

中學生通訊解題第八十三期題目參考解答及評註

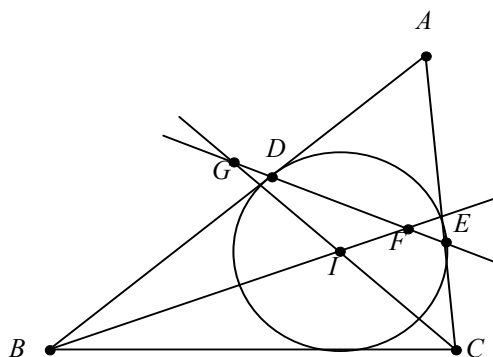
臺北市立建國高級中學 數學科

問題編號

8301

如圖， I 是 $\triangle ABC$ 的內心，內切圓分別切 AB 邊與 AC 邊於 D 、 E 兩點，且 DE 直線分別與角平分線 BI 與 CI 交於 F 、 G 兩點，證明： $\angle FCG$

$$= \frac{\angle A}{2}。$$



參考解答：

因 $\angle AEF = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle A) = \frac{1}{2}(\angle B + \angle C) = \angle FIC$ ，所以 F 、 I 、 C 、 E 四點共圓。所以 $\angle CFI = \angle CEI$

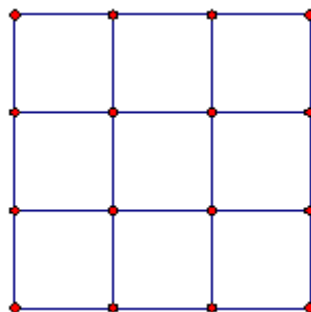
$$= 90^\circ，而 \angle FCG = 90^\circ - \angle FIC = 90^\circ - \frac{1}{2}(\angle B + \angle C) = \frac{\angle A}{2}$$

解題評註：本題的關鍵在於找圓內接四邊形，並利用其性質。

問題編號

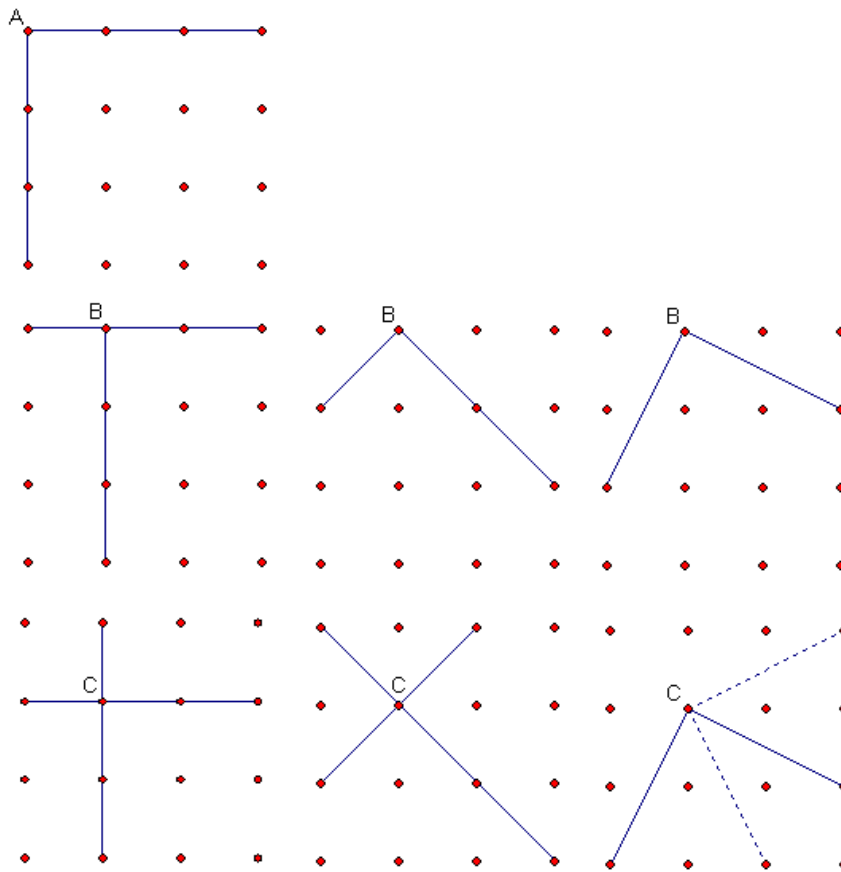
8302

如右圖，9 個邊長為 1 的小正方形，共有十六個頂點，則以這十六個頂點為頂點的直角三角形共有幾個？



參考解答： Ans：200

如下圖，以 A 為直角有 $3 \times 3 = 9$ 個，以 B 為直角有 $3 \times 3 + 1 \times 2 + 1 = 12$ 個，以 C 為直角有 $3 \times 3 + 3 \times 2 + 2 = 17$ 個，由對稱性共有 $9 \times 4 + 12 \times 8 + 17 \times 4 = 200$ 個



解題評註：

1. 本題可以有若干不同的角度切入，需要的是耐心與細心，大部分的同學是以直接找出九種不同的三角形再逐一計算。另外，也有同學以不同大小的矩形來區分，再逐一計算。最值得一提的是台北市蘭雅國中涂同學採用斜率的方法來區分，頗有巧思，相對於另外的方法，不但比較不會不小心漏掉可能的狀況也比較好算，值得鼓勵。
2. 另外，2 位同學在計算兩股是水平線及鉛直線的三角形時，每個格子點當直角時，都能作出 9 個直角三角形，從而很快得出這類三角形共有 144 個。想法頗具創意，值得鼓勵。

問題編號

8303

試求滿足下列條件的正整數 a, b, c

(1) $(a-1)(b-2)(c-3)$ 是 $abc-4$ 的因數

(2) $5 \leq a < b < c$

※可能會用到的工具：若 $0 < k < x < y$ ，則 $\frac{y}{y-k} < \frac{x}{x-k}$ 。

參考解答：

(i) 首先考慮 $s = \frac{abc-4}{(a-1)(b-2)(c-3)}$ 。因為 $5 \leq a < b < c$ ，所以

$$\frac{abc-4}{(a-1)(b-2)(c-3)} > \frac{abc-a}{(a-1)(b-2)(c-3)} = \frac{a(bc-1)}{(a-1)(b-2)(c-3)};$$

$$\text{而 } \frac{(bc-1)}{(b-2)(c-3)} > \frac{bc-b}{(b-2)(c-3)} = \frac{b}{b-2} \times \frac{c-1}{c-3}, \text{ 故 } s > 1。$$

(ii) 又因為 $s < \frac{a}{a-1} \times \frac{b}{b-2} \times \frac{c}{c-3}$ ，所以

(1) 當 $a \geq 9$ 時， $s < \frac{9}{8} \times \frac{10}{8} \times \frac{11}{8} = \frac{990}{512}$ ，所以這樣的 s 並不存在。

(2) 當 $a = 5$ 時， $s < \frac{5}{4} \times \frac{6}{4} \times \frac{7}{4} = \frac{210}{64}$ ，所以 $s = 2, 3$ 。

(3) 當 $6 \leq a \leq 8$ 時， $s < \frac{6}{5} \times \frac{7}{5} \times \frac{8}{5} = \frac{336}{125}$ ，所以 $s = 2$ 。

(iii) (1) 當 $a = 5, s = 2$ 時，經化簡可知 $(3b-16)(c-8) = 76$ ，所以 $3b-16 = 2, 38$ ，
即 $(b, c) = (6, 46)$ 或 $(18, 10)$ 。※ $(18, 10)$ 不合。

(2) 當 $a = 5, s = 3$ 時，若 $b \geq 7$ ，似(ii)可得 $s < \frac{5}{4} \times \frac{7}{5} \times \frac{8}{5} = \frac{14}{5}$ 這是不可能的！

所以唯一的可能是 $b = 6$ ，此時 $c = \frac{70}{9}$ (不合)。

(3) 當 $a = 6, s = 2$ 時，經化簡可知 $(b-5)(2c-15) = 43$ ，所以 $(b, c) = (6, 29)$

※此與 $a < b$ 不合。

(4) 當 $a = 7, s = 2$ 時，經化簡可知 $(5b-24)(5c-36) = 484$ ，

所以 $(b, c) = (5, 104), (7, 16), (29, 8)$ 。

※皆與 $a < b < c$ 不合。

(5) 當 $a = 8, s = 2$ 時，經化簡可知 $(3b-14)(c-7) = 54$ ，所以 $(b, c) = (5, 61)$

※此與 $a < b$ 不合。

綜合上述， $a = 5, b = 6, c = 46$ 是唯一解。

問題編號

8304

從 1 到 2010 的整數中，該整數之各位數字和為 5 的倍數(例如:109、1004、1978、2008，各位數字和為 5 的倍數)，試問這樣的數共有幾個？

參考解答：

設 k 為非負整數，考慮 $10k, 10k+1, \dots, 10k+9$ 這十個連續正整數。

這十個正整數除了個位數字以外，其他位數全部都相等，所以當考慮各位數字之和時，這十個正整數的各位數字和必定是連續的十個正整數。

因此 $10k, 10k+1, \dots, 10k+9$ 這十個連續正整數中，恰有兩個正整數它們的各位數字和為 5 的倍數。故從 0 到 2009 的整數中，恰有 $201 \times 2 = 402$ 個整數滿足題意，再考慮 0 和 2010 這兩個正整數，此題答案為 401 個。

解題評註：

大家的做法都差不多，有些同學以位數分類，有些同學從一些較小的數字中找到規則，計算也都正確，唯一可能可以再精進的地方就是試著將過程中的理由，確實交代清楚！

問題編號

8305

設 a_n 等於最接近 \sqrt{n} 的整數 ($n \geq 1$)，因此 $a_1 = 1$ 、 $a_2 = 1$ 、 $a_3 = 2$ 、 $a_4 = 2$ 、 $a_5 = 2$ 、 $a_6 = 2$ 、 $a_7 = 3$ 、 $a_8 = 3$ 、... 而形成數列 $\langle a_n \rangle$ ，求 $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_{2010}} = ?$

參考解答：

Ans : $\frac{266}{3}$

假設最接近 \sqrt{n} 的整數為 k ，則 $k - \frac{1}{2} < \sqrt{n} < k + \frac{1}{2} \Leftrightarrow k^2 - k + \frac{1}{4} < n < k^2 + k + \frac{1}{4}$ ，最後的式子

代表當 n 取值 $k^2 - k + 1$ 、 $k^2 - k + 2$ 、 \dots 、 $k^2 + k - 1$ 、 $k^2 + k$ 等 $2k$ 個數字時， $a_{k^2 - k + 1}$ 、

$a_{k^2 - k + 2}$ 、 \dots 、 $a_{k^2 + k - 1}$ 、 $a_{k^2 + k}$ 均等於 k ：

若 $k = 1$ ， a_1 、 a_2 等 2 個數字均等於 1，

若 $k = 2$ ， a_3 、 a_4 、 a_5 、 a_6 等 4 個數字均等於 2，

若 $k = 3$ ， a_7 、 a_8 、 \dots 、 a_{12} 等 6 個數字均等於 3，

若 $k = 45$ ， a_{1981} 、 a_{1982} 、 \dots 、 a_{2070} 等 90 個數字均等於 45，所以

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_{2007}} = 2 \times \frac{1}{1} + 4 \times \frac{1}{2} + 6 \times \frac{1}{3} + \dots + 88 \times \frac{1}{44} + 30 \times \frac{1}{45} = 2 \times 44 + \frac{2}{3} = \frac{266}{3}$$

解題評註：

每次的通訊解題，有些題目可以啟發同學做深入研究，進而成為科展題目，有些是為了鼓勵同學學習數學的興趣而出，這題的目的顯然是後者，而且答對的同學幾乎各不相同，更突顯了通訊解題的目標。