來說教材內容和呈現順序沒有大幅度的更動，只是部分延後出現。

(二) 九年一貫暫行綱要翰林版三年級角的教材內容分析

上述最新公布的九年一貫數學學習領域能力指標從九十四學年度才開始正式實施，現行的教材乃是根據九年一貫數學學習領域暫行綱要中的能力指標所編纂的，本研究對象（國小三年級學童）所使用的教科書版本為翰林版，因此將翰林版（2004a，2004b，2004c）三年級有關角的教材內容作分析，以瞭解教材重點及教學活動，整理如表 2-4-6。

表 2-4-6 九年一貫暫行綱要翰林版三年級角的教材內容分析

教材配置	教學目標	教學活動
三上 第五冊 第三單元 排排看 (圖形與方位)	1. 認識正方形、三角形和長方形的邊、角和頂點，並點數個數。 2. 認識直角，找出生活器物中的直角。 3. 認識直角的記號，找出直角並畫上直角的記號。 4. 認識直角三角形，在給定數個三角形中找出有直角的三角形。	1. 介紹圖形的邊、角和頂點，先用三根鉛筆、筷子、吸管圍出一個三角形，將三角形的周界畫出來以便從有形體的三角形到平面上數學定義的三角形，方便介紹邊、角和頂點。 2. 藉由三角板認識直角，再用這個直角去疊合比較生活中的角，如果生活中的角或圖形上的角和三角板上的直角完全疊合，表示這個角是直角。 3. 認識直角的記號，再用三角板檢查其他圖形的角，並把直角作上直角記號，直角記號必須畫好，不能畫成弧形。 4. 利用三角板找出三角形是否有直角，若三角形有一個是直角，則為直角三角形；一個三角形最多只有一個直角。
三下 第六冊 第三單元 角與角度	1. 認識生活中或形體中的角。 2. 能複製角，並利用各種方法做出一個角。 3. 認識圖形角。 4. 認識角的大小，並能比較角的大小。 5. 認識量角器。 6. 能使用以「度」為刻度單位的工具，報讀角度。 7. 能畫出指定度數的角。	1. 找出教室有角的地方，並用自己的觀點說出這些角的異同處。 2. 把角描下來，接著做出一個角，並說出做法。 3. 觀察三角形圖卡上的頂點、邊和角圖卡上的頂點、邊，並說出角有 1 個頂點、2 個邊。 4. 利用疊合、複製的方法比較扇子張開的大小、圖形角的大小。接者用三角板的直角比較角的大小，並找出比直角大的角、比直角小的角以及和直角一樣大的角。 5. 觀察量角器，找出量角器的中心點，並觀察量角器的外圈從左到右，內圈從右到左，都有 0 到 180 的數字。 6. 學習量角器量角度的方法，用量角器量出角度並報讀記錄。再用量角器量出三角板上的每個角，觀察三角版上的直角，並了解直角是 90 度，90 度記做 90°。 7. 能用三角板畫出 30°、45°、60°、90°的角。