

從兒童迷思概念談數常識之教學經驗分享

楊德清

國立嘉義大學數學教育研究所教授

壹、前言

數常識之教與學已被許多國家視為小學數學教育的主要目標之一，而其教學精神更與九年一貫的理念相契合(徐俊仁和楊德清，2000)。因此如何發展數常識相關之教學活動以融入數學課程中，以及發展能夠有效率地進行這些教學活動，進而幫助兒童發展數常識能力之教學模式，實為當務之急。

數字常識並不是數學課程中的一個新主題，而是教與學方法上的改變。數常識教學重視學習者的學習過程，主張兒童應該有意義地學習數字與運算的概念，並且能夠將此種理解應用於日常生活情境中，而不只是汲汲於尋求「標準答案」；重視學生思考層面的多元化，而不只是機械式的使用公式或規則以獲得答案；同時鼓勵兒童發展「創造式」的解法，而不只是教師「供給式」的學習模式(Reys, et al., 1991)。

貳、兒童迷思概念之探討

數常識教學之所以受到重視，乃是由於傳統的數學教育太過於強調程序性技能的獲得，因而忽略了陳述性知識的培養，以致於兒童缺乏思考、判斷的能力。誠如許多數學教育家的主張：思考的過程要比答案的獲得更重要，數學的學習應該是強調概念的理解，而不只是機械式地練習以尋求正確的答案(Altizer-Tuning, 1984; Bezuk & Cramer, 1989; Cherry, 2001; Markovits & Sowder, 1994; Sowder, 1988)。因此在教學的過程中，教師應重視的是如何協助兒童概念的發展，而不是熟稔計算的技能，畢竟正確的答案並不代表理解。例如：例如，楊德清(2000, 2002)的研究顯示，當要求學生不需使用紙筆計算的方式去判斷 $534.6 \times 0.545 = 291357$ 之小數點的位置時，多數的學生皆提供了錯誤的答案，經研究者進一步的追問，以深入瞭解學生的

思考過程，乃發現了問題的癥結之所在：

這個534.6有1位小數，而0.545有3位小數。則這兩個數目相乘的結果應該有 $1+3=4$ 位小數，所以答案是29.1357。

或

這個數字(指534.6)有1位小數，而這個數字(指0.545)有3位小數，所以相乘的結果應該有 $1+3=4$ 位小數，所以我想答案應該是2913.57。

雖然少數學生可以給予正確的答案，但是其解題過程仍無法跳脫算則的巢臼：

被乘數有1位小數，乘數有3位小數，所以本來應該有四位小數才對。因為 $6\times 5=30$ ，因為0沒有寫上去，所以小數點變為3位。所以答案為291.357。

從上述的結果可以發現兒童的迷思概念乃在於傳統的教學裡，教科書習慣性地告訴兒童：「當兩數相乘時，其乘積之小數位數乃是由被乘數與乘數之小數位數相加所得，同時由右至左數其位數以決定小數點之位置」。此迷思概念正反應了：過度的強調算則的教學或計算技巧，將侷限了兒童對數字與運算的理解，以及思考與判斷答案合理性的能力，亦即阻礙了兒童數常識能力的發展(Burns, 1994; Markovits & Sowder, 1994; Reys & Yang, 1998)。

參、教學經驗之分享

誠如許多數學教育家的主張：思考的過程要比答案的獲得更重要，數學的學習應該是強調概念的理解，而不只是機械式地練習以尋求正確的答案(Altizer-Tuning, 1984; Cramer, et al., 2002; Cherry, 2001; Sowder, 1988)。因此在教學的過程中，教師應重視的是如何協助兒童概念的發展，而不是熟稔計算的技能，畢竟正確的答案並不能代表真正的理解。

那麼教師應如何有效的運用數常識教學活動於教室，以協助兒童發展數常識呢？教學並沒有唯一的捷徑，亦沒有唯一正確的教學法，唯端賴教師們從教學行動

中不斷的反省檢討，不斷的學習，以修正我們的教學方法。以下將從研究者多年的實務與研究經驗，分享教學心得：

一、培養自己隨時具教學反思能力的教學者

NCTM(2000)之學習原則認為：有效率的學習者能夠從錯誤中反思與學習。同樣地，有效率的教學者亦能從教學中進行反思，隨時掌握學習者的狀況，能夠隨時隨地發現問題，並尋求解決的策略。教師在教學中或教學後嘗試寫下反思札記，以隨時讓自己有機會進行反思是不錯的方式。例如：

有時研究者雖然想有效地引導學生發表自己的解題方法，但卻仍

有許多不盡理想之處。例如：在教學時，研究者對「 $\frac{1}{4}$ 和 $\frac{2}{8}$ 是不

是同樣的大小？」這樣的教學方式，應該改為「 $\frac{1}{4}$ 和下面哪一個答

案是同樣的大小呢？」，我想會是較理想的方式（890929 反省札記）

藉由上述的教學反省札記，教師可以經常反省以思考如何改進教學。

二、教師必須為學生創造良好的學習情境，方能幫助學生學習

許多學者（Anghileri, 2000; Reys, et al., 1991; Yang, 2002, 2003; 楊德清, 2002）主張數常識教學應強調學習的過程。教師應營造自然的學習情境與愉快的室內對話氣氛，以鼓勵學生積極從事數學概念的探索、參與討論的意願，以啟發學生思考和推理的能力，讓師生從質疑與辯證的互動中，檢視過程或答案的合理性。因此，欲鼓勵學生進行有意義的學習，教師必須創造一個良好與安全之學習情境，提供學生探索問題的空間，讓學生有思考、辯證、質疑的機會，從討論的環境中發展與修正自己的觀點，發展屬於自己的知識，引導學生成為自己學習的主宰者，如此之教學情境對兒童數常識之發展，才是最好的途徑。誠如美國數學教師協會在「學校數學原則與標準」(PSSM)之教學原則中所提到的：「有效率的數學教學必須瞭解學生所要學的知識及如何學習，並且要不斷的挑戰及支持他們，讓他們能學習的更好。」（NCTM, 2000, p.16）。

三、教師在有效率的教學過程中扮演一個極為重要的角色-佈題者，引導者，而非解題者(NCTM, 2000)

教師在教學的過程中應清楚的瞭解本身所扮演的角色，為佈題者，以及鼓勵同學進行合作解題，分享彼此的想法。是引導學生學習，而不是為他們解題。誠如 Sowder (1992) 的主張：我們應該運用一種非直接的教學方法，以協助學生發展數常識。而此種非直接的教學法即是重視學生的學習過程，是一種幫助學生察覺、探索、思考、了解的學習歷程。因此教師於教學的過程中是引導者，引導學生往正確的方向前進。此正與九年一貫數學學習領域之課程目標的精神「數學學習活動應讓所有學生都能積極參與討論，激盪各種想法，激發創造力，明確表達想法，強化合理判斷的思維與理性溝通的能力，期在社會互動的過程中建立數學知識」相呼應。例如：下列之教學討論中，教師扮演的角色是追問者：「為什麼呢？」以及

S3： $\frac{3}{10}$ 比較接近 $\frac{1}{2}$ 。

T：好，為什麼呢？

S3：請看我們的圖形(參考圖1)因為 $\frac{3}{10}$ 差 $\frac{2}{10}$ 就是 $\frac{1}{2}$ 了。

T：耶， $\frac{3}{10}$ 差 $\frac{2}{10}$ 就是 $\frac{1}{2}$ 了，然後呢？

S：可是 $\frac{3}{4}$ 離 $\frac{1}{2}$ 感覺就較遠了，所以答案是 $\frac{3}{10}$ 比較接近 $\frac{1}{2}$ 。

(891027 之教學活動)

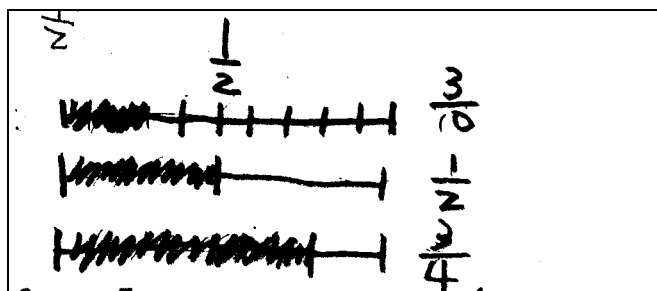


圖 1：以圖形及符號表徵的方式解釋

引導者，鼓勵學生發表想法，而不是為學生解題。

四、運用「重覆」與「回應」技巧，引導班級討論的進行

研究者認為教師在引導班級進行討論時，若有必要時應協助學生清楚的表達（重覆）想法，使得每一位學生都能聽得清楚，並藉以集中學生注意的焦點；如果學生回答的內容太過粗略，教師為了讓問題更明確，也為了引導學生能夠使用數學語言來溝通，所以可運用「回應」（Resnick, 1983）技巧，將學生所提出的問題，傳達出更精確的意義，以引導討論的進行。例如：學生的發表不夠清楚時，教師可適時協助學生釐清發言內容。

S：（第四組的杰陞）這裡才 $\frac{1}{10}$ 啊（指箭頭的另一端）！

T：好，這裡才 $\frac{1}{10}$ ，那這裡有沒有可能是 $\frac{5}{10}$ ？

S：不可能。

T：為什麼不可能呢？

S：因為 $\frac{5}{10}$ 比 $\frac{1}{10}$ 大。（有些同學回答）

五、請學生寫「數學日誌」以記錄學習心得，如此可以幫助學生自我反省

數學日誌可以幫助學生反省學習心得，培養學生寫作的技巧，亦可以紀錄他們在課堂進行中沒有表達出來的想法。學生的數學日誌更可以幫助教師做為反省教學方式，教學內容與改進教學之用。同時數學日誌更可用以幫助教師瞭解學生的學習心態，學習成效，與確定教學活動是否有助於他們的學習。例如：

我們以前的觀念，就是 $\frac{1}{5}$ 比 $\frac{1}{6}$ 大，那 $\frac{4}{5}$ 就比 $\frac{5}{6}$ 大，可是我們聽

到上一次聖茲解釋說，如果剩下的 $\frac{1}{5}$ 比 $\frac{1}{6}$ 大，那用去的部分就會

比較小， $\frac{1}{6}$ 比 $\frac{1}{5}$ 小，那用去的部份就會比較大。這時我們就用聖

茲說過的，用剩下的來比較。」（筱詩的數學日誌）

但是我聽班上的聖茲說 $\frac{5}{6}$ 剩下的部份比 $\frac{4}{5}$ 小，所以 $\frac{5}{6}$ 大。」

（俊億的數學日誌）

藉由上述的數學日誌可以幫助教師更清楚的瞭解學生的學習情形。

六、教師必需具備充足的數常識

數學教師必需具備深厚的數學背景與能力已被非常重視，誠如 Ma(1999)在她的一本書「*Knowing and teaching elementary mathematic*」中已清楚明白地強調學科知識的重要性，特別是數學教師應具有的數學素養。研究者亦認為教師欲幫助兒童發展數常識能力，則教師必須首先具備穩固的與深厚的數常識。由於數學教室的學習情況是千變萬化的，教師必須從學生的討論中隨時掌握情況，瞭解學生的迷思概念，問題癥結之所在，並在適當時機適時介入以引導學生獲得正確的數學知識。例如：「當沒有任何一小組的同學可以提供正確答案時，教師仍須有耐心地等待與聆聽學生的解題方法與解釋，並思考如何配合學生的反應以引導學生發展正確的數學概念。教師唯有具備堅實的數常識概念，方能知道何時與如何引導學生發展正確的思考方向(891027 教學反思)」。

肆、 結論

教學是一門藝術、亦是一門學問，它沒有固定的模式，教學之妙，存乎一心；更何況教學情境因人、事、時、地、物之不同而有顯著之差異存在。故如何營造良好之學習情境，以利學生之學習，以及協助兒童發展數常識能力，端賴教師臨場之應變與反思能力。

子曰：「學而不思則惘，思而不學則怠」，意思是說只知學習而不思考所學為何，此種學習只是惘然而已；...。此種情境猶如傳統的數學教學，只知一味地強調熟稔數學公式的重要，強調解題速度、解題技巧、與快速地獲得答案。然而此種不重視學習歷程，不強調理解，其學習結果往往是知其然而不知其所以然？的確，教師在教學過程中應該思考如何讓學生能夠“學而後思，思而後學”，兩者並行，使學生的學習達到完美的境界，以發揮教學的功效。

參考文獻

徐俊仁，楊德清(2000)：從數字常識的觀點探討九年一貫數學學習領域「數與計算」

的能力指標，*科學教育研究與發展季刊*，21，51-67。

楊德清 (2002)：從教學活動中幫助國小六年級學生發展數字常識能力之研究，*科學教育學刊*，10(3)，233-260。

Alitzer-Tuning, C. (1984). One point of view: Crisis in arithmetic teaching: The future is here. *Arithmetic Teacher*, 32, 2.

Burns, M. (1994). Arithmetic: The Last holdout. *Phi Delta Kappan*, (Feb.), 471-476.

Cramer, K. A., Post, T. R., & delmas R. C. (2002). Initial fraction learning by fourth- and fifth- grade students: A comparison for the effects of using commercial curricula with the effects of using the rational number project curriculum. *Journal for Research in Mathematics Education*, 33(2), 111-144.

Ma, Liping (1999). Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum

Markovits, Z., & Sowder, J.T. (1994). Developing number sense : An intervention study in grade 7. *Journal for Research in Mathematics Education*, 25(1), 4-29.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *The Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Reys, B. J., Barger, R., Dougherty, B., Hope, J., Markovits, Z., Parnas, A., Reehm, S., Sturdevant, R., Weber, M., & Bruckheimer, M. (1991). *Developing Number Sense in the Middle Grades*, Reston, VA: NCTM.

Reys, R. E. & Yang, D. C. (1998). Relationship between Computational Performance and Number Sense among Sixth- and Eighth-Grade Students in Taiwan, *Journal for Research in Mathematics Education*, 29, 225-237.

Sowder, J. (1992). Estimation and number sense, in D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp.371-389). New York: Macmillan.

Sowder, L. (1988). Children's solution of story problems. *Journal of Mathematical Behavior*, 7, 227-238.

Yang, D. C. (2002). Teaching and Learning number sense: one successful process-oriented activity with six grade students in Taiwan, *School Science and Mathematics Journal*, 102(4), 152-157.

Yang, D.C. (2003). Teaching and Learning Number Sense—An Intervention Study of fifth grade students in Taiwan. *International Journal of Science and Mathematics Education*. 1(1), 115-134.