

---

# 將離散數學納入中小學數學課程

## —以遞迴關係為例

蔡逸勝\* 林炎全

國立臺中教育大學 數學教育學系

### 壹、前言

十八、十九世紀的工業革命依賴於、也促進了微積分的發展。二十、二十一世紀的信息革命則依賴於、也正促進著離散數學的發展。隨著計算機科學的發展，離散數學將扮演越來越重要的角色。本文可以大略分成幾個部分，文獻探討部分是提出幾個將離散數學納入課程的例子以及幾位國內外學者的主張。教案設計理念則是希望藉由將生活中的遞迴關係引入現有的課程來促使孩子主動學習與思考，因此也提供了教案以供參考。而在最後則是提出本文結論以及當我們將離散數學納入課程時應該注意的地方，像是老師對於離散數學的認知、考慮校園、教室內的情形、以及符合的能力指標。

### 貳、文獻探討

在面對二十一世紀快速變動的環境，教育部從民國九十年公佈九年一貫暫行綱要之後，旋即在民國九十二年公佈正式綱要，並於民國九十四年在各中小學全面實施，然而數學領域在這次的修訂中，卻引起社會輿論的廣泛討論；不論中外，

我們可以發現數學課程是讓學生感到退卻的科目，學生隨著年級越高對於數學厭惡的程度也隨之增加。文獻 Susan(1997)發現：「學生常說討厭數學，原因其實是他們討厭計算，因為他們從一入學便一再的練習四則運算，而他們卻不知所謂的數學是指什麼。」而國內楊淑芬(民 81)提到：「數學課程在中小學裡成爲最不受歡迎、最枯燥乏味、最沒成就感的科目。」目前推動的九年一貫課程，主要目的是培養學生帶著走的能力，希望學生學習數學知識之後，不再是被動知識的保存者，而應當是知識的建構者。Henry(1997)的研究指出：離散數學課程比起傳統的課程多提供一些更有價值的教育經驗，並且強調邏輯思考、問題的分析與解答。

本文主要是在談將離散數學納入現今中小學數學課程，除了國外有許多學者支持這個觀念之外，其實在美國將離散數學納入中小學數學課程早就已經實施多年，而且發現比起傳統的課程內容更能讓學生接受。Claire(1991)發現目前許多離散方面的問題、概念、探索、研究以及實驗都已經在中小學的課程裡，只是沒有明確的指出；而 Eric(1991)則是強調離散數學主題已經存在，例如：矩陣、計數、歸納

---

\* 爲本文通訊作者

法、序列、集合以及邏輯都是離散的主題並且都是先前課程的一部分；Evan(1997)說到離散數學對於中等學校的學生而言是容易接受的，許多相關主題都已存在於近代課程中或是已合併於課程當中；NCTM(1989)更是強調將離散數學主要的原理直接的與中等學校核心課程結合在一起。綜合以上多位學者的看法，我們可以發現將離散數學納入現有的中小學課程其實是可行。此外就像 James(1997)提到：將離散數學納入現已存在的課程內，可以導致學生有更深入的了解；而 Joseph(1997)更是明確的指出：離散數學比起目前的教學方法能夠更有效的達到數學教育麼目標。從這些學者所提到的優點與建議來看，將離散數學納入現有課程將是一個必然的趨勢。

Eric(1997；1991)提到：「離散數學在中等教育課程受到廣泛的推薦並被認為是數學裡重要的分支」、「將離散數學納入中學課程裡是令人興奮與必須的。」NCTM課程標準(1989)內更明確的指出可以將離散數學轉至中小學來使得學生從事數學與科學為職業的趨勢更加穩固，這也正是作者主張將離散數學融入現今課程的主要原因，除了已經有成功的案例，更希望能藉此引發學生學習動機，讓學生對於數學有另一番的體驗。

### 參、教案設計理念

本教案是以離散數學中的遞迴關係來做設計，離散數學的主題所涵蓋的範圍可

以說是十分廣泛，作者會選擇以遞迴關係來設計的主要原因有：1.遞迴關係對我們生活上的影響十分的廣泛，舉凡像是：四季的循環、每週七天的順序、火車座位的號碼、生物學中細胞的分裂...等，我們不難發現除了影響廣泛之外更是應用到各領域中；2.電腦上的應用：近年來電腦科技發展的十分迅速，進而也影響到現今教育理念，孩子擁有電腦方面的相關知識已經是必備的了；而我們所討論的遞迴關係與電腦則是有著密不可分的關係，像電腦系統的迴圈、電腦程式...都有用到遞迴的觀念。因此作者提供教案來讓現職老師做個教學上的參考，希望藉由將生活中的遞迴關係引入現有的課程來促使孩子主動學習與思考。

在國小數學課程的主要目標是希望學生能對數學產生興趣進而主動去觀察與學習。但是我們不難發現，傳統的教學活動主要是以課本的內容配合老師的講解來進行；對於學生而言，除了無法提起學習興趣以外，所學到的知識也不能應用在日常生活上。因此，是否能透過良好的單元設計，提升學生學習動機與良好學習態度就顯得更加重要了，而我們所要考慮的有：「上課時，是否能常與學生交流互動，而不只是老師一個人的舞台？」「公式的教學，學生能懂得理解與應用，而不是單純記憶？」「學生能在快樂中學習，而不是在恐懼中學習？」「學生能主動追求答案、自我成長？」這些問題必須經過多方面的單元教學設計來解決，無法僅以傳統式教學的知識傳授來滿足。

傳統的數學教育，老師經常將最好的解題方式教給學生，我們所看到的都是學生以死背公式的方式來進行學習，靠死背來獲得高分，學生的學習策略是記憶而不是理解。本教案主要設計理念是希望藉由離散數學提供學生探索日常生活上一些獨特的問題情境，而不是經由寫方程式或是運用相同公式來直接應用；學生通常需要透過發展模型或是經由其它形式來設想問題情境。離散數學並不需要學習很多的定

義與定理，也就是不用死記公式，但是需要學習者有敏捷與好奇的心智。黃敏晃(民 89) 說到，唯有讓孩子嚐到自己發現答案的喜悅，才能真正吸引他主動投入思考的境界，為了建立孩子主動學習和願意思考的環境，整個教學型態必須做調整與改變。另外由於高中的數學課程內容比起中小學較抽象，因此希望藉由離散數學來建立中小學學生一些具體的觀念，等到進入高中課程時會較容易進入狀況。

#### 肆、教案

教案設計名稱	大家來找碴	教學設計者	學校	
適用年級			姓名	
教學目標	1. S-1-01 能由物體的外觀，辨認、描述與分類簡單幾何形體。 2. S-1-02 能描繪或仿製簡單幾何形體。 3. D-1-01 能將資料做分類與整理，並說明其理由。 4. C-R-01 能察覺生活中與數學相關的情境。 5. C-T-03 能把情境中與數學相關的資料資訊化。 6. C-S-03 能熟悉解題的各種歷程：蒐集、觀察、臆測、檢驗、推演、驗證、論證等。 7. C-S-04 能運用解題的各種方法：分類、歸納、演繹、推理、推論、類比、分析、變形、一般化、特殊化、模型化、系統化、監控等。 8. C-C-08 能尊重他人解決數學問題的多元想法。 9. C-E-01 能用解題的結果闡釋原來的情境問題。			
九年一貫相關學習領域	藝術與人文 2-2-6 欣賞並分辨自然物、人造物的特質與藝術品之美。 2-3-6 透過分析、描述、討論等方式，辨認自然物、人造物與藝術品的特徵及要素。			

教學活動重點		對應能力 指標	教具應用	時間
教師活動	學生活動			
教學前準備：  1、在活動進行前先要確定學生了解何謂圖形的規律，如： $\triangle \nabla \triangle \nabla \triangle \nabla \dots$ 、 $\bigcirc \triangle \square \bigcirc \triangle \square \dots$ 、 $\dots$ 。 2、事先確認校園裡是否有具有規律圖形的場所，可以幫助學生進行思考。				
引起動機： 1、讓學生自己去尋找校園內具有規律的圖形，並且紀錄下來。		將所觀察的地點與圖形紀錄下來。  S-1-01 C-R-01	學習單	10
發展活動： 1、請每組學生上台將所觀察到的圖形展示出來說明觀察地點、圖形規律並試著將之後的規律圖形做出來。 2、要學生將數字填入所觀察到的圖形內(老師在此可以說明何謂數列)。 3、要學生將不同的圖形進行分類紀錄下來，例如： $\square$ 裡有哪些數字？ $\triangle$ 裡有哪些數字。 4、老師提問：從所紀錄的資料裡觀察看看有何發現。 5、老師提問：從數字去推測之後的圖形是什麼，例如：號碼 12 會是什麼圖形？ 6、教師進行總結：可以由餘數來找出之後第 $N$ 個數字所代表的圖形。		分組活動： 請學生先進行分組討論後，再進行結果的發表。 1：觀察到的地點。 2：觀察到的規律圖形。 請學生分享自己觀察的圖形並且說明其規律。  將同樣的圖形分類出來後若有 $N$ 種圖形的話該圖形的數字被 $N$ 除餘數都會相同。  C-1-02 C-C-08 C-S-03 C-E-01 2-3-6  D-1-01 C-T-03 C-S-04  C-S-03 C-S-04 C-S-04 C-S-03  C-R-01		15  2  3  10  5
綜合活動： 指定回家作業		找日常生活中具有規律的事物。  2-2-6		

<p>延伸活動：</p> <p><b>動動腦 1</b>          有 3 個工人要舖地磚，總共要舖 80 塊，3 個工人爲了避免擠在一起不方便工作於是決定分成 3 部分進行：第一個工人從第 1 塊的位置開始舖，第二個工人從第 26 塊的位置開始舖，最後一個從第 53 塊開始舖，可是地磚有固定的形式爲          ⊙ ⊕ ○ ◎ ⊙ ⊕ ⊙          ◎...，爲了要維持地磚的規律性，這 3 位工人所要放的第一塊地磚分別是哪一個圖形？</p> <p><b>*動動腦 2</b>  <math>3^0 = 1</math>、<math>3^1 = 3</math>、  <math>3^2 = 3 \times 3</math>、  <math>3^3 = 3 \times 3 \times 3</math>          ...透過計算器的操作，檢試乘方計算末位數的循環現象確定學生了解此算則後，問學生 3 的 100 次方的個位數是多少？以此類推，可以問其它數字的 N 次方的個位數爲何。</p> <p>參考內容：          1、 是否有方法可以很快的知道第 N 號所代表的圖形(此問題只是要學生去思考不一定有公式解)。          2、 在中低年級時可以考慮是否要引入介紹等差級數。          3、 可以配合三角形數與正方形數來協助教學。</p> <p>備註：          打*的活動適合給高年級或是當講到指數律的時候可以引進來，不需要在中低年級時說明。</p>			<p>計算器</p>	
---	--	--	------------	--

## 伍、結論與建議

### 一、結論

曾如前面所說，在國外有多位學者也是支持將離散數學納入中小學課程，甚至早已將此想法化成實際行動，因此作者除了想將早已存在於現今中小學數學課程中與離散主題相關的概念強化外，另一方面也希望能夠將其它較生活化的主題給引入課程中。愛因斯坦曾說：「教師的主要任務，是喚醒學生對創造與知識的樂趣。」而離散數學正是可以幫助老師來讓學生感受到學習數學的樂趣與成就，因此，若能將離散數學納入現有課程，相信能讓學生對學習數學重新拾起興趣與信心，並且不再害怕數學。

### 二、建議

1. 將離散數學納入課程中不單單只是將離散的主題放在課堂中，而是該與其它科目做連結，也就是將離散數學以核心課程的方式來進行設計，這樣才能真正的發揮離散數學的最大功效。
2. 課程的改變，老師也是扮演著很重要的角色。因此，老師除了加強本身對於離散數學方面的專業認知外，平時也應該多去注意或是收集生活中相關的資料以充實上課的內容。
3. 對於所提供的教案，如果校園裡無法找到相關的規律圖形，作者建議老師們可以自己使用一些生活上的例子來引起學生的注意，或是利用相片的方式來呈現，不一定要在校園內找到有規律的圖形。

4. 雖然國內現今的課程直到高中才正式有離散課程的名稱出現，但從前面所提到國內外的文獻來看，這將是未來的一個潮流也是趨勢，作者在此主要是提供給一般的國中小教師作為教學上的參考，教師們可以針對教室內學生的狀況來做調整。
5. 雖然在中、小學的課程綱要內並未有明確的能力指標是在說明離散數學，但是不代表沒有離散數學的內容，我們可以將本文所提到的內容掛在能力指標 N-1-04、N-3-12 之下，或是分年細目表 1-n-03、1-n-07、7-n-13 之下。

### 參考文獻

- 楊淑芬(1992)：數學史在數學教育中的重要性。**數學傳播**，16(3)，16-22。
- 黃敏晃主編(1999)：**數學教育的藝術與實務—另類教與學**。(pp.8)。台北市：心理。
- Susan, H. P. (1997). "Using Discrete Mathematics to Give Remedial Students a Second Chance", *Discrete Mathematics in the Schools*. American Mathematical Society, National Council of Teachers of Mathematics, Providence, R.I., c1997.
- Henry, O. P. (1997) "Mathematical Modlings and Discrete Mathematics", *Discrete Mathematics in the Schools*. American Mathematical Society, National Council of Teachers of Mathematics, Providence, R.I., c1997.
- Claire, Z. G. (1991) "Strengthening a K-8 Mathematics Program with Discrete Mathematics", *Discrete Mathematics across the Curriculum, K-12:1991 yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics*, Reston VA, 1991.

- Eric, W. H. (1991) "Discrete Mathematics: An Exciting and Necessary Addition to the Secondary School Curriculum", *Discrete Mathematics across the Curriculum, K-12: 1991 yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics*, Reston VA, 1991.
- Eric, W. H. (1997) "Discrete Mathematical Modeling In The Secondary Curriculum: Rationale and Examples from The Core-Plus Mathematics Project", *Discrete Mathematics in the Schools*. American Mathematical Society, National Council of Teachers of Mathematics, Providence, R.I., c1997.
- National Council of Teachers of Mathematics, *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*, Reston VA, 1989.
- Evan, M. (1997) "Discrete Mathematics Activities for Middle School", *Discrete Mathematics in the Schools*. American Mathematical Society, National Council of Teachers of Mathematics, Providence, R.I., c1997.
- Joseph, M. (1997) "Discrete Mathematics and Public Perceptions of Mathematics", *Discrete Mathematics in the Schools*. American Mathematical Society, National Council of Teachers of Mathematics, Providence, R.I., c1997.
- Jame, T. S. (1997) "Integrating Discrete Mathematics in the Curriculum: An Example", *Discrete Mathematics in the Schools*. American Mathematical Society, National Council of Teachers of Mathematics, Providence, R.I., c1997.