第 1 章 緒論

1.1 研究動機

明代是中國傳統數學的衰落時期，漢唐《算經十書》和宋元算書在當時幾乎已成爲絕學，[1]除了珠算術之外，明代數學並沒有取得太大成就。明代末年，《大統曆》因年久失修，預測日月蝕已經不合時宜，極需更新數學知識來修改曆法。耶穌會傳教士藉此捕捉到契機，將西方數學大量地傳播到中國，這種現象一直延續到清朝初年。

對清代中國數學研究影響最大的當首推康熙皇帝，他不但親自學習，還設立專門機構從事研究，更編撰一部大型介紹數學知識的《數理精蘊》，[2]帶動起一股清代初年數學家們致力於中西數學會通和研究的風潮。康熙皇帝晚年因禮儀問題而開始禁教，導致此後百餘年間新的西方數學知識無法再傳入中國。清代中期，考據學風和「西學中源」說盛行，經由編撰《四庫全書》和乾嘉學派學者多方地搜尋和校訂，一些古典數學著作被重新發現和研究，數學史上稱爲中國傳統數學復興的時期。

李潢(？~1812)爲清代中期乾嘉學派重要的數學家，曾參與《四庫全書》的編撰，一心闡明古算，致力於復原古算書和傳統算法，與同屬「中法派」的李銳(1768~1817)，[3]並稱「南李北李」。李潢在「興復古學、昌明中法」的職志之下，著有《九章算術細草圖說》，對於《九章算術》作出了具體的貢獻，也吸引筆者對於他其餘算學著作的好奇心，因而想要去一窺《緝古算經考注》這本著作。

1.2 研究回顧

有關李潢生平事蹟或算學研究的論述並不多，以專文介紹的更是少見。以下僅就筆者所能收集到的文章作列舉如下：

---

[1] 《算經十書》本來包括《周髀算經》、《九章算術》、《海島算經》、《孫子算經》、《五曹算經》、《夏侯陽算經》、《張邱建算經》、《五經算術》、《綴術》、《緝古算經》等十部數學著作。後來《綴術》、《夏侯陽算經》亡失。清中葉後人們補入《數術記遺》及贗本《夏侯陽算經》，仍爲十部。

[2] 《數理精蘊》是部五十三卷的數學百科全書，由康熙「御定」，梅瑴成等人歷時 31 年(1690 至 1721)編成。它的出版，不僅代表西學傳入告一段落，也是總結此時期西方數學的著作。

[3] 李銳，又名向，字尙之，號四香，江蘇元和縣(今屬蘇州市)人。曾算校《測圓海鏡》、《益古演段》、《數書九章》等古代算書，並著有《勾股算術細草》、《方程新術草》、《弧矢算術細草》和《開方說》等書。

(1) 羅士琳，[4]〈李潢傳〉，《疇人傳續編》，周駿富編，《清代疇人傳》(台北：明文書局，1991 年)，頁 205－208。
(2) 郭書春，〈《九章算術細草圖說》提要〉，郭書春主編，《中國科學技術典籍通彙》數學卷第四分冊(鄭州：河南教育出版社，1993 年)，頁 945－946。
(3) 洪伯陽、宋述剛，〈關於李潢生平的幾個問題考證〉，《中國科技史料》第十五卷第一期(北京：中國科學技術出版社，1994 年)，頁 89－91。
(4) 劉興祥，〈對李潢出生年代的考證〉，《中國科技史料》第十五卷第三期(北京：中國科學技術出版社，1994 年)，頁 93－95。
(5) 劉興祥，〈《九章算術細草圖說》研究之一版本、細草、圖、說的研究〉，李迪主編，《數學史研究文集》第六集(內蒙古：內蒙古大學出版社，1998 年)，頁 70－76。
(6) 陳鳳珠，《清代算學家駱騰鳳及其算學研究》(台北：國立台灣師範大學數學研究所碩士論文，2000 年)，頁 37－43。
(7) 林倉億，《中國清代 1723~1820 年間的借根方與天元術》(台北：國立台灣師範大學數學研究所碩士論文，2001 年)，頁 78－82。
(8) 楊淑玲，《顧觀光的《九數存古》內容分析》(台北：國立台灣師範大學數學研究所碩士論文，2005 年)，頁 10－16。
(9) 洪正川，《李潢《九章算術細草圖說》之內容分析》(台北：國立台灣師範大學數學研究所碩士論文，2006 年)，頁 11－16。

第一篇詳盡地介紹李潢的生平事蹟。第二篇有李潢生平簡介和他對《九章算術》的貢獻。第三篇是針對李潢的出生與死亡年代加以考證，結論為李潢生於 1746－1748 年之間，死於 1812 年。第四篇亦是針對李潢的出生年代加以考證，結論為李潢生於 1749 年。第五篇是有關《九章算術細草圖說》內容的體例說明。第六篇到第八篇有提到李潢的生平和著作。第九篇是針對李潢的生平和《九章算術細草圖說》作詳細的分析，也是筆者研究李潢生平的主要參考資料。另外，李儼(1892~1963)、錢寶琮(1892~1974)的《科學史全集》和李儼、杜石然的《中國古代數學簡史》內容中，也都有提到李潢的生平和著作。

對於《緝古算經考注》的原本《緝古算經》之研究，有清代的李潢、張敦仁(1754~1834)、[5]揭廷鏘、陳杰(？-1806)、[6]李銳、駱騰鳳(1770~1841)和韓國李

[4] 羅士琳，字次璆，號茗香，江蘇甘泉人。曾算校朝鮮重刊本《算學啓蒙》，並著有《四元玉鑑細草》、《勾股容三事拾遺》、《演元九式》、《台錐演積》、《三角和較算例》、《弧矢算術補》、《續疇人傳》、《勾股截積和較算例》等書。
[5] 張敦仁，字古餘，山西陽城人，乾隆四十年進士，官至雲南監法道。晚居金陵，與李銳相善。著有《緝古算經細草》、《求一算術》、《開方補記》等書。
[6] 陳杰，字靜莽，浙江烏程人。考取天文生，任欽天監博士，供職時憲科兼天文科，司測量，官至國子監算學助教。著有《緝古算經細草》、《圖解》、《音義》等書。

朝的南秉吉(1820~1869)等。[7]近代學者的著作，筆者僅收集到下列五篇：

(1) 郭世榮，〈《緝古算經》造仰觀台題新解〉，《自然科學史研究》第十三卷第二期(北京：自然科學史研究編輯部，1994 年)，頁 106－113。
(2) 錢寶琮，〈《緝古算經》提要〉，杜石然主編，《李儼、錢寶琮科學史全集》第四卷(瀋陽：遼寧教育出版社，1998 年)，頁 371－373。
(3) 錢寶琮，〈王孝通《緝古算術》第二題、第三題術文疏證〉，杜石然主編，《李儼、錢寶琮科學史全集》第九卷(瀋陽：遼寧教育出版社，1998 年)，頁 578－613。
(4) 林炎全，《《緝古算經》探討》(台中：教育部台灣省中等學校教師研習會，2001 年)，頁 1－37。
(5) 張復凱，《從南秉吉(1820~1869)《緝古演段》看東算史上天元術與借根方之「對話」》(台北：國立台灣師範大學數學研究所碩士論文，2004 年)，頁 21－58。

第一篇是針對《緝古算經》第二題作探討。第二篇有《緝古算經》的內容和研究學者簡介。第三篇是針對《緝古算經》第二題、第三題作詳盡的探討。第四篇是《緝古算經》完整的白話翻譯和圖解。第五篇則是針對南秉吉《緝古演段》的詳細探討。筆者多以第四和第五篇爲研究《緝古算經考注》的主要參考資料。研究王孝通《緝古算經》這本書內容的作品並不多，研究李潢《緝古算經考注》這本書內容的作品筆者更是沒見過。

1.3 研究取向

《緝古算經》是隋末唐初王孝通撰并注，並於唐顯慶元年(公元 656 年)立于學官，當作算學教科書。《緝古算經》共有二十道問題，每一道問題幾乎都必須使用高次方程式來求解，這對唐代學習的人來說是比較艱深的。所幸在每一段術文之下，都有王孝通的自注，說明方程式各項係數(隅、廉、方、實)的由來，使我們可以了解王孝通列方程式的過程。但因爲王孝通的原著詞旨深奧難懂，傳世刻本又頗多誤文奪字，所以後人就另外作注以便通曉。清代的李潢、張敦仁、揭廷鏘、陳杰、李銳、駱騰鳳和韓國李朝的南秉吉等對《緝古算經》都有貢獻，尤其是李潢的貢獻非常大。

李潢的《緝古算經考注》有上下二卷，是以《九章算術》來解釋《緝古算經》的全部內容，其中「潢案」主要是李潢的校勘意見，並列出詳細的演算過

[7] 南秉吉，朝鮮人，字元裳、子裳，號惠泉、六一齋、晚香齋，亦名相吉，本貫宜寧。著有《緝古演段》、《無異解》、《測量圖解》、《算學正義》等書。

程。雖然有些部分仍誤解了王孝通的原來意思，但卻是目前最符合王孝通原義的一本注解。

李潢所作《緝古算經考注》，全書還未定稿李潢就病故了，後來南豐劉衡(1776~1841)授其鄉人揭廷鏘以西方開方法增補算草圖解，並由劉衡算校刻于江西。李潢之婿程矞采(1783~1857)當時任廣東布政使，[8]認爲揭廷鏘增補的算草圖解與李潢的通體義例不合。於是，他就削去圖草，並請吳蘭修復校，[9]李兆洛(1769~1841)爲序，[10]仍以原考注刊布于廣州。所以，筆者所研究的《緝古算經考注》，爲道光壬辰(公元 1832 年) 劉衡算校，程矞采刊布于廣州之刊本。

筆者將在本論文的第 2 章介紹《緝古算經考注》的歷史脈絡，包含王孝通的《緝古算經》、時代背景和李潢的生平事蹟。第 3 章和第 4 章則是針對《緝古算經考注》的內容做詳細的說明和分析，力求對此書有一全面性的認識與深入的了解。第 5 章是總結《緝古算經考注》對後代學習者的幫助及對數學教育的啓發，並以 HPM 的觀點做切入，使學生可以了解數學發展的歷史脈絡，進而引發學習動機，能夠更輕鬆自在地學習數學。

[8] 程矞采，江西新建人，嘉慶十六年進士，官至湖廣總督。

[9] 吳蘭修，字石華，嘉慶舉人，官至信宜訓導。工詩文，尤精考據，兼擅算數之學。

[10] 李兆洛，字申耆，江蘇陽湖人，嘉慶十年進士。選庶吉士，改令鳳臺。著有《養一齋集》、《皇朝文典》、《大清一統輿地全圖》、《鳳臺縣志》、《地理韵編》等書。

第 2 章 《緝古算經考注》之歷史脈絡

《緝古算經考注》成書的主要關鍵有二：其一是王孝通《緝古算經》的文本，其二是作者李潢。但因爲王孝通的原著詞旨深奧難懂，傳世刻本又頗多誤文奪字，所以，歷代研究《緝古算經》的學者非常稀少，以《九章算術》來解釋《緝古算經》的學者，李潢更是第一人。目前傳世的《緝古算經》內容包括本文和王孝通自注二個部份組成，因此，筆者特別先簡介王孝通和他的著作《緝古算經》。

自從李潢的《緝古算經考注》出版之後，已經成爲後世學者研究《緝古算經》不可或缺的一本參考書籍，而李潢是《緝古算經考注》的作者，所以，要瞭解《緝古算經考注》這本書，一定要先認識作者李潢。要認識作者李潢，就要先清楚當時的時代背景。因此，本章第二部份介紹李潢及其算學著述的歷史背景。

2.1 王孝通《緝古算經》的介紹

2.1.1 王孝通的生平

王孝通，生卒和籍貫不詳，活動於六世紀下半葉至七世紀上半葉之間。他「長自閭閻，少小學算。鐫磨愚鈍，迄將皓首。鑽尋秘奧，曲盡無遺。代乏知音，終成寡和」。[1]唐代時，才被起用爲算學博士(一說曆算博士)。武德六年(公元 623 年)時，因爲傅仁均所造《戊寅元曆》推算出的日、月食屢次不準，於是，吏部郎中祖孝孫受詔使王孝通執《開皇曆》駁之。武德九年(公元 626 年)時，祖孝孫又詔崔善爲和王孝通校正傅仁均《戊寅元曆》，提出三十餘條校正意見，教付太史施行。王孝通後來爲通直郎和太史丞，雖然他糾正傅仁均《戊寅元曆》中的某些錯誤是有貢獻的，但是，他根據落後的《開皇曆》來指責傅仁均用定朔排曆譜、計算中用歲差和恢復上元積年，這樣做卻是錯誤的，可以說他是天文學的守舊派。[2]

王孝通最大的貢獻就是撰注《緝古算經》，但撰注年代不詳。他在《上緝古算經表》中批評祖暅之《綴術》「曾不覺方邑進行之術全錯不通，芻亭、方亭之問於理未盡」，到底是《綴術》確實有錯誤，還是王孝通「莫能究其精奧」而妄加批評，有待後世去考證。他還自詡《緝古算經》「恐一旦瞑目，將來莫覩」，並且「請訪能算之人，考論得失，如有排其一字，臣欲謝以千金」，可見得他對於

[1] 引自王孝通，《上緝古算經表》。
[2] 參閱郭書春，〈關於《算經十書》〉，郭書春、劉鈍點校，《算經十書》(台北：九章出版社，2001 年)，頁 21。

自己的著作《緝古算經》是非常有自信的。[3]

2.1.2 《緝古算經》成書的原因

隋、唐盛世在文化、政治、經濟、外交等方面都有輝煌的成就，是當時世界上最強大的國家之一。隋、唐時期，運河的開鑿和長城的修築，大規模的城市宮殿建造，以及天文曆法的改進，都出現了大量比較複雜的計算問題，這些大量的土木和水利工程都需要新的數學知識和計算技能來解決問題。中國傳統數學十分著重靈活和廣泛的應用，最大的特點是一邊講究算法，一邊探討應用，把精益求精的算法和靈活廣泛的應用緊密結合起來，從而推動數學的進一步發展。王孝通的數學知識剛好和當時的社會需要有密切的相關，於是他潛心苦鑽，結合當時工程上出現的大量實際問題，盡力探索有效的解決辦法，這就是《緝古算經》成書的時代背景。

王孝通在《上緝古算經表》中提到「伏尋《九章》商功篇有平地役功受袤之術，至於上寬下狹、前高後卑，正經之內闕而不論。致使今代之人不達深理，就平正之間同欹邪之用。斯乃圓孔方柄，如何可安？」於是，他「於平地之余，續狹斜之法，凡二十術，名曰《緝古》」。「緝」有繼續的意思，所以，我們可以把《緝古算經》當成《九章算術》的續篇。[4]

2.1.3 《緝古算經》內容簡介

《緝古算經》又稱爲《緝古算術》，唐王孝通撰並注，《新唐書・藝文志》和北宋《崇文總目》俱稱李淳風注，實乃有誤。[5]《舊唐書・經籍志》原記載爲四卷，宋代之後合爲一卷。[6]《緝古算經》是《算經十書》中最晚問世的一部，也是最難的一部。唐顯慶元年(公元 656 年)立於學官，當作算學教科書，從此被稱爲「經」。[7]全書共有二十道問題，涉及到的數學知識和計算技巧非常複雜。《四庫全書總目提要》說：「其法頗不以深淺為次第，故讀者或不能驟通，而卒篇以

---

[3] 參閱郭書春，〈關於《算經十書》〉，郭書春、劉鈍點校，《算經十書》(台北：九章出版社，2001 年)，頁 21。

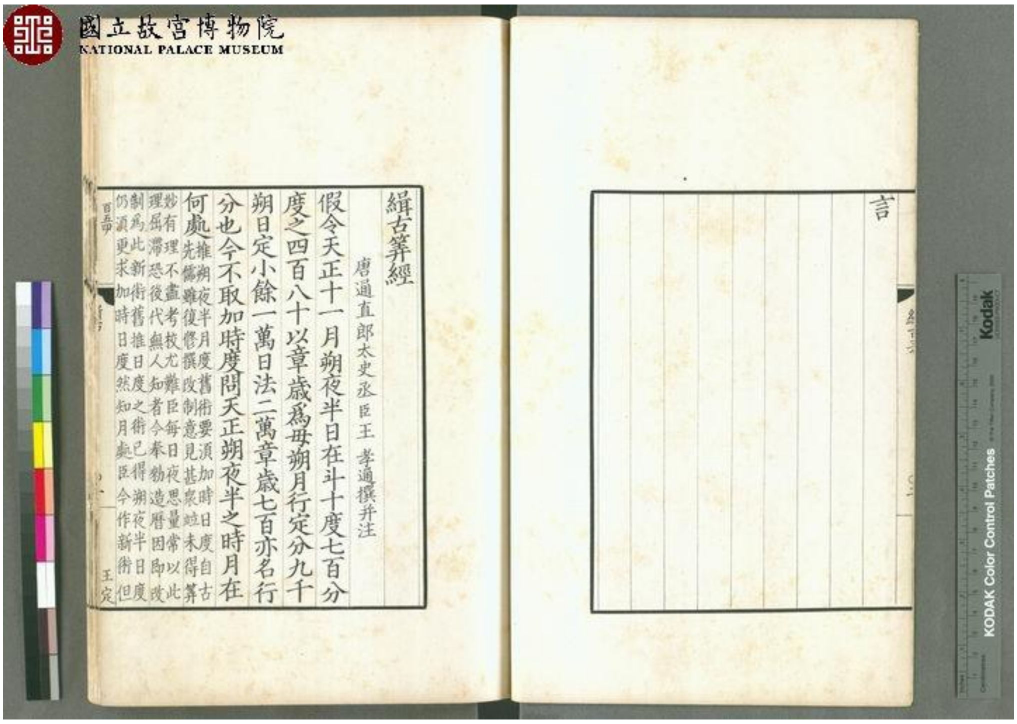
[4] 參閱郭書春，〈關於《算經十書》〉，郭書春、劉鈍點校，《算經十書》(台北：九章出版社，2001 年)，頁 21。

[5] 參閱錢寶琮，〈《緝古算經》提要〉，郭書春主編，《中國科學技術典籍通彙》數學卷一(鄭州：河南教育出版社，1993 年)，頁 353。

[6] 參閱郭書春，〈關於《算經十書》〉，郭書春、劉鈍點校，《算經十書》(台北：九章出版社，2001 年)，頁 20。

[7] 參閱錢寶琮，〈《緝古算經》提要〉，郭書春主編，《中國科學技術典籍通彙》數學卷一(鄭州：河南教育出版社，1993 年)，頁 353。

後，由源竟委，端緒足尋，洵為思極毫芒，曲盡事理。唐代明算立學，習此書者以三年為限，亦知其術之精妙，非旦夕所克竟其義矣。」所以「其書世罕流播」，流傳到清初只剩下一孤本，是爲北宋元豐七年(公元 1084 年) 秘書監趙彥若等校定，南宋嘉定六年(公元 1213 年)鮑澣之汀州重刻元豐監本。清康熙甲子(公元 1684 年)毛扆從山東章邱李開先處得到，「因求善書者刻畫影摹，不爽毫末，襲而藏之」，[8]現傳各本均源於此。[9]



清康熙間毛氏汲古閣景寫宋嘉定六年鮑澣之汀州重刻元豐監本
(下載自國立故宮博物院善本古籍資料庫)

《緝古算經》的主要內容可以分成以下四類：[10]

第一題爲曆法問題，已知某年某日合朔時刻，夜半時日所在赤道經度，求夜半時月所在赤道經度。王孝通根據《九章算術》均輸章犬追兔問題的解法理論，求出比舊法更簡潔的解法。

從第二題到第六題和第八題，這六題爲土木工程中的土方體積問題。不但要依據工程的實際情況計算體積和長、寬、高，還要從某一部分工程的體積，反推回去求這一部分的長、寬、高。這些過程必須列出三次方程式，開帶從立方來求

8 引自毛扆，〈《緝古算經》跋〉。
9 參閱郭書春，〈關於《算經十書》〉，郭書春、劉鈍點校，《算經十書》(台北：九章出版社，2001 年)，頁 20－21。
10 參閱錢寶琮，〈《緝古算經》提要〉，杜石然主編，《李儼、錢寶琮科學史全集》第四卷(瀋陽：遼寧教育出版社，1998 年)，頁 371－372。

解。

第七題和從第九題到第十四題，這七題是儲糧用的倉房和地窖問題。要求這些倉房和地窖的體積，也必須列出三次方程式，開帶從立方來求解。

從第十五題到第二十題，這六題爲勾股問題。前四題必須列出三次方程式，開帶從立方來求解。後二題則需要列出四次方程式，開帶從平方先得一正根，再開平方來求解。

王孝通在題目中所使用到的三次方程式可以表示成 $x^3 + a x^2 + bx = c$，其中 a、b、c 均爲正數，求得的解只有正根。四次方程式可以表示成 $x^4 + a x^2 = c$，其中 a、c 均爲正數，求得的解也只有正根。這對唐代學習的人來說是比較艱深的。所幸在每一段術文之下，都有王孝通的自注，說明方程式各項係數(隅、廉、方、實)的由來，使我們可以了解王孝通列方程式的過程。《緝古算經》可以說是《綴術》失傳之後，中國數學史上第一次研究三次和四次方程式的著作。[11]

《緝古算經》是全世界最早使用代數解三次方程式的書，具有非常深遠的意義，顯示出唐代的數學研究已達到了相當高深的水平。英國李約瑟曾說：「三次方程最早是在《緝古算經》中發現的，這部書問世的年代肯定是在公元 625 年前後。像往常那樣，這些方程是從工程師、建築師和測量人員的實際需要產生的。」[12]日本數學史家三上義夫也曾說：「唐王孝通之《緝古算經》，使用三次方程式以解各種問題。……中國成立三次方程式，乃在阿拉伯之前；而由術文推得之方程式解法，亦與發達於阿拉伯者全不同也。」[13]由此可知，王孝通在解三次方程式所得到的研究成果，比起阿拉伯人(公元 10 世紀之後)和義大利的斐波那契(公元 13 世紀)，[14]都還要來得早。

唐代以後，中國數學家在傳統數學的基礎上發展了新的代數方法，建立了「天元術」和「四元術」。但是，《緝古算經》因爲難易度排序失當，加上內容艱深難懂，導致流傳不易，宋、元、明三代並無學者研究處理其書中問題。歐洲文藝復興時期，代數學有了新的發展，由原來用文字說明的演算程序，轉變爲用符號表達出來，奠定了符號代數學的基礎。1545 年，義大利數學家卡當諾(*Girolamo Cardano*, 1501-1576)在他的數學大作《大法》(*Ars Magna*，英譯爲 *The Great Art*)

---

[11] 參閱郭書春，〈關於《算經十書》〉，郭書春、劉鈍點校，《算經十書》(台北：九章出版社，2001 年)，頁 23。
[12] 引自李約瑟，《中國科學技術史》第三卷數學(北京：科學出版社，1978 年)，頁 111。
[13] 引自三上義夫，《中國算學之特色》(北京：商務印書館，1929 年)，頁 34。
[14] 阿拉伯數學家 *al-khwârizmi*（阿爾-花拉子米）在公元 820 年左右寫成「代數學」一書，書的全名是《*al-kitāb al-mukhtasar fī hisāb al-jabr wál-muqābala*》(《還原與對消計算概要》)。後來在公元 1140 年左右被譯成拉丁文，書名《*Liber algebrae et almucabala*》，在歐洲被當成數學教科書長遠數百年之久。

中，將「不完全(缺項)的三次方程式」的解法整理發表。在此同時，其弟子法拉利(*Ludovico Ferrari*, 1522-1565)也成功發現了求解四次方程式的技巧。這些代數學上的新知識和技巧，將在明末清初隨著西方傳教士飄洋過海而帶進中國，影響清代的數學家。

2.2 明末清初的數學環境

16 世紀末年，西方國家開始派遣天主教耶穌會的傳教士來中國傳教，最早到中國的是義大利人利瑪竇(*Matteo Ricci*，1552~1610)。他於明萬曆十年(公元 1582 年)來到中國傳教，並帶來了德國數學大師克拉維斯的數學講義，之後與徐光啓(1562~1633)合譯了《幾何原本》前六卷(1607)，[15]與李之藻(1565~1630)合編了《同文算指》(1613)，[16]是西方數學傳入中國的開始。[17]

明代《大統曆》繼承了元代王恂(1235~1281)和郭守敬(1231~1316)所制定的《授時曆》，到明代末年已經施行了三百餘年，預推的天象已經無法符合實際的觀測，再加上欽天監的官員沒有能力修改曆法，於是在 1629 年，徐光啓奉命督修曆法和接掌曆局，並聘請當時來華的西方傳教士協助，期望能「鎔彼方之材質入《大統》之型模」。自 1629 年到 1634 年，傳教士羅雅谷(*Jacques Rho*，1593~1638，義大利人)、鄧玉函(*Jean Terrenz*，1576~1630，瑞士人)和湯若望(*Jean Adam Schall Von Bell*，1591~1666，德國人)等人翻譯成《崇禎曆書》一百三十七卷，其中有《籌算》(1628)、《比例規解》(1630)、《測量全義》(1631)、《大測》(1631)、《割圓八線表》等數學書共二十卷。[18]

清順治二年(公元 1645 年)頒行「依西洋新法」的《時憲曆》。順治中波蘭傳教士穆尼閣(*Jean Nicolas Smogolenski*，1611~1656)在南京傳教時，薛鳳祚(？~1680)和方中通(1633~1698)曾跟過他學習，[19]薛鳳祚更與他合編《曆學會通》(1664)，[20]其中最重要的有《比例四線新表》和《比例對數表》。這些明、清西方傳教士傳入的天文學和數學知識，對清代數學的發展產生了極大的影響。[21]

---

15 徐光啓，字子先，號玄扈，謚文定，松江(今上海市)人。萬曆三十二年進士，官至禮部尚書兼文淵閣大學士，通天文、曆算。

16 李之藻，字振之，一字我存，號涼庵居士，又號涼庵逸民，浙江仁和(今杭州)人。萬曆二十六年進士，官至光祿寺少卿兼工部都水清吏司事，嫻於曆算。

17 參閱錢寶琮，《中國數學史》，杜石然主編，《李儼、錢寶琮科學史全集》第五卷(瀋陽：遼寧教育出版社，1998 年)，頁 256－257。

18 參閱錢寶琮，《中國數學史》，杜石然主編，《李儼、錢寶琮科學史全集》第五卷(瀋陽：遼寧教育出版社，1998 年)，頁 257。

19 方中通，字拉伯，號陪翁，安徽桐城人，著有《數度衍》。

20 薛鳳祚，字儀甫，號寄齋，山東淄川人。

21 參閱錢寶琮，《中國數學史》，杜石然主編，《李儼、錢寶琮科學史全集》第五卷(瀋陽：遼寧教育出版社，1998 年)，頁 274－275。

清康熙帝熱愛科學研究，他於 1689 年特召法國傳教士張誠(*J.F. Gerbillon*，1654~1707)、白晉(*J. Bouvet*，1656~1730)等人進宮傳授西方數學。1712 年命梅瑴成(1681~1763)、[22]陳厚耀(1648~1722)、何國宗、明安圖(？~1763)等人編撰《律曆淵源》，1721 年完成《曆象考成》四十二卷、《律呂正義》五卷、《數理精蘊》五十三卷，共一百卷。當時傳入中國的代數學書，有《數理精蘊‧借方根比例》和《阿爾熱巴拉新法》(手抄本)，對清代數學的發展也產生了重大的影響。[23]

明末清初，西方數學經由傳教士傳入中國，造成相當大的衝擊，除了徐光啓和李之藻虛心學習並翻譯西學之外，另有一些學者卻努力地比較中西數學的異同，並試圖去會通，其中以梅文鼎(1633~1721)爲最具代表性人物。[24]

梅文鼎是真正實踐「中西會通」的第一位學者。他認爲不應該排斥先進的西方數學知識，也不應該拋棄中國固有的數學傳統。因此，他開始闡發西學要旨，表彰中學精萃，並致力於會通兩者，成爲「西學中源」的領導者，對之後清代的數學家有深遠的影響，也爲接下來中國傳統數學的復興埋下了伏筆。[25]

2.3 乾嘉學派的數學研究

清雍正元年(公元 1723 年)，雍正帝認爲西方人來中國傳教對統治不利，於是，除了少數在欽天監供職的傳教士之外，其餘的都被驅逐到澳門，造成此後一百餘年間，西方數學暫停傳入中國。清朝廷在這段閉關自守時期，一面採取高壓統治大興文字獄；一面吸引和鼓勵各方人才編撰《四庫全書》。因此，許多知識份子紛紛投入古典考據學的領域，開始從事編輯和整理古代書籍的工作。

清乾隆三十八年(公元 1773 年)，乾隆帝下詔收集民間私家珍藏的善本書，並輯錄明代《永樂大典》中一批當時罕傳罕見的佚書，編撰成《四庫全書》，全套書籍共有三千五百零三部，七萬九千三百三十七卷。由於參與編撰《四庫全書》的人大多是學有專長的一流學者，如李潢、戴震(1724~1777)、郭長發、陳際新、倪廷梅等人都是精通天文和數學的專家。[26]因此，他們在天文和數學方面的選書

---

[22] 梅瑴成，字玉汝，號循齋，安徽宣城人，官至左督御史。著有《增刪算法統宗》、《赤水遺珍》等書。

[23] 參閱錢寶琮，《中國數學史》，杜石然主編，《李儼、錢寶琮科學史全集》第五卷(瀋陽：遼寧教育出版社，1998 年)，頁 258。

[24] 梅文鼎，字定九，好勿庵，安徽宣城人。其孫梅瑴成將其曆法、數學著述編成《梅氏叢書輯要》。

[25] 參閱田淼，《中國數學的西化歷程》(山東：山東教育出版社，2005 年)，頁 106－116。

[26] 李潢擔任總目協勘官，協助編定總目和修改提要。戴震擔任校勘《永樂大典》纂修兼分校官，負責校勘和撰寫提要。郭長發、陳際新和倪廷梅擔任天文算法纂修兼分校官，負責校勘和撰寫提要。

和整理工作就比較細膩準確，水準也比較高。《四庫全書》中所收入的數學古籍包括《周髀算經》、《九章算術》、《海島算經》、《孫子算經》、《五曹算經》、《夏侯陽算經》、《張邱建算經》、《五經算術》、《數術記遺》、王孝通的《緝古算經》、秦九韶(1202~1261)的《數書九章》、[27]以及李冶(1192~1279)的《益古演段》和《測圓海鏡》。[28]但遺憾的是，南宋楊輝和元代朱世傑等人的數學著作並未被收入其中。《四庫全書》的編成，使得部分數學古籍得以重新流傳於世，也帶動起一股研究中國古代傳統數學的風潮。[29]

在清朝廷編撰《四庫全書》之後，民間人士也接著響應這股潮流。1773 年，曲阜孔繼涵(1739~1783)刻《微波榭叢書》，依據戴震(1724~1777)的校訂本刻印《算經十書》，[30]並附刻戴震自撰的《策算》(1744)和《勾股割圓記》(1758)。鮑廷博(1728~1714)刻《知不足齋叢書》，分別於 1797 年收羅《益古演段》、1798 年收羅《測圓海鏡》、1814 年自《永樂大典》輯錄《透簾細草》、《丁巨算法》和楊輝的《續古摘奇算法》三書殘本。1842 年，上海郁松年(1799~1865)刻《宜稼堂叢書》，包含秦九韶的《數書九章》(附宋景昌《札記》)、楊輝的《詳解九章算法》(缺方田、粟米、衰分、少廣四章，附《纂類》和宋景昌《札記》)、《乘除通變本末》、《田畝比類乘除算法》和《續古摘奇算法》。由於這些叢書的刻印，才使得許多數學古籍能夠更廣泛地流傳，進而使更多學者投入中國傳統數學的研究。[31]

清乾隆、嘉慶時期，乾嘉學派的戴震、阮元(1764~1849)、[32]李銳、李潢和張敦仁等人以「興復古學、昌明中法」爲職志，以「西學中源」說爲中心思想，開始認真地校勘和忠實地注釋中國數學古籍，使數學研究的主軸從學習西法翻轉爲復興中法，爲晚清數學專業化的綻放埋下種子。李潢爲乾嘉學派研究中國古代數學的重要代表性人物，所以，我們可以透過認識他的生平、交遊與著作，更爲瞭解乾嘉學派的數學活動脈絡。

2.4 李潢的生平、交遊與著作

[27] 秦九韶，字道古，四川安岳人，紹定四年進士。其著作《數書九章》中的「大衍求一術」和「正負開方術」，爲中國數學重要研究成果。

[28] 李冶，又名李治，字仁卿，號敬齋，真定欒城人。其著作《益古演段》和《測圓海鏡》是中國最早對「天元術」進行系統敘述的書。

[29] 參閱錢寶琮，《中國數學史》，杜石然主編，《李儼、錢寶琮科學史全集》第五卷(瀋陽：遼寧教育出版社，1998 年)，頁 316－317。

[30] 戴震，字東原，安徽休寧人，乾隆二十七年舉人。曾擔任《四庫全書》纂修官，欽賜翰林院庶吉士。

[31] 參閱陳鳳珠，《清代算學家駱騰鳳及其算學研究》(台北：國立台灣師範大學數學研究所碩士論文，2000 年)，頁 22。

[32] 阮元，字伯元，號芸台，江蘇儀征人，乾隆五十四年進士，官至體仁閣大學士。著有《疇人傳》四十六卷。

2.4.1 李潢的生平

李潢(？~1812)，字雲門，湖北省安陸府鍾祥縣人。出生年代不詳，大約推測是在乾隆十一年(公元 1746 年)至乾隆十四年(公元 1749 年)之間。[33]乾隆三十六年(公元 1771 年)中進士，曾以翰林院編修的資格擔任《四庫全書》編撰的總目協勘官，[34]協助編定總目和修改提要。[35]一生擔任過山西鄉試副考官(乾隆五十四年)、侍講學士(乾隆？年~乾隆五十四年)、內閣學士(乾隆五十四年~乾隆六十年)、江南鄉試副考官(乾隆五十七年)、浙江學政(乾隆五十七年~乾隆六十年)、兵部右侍郎(乾隆六十年~嘉慶三年)、會試副考官(嘉慶元年)、武會試知武舉(嘉慶元年)、江西學政(嘉慶二年~嘉慶四年)、兵部左侍郎(嘉慶三年~嘉慶四年)和工部左侍郎。[36]嘉慶四年，因爲和珅案遭受牽連而被降爲翰林院編修，《清史稿》〈和珅傳〉中有記載，引數語如下：

四年正月，高宗崩，給事中王念孫首劾其不法狀，仁宗即以宣遺詔日傳旨逮治，命王大臣會鞫，俱得實。詔宣佈和珅罪狀，略曰：「朕於乾隆六十年九月初三日，蒙皇考冊封皇太子，尚未宣佈，和珅於初二日在朕前先遞如意，以擁戴自居，大罪一。……侍郎吳省蘭、李潢，太僕寺卿李光雲在其家教讀，保列卿階，兼任學政，大罪十一。……家奴劉全家產至二十餘萬，並有大珍珠手串，大罪二十。」內外諸臣疏言和珅罪當以大逆論，上猶以和珅嘗任首輔，不忍令肆市，賜自盡。[37]

由這段記載可推知，李潢和和珅的關係密切，曾因和珅的保舉而升官，也因和珅的連累而降職，真是成也和珅、敗也和珅。另外，在《鐘祥縣志》中也有關於李潢的記載，引數語如下：

潢字雲門，乾隆乙酉解元，辛卯成進士，由編修累牽工部左侍郎，以受和珅累，降編修。潢負異稟，讀書目十行下。父兆鈺官海州牧，被劾落職，卒於蘇州，潢年尚少，扶喪歸邑。豪利其資，誣陷潢入獄，家人來視，輒取書一篋，逾數日更取之，以為常，由是學亦富。雲南李公因培巡視湖北，廉知潢冤出之。……[38]

---

[33] 參閱洪正川，《李潢《九章算術細草圖說》之內容分析》(台北：國立台灣師範大學數學研究所碩士論文，2006 年)，頁 11－12。

[34] 參閱錢寶琮，《中國數學史》，杜石然主編，《李儼、錢寶琮科學史全集》第五卷(瀋陽：遼寧教育出版社，1998 年)，頁 330。

[35] 參閱司馬朝軍，《《四庫全書總目》編纂考》(武昌：武漢大學出版社，2005 年)。

[36] 參閱錢實甫，《清代職官年表》(上海：中華書局，1980 年)，第一冊，頁 638－640；第二冊，頁 1003；第四冊，頁 2684－2686，2830，2939－2940。

[37] 引自趙爾巽主編，〈和珅傳〉，《清史稿》卷三一九。

[38] 參閱洪正川，《李潢《九章算術細草圖說》之內容分析》(台北：國立台灣師範大學數學研究所碩士論文，2006 年)，頁 12。

由這段記載可知，李潢天資聰穎，讀書能夠一目十行。李潢父親李兆鈺在海州當官的時候，因爲被彈劾而免職，最後死在蘇州，去世時年紀不到五十歲，當時李潢年紀還小，扶著父親靈柩回故鄉鐘祥。地方土豪爲了奪取他的家產，誣告陷害他入獄，家人來探視他時，時常都會帶一箱的書來給他看，所以他的學問就越來越好。乾隆二十九年(公元 1764 年)，雲南李因培擔任湖北巡撫，得知李潢的冤屈而放他出獄。

關於李潢的卒年，現今已經考證爲 1812 年。清代阮元(1764~1849)著《疇人傳》四十六卷之後，羅士琳(1774~1853)又續著《疇人傳續編》六卷。在羅士琳的《疇人傳續編》第四十九卷中有〈李潢傳〉，引數語如下：

書甫寫定，潢即一病不起，遺囑務俟吳門沈欽裴算校，方可付梓。越八年，嘉慶庚辰歲，其甥儀部程喬采，不敢違垂死言，延沈至家，為之校刊，以成其志。……

因爲嘉慶庚辰歲是 1820 年，也就是李潢去世後越八年，推論得李潢的卒年爲 1812 年。再加上羅士琳 1853 年才去世，因此《疇人傳續編》中的〈李潢傳〉應該有極高的可信度，所以，我們可以採信李潢的卒年爲 1812 年。[39]

2.4.2 李潢的交遊

李潢爲乾隆三十六年進士，由翰林官至工部左侍郎，又「博綜羣書，尤精算學，推步律呂，俱臻微妙」，[40]在官場和數學界交遊廣闊，其中最爲著名的朋友是「談天三友」中的李銳。[41]

李銳(1768~1817)，又名向，字尚之，號四香，江蘇元和縣(今屬蘇州市)人，和李潢同爲乾嘉學派重要的代表性人物。「其時有南李北李之稱，北李者謂雲門侍郎，以侍郎為楚北人，南李則銳是也」，[42]由於兩人社經地位的不同，李潢總是扮演照護和資助李銳的角色。他曾經請託張敦仁「可少分清俸，以贍其家，俾得悉心著書」，使李銳深受感動，在日記中寫道：「向與雲門先生未及一面，而蒙垂念如此，真可感也」。[43]另外，在羅士琳的《疇人傳續編》第五十卷中有〈李銳傳〉，引數語如下：

[39] 參閱洪正川，《李潢《九章算術細草圖說》之內容分析》(台北：國立台灣師範大學數學研究所碩士論文，2006 年)，頁 12－13。
[40] 引自羅士琳，〈李潢傳〉，《疇人傳續編》第四十九卷。
[41]「談天三友」是指焦循、李銳和汪萊。
[42] 引自羅士琳，〈李銳傳〉，《疇人傳續編》第五十卷。
[43] 參閱洪萬生和劉鈍，〈汪萊、李銳與乾嘉學派〉，洪萬生主編，《談天三友》(台北：明文書局，1993 年)，頁 23。

嘉慶九年甲子科，江南主司耳銳名，欲羅致之。未出京，詢之雲門侍郎，謂如何而後可得李某？侍郎曰：「是不難，吾有策題一，能對者即李某。」主司如其言，猶慮有失，並益以「天之高也」一節四書題文。闈中大索不可得，竊疑之。及榜發，果無銳名，訪知銳是年因病未與試。主司嘆曰：「噫，是有命也。」

由這段記載可知，李潢對李銳真是照護得無微不至，李銳也以他的研究成果來回報。在他的《觀妙居日記》中曾記載，他以八天的時間將張敦仁收集到的南宋版《九章算術》前五卷算校整理過，可見得李銳對《九章算術》頗有研究。他後來相繼撰成《勾股算術細草》(1806)和《方程新術草》(1808)二書，書成後都寄一部抄本給李潢過目。當時李潢正在從事《九章算術》的研究，他曾經復函李銳：

讀大著《方程新術草》一卷，正負相當各率，一出自然，正從前傳刻之誤，闡古人未發之覆，愉快彌日。《勾股細草》前歲古愚太守見惠一本，條段各圖，細入毫芒，真精思大力之作也。[44]

對照李潢《九章算術細草圖說》的〈勾股〉卷和李銳的《勾股算術細草》，不難發現二者在論證勾股定理及其應用的「條段各圖」幾乎雷同。尤其是李潢書中關於劉徽用「出入相補法」證明勾股定理的一段說明，[45]有可能是完全照搬李銳的。此外，李潢書中關於「方程新術」的解釋，基本上也是因襲李銳的著作。[46]李銳也曾撰寫《海島算經細草》和《緝古算術衍》，但二書均已失傳。現今張敦仁有《緝古算術細草》傳世，李銳曾爲之算校並作跋，有人「疑此細草即以《緝古算術衍》為藍本，而擴其意耳」。[47]

嘉慶十五年(公元 1810 年)，李銳從南昌張敦仁府邸出發，前往北京參加他生平的最後一次考試。雖然這次順天府的鄉試結果仍告失敗，[48]但他終於和李潢這位神交已久的學術知己見面了。在京期間，他們曾多次晤談，主要是討論《九章算術》中的問題。嘉慶十七年(公元 1812 年)，李潢去世時，《九章算術細草圖說》尚未定稿，李潢遺囑務侯沈欽裴算校後方可付梓，史家嚴敦傑(1917~1988)認爲「李潢不囑李銳算校，是為可疑」。實情可能是李銳以自己的研究成果來報

[44] 參閱洪萬生和劉鈍，〈汪萊、李銳與乾嘉學派〉，洪萬生主編，《談天三友》(台北：明文書局，1993 年)，頁 23－24。
[45] 劉徽，三國時代魏國數學家，山東淄鄉人。著有《九章算術注》和《重差》等書，唐以後《重差》改稱爲《海島算經》。
[46] 參閱洪萬生和劉鈍，〈汪萊、李銳與乾嘉學派〉，洪萬生主編，《談天三友》(台北：明文書局，1993 年)，頁 24。
[47] 參閱嚴敦傑，〈李尚之年譜〉，洪萬生主編，《談天三友》(台北：明文書局，1993 年)，頁 370。
[48] 清代北京地區稱爲順天府，是首都的最高地方行政機關。順天府的轄區在清初多有變化，乾隆八年以後就固定下來，共領五州十九縣。

答李潢的知遇之恩，而李潢卻因此感到心虛，所以不好意思請李銳來算校。[49]

李潢另一位知己好友是同在朝廷爲官的戴敦元(1768~1834)。戴敦元，字金溪，浙江開化人，乾隆五十五年(公元 1790 年)進士，選庶吉士，改刑部主事，後官至刑部尚書。生平無所嗜，篤好曆算之學，清介自持，嫻熟律例，清除陋規，爲當時名吏。史書記載其「任官四十年，逝世僅遺幾架書籍，幾幅畫，幾間舊房，數畝薄田而已」，[50]應是難得的一位清官，卒諡簡恪。

清代學者戴敦元

李潢和戴敦元交從甚密，在羅士琳的《疇人傳續編》第四十九卷〈李潢傳〉中有記載，引數語如下：

李潢，字雲門，鍾祥人。乾隆三十六年進士，由翰林官至工部左侍郎，博綜羣書，尤精算學，推步律呂，俱臻微妙。與開花戴大司寇簡恪公，共究中西之奧，兩人皆宗中法，道同志合，交稱莫逆。著九章算術細草圖說九卷，附海島算經一卷，共十卷，簡恪序其書，謂潢嘗言：「陳其數者，下學之言也。知其義者，上達之功也。有數先有象，有象皆可繪。」……

[49] 參閱洪萬生和劉鈍，〈汪萊、李銳與乾嘉學派〉，洪萬生主編，《談天三友》(台北：明文書局，1993 年)，頁 24。
[50] 引自趙爾巽主編，〈戴敦元傳〉，《清史稿》卷三七四。

除了李銳和戴敦元之外，李潢與當時的算學家汪萊(1768~1813)、張敦仁(1754~1834)、羅士琳(1774~1853)、沈欽裴等人也有學術上的互動與交流。[51]而且，他還曾經指導劉衡(1776~1841)和駱騰鳳(1770~1841)等後進。

劉衡，字蘊聲，號廉舫，江西南豐(今廣昌)人。一生爲官以循吏著稱，宣宗帝賜其「公勤」二字。劉衡曾經受學於李潢，其長子劉良駒說：「昔先君學算於李雲門侍郎，侍郎以算法名，當時獨許先君為可與語，先君亦好之不倦」，梅曾亮(1786~1856)在爲劉衡的書寫序時也曾提到此事。[52]

劉衡曾爲李潢校算《緝古算經考注》，並於南昌刊刻。另外，劉衡還著有《六九軒算書五種》(1807)，其中附有《輯古算經補注》二則，劉良駒認爲其父「手校侍郎輯古考注，又以常受之侍郎，不欲以自名也」，所以「以先君所補《輯古考注》，附於自著五種後」。[53]

駱騰鳳，字鳴岡，號春池，淮安府山陽縣(今江蘇淮安市)人，一生清貧，潛心數學。曾於嘉慶十六年(公元 1811 年)在北京拜李潢爲師，「研精覃思，寒暑靡間」，討論「天元術」和「開方術」等中國傳統數學。嘉慶十九年(公元 1814 年)駱騰鳳再度入京時，李潢已經去世，這時李潢的《九章算術細草圖說》和《緝古算經考注》二書已完成，但是尚留有大批手稿，李潢的家人「謬加珍惜，秘不示人」。駱騰鳳爲了不使這些數學研究成果被湮沒，於是，將老師和自己演繹的稿紙加以整理和概括，寫成了《開方釋例》四卷。在〈《開方釋例》序〉中有記載，引數語如下：

歲辛末問算術於李雲門夫子，獲聞緒論，而尤諄諄於天元一術。蓋見近日之言開方者，創為可知、不可知之例，而於秦李之書且多詆議，其說本不足辨，第恐斯術之不彰也，嘗商訂正負開方之法，屬稿未成，而先生已歸道山矣。甲戌計偕入都，瞻拜影堂，檢求遺稿，惟《九章算經注》、《緝古算經注》二書已成，其餘叢殘故紙中，尚多有發前人所未發者。……爰取先生手授舊稿數紙，衍為四卷，名曰《開方釋例》。[54]

駱騰鳳尚著有《藝游錄》二卷，是關於中國傳統數學的研究札記，包括《九章算術》、《緝古算經》、《孫子算經》、《數書九章》、《測圓海鏡》、《算法統宗》和

[51] 沈欽裴，字俠侯，江蘇元和(今蘇州市)人，嘉慶十二年舉人。曾爲李潢算校《九章算術細草圖說》。

[52] 參閱洪正川，《李潢《九章算術細草圖說》之內容分析》(台北：國立台灣師範大學數學研究所碩士論文，2006 年)，頁 14－15。

[53]參閱王錫熙，《清代算學家梅啓照及其算學之研究》(台北：國立台灣師範大學數學研究所碩士論文，2002 年)，頁 5。

[54] 參閱陳鳳珠，《清代算學家駱騰鳳及其算學研究》(台北：國立台灣師範大學數學研究所碩士論文，2000 年)，頁 37－43。

《赤水遺珍》等算書的研究心得與評論。另外，駱騰鳳還爲李潢校訂《海島算經細草圖說》，並由沈欽裴爲之補細草。[55]

2.4.3 李潢的著作

李潢爲乾嘉學派著名的數學家，當時數學研究的焦點逐漸從西學反身轉向中算，而乾嘉學派所主導的數學研究特色之一，就是校注和整理中國古代數學典籍。隨著《算經十書》的重新問世，引發當時許多數學家的興趣，紛紛投入注釋和校勘的工作，李潢也跟上這股時代潮流。由於他曾經擔任《四庫全書》編撰的總目協勘官，協助編定總目和修改提要。所以，能利用職務之便接觸到《九章算術》、《海島算經》和《緝古算經》。這三本數學典籍是《算經十書》中有輝煌成就且比較難理解的，李潢因爲「博綜羣書，尤精算學」，便首先擔任它們的校注工作，著有《九章算術細草圖說》九卷、《海島算經細草圖說》一卷和《緝古算經考注》二卷。

李潢的《九章算術細草圖說》是用戴震校訂過的孔氏微波榭本《九章算術》作爲底本，並校正了許多錯誤文字。戴震所謂「外誤不可通」的文字，經過他的校勘之後，就能夠文從字順，容易理解了，但有些被戴震誤改的文字，他就難以糾正過來。李潢爲《九章算術》和《海島算經》中的每個問題，依照原術補圖演草，基本上是正確的，也能夠將劉徽注中不容易理解的文字分析條理並解釋清楚。可惜的是，1812 年李潢病故前，《九章算術細草圖說》全書未能寫成定稿。1820 年由他的外甥程矞采遵守李潢遺囑，邀請沈欽裴算校後才付印。除此之外，李潢的學生駱騰鳳也爲他校訂《海島算經細草圖說》，並由沈欽裴爲之補細草。[56]

李潢遺稿中還有《緝古算經考注》二卷，乃以九章解釋《緝古算經》之作。李潢是以常熟毛氏汲古閣影宋抄本爲底本，刊誤補闕七百多字，每一道題目的解法都附以算草和割截分幷、虛實比例之旨。後來，南豐劉衡授其鄉人揭廷鏘以西方開方法增補算草圖解，並由劉衡算校刻于江西。李潢之婿程矞采當時任廣東布政使，認爲揭廷鏘增補的算草圖解與李潢的通體義例不合。於是，他就削去圖草，並請吳蘭修復校，李兆洛爲序，仍以原考注刊布于廣州。[57]

書前有李兆洛爲序，引數語如下：

---

[55] 參閱陳鳳珠，《清代算學家駱騰鳳及其算學研究》(台北：國立台灣師範大學數學研究所碩士論文，2000 年)，頁 37－43。

[56] 參閱洪正川，《李潢《九章算術細草圖說》之內容分析》(台北：國立台灣師範大學數學研究所碩士論文，2006 年)，頁 14－16。

[57] 參閱羅士琳，〈李潢傳〉，《疇人傳續編》第四十九卷。

於是書立法之根，如鉅解木，如錐劃土，又復補正脫誤，條理秩然，信王氏之功臣矣。爰述大旨以告世之，習是書者，無復苦其難讀云。[58]

次有吳蘭修爲序，亦引數語如下：

凡高臺、羨道、築隄、穿河等二十術，皆以從立方開之。……此則斜袤廣狹、割截附帶，以法御之，無不曲中，可謂思極豪芒，妙入無間者矣。……顧其詞旨深奧，卒不易曉，宋元以降，幾至廢絕。惟汲古閣有影鈔宋本，收於四庫、知不足齋、微波榭、函海，並刻之，傳寫脫誤。李雲門先生嘗校正之，釐為二卷，刊誤補闕凡七百餘字，每術附以算草及割截分并，虛實比例之旨。是書之蘊畢宣，王氏之真盡出，無庸以天元一術推算矣。[59]

嘉慶年間，除了李潢以《九章算術》解釋《緝古算經》之外，張敦仁曾於嘉慶八年(公元 1803 年)以「天元術」解釋《緝古算經》，並將第十六術以下爛脫字據和術文補齊，撰寫成《緝古算經細草》三卷，但其內容卻完全不理會王孝通的「自注」，只能算是一種數值驗證。另外，陳杰和揭廷鏘也曾以明清之際新傳入的西法解釋《緝古算經》，[60]但內容顯然是很難符合王孝通的原來意思。[61]

在羅士琳的《疇人傳續編》第四十九卷〈李潢傳〉中也有論曰：

算自明際寖疎，古籍散佚，前賢精義，百無一存，西士因得逞其技。明人驟見西法，詫為神奇，趨之若鶩，遂漫以為古法不逮，噫是何辭之僨歟。即有一二知算之士，狃於眾習，昧於絕詣，雖欲崇中黜西，而是非曲直，先已糢糊，又安能澈底窮源，直揭其短。侍郎信古能篤，實事求是，其於中西之學，孰優孰劣，早經了了於胸中。故所著《九章細草》、《輯古考注》二書，能發古人之真解，與古人息息相通，可謂力挽迴瀾，初非西學者所能窺其厓岸，倒置黑白也。《考注》第三問築隄下第四術，原稿奪注，劉君依例補之可也。惜其第三術羼列西法開方兩算草，與侍郎通體義例不協，不解何意，因思此蓋揭某妄增之草，方伯芟之未盡耳。余恐世支讀侍郎書者，以此議侍郎，故特表白之。

---

58 引自李兆洛，〈《緝古算經考注》序〉，郭書春主編，《中國科學技術典籍通彙》數學卷四(鄭州：河南教育出版社，1993 年)，頁 1217。
59 引自吳蘭修，〈《緝古算經考注》序〉，郭書春主編，《中國科學技術典籍通彙》數學卷四(鄭州：河南教育出版社，1993 年)，頁 1218。
60 西法指的是《數理精蘊》中的「開帶從立方法」。
61 參閱錢寶琮，《中國數學史》，杜石然主編，《李儼、錢寶琮科學史全集》第五卷(瀋陽：遼寧教育出版社，1998 年)，頁 330。

由此可見，李潢在歷史上的評價是非常高的。李潢曾說過：「陳其數者，下學之言也。知其義者，上達之功也。有數先有象，有象皆可繪。」[62]這段話恰好和劉徽的「析理以辭，解體用圖」有異曲同工之妙。[63]雖然他在《九章算術細草圖說》、《海島算經細草圖說》和《緝古算經考注》三書裡，還保留了幾處無法校正的錯誤文字和難以確定的注疏。但是大體上，他的校注工作是值得我們肯定的，也是後人學習《九章算術》、《海島算經》和《緝古算經》最佳的典範。

[62] 引自戴敦元，〈《九章算術細草圖說》序〉，郭書春主編，《中國科學技術典籍通彙》數學卷四(鄭州：河南教育出版社，1993 年)，頁 947。
[63] 參閱洪正川，《李潢《九章算術細草圖說》之內容分析》(台北：國立台灣師範大學數學研究所碩士論文，2006 年)，頁 16。

第 3 章 《緝古算經考注》之內容分析 (卷上)

《緝古算經考注》是以《緝古算經》的體例爲基礎，內容依序爲「題目」、「答曰」、「術曰」和王孝通的「自注」，再加上李潢的「潢案」及少部分「劉衡謹案」所組成。李潢將《緝古算經》中的二十道題目拆成上下二卷，卷上包含前面三道題目，卷下則包含後面十七道題目。他在內容中加入了非常多的「潢案」，除了用來校勘文字和錯誤內容、補充說明王孝通的「術曰」和「自注」，並用來詳細列出解題的過程，使研究《緝古算經》的人能夠更容易瞭解其內容。但美中不足的是，李潢並沒有附上任何的圖解，這部份的工作只好由筆者根據題意和《九章算術細草圖說》中同樣名詞的圖形來揣摩並繪圖，希望可以嘉惠後學者。

由於《緝古算經考注》的內容非常艱深難懂，尤其是卷上第二和第三術。因此，筆者打算在本章先分析卷上的三道題目，其中第一術爲曆法問題，第二和第三術爲土木工程中的土方體積問題。卷下的十七道題目，則留待第四章再分析。

3.1 第一術

假令天正十一月朔、夜半，日在斗十度七百分度之四百八十。以章歲為母，朔月行定分九千，朔日定小餘一萬，日法二萬，章歲七百，亦名行分也。也當作法，據戊寅元術校改。今不取加時脫日字度。問天正朔夜半之時月在何處？

自注：推朔夜半月度，舊術要須加時日度。自古先儒雖復修撰改制，意見甚眾，竝未得算妙，有理不盡，考校尤難。臣每日夜思量，常以此理屈滯，恐後代無人知者。今奉敕造曆，因即改制，為此新術。舊推日度之術已得朔夜半日度，仍須更求加時日度，然當作乃知月處。臣今作新術，但得朔夜半日度，不須加時日度，即知月處。此新術比於舊術，一年之中十二倍省功，使學者易知。

根據題目意思，得知某年十一月初一合朔時刻，夜半時日所在赤道經度，求夜半時月所在赤道經度。王孝通根據《九章算術》均輸章犬追兔問題的解法理論，求出比舊法更簡潔的解法。李潢認爲「問語及注文多複亂，今校於後」。

假令天正十一月朔、夜半，日在斗十度七百分度之四百八十。以章歲為母，朔月定行分九千，朔日定小餘一萬，日法二萬，章歲七百，亦名行分法。舊推日度之術已得朔夜半日度，仍須更求加時日度，乃知月處。臣今作新術，不取

加時日度。問天正朔夜半之時月在何處？

自注：推朔夜半月度，舊術要加時日度。自古先儒雖復修撰改制，意見甚眾，並未得算妙，有理不盡，考校尤難。臣每日夜思量，常以此理屈滯，恐後代無人知者。今奉敕造厤，為此新術。但得朔夜半日度，不須加時日度，即知月處。比於舊術，一年之中十二倍省功，使學者易知。

答曰：在斗四度七百分度之五百三十。

術曰：推朔夜半月度新術，不復加時日度，月蝕乃可用之。潢案：不復當依前注作不須，月蝕當作有定小餘。以章歲減朔月行定分，餘以乘朔日定小餘，滿日法而一，為先行分。不盡者，半法已以通上收成一，已上當作下者棄之。若先行分滿日行分而一，為度分，以減朔日夜半日所在度分。若度分不足減，加往宿度。其分不足減者，退一度為行分而減之。餘即朔日夜半月行所在度及分也。

自注：凡入曆當月行定分即是月一日之行分。但此定分滿章歲而一為度。凡日一日行一度。然則章歲者即是日之一日行分也。今按《九章》均輸篇有犬追兔術，與此術相似。彼問：犬走一百步，兔走七十步。令兔先走七十五步，犬始追之。問幾何步追及？答曰：二百五十步追及。彼術曰：以兔走減犬走，餘者為法。又以犬走乘兔先走為實。實如法而一，即得追及步數。此術亦然。何者？假令月行定分九千，章歲七百，即是日行七百分，月行九千分。令日月行數相減，餘八千三百分者，是日先行之數。然月始追之必用一日而相及也。令當作今定小餘者，亦是日月相及之日分。假令定小餘一萬，即相及定分，此乃無對為數。其日法者，亦是相及之分，此又同數為有，八千三百，是先行分也。斯則異矣。但用日法除之，即當作得四千一百五十，即先行分。故以故以二字衍文夜半之時日在月前，月在日後，以日月相去之數四千一百五十減日行所在度分，即月夜半所在度分也。

由王孝通這段注文可知，本題算法是模仿《九章算術》均輸篇犬追兔術：「今按《九章》均輸篇有犬追兔術，與此術相似。彼問：犬走一百步，兔走七十步。令兔先走七十五步，犬始追之。問幾何步追及？答曰：二百五十步追及。」，但李潢提出第一個質疑：「近刻《九章算術》均輸篇：今有兔先走一百步，犬追之二百五十步，不及三十步而止。問犬不止，復行幾何步及之？[1]答曰：一百七步七分步之一。與王氏所引不合。」[2]可見王孝通所引用的題目與現今版本不同。

---

[1] 引自《九章算術》，郭書春、劉鈍點校，《算經十書》(台北：九章出版社，2001 年)，頁 152。
[2] 引自李潢，《緝古算經考注》，郭書春主編，《中國科學技術典籍通彙》數學卷四(鄭州：河南教育出版社，1993 年)，頁 1223。

李潢提出第二個質疑:「又古法:日一日行一度,月一日行十三度十九分度之七。」[3]

月亮運行的速度是太陽運行速度的$13\frac{7}{19}$倍，所以,「假令月行定分九千，章歲七百，即是日行七百分，月行九千分。」應該是爲了方便計算，並不是真實數據。[4]李潢提出第三個質疑:「傅仁均《戊寅元術》:章歲六百七十六。亦名行分法。日法一萬三十六。王氏校勘傳麻，而是術乃云章歲七百，日法二萬，與彼數異，未審何據。」[5]可見「定小餘一萬」和「日法二萬」也與傅仁均《戊寅元曆》中所記載的數據不同。另外，李潢還認爲注文中「今不云異乘，亦脫文也。無對為數、同數為有，疑是古算術語。」[6]

本題解法由《九章算術》粟米篇今有術,[7]可得所求數$=\dfrac{所有數\times所求率}{所有率}=\dfrac{10000\times(9000-700)}{20000}=4150$，$\dfrac{4150}{700}=5\dfrac{650}{700}$，$10\dfrac{480}{700}-5\dfrac{650}{700}=4\dfrac{530}{700}$。李潢還提出了三種分數運算的方法，筆者以現代數學算式列出：

解一：$10\dfrac{480}{700}-5=5\dfrac{480}{700}$，$5\dfrac{480}{700}-\dfrac{650}{700}=4\dfrac{1180}{700}-\dfrac{650}{700}=4\dfrac{530}{700}$。

解二：$10\dfrac{480}{700}-5\dfrac{650}{700}=9\dfrac{1180}{700}-5\dfrac{650}{700}=4\dfrac{530}{700}$。

解三：$10\times700+480=7480$，$7480-4150=3330$，$\dfrac{3330}{700}=4\dfrac{530}{700}$。

由此可見，李潢在處理分數運算方面技巧十分純熟，而這些方法也能帶給我們對數學教育的一些啓發。

李潢又提到舊術的解法:「加時者，合朔距子正後之時刻也。合朔無小餘，則子正即合朔時刻。有小餘，則合朔在子正後矣。合朔時日月同度，故舊術以加時月行分減月合朔行分，而得子正時月之度分也。」所以,「如此問求加時日度者，以三百五十分并子正日在斗四度七百分度之五百三十，得斗五度七百分

[3] 引自李潢,《緝古算經考注》，郭書春主編,《中國科學技術典籍通彙》數學卷四(鄭州：河南教育出版社，1993 年)，頁 1223。
[4] 參閱林炎全,《《緝古算經》探討》(台中：教育部台灣省中等學校教師研習會，2001 年)，頁 4。
[5] 引自李潢,《緝古算經考注》，郭書春主編,《中國科學技術典籍通彙》數學卷四(鄭州：河南教育出版社，1993 年)，頁 1223。
[6] 引自李潢,《緝古算經考注》，郭書春主編,《中國科學技術典籍通彙》數學卷四(鄭州：河南教育出版社，1993 年)，頁 1221。
[7] 參閱《九章算術》，郭書春、劉鈍點校,《算經十書》(台北：九章出版社，2001 年)，頁 99。

度之一百八十為子正後合朔加時日度。」[8]筆者認爲李潢此注文有誤，應該更正爲「如此問求加時日度者，以三百五十分并子正日在斗十度七百分度之四百八十，得斗十一度七百分度之一百三十為子正後合朔加時日度。」這樣子會比較合理。

正確解法：$10\dfrac{480}{700}+\dfrac{350}{700}=11\dfrac{130}{700}$

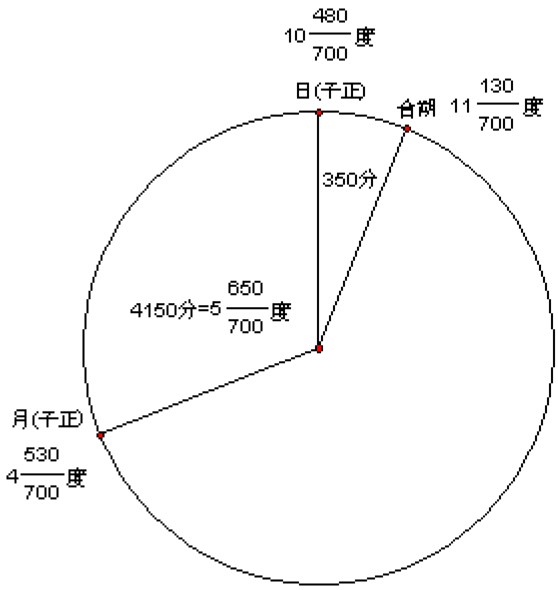


圖 3.1.1

3.2 第二術

假令太史造仰觀臺，上廣、袤少，下廣、袤多。上、下廣差二丈，上、下袤差四丈，上廣、袤差三丈，高多上廣一十一丈。甲縣差一千四百一十八人，乙縣差三千二百二十二人。夏程人功常積七十五尺，限五日役臺畢。羡道從臺南面起，上廣多下廣一丈二尺，少袤一百四尺，高多袤四丈。甲縣一十三鄉，乙縣四十三鄉，每鄉別均賦常積六千三百尺，限一日役羡道畢。二縣差到人共造仰觀臺，二縣鄉人共造羡道，皆從先給甲縣，以次與乙縣。臺自下基給高，道自初登給袤。問臺道廣、高、袤，及縣別給高、廣、袤各幾何？

答曰：臺高一十八丈；上廣七丈，下廣九丈；上袤一十丈，下袤一十四丈。甲縣給高四丈五尺；上廣八丈五尺，下廣九丈；上袤一十三丈，下袤一十四丈。

[8] 引自李潢，《緝古算經考注》，郭書春主編，《中國科學技術典籍通彙》數學卷四(鄭州：河南教育出版社，1993 年)，頁 1223。

乙縣給高一十三丈五尺；上廣七丈，下廣八丈五尺；上袤一十丈，下袤一十三丈。
羨道高一十八丈；上廣三丈六尺，下廣二丈四尺；袤一十四丈。
甲縣鄉人給高九丈；上廣三丈，下廣二丈四尺；上袤七丈，下袤一十四丈。
乙縣鄉人給高九丈；上廣三丈六尺，下廣三丈；下袤七丈。

李潢將上段「答曰」校勘，並依據體例正之如下：

臺高一十八丈；上廣七丈，上袤一十丈；下廣九丈，下袤一十四丈。
甲縣給高四丈五尺；上廣八丈五尺；上袤一十三丈。
乙縣給高一十三丈五尺；上廣七丈；上袤一十丈。
羨道高一十八丈；上廣三丈六尺，下廣二丈四尺；袤一十四丈。
甲縣鄉人給高九丈；上廣三丈；袤七丈。
乙縣鄉人給高九丈；上廣三丈六尺；袤七丈。

根據錢寶琮的考證，仰觀臺的四周應該有擋土牆，南面的牆是直立的，其他三面具有一定的坡度。羨道的北面緊靠仰觀臺的南面，兩側也有一定的坡度。[9]

3.2.1 求仰觀臺上下廣袤高術

求臺上下廣袤高術曰：以程功尺數乘二縣人，又以限日乘之，為臺積。又以上、下袤差乘上、下廣差，三而一，為隅陽冪。以乘截高為隅陽截積冪冪字衍。又半上、下廣差，乘斬當作塹上袤，為隅頭冪。以乘截高為隅頭截積。所得所得二字衍并二積，以減臺積，餘為實。以上、下廣差并上、下袤差，半之，為正數。加截當作塹上袤，以乘截高，所得增隅陽冪，加隅頭冪，為方法。又并截高及截當作塹上袤與正數，為廉法，從。開立方除之，即得上廣。各加差，得臺下廣及上下袤、高。

李潢依據《九章算術》商功篇的古法，[10]將仰觀臺切割成一個中央立方、[11]二個短塹堵、[12]二個長塹堵和四個陽馬。[13]由於李潢的注文非常繁多，筆者將擷取精要，以圖形來說明，並用現代數學符號和算式來表示，之後各題也都將採用這種模式以方便讀者瞭解。

---

[9] 參閱錢寶琮，〈王孝通《緝古算術》第二題、第三題術文疏證〉，杜石然主編，《李儼、錢寶琮科學史全集》第九卷(瀋陽：遼寧教育出版社，1998 年)，頁 580。
[10] 參閱《九章算術》，郭書春、劉鈍點校，《算經十書》(台北：九章出版社，2001 年)，頁 132。
[11] 立方體積爲「廣袤相乘，以高乘之」。
[12] 塹堵體積爲「廣袤相乘，以高乘之，二而一」。
[13] 陽馬體積爲「廣袤相乘，以高乘之，三而一」。

首先，我們先假設上寬(上廣)爲 x 丈，則根據題意得下寬(下廣)爲 x＋2 丈，上長(上袤)爲 x＋3 丈，下長(下袤)爲 x＋7 丈，高爲 x＋11 丈。仰觀臺體積爲 75 × (1418＋3222) × 5＝75 × 4640 × 5＝348000 × 5＝1740000 立方尺＝1740 立方丈。

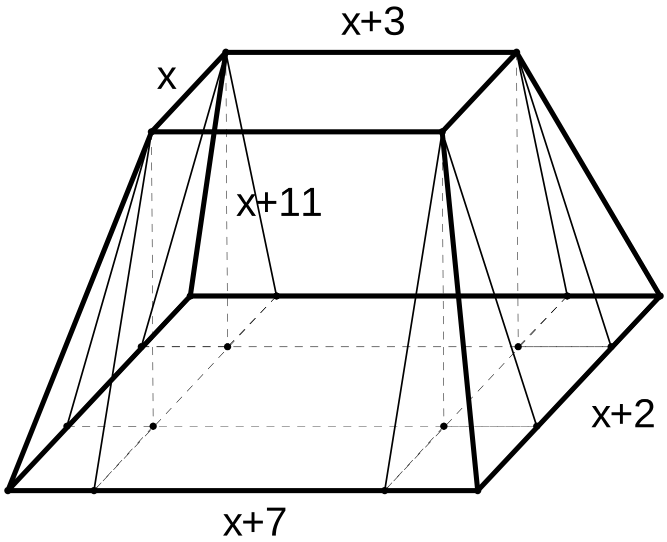


圖 3.2.1.1

於是，我們得到一個中央立方體積＝(x＋3)x(x＋11)＝x^3＋$11x^2$＋$3x^2$＋33x。

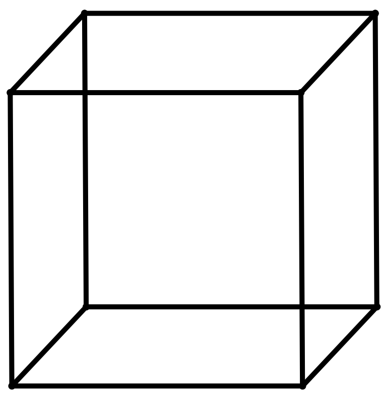


圖 3.2.1.2

接著，我們得到二個短壍堵體積＝2 × $\frac{1}{2}$ × $\frac{[(x+7)-(x+3)]}{2}$ × x × (x＋11)＝2 x(x＋11)＝$2x^2$＋22x。

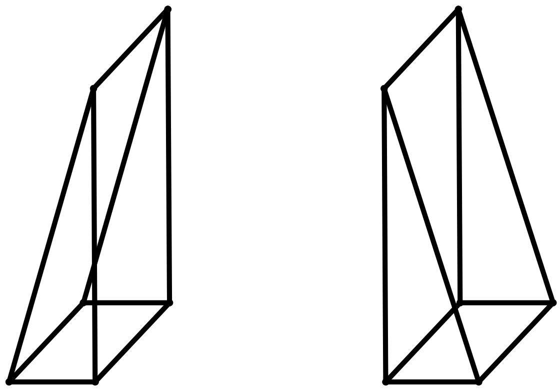


圖 3.2.1.3

再來，我們得到二個長壍堵體積＝$2\times\frac{1}{2}\times\frac{[(x+2)-x]}{2}\times(x+3)\times(x+11)=$ $(x+3)(x+11)=x^2+11x+3x+33$。

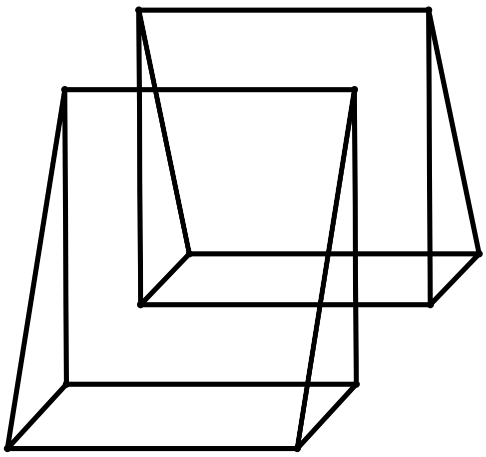


圖 3.2.1.4

最後，我們得到四個陽馬體積＝$4\times\frac{1}{3}\times\frac{[(x+7)-(x+3)]}{2}\times\frac{[(x+2)-x]}{2}\times$ $(x+11)=\frac{8}{3}(x+11)=\frac{8}{3}x+\frac{88}{3}=\frac{8}{3}x+29\frac{1}{3}$。

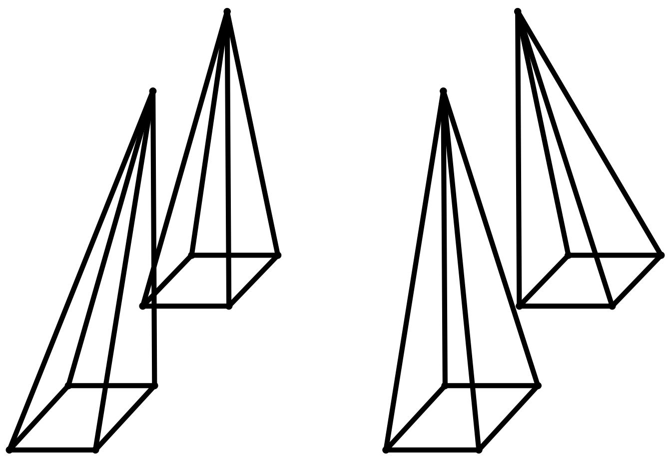


圖 3.2.1.5

綜合以上圖形和數學算式，我們將得到以下結果：

1 中央立方體積＋2 短塹堵體積＋2 長塹堵體積＋4 陽馬體積＝仰觀臺體積，

$\therefore (x^3+11x^2+3x^2+33x)+(2x^2+22x)+(x^2+11x+3x+33)+(\frac{8}{3}x+29\frac{1}{3})=$ 1740，

$\therefore x^3+17x^2+71\frac{2}{3}x=1677\frac{2}{3}$ 。

李潢除了依據《九章算術》商功篇的古法來分析解題之外，他還按照王孝通的術文寫成詳細的解題過程。由於李潢的解題過程中都保留了王孝通自創的許多名詞，例如「隅陽冪」、「隅陽截積」、「隅頭冪」、「隅頭截積」和「正數」等，[14]而且，他在每個數字後面都會附上長度單位，最後，還會加上自己的驗算。這些特點，筆者也都將其保留，以符合李潢的「原汁原味」。

同樣地，我們先假設上寬(上廣)爲 x 丈，則根據題意得下寬(下廣)爲 x＋2 丈，上長(上袤)爲 x＋3 丈，下長(下袤)爲 x＋7 丈，高爲 x＋11 丈。仰觀臺體積爲 75 × (1418＋3222) × 5＝75 × 4640 × 5＝348000 × 5＝1740000 立方尺＝1740 立方丈。[15]截高爲(x＋11)－ x＝11 丈。塹上長爲(x＋3)－x＝3 丈。隅陽冪爲 $\frac{[(x+7)-(x+3)]\times[(x+2)-x]}{3}=\frac{4\times 2}{3}=\frac{8}{3}=2\frac{2}{3}$ 平方丈。隅陽截積爲 $\frac{8}{3}\times 11=\frac{88}{3}$

[14] 王孝通自創這些專有名詞，是給一個稍微複雜而又重複使用的算式特別的稱呼，功用是爲了補救未能符號化的權宜之計。

[15] 李潢原來注文中的單位只有「尺」和「丈」，並無「立方」和「平方」，筆者爲了讓大家更清楚了解算式所代表的意義，特別加之。

$=29\frac{1}{3}$立方丈。隅頭冪爲$\frac{[(x+2)-x]\times 3}{2}=\frac{2\times 3}{2}=3$ 平方丈。隅頭截積爲 3 × 11 ＝33 立方丈。實爲 1740－($29\frac{1}{3}$＋33)＝1740－$62\frac{1}{3}$＝$1677\frac{2}{3}$。正數爲 $\frac{[(x+7)-(x+3)]+[(x+2)-x]}{2}=\frac{4+2}{2}$＝3。方法爲(3＋3) × 11＋$2\frac{2}{3}$＋3＝66＋$2\frac{2}{3}$＋3＝ $71\frac{2}{3}$。廉法爲 11＋3＋3＝17。隅法爲 1。x^3 項係數稱爲隅法，x^2 項係數稱爲廉法，x 項係數稱爲方法，常數項稱爲實，整理之後得三次方程式 $x^3+17x^2+71\frac{2}{3}x=1677\frac{2}{3}$，通分乘以 3 得 $3x^3+51x^2+215x=5033$，做開帶從立方得 x＝7。[16]

李潢在最後加入了自己的驗算過程：[(3 × 7＋51) × 7＋215] × 7＝[(21＋51) × 7＋215] × 7＝(72 × 7＋215) × 7＝(504＋215) × 7＝719 × 7＝5033，以表示此答案正確無誤。所以我們得知：仰觀臺高 18 丈；上寬 7 丈，下寬 9 丈；上長 10 丈，下長 14 丈。

3.2.2 求均給積尺受廣袤術

求均給積尺受廣袤術曰：以程功尺數乘乙縣人，又以限日乘之，為乙積。三因之，又以高冪乘之，以上、下廣差乘袤差而一，為實。又以臺高乘上廣，廣差而一，為上廣之高。又以臺高乘上袤，袤差而一，為上袤之高。又以上廣之高乘上袤之高，三之，為方法。又并兩高，三之，二而一，為廉法，從。開立方除之，即乙高。以減本高，餘即甲高。此是從下給臺甲高。又以廣差乘乙高，以本高而一。所得加上廣，即甲上廣。又以袤差乘乙高，如本高而一。所得加上袤，即甲上袤。其甲上廣、袤即乙下廣、袤。臺上廣、袤即乙上廣、袤。其後求廣、袤有增損者，皆做此。

自注：此應六因乙積，臺高再乘，上、下廣差乘袤差而一。又以臺高乘上廣，廣差而一，為上廣之高。又以臺高乘上袤，袤差而一，為上袤之高。以上廣之高乘上袤之高為小冪二。因下袤之高為中冪一。凡下袤、下廣之高即是截高與上袤與上廣之高相連并數。然此有中冪定有小冪一，又有上廣之高乘截高為冪一。又下廣之高乘下袤之高為大冪二。乘上袤之高為中冪一。其大冪之中又有小冪一，復有上廣上袤之高各乘截高，為中冪各一。又截高自乘為冪一。

[16] 王孝通並沒有提供「開帶從立方」的詳細過程，李潢也沒有。程大位《算法統宗》卷六有「開立方帶縱法」一節，但其算法並不是正確解法。

其中冪之內有小冪一，又上袤之高乘截高為冪一。然則截高自相乘為冪二，小冪六，又上廣、上袤之高各三，以乘截高為冪六。今皆半之，故以三乘小冪。又上廣、上袤之高各三，今但半之，各得一又二分之一，故三之二而一。諸冪乘截高為積尺。

李潢認爲王孝通「注文淆誤」，所以「校正於後」：

其小大中三冪即小高大高中高三冪也。此應六因乙積，臺高再乘，上、下廣差乘袤差而一為實。又以臺高乘上廣，廣差而一，為上廣之高。又以臺高乘上袤，袤差而一，為上袤之高。以上廣之高乘上袤之高為小冪二。又下廣之高乘下袤之高為大冪二。又上廣之高乘下袤之高、上袤之高乘下廣之高為中冪各一。凡下袤、下廣之高即是截高與上袤、上廣之高相連并數。其大冪之內有小冪各一，復有上廣上袤之高各乘截高，為冪各一。又截高自乘為冪二。有中冪定有小冪，其中冪之內有小冪各一，又上廣之高乘截高為冪一，又上袤之高乘截高為冪一。然則截高自乘為冪二，小冪六，又上廣、上袤之高各三，以乘截高為冪六。諸冪皆乘截高為積尺。今皆半之，得截高再自乘為立方。又三乘小冪為方。又上廣、上袤之高各三，今但半之，各得一又二分之一，故三之二而一為廉。

李潢依據《九章算術》商功篇芻童術來分析這一術的解題，[17]而且，他大量地使用幾何圖形相似比例和代數比例計算。我們先假設乙縣負責的高爲 h 丈，甲縣負責的高爲 18－h 丈，上寬上延的高(上廣之高)爲 m 丈，上長上延的高(上袤之高)爲 n 丈。乙縣負責的體積爲 75 × 3222 × 5＝241650 × 5＝1208250 立方尺＝1208 . 25 立方丈。由相似形比例關係得 $\overline{OP} : \overline{OR} = \overline{AB} : \overline{DE}$ ，

$\therefore$ m：m＋18＝ $\overline{AB} : \overline{DE}$ ，$\therefore$ m：18＝ $\overline{AB} : (\overline{DE} - \overline{AB})$，$\therefore$ m＝ $\dfrac{18\overline{AB}}{\overline{DE}-\overline{AB}}$ 。

$\overline{OP} : \overline{OQ} = \overline{AB} : \overline{GH}$ ，$\therefore$ m：m＋h＝ $\overline{AB} : \overline{GH}$ ，$\therefore\ \overline{GH} = \dfrac{(m+h)\overline{AB}}{m}$ ，

$$\therefore\ \overline{GH} - \overline{AB} = \frac{(m+h)\overline{AB}}{m} - \overline{AB} = \frac{h\overline{AB}}{m} = h\overline{AB} \times \frac{\overline{DE}-\overline{AB}}{18\overline{AB}} = \frac{h\left(\overline{DE}-\overline{AB}\right)}{18}\ 。$$

同理， n：n＋18＝ $\overline{BC} : \overline{EF}$ ，$\therefore$ n：18＝ $\overline{BC} : (\overline{EF} - \overline{BC})$，$\therefore$ n＝ $\dfrac{18\overline{BC}}{\overline{EF}-\overline{BC}}$ 。

n：n＋h＝ $\overline{BC} : \overline{HI}$ ，$\therefore\ \overline{HI} = \dfrac{(n+h)\overline{BC}}{n}$ ，

[17] 參閱《九章算術》，郭書春、劉鈍點校，《算經十書》(台北：九章出版社，2001 年)，頁 136。

$\therefore\ \overline{HI}-\overline{BC}=\dfrac{(n+h)\overline{BC}}{n}-\overline{BC}=\dfrac{h\overline{BC}}{n}=\mathrm{h}\,\overline{BC}\times\dfrac{\overline{EF}-\overline{BC}}{18\overline{BC}}=\dfrac{h(\overline{EF}-\overline{BC})}{18}$ 。[18]

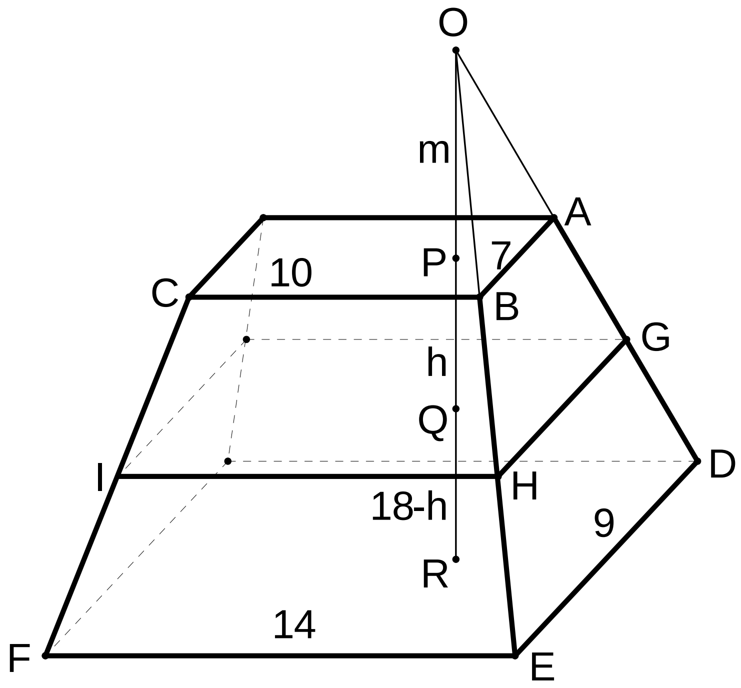


圖 3.2.2.1

依據「九章芻童術曰：倍上袤，下袤從之；亦倍下袤，上袤從之；各以其廣乘之；并，以高若深乘之，皆六而一。」[19]我們可以得到下列結果：

$$\frac{\left[(2\overline{BC}+\overline{HI})\times\overline{AB}+(2\overline{HI}+\overline{BC})\times\overline{GH}\right]\times\overline{PQ}}{6}=1208.25,$$

$\therefore (2\times\overline{BC}\times\overline{AB}+2\times\overline{HI}\times\overline{GH}+\overline{HI}\times\overline{AB}+\overline{BC}\times\overline{GH})\times \mathrm{h}=6\times 1208.25$，

$\therefore \{2\times\overline{BC}\times\overline{AB}+2\times[\overline{BC}+(\overline{HI}-\overline{BC})]\times[\overline{AB}+(\overline{GH}-\overline{AB})]+$

$[\overline{BC}+(\overline{HI}-\overline{BC})]\times\overline{AB}+\overline{BC}\times[\overline{AB}+(\overline{GH}-\overline{AB})]\}\times \mathrm{h}=6\times 1208.25$，

$\therefore [2\times\overline{BC}\times\overline{AB}+2\times\overline{BC}\times\overline{AB}+2\times\overline{BC}\times(\overline{GH}-\overline{AB})+2\times(\overline{HI}-\overline{BC})\times\overline{AB}+$

$2\times(\overline{HI}-\overline{BC})\times(\overline{GH}-\overline{AB})+\overline{BC}\times\overline{AB}+(\overline{HI}-\overline{BC})\times\overline{AB}+\overline{BC}\times\ \overline{AB}+$

18 參閱林炎全，《《緝古算經》探討》(台中：教育部台灣省中等學校教師研習會，2001 年)，頁 7。
19 引自《九章算術》，郭書春、劉鈍點校，《算經十書》(台北：九章出版社，2001 年)，頁 136。

$\overline{BC}\times(\overline{GH}-\overline{AB})]\times h=6\times 1208.25$，

$\therefore [6\times\overline{BC}\times\overline{AB}+3\times\overline{BC}\times(\overline{GH}-\overline{AB})+3\times(\overline{HI}-\overline{BC})\times\overline{AB}+2\times(\overline{HI}-\overline{BC})$

$\times(\overline{GH}-\overline{AB})]\times h=6\times 1208.25$，

$\therefore [3\times\overline{BC}\times\overline{AB}+\frac{3}{2}\times\overline{BC}\times(\overline{GH}-\overline{AB})+\frac{3}{2}\times(\overline{HI}-\overline{BC})\times\overline{AB}+(\overline{HI}-\overline{BC})$

$\times(\overline{GH}-\overline{AB})]\times h=3\times 1208.25$，

$\therefore \overline{BC}\times\overline{AB}\times h+\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times(\overline{GH}-\overline{AB})\times h+\frac{1}{2}\times(\overline{HI}-\overline{BC})\times\overline{AB}\times h+\frac{1}{3}\times$

$(\overline{HI}-\overline{BC})\times(\overline{GH}-\overline{AB})\times h=1208.25$。

$\therefore \overline{AB}\times\overline{BC}\times h+\frac{1}{2}\times\frac{h\overline{BC}}{n}\times\overline{AB}\times h+\frac{1}{2}\times\frac{h\overline{AB}}{m}\times\overline{BC}\times h+\frac{1}{3}\times\frac{h\overline{BC}}{n}\times\frac{h\overline{AB}}{m}\times h=$
1208.25，

$\therefore 3\times\overline{AB}\times\overline{BC}\times h+\frac{3}{2}\times\left(\frac{\overline{AB}\times\overline{BC}}{m}+\frac{\overline{AB}\times\overline{BC}}{n}\right)\times h^2+\frac{\overline{AB}\times\overline{BC}}{mn}\times h^3=$

3×1208.25，

$\therefore h^3+\frac{3}{2}(m+n)\,h^2+3\,mnh=\frac{3mn}{\overline{AB}\times\overline{BC}}\times 1208.25$，

$\therefore h^3+\frac{3}{2}(m+n)\,h^2+3\,mnh=\frac{3\times 18\times 18}{(\overline{DE}-\overline{AB})\times(\overline{EF}-\overline{BC})}\times 1208.25$。

在上面算式中，李潢將$(\overline{DE}-\overline{AB})\times(\overline{EF}-\overline{BC})=2\times 4=8$稱爲「一率，本廣差、本袤差相乘，即廣袤相乘率」；$\overline{PR}\times\overline{PR}=18\times 18=324$稱爲「二率，本高自乘，即廣之高、袤之高相乘率」；$[3\times\overline{BC}\times\overline{AB}+\frac{3}{2}\times\overline{BC}\times(\overline{GH}-\overline{AB})+\frac{3}{2}\times(\overline{HI}-\overline{BC})\times\overline{AB}+(\overline{HI}-\overline{BC})\times(\overline{GH}-\overline{AB})]\times h=3\times 1208.25$稱爲「三率，乙三因積，即乙十廣袤相乘，又乘乙高」；$h^3+\frac{3}{2}(m+n)\,h^2+3\,mnh=\frac{3\times 18\times 18}{(\overline{EF}-\overline{BC})\times(\overline{DE}-\overline{AB})}\times 1208.25$稱爲「四率，乙從立方實，即乙十廣之高、袤

之高相乘，又乘乙高」。[20]

如果我們模仿前術的作法，也可以推得相同的結果：

1 中央立方體積＋2 短塹堵體積＋2 長塹堵體積＋4 陽馬體積＝乙縣負責的體積，

$\therefore \overline{AB}\times\overline{BC}\times h+2\times\frac{1}{2}\times\frac{\overline{HI}-\overline{BC}}{2}\times\overline{AB}\times h+2\times\frac{1}{2}\times\frac{\overline{GH}-\overline{AB}}{2}\times\overline{BC}\times h+$

$4\times\frac{1}{3}\times\frac{\overline{HI}-\overline{BC}}{2}\times\frac{\overline{GH}-\overline{AB}}{2}\times h=1208.25$，

$\therefore\ \overline{AB}\times\overline{BC}\times h+\frac{1}{2}\times(\overline{HI}-\overline{BC})\times\overline{AB}\times h+\frac{1}{2}\times(\overline{GH}-\overline{AB})\times\overline{BC}\times h+$

$\frac{1}{3}\times(\overline{HI}-\overline{BC})\times(\overline{GH}-\overline{AB})\times h=1208.25$，

$\therefore\ \overline{AB}\times\overline{BC}\times h+\frac{1}{2}\times\frac{h\overline{BC}}{n}\times\overline{AB}\times h+\frac{1}{2}\times\frac{h\overline{AB}}{m}\times\overline{BC}\times h+\frac{1}{3}\times\frac{h\overline{BC}}{n}\times\frac{h\overline{AB}}{m}\times h=$

1208.25，

$\therefore 3\times\overline{AB}\times\overline{BC}\times h+\frac{3}{2}\times\left(\frac{\overline{AB}\times\overline{BC}}{m}+\frac{\overline{AB}\times\overline{BC}}{n}\right)\times h^2+\frac{\overline{AB}\times\overline{BC}}{mn}\times h^3=$

3×1208.25，

$\therefore h^3+\frac{3}{2}(m+n)h^2+3mnh=\frac{3mn}{\overline{AB}\times\overline{BC}}\times 1208.25$，

$\therefore h^3+\frac{3}{2}(m+n)h^2+3mnh=\frac{3\times18\times18}{(\overline{EF}-\overline{BC})\times(\overline{DE}-\overline{AB})}\times 1208.25$。

李潢根據王孝通術文的解題過程：乙縣負責的體積爲 $75\times3222\times5=241650\times5=1208250$ 立方尺＝1208 . 25 立方丈。從立方實爲 $\frac{1208.25\times3\times18\times18}{2\times4}=\frac{1208.25\times3\times18\times18}{2\times4}=\frac{3624.75\times324}{2\times4}=\frac{1174419}{8}=146802.375$。上廣之高爲 $\frac{18\times7}{2}=\frac{126}{2}=63$。上袤之高爲 $\frac{18\times10}{4}=\frac{180}{4}=45$。方法爲 $63\times45\times3=2835\times3=8505$。廉法爲 $\frac{(63+45)\times3}{2}=\frac{108\times3}{2}=\frac{324}{2}=162$。隅法爲 1。整理之後得三次方程式 $h^3+162h^2+8505h=146802.375$，做開帶從立方得 $h=13.5$。

---

[20] 引自李潢，《緝古算經考注》，郭書春主編，《中國科學技術典籍通彙》數學卷四(鄭州：河南教育出版社，1993 年)，頁 1231。

所以我們得知：乙縣分派建造高 13 丈 5 尺，甲縣分派建造高 4 丈 5 尺。甲縣築體的上寬＝乙縣築體的下寬＝$\frac{2\times13.5}{18}$＋7＝8．5 丈＝8 丈 5 尺。甲縣築體的上長＝乙縣築體的下長＝$\frac{4\times13.5}{18}$＋10＝13 丈。

錢寶琮認爲李潢忽視了王孝通「自注」中的「凡下袤、下廣之高即是截高與上袤與上廣之高相連并數。」一語，所以解釋並未得要領，[21]不如駱騰鳳在〈重訂《緝古算經》仰觀臺求乙高術注〉的解釋來得清楚。[22]

3.2.3 求羡道廣袤高術

求羨道廣袤高術曰：以均賦常積乘二縣五十六鄉，又六因為積。又以道上廣多下廣數加上廣少袤，為下廣少袤。又以高多袤加下廣少袤，為下廣少高。以乘下廣少袤為隅陽陽字衍文冪。又以下廣少上廣乘之，為鼈隅原脫積字。以減積，餘，三而一，為實。并下廣少袤與下廣少高，以下廣少上廣乘之，為鼈從橫廉冪。三而一，加隅陽冪，為方法。又以三除上廣多下廣，以下廣少袤、下廣少高加之，為廉法，從。開立方除之，即下廣。加廣差，即上廣；加袤多上廣於上廣於上廣三字衍文，即袤；加廣廣當作高多袤，即道高。

李潢依據《九章算術》商功篇的古法，[23]將羨道切割成一個塹堵和二個鼈臑。[24]首先，我們先假設羨道下寬爲 x 尺，則上寬爲 x＋12 尺，長爲(x＋12)＋104＝x＋116 尺，高爲(x＋116)＋40＝x＋156 尺。羨道體積爲 6300 × 56＝352800 立方尺。

---

21 參閱錢寶琮，〈王孝通《緝古算術》第二題、第三題術文疏證〉，杜石然主編，《李儼、錢寶琮科學史全集》第九卷(瀋陽：遼寧教育出版社，1998 年)，頁 589。

22 參閱駱騰鳳，〈重訂《緝古算經》仰觀臺求乙高術注〉，《藝游錄》，郭書春主編，《中國科學技術典籍通彙》數學卷五(鄭州：河南教育出版社，1993 年)，頁 151。

23 參閱《九章算術》，郭書春、劉鈍點校，《算經十書》(台北：九章出版社，2001 年)，頁 135。

24 鼈臑體積爲「廣袤相乘，以高乘之，六而一」。

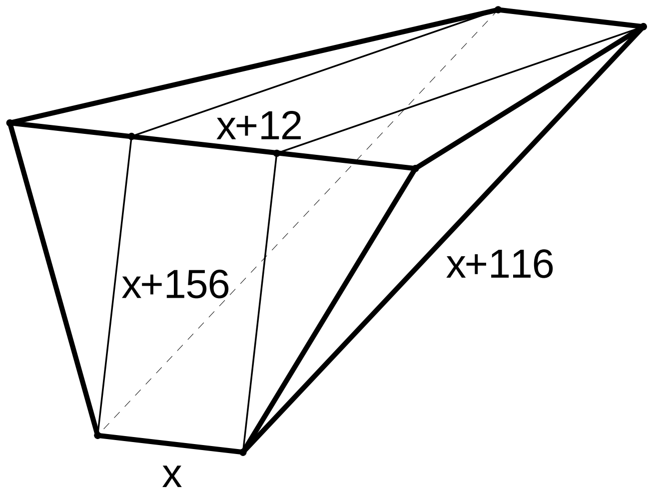


圖 3.2.3.1

於是，我們得到一個塹堵體積＝$\frac{1}{2} \times x \times (x+156) \times (x+116)=$

$\frac{1}{2}x(x+156)(x+116)$。

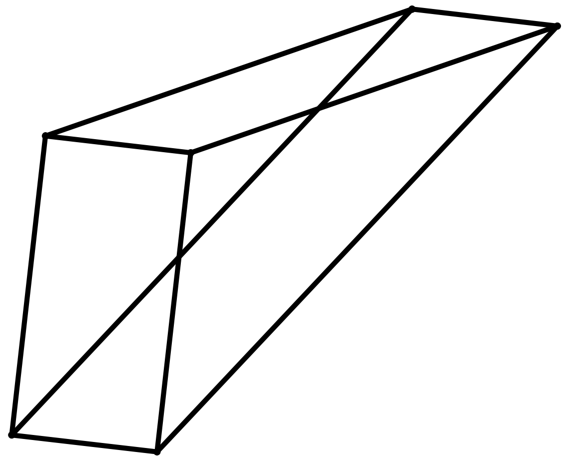


圖 3.2.3.2

接著，我們得到二個鼈臑體積＝$2 \times \frac{1}{6} \times \frac{(x+12)-x}{2} \times (x+156) \times (x+116)=$

$2(x+156)(x+116)$。

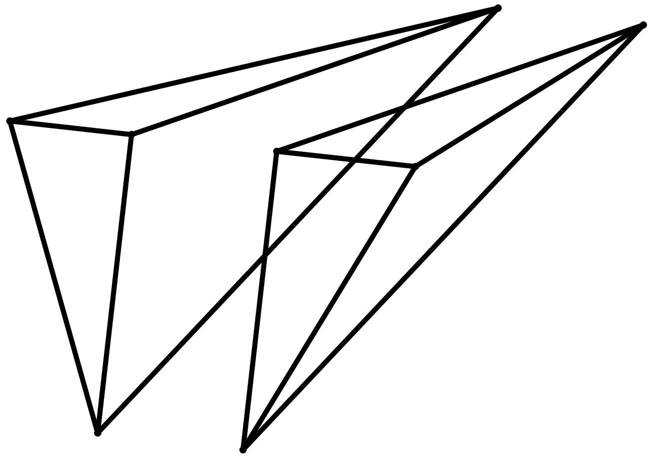


圖 3.2.3.3

綜合以上圖形和數學算式，我們將得到以下結果：

1 塹堵體積＋2 鼈臑體積＝羨道體積，

$\therefore \frac{1}{2}x(x+156)(x+116)+2(x+156)(x+116)=352800$，

$\therefore 3x(x^2+156x+116x+156\times 116)+12(x^2+156x+116x+156\times 116)=$
6×352800，

$\therefore 3(x^3+156x^2+116x^2+156\times 116\times x)+12(x^2+156\times 116+156x+116x)=$
6×352800，

$\therefore 3x^3+3\times 156x^2+3\times 116x^2+3\times 156\times 116\times x+12x^2+12\times 156x+12\times 116x$
$+12\times 156\times 116=6\times 352800$，

$\therefore 3x^3+816x^2+54288x+12x^2+3264x+217152=6\times 352800$，

$\therefore 3x^3+828x^2+21360x+217152=2116800$，

$\therefore 3x^3+828x^2+57552x=1899648$，

$\therefore x^3+276x^2+19184x=633216$。

依據「九章羨除術曰：并三廣，以深乘之，又以袤乘之，六而一。」[25]我們也可以推得相同的結果：

$$\frac{(x+x+x+12)\times(x+156)\times(x+116)}{6}=352800，$$

$$\frac{(3x+12)\times(x+156)\times(x+116)}{6}=352800，$$

[25] 引自《九章算術》，郭書春、劉鈍點校，《算經十書》(台北：九章出版社，2001 年)，頁 135。

$\therefore \frac{1}{2}x(x+156)(x+116)+2(x+156)(x+116)=352800$。

以下同上面算式。

李潢根據王孝通術文的解題過程：設羨道下寬爲 x 尺，則上寬爲 $x+12$ 尺，長爲 $(x+12)+104=x+116$ 尺，高爲 $(x+116)+40=x+156$ 尺。六因積爲 $6300\times 56\times 6=352800\times 6=2116800$ 立方尺。下廣少袤爲 $12+104=116$ 尺。下廣少高爲 $40+116=156$ 尺。鼈隅冪爲 $156\times 116=18096$ 平方尺。鼈隅積爲 $18096\times 12=217152$ 立方尺。實爲 $\frac{2116800-217152}{3}=\frac{1899648}{3}=633216$。方法爲 $\frac{(116+156)\times 12}{3}+18096=\frac{272\times 12}{3}+18096=\frac{3264}{3}+18096=1088+18096=19184$。廉法爲 $\frac{12}{3}+156+116=4+156+116=276$。隅法爲 1。整理之後得三次方程式 $x^3+276x^2+19184x=633216$，做開帶從立方得 $x=24$。

所以我們得知：登臺通道下寬 24 尺＝2 丈 4 尺；上寬 36 尺＝3 丈 6 尺；長 140 尺＝14 丈；高 180 尺＝18 丈。

3.2.4 求羨道均給積尺，甲縣受廣、袤術

求羨道均給積尺，甲縣受廣、袤術曰：以均賦常積乘甲縣一十三鄉，又六因為積。以袤再乘之，以道上、下廣差乘臺高為法而一，為實。又三因下廣，以袤乘之，如上、下廣差而一，為都廉，從。開立方除之，即甲袤。以廣差乘甲袤，本袤而一。以下廣加之，即甲上廣。又以臺高乘甲袤，本袤除之，即甲高。

設甲縣築長爲 y 尺，則甲縣築高爲 $\frac{y\times\overline{AC}}{\overline{AB}}$ 尺，甲縣築道上下寬度差爲 $\frac{y\times 2\overline{CD}}{\overline{AB}}$ 尺，甲縣築積爲 $6300\times 13=81900$ 立方尺。

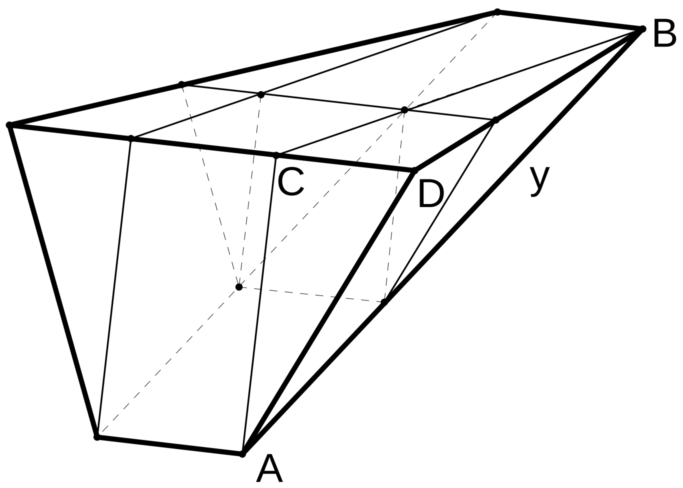


圖 3.2.4.1

我們模仿前術的作法，可以推得下列結果：

1 塹堵體積＋2 鼈臑體積＝甲縣築積，

$$\therefore \frac{1}{2}\times 24\times y\times\frac{y\times\overline{AC}}{\overline{AB}}+2\times\frac{1}{6}\times y\times\frac{1}{2}\times\frac{y\times 2\overline{CD}}{\overline{AB}}\times\frac{y\times\overline{AC}}{\overline{AB}}=81900，$$

$$\therefore \frac{1}{2}\times 24\times y\times\frac{y\times 180}{140}+2\times\frac{1}{6}\times y\times\frac{1}{2}\times\frac{y\times 12}{140}\times\frac{y\times 180}{140}=81900，$$

$$\therefore \frac{1}{2}\times 24\times y\times\frac{y\times 180}{140}\times\frac{6\times 140\times 140}{12\times 180}+2\times\frac{1}{6}\times y\times\frac{1}{2}\times\frac{y\times 12}{140}\times\frac{y\times 180}{140}\times$$

$$\frac{6\times 140\times 140}{12\times 180}=81900\times\frac{6\times 140\times 140}{12\times 180}，$$

$$\therefore y^3+840y^2=4459000。$$

在上面算式中，李潢將 $12\times 180=2160$ 稱爲「一率，本廣差乘本高，為各廣袤相乘率」；$140\times 140=19600$ 稱爲「二率，本廣差袤乘本高袤，即本袤自乘，為各袤相乘率」；$(3\times 24+\frac{y\times 12}{140})\times\frac{y\times 180}{140}\times y=81900\times 6$ 稱爲「三率，甲六因積，即甲四廣高相乘冪乘甲袤」；$(\frac{1}{2}\times 24\times\frac{180}{140}\times\frac{6\times 140\times 140}{12\times 180}+2\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}\times\frac{y\times 12}{140}\times\frac{180}{140}\times\frac{6\times 140\times 140}{12\times 180})\times y\times y=81900\times\frac{6\times 140\times 140}{12\times 180}$ 稱爲「四率，從立方實，即甲四袤相乘冪乘甲袤」。[26]

[26] 引自李潢，《緝古算經考注》，郭書春主編，《中國科學技術典籍通彙》數學卷四(鄭州：河南教育出版社，1993 年)，頁 1234。

李潢根據王孝通術文的解題過程：設甲縣築長為 y 尺，則甲縣築高為 $\frac{y\times\overline{AC}}{\overline{AB}}$ 尺，甲縣築道上下寬度差為 $\frac{y\times 2\overline{CD}}{\overline{AB}}$ 尺，甲縣築積為 6300 × 13＝81900 立方尺。六因積為 81900 × 6＝491400 立方尺。從立方實為 $\frac{491400\times 140\times 140}{12\times 180}=\frac{491400\times 19600}{12\times 180}=\frac{9631440000}{2160}=4459000$。都廉為 $\frac{3\times 24\times 140}{12}=\frac{72\times 140}{12}=\frac{10080}{12}=840$。隅法為 1。整理之後得三次方程式 $y^3+840y^2=4459000$，做開帶從立方得 y＝70。

李潢在最後加入了自己的驗算過程：[(70＋840)× 70] × 70＝(910 × 70) × 70＝63700 × 70＝4459000，以表示此答案正確無誤。所以我們得知：甲縣鄉人分派建造長＝70 尺＝7 丈；高＝$\frac{70\times 180}{140}$＝90 尺＝9 丈；上面寬＝$\frac{70\times 12}{140}+24$＝30 尺＝3 丈；下面寬＝24 尺＝2 丈 4 尺。

由於《緝古算經》第一術的「答曰」中出現「羨道……甲縣鄉人……上袤七丈，下袤一十四丈。乙縣鄉人……下袤七丈。」李潢在此說明校勘理由。他認為「問數甲鄉既少於乙，術文又祇都廉，則甲無垣方可知。乃答云：甲袤一十四丈，增出垣方一段，於問數術文兩不相合，乖謬之甚，且於本書義例悉反，宜亟正之。惟此問答數訛誤甚多，當由不知者妄據上文臺高均積改之。」所以，他另外提出「補求乙袤法：羨道共袤十四丈，以甲袤七丈減之，餘乙袤七丈，無俟更求。今補之者，明乙羨道下多垣積一段，與甲異，以正答數甲有上、下袤及下袤一十四丈之誤也。」現將李潢補充術文抄錄於下：

補術曰：以均賦常積乘乙縣四十三鄉，又六因為積。以本袤冪乘之，以道上、下廣差乘臺高為法而一，為實。并甲上下廣，以乘甲高，三因之為垣頭冪，又乘本袤冪如法而一，為垣方，又三因甲上廣，以乘本袤，以廣差除之，為都廉，從。開立方除之，得乙袤。[27]

李潢求乙袤術的解題過程：設乙縣築長為 z 尺。乙縣築積為 6300 × 43＝270900 立方尺。六因積為 270900 × 6＝1625400 立方尺。從立方實為 $\frac{1625400\times 140\times 140}{12\times 180}=\frac{1625400\times 19600}{12\times 180}=\frac{31857840000}{2160}=14749000$。垣頭冪為

[27] 引自李潢，《緝古算經考注》，郭書春主編，《中國科學技術典籍通彙》數學卷四(鄭州：河南教育出版社，1993 年)，頁 1235。

$(30+24)\times 90\times 3=54\times 90\times 3=14580$。垣方爲 $\frac{14580\times 140\times 140}{12\times 180}=$ $\frac{14580\times 19600}{12\times 180}=\frac{285768000}{2160}=132300$。都廉爲 $\frac{3\times 30\times 140}{12}=\frac{90\times 140}{12}=\frac{12600}{12}$ $=1050$。隅法爲 1。整理之後得三次方程式 $z^3+1050z^2+132300z=14749000$，做開帶從立方得 $z=70$。

李潢在最後加入了自己的驗算過程：$[(70+1050)\times 70+132300]\times 70=(1120\times 70+132300)\times 70=(78400+132300)\times 70=210700\times 70=14749000$，以表示此答案正確無誤。所以我們得知：乙縣鄉人分派建造長＝70 尺＝7 丈。

在上面算式中，李潢將 $12\times 180=2160$ 稱爲「一率，本廣差乘本高，為各廣高相乘率」；$140\times 140=19600$ 稱爲「二率，本廣差袤本高袤相乘，即本袤自乘，為各廣之袤各高之袤相乘率」；$[(3\times 30+6)\times 90+6\times 27\times 90]\times 70=270900\times 6$ 稱爲「三率，乙六因積，即乙一廣差，三下廣各為廣，乘乙高之四冪。甲六中廣為廣，乘甲高之六冪，共十冪，乘乙袤」；$[(70+3\times 350)\times 70+6\times 315\times 70]\times 70=14749000$ 稱爲「四率，從立方實，即乙一廣差袤，三下廣袤各為廣，乘乙高袤為高之四冪。甲六中廣袤為廣，乘甲高袤為高之六冪，共十冪，乘乙袤」。[28]

3.3 第三術

假令築隄，西頭上、下廣差六丈八尺二寸，東頭上、下廣差六尺二寸，東頭高少於西頭高三丈一尺，上廣多東頭高四尺九寸，正袤多於東頭高四百七十六尺九寸。甲縣六千七百二十四人，乙縣一萬六千六百七十七人，丙縣一萬九千四百四十八人，丁縣一萬二千七百八十一人。四縣每人一日穿土九石九斗二升。每人一日築常積一十一尺四寸十三分寸之六。穿方一尺得土八斗。古人負土二斗四升八合，平道行一百九十二步，一日六十二到。今隔山渡水取土，其平道只有一十一步，山斜高三十步，水寬一十二步。上山三當四，下山六當五，水行一當二。平道踟躕十加一，載輸一十四步。減計一人作功為均積，四縣共造，一日役畢。今從東頭與甲，其次與乙、丙、丁。問給斜、正袤與高，及下廣，并每人一日自穿、運、築程功，及隄上、下高、廣各幾何？

答曰：一人一日自穿、運、築，程功四尺九寸二分當作六分。
西頭高三丈四尺一寸，上廣八尺，下廣七丈六尺二寸。

[28] 引自李潢，《緝古算經考注》，郭書春主編，《中國科學技術典籍通彙》數學卷四(鄭州：河南教育出版社，1993 年)，頁 1236。

東頭高三尺一寸，上廣八尺，下廣一丈四尺二寸，正袤四十八丈，斜袤四十八丈一尺。
甲縣正袤一十九丈二尺，斜袤一十九丈二尺四寸，下廣三丈九尺，高一丈五尺五寸。
乙縣正袤一十四丈四尺，斜袤一十四丈四尺三寸，下廣五丈七尺六寸，高二丈四尺八寸。
丙縣正袤九丈六尺，斜袤九丈六尺二寸，下廣七丈，高三丈一尺。
丁縣正袤四丈八尺，斜袤四丈八尺一寸，下廣七丈六尺二寸，高三丈四尺一寸。

這一道題目總共有 290 個字，是《緝古算經》全書中字數最多的一道題目。

3.3.1 求人到程功運、築積尺術

求人到程功運、築積尺術曰：置上山四十步，下山二十五步，渡水二十四步，平道一十一步，踟躕之間十加一，載輸一十四步，一返計一百二十四步。以古人負土二斗四升八合，平道行一百九十二步，以乘一日六十二到，為實。却以一返步為法。除，得自運土到數也。又以一到負土數乘之，却以穿方一尺土數除之，得一人一日運功積。又以一人穿土九石九斗二升，以穿方一尺土數除之，為法，除之，得穿用人數。復置運功積，以每人一日常積除之，得築用人數。并之得六人，共成二十九尺七寸六分。以六人除之，即一人程功也。

李潢根據王孝通術文的解題過程：一趟來回的步數爲$(40+25+24+11)\times\frac{11}{10}+14=124$。一天能搬運的趟數爲$\frac{192\times 62}{124}=\frac{11904}{124}=96$。一人一天能搬運的土方爲$\frac{2.48\times 96}{8}=\frac{238.08}{8}=29.76$ 立方尺。一人一天能挖掘的土方爲$\frac{99.2}{8}=12.4$ 立方尺。挖掘 29 . 76 立方尺的土方需要人數爲$\frac{29.76}{12.4}=2.4$。填築 29 . 76 立方尺的土方需要人數爲 $29\frac{76}{100}\div 11\frac{58}{130}=\frac{2976}{100}\times\frac{130}{1488}=\frac{38688}{14880}=2.6$。合計一天完成搬運、挖掘和填築 29 . 76 立方尺的土方需要人數爲 $1+2.4+2.6=6$。
$\therefore$ 一人一天能搬運、挖掘和填築的土方爲$\frac{29.76}{6}=4.96$ 立方尺＝4 立方尺 9 立方寸 6 立方分。

3.3.2 求隄上、下廣及高、袤術

求隄上、下廣及高、袤術曰：一人一日程功乘總人為隄積。以高差乘下廣差，六而一，為鼈冪。又以高差脫乘字小頭廣差，二而一，為大臥塹頭冪。又半高差乘上廣多東頭高之數，為小臥塹頭冪。并三冪，為大小塹鼈率。乘正袤多小高之數，以減隄積，餘為實。又置半高差，及半小頭廣差與上廣多小頭高之數，并三差，以乘正袤多小頭高之數。以加率為方法。又并正袤多小高、并上廣多小高及半高差，而增之兼而增之兼四字衍文半小頭廣差加之為廉法，從。開立方除之，即小高。加差即各得廣、袤、高。又正袤自乘、高差自乘，并，而開方除之，即斜袤。

李潢依據《九章算術》商功篇的古法，[29]將築隄切割成一個平隄和一個羨除，我們再把羨除切割成一個塹堵和一個鼈臑。小頭就是東端，小高就是東端的高。首先，我們先假設小高爲 x 尺，則西頭高爲 x＋31 尺，上廣爲 x＋4 . 9 尺，正袤爲 x＋476 . 9 尺，東頭下廣爲 x＋4 . 9＋6 . 2 尺，西頭下廣爲 x＋4 . 9 ＋68 . 2 尺。隄積爲 4 . 96 × (6724＋16677＋19448＋12781)＝4 . 96 × 55630＝275924 . 8 立方尺。

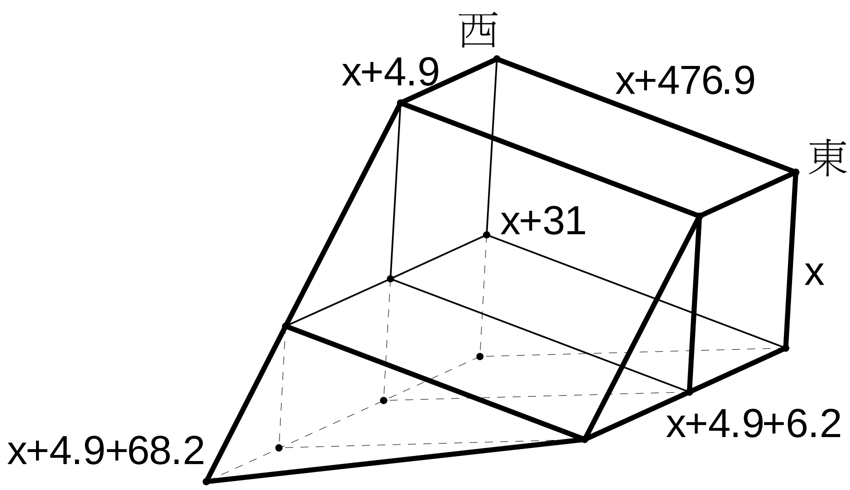


圖 3.3.2.1

於是，依據「九章求隄積術：并上下廣而半之，以高乘之，又以袤乘之，即積尺。」[30]我們得到一個平隄體積＝$\frac{(x+4.9)+(x+4.9+6.2)}{2}$ × x × (x＋476 . 9)

[29] 參閱《九章算術》，郭書春、劉鈍點校，《算經十書》(台北：九章出版社，2001 年)，頁 129。
[30] 引自《九章算術》，郭書春、劉鈍點校，《算經十書》(台北：九章出版社，2001 年)，頁 129。

$=\frac{2x+16}{2}\times x\times(x+476.9)=(x+8)x(x+476.9)$。

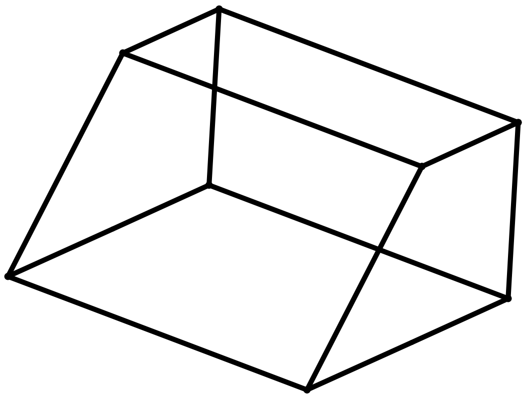


圖 3.3.2.2

接著，我們得到一個塹堵體積$=\frac{(x+476.9)\times(x+4.9+6.2)\times 31}{2}=\frac{31(x+476.9)(x+11.1)}{2}$。

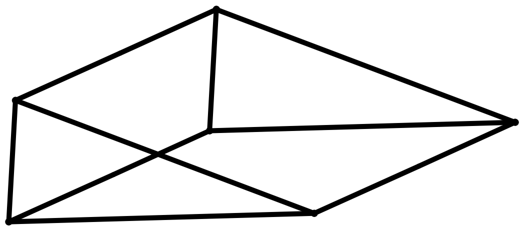


圖 3.3.2.3

再來，我們得到一個鼈臑體積$=\frac{(x+476.9)\times 62\times 31}{6}=\frac{1922(x+476.9)}{6}$。

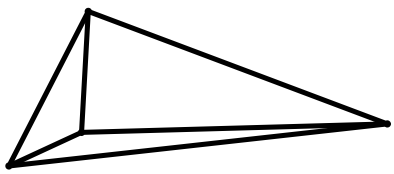


圖 3.3.2.4

綜合以上圖形和數學算式，我們將得到以下結果：

1 平隄體積＋1 塹堵體積＋1 鼈臑體積＝隄積，

$\therefore$ (x＋8)x(x＋476．9)＋ $\frac{31(x+476.9)(x+11.1)}{2}$ ＋ $\frac{1922(x+476.9)}{6}$ ＝275924．8，

$\therefore$ (x^3＋484．9x^2＋3815．2x)＋(15．5x^2＋7564x＋82050．645)＋

($\frac{1922}{6}$x＋152766．9＋$\frac{0.4}{6}$)＝275924．8，

$\therefore$ x^3＋500．4x^2＋(11699．2＋$\frac{2}{6}$)x＝41106．255＋$\frac{5.6}{6}$ 。

李潢根據王孝通術文的解題過程：小頭就是東端，小高就是東端的高。設小高爲 x 尺，則西頭高爲 x＋31 尺，上廣爲 x＋4．9 尺，正袤爲 x＋476．9 尺，東頭下廣爲 x＋4．9＋6．2 尺，西頭下廣爲 x＋4．9＋68．2 尺。隄積爲 4．96 × (6724＋16677＋19448＋12781)＝4．96 × 55630＝275924．8 立方尺。鼈冪爲 $\frac{31\times 62}{6}=\frac{1922}{6}=320\frac{2}{6}$ 平方尺。大臥塹頭冪爲 $\frac{31\times 6.2}{2}=\frac{192.2}{2}$ ＝96．1 平方尺。小臥塹頭冪爲 15．5 × 4．9＝75．95 平方尺。大小塹鼈率爲 $320\frac{2}{6}$ ＋96．1＋75．95＝492．05＋$\frac{2}{6}$ 平方尺。從立方實爲 275924．8－476．9 × (492．05＋$\frac{2}{6}$) ＝275924．8－(234658.645＋158．9＋$\frac{0.4}{6}$)＝275924．8－(234817．545＋$\frac{0.4}{6}$) ＝41107．255－$\frac{0.4}{6}$ ＝41106．255＋$\frac{5.6}{6}$ 。方法爲(15．5＋3．1＋4．9) × 476．9＋(492．05＋$\frac{2}{6}$)＝23．5 × 476．9＋(492．05＋$\frac{2}{6}$)＝11207．15＋(492．05＋$\frac{2}{6}$)＝11699．2＋$\frac{2}{6}$ 。廉法爲 476．9＋4．9＋15．5＋3．1＝500．4。隅法爲 1。整理之後得三次方程式 x^3＋500．4x^2＋(11699．2＋$\frac{2}{6}$)x＝41106．255＋$\frac{5.6}{6}$ ，

$\therefore$ 6x^3＋3002．4x^2＋70197．2x＝246643．13，做開帶從立方得 x＝3．1。

李潢在最後加入了自己的驗算過程，他稱之爲「還元法」：[(3．1 × 6＋3002．4) × 3．1＋70197．2] × 3．1＝[(18．6＋3002．4)× 3．1＋70197．2] × 3．1 ＝(3021× 3．1＋70197．2) × 3．1＝(9365．1＋70197．2) × 3．1＝79562．3× 3．1 ＝246643．13，以表示此答案正確無誤。所以我們得知：東頭高爲 3．1 尺＝3 尺 1 寸，西頭高爲 3．1＋31＝34．1 尺＝3 丈 4 尺 1 寸，上廣爲 3．1＋4．9＝8 尺，正袤爲 3．1＋476．9＝480 尺＝48 丈，東頭下廣爲 3．1＋4．9＋6．2＝14．2 尺＝1 丈 4 尺 2 寸，西頭下廣爲 3．1＋4．9＋68．2＝76．2 尺＝7 丈 6 尺 2 寸。

3.3.3 求甲縣高、廣、正、斜袤術

求甲縣高、廣、正、斜袤術曰：以程功乘甲縣人，以六因取積。又乘袤幂，以下廣差乘高差，以以當作為法，除之，為實。又并小頭上、下廣，以乘小高，三因之，為垣頭幂。又乘袤幂，如法而一，為垣方。又三因小頭下廣，以乘正袤，以廣差除之，為都廉，從。開立方除之，得小頭脫袤字即甲袤。又以下廣差乘之，所得此二字衍文，以正袤除之。所得，加東頭下廣，即甲廣。又以兩頭高差乘甲袤，以正袤除之，以加東頭高，即甲高。又以甲袤自乘；以隄東頭高減甲高，餘自乘，并二位，以開方除之，即得斜袤。求高廣以本袤及高廣差求之以上十二字衍文。若求乙、丙、丁，各以本縣人功積尺，每以前大高、廣為後小高、廣。凡廉母自乘為方母，廉母乘方母為實母。

自注：此平隄在上，羨除在下。兩高之差即除高除即羨除之省文，下同。其除兩邊各一鼈臑，中一塹堵。今以袤再乘積當作再乘六因積，廣差乘高差而一，得截鼈臑袤再脫自字乘為立方一。又塹堵袤自乘為幂一。又三因小頭下廣，大大當作以袤乘之，廣差而一，與幂為高，故為廉法。又并小頭上、下廣，又三之，此下當有以乘小頭高，為頭幂之文，意同六除當作六除幂。然此頭幂本乘截截字衍文袤。又袤再乘之，差相乘而一。今還依數乘除一頭當作袤幂，為從。開立方除之，得截袤為廣此下當有故為方法之文。

首先，我們先假設分派給甲縣築隄的正袤爲 y 尺，則甲縣築隄兩頭的高差爲 $\dfrac{31y}{480}$ 尺，甲縣築隄兩頭的下廣差爲 $\dfrac{62y}{480}$ 尺。甲縣隄積爲 $4.96 \times 6724 =$ 33351.04 立方尺。

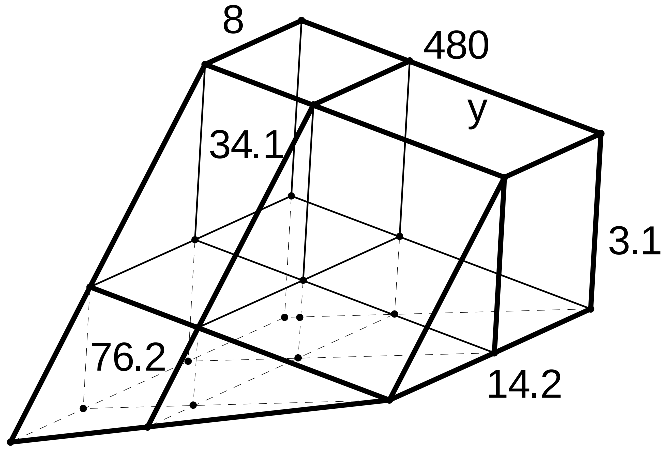


圖 3.3.3.1

我們模仿前術的作法，可以推得下列結果：

1 平隄體積＋1 塹堵體積＋1 鼈臑體積＝隄積，

$\therefore \dfrac{(8+14.2)}{2}\times y\times 3.1+\dfrac{y\times 14.2\times \dfrac{31y}{480}}{2}+\dfrac{y\times \dfrac{62y}{480}\times \dfrac{31y}{480}}{6}=4.96\times 6724$，

$\therefore 6\times 34.41\,y+3\times 14.2\,y\times \dfrac{31y}{480}+y\times \dfrac{62y}{480}\times \dfrac{31y}{480}=6\times 33351.04$，

$\therefore \dfrac{480}{31}\times \dfrac{480}{62}\times 206.46\,y+\dfrac{480}{62}\times 42.6\,y^2+y^3=\dfrac{480}{31}\times \dfrac{480}{62}\times 200106.24$，

$\therefore y^3+\dfrac{10224}{31}y^2+\dfrac{767232}{31}y=\dfrac{743620608}{31}$。

李潢根據王孝通術文的解題過程：設分派給甲縣築隄的正袤爲 y 尺，則甲縣築隄兩頭的高差爲 $\dfrac{31y}{480}$ 尺，甲縣築隄兩頭的下廣差爲 $\dfrac{62y}{480}$ 尺。甲縣隄積爲 $4.96\times 6724=33351.04$ 立方尺。六因積爲 $6\times 33351.04=200106.24$ 立方尺。從立方實爲 $\dfrac{200106.24\times 480\times 480}{62\times 31}=\dfrac{200106.24\times 230400}{1922}=\dfrac{46104477696}{1922}=23987761\dfrac{1054}{1922}=23987761\dfrac{17}{31}=\dfrac{743620608}{31}$。垣頭冪爲 $(8+14.2)\times 3\times 3.1=22.2\times 3\times 3.1=66.6\times 3.1=206.46$ 平方尺。垣方爲 $\dfrac{206.46\times 480\times 480}{62\times 31}=\dfrac{206.46\times 230400}{1922}=\dfrac{47568384}{1922}=24749\dfrac{806}{1922}=24749\dfrac{13}{31}=\dfrac{767232}{31}$。都廉爲 $\dfrac{3\times 14.2\times 480}{62}=\dfrac{42.6\times 480}{62}=\dfrac{20448}{62}=329\dfrac{50}{62}=329\dfrac{25}{31}=\dfrac{10224}{31}$。隅法爲 1。整理之後得三次方程式 $y^3+\dfrac{10224}{31}y^2+\dfrac{767232}{31}y=\dfrac{743620608}{31}$，

$\therefore 31\,y^3+10224\,y^2+767232\,y=743620608$，做開帶從立方得 $y=192$。

李潢在最後加入了自己的「還元法」：$[(192\times 31+10224)\times 192+767232]\times 192=[(5952+10224)\times 192+767232]\times 192=(16176\times 192+767232)\times 192=(3105792+767232)\times 192=3873024\times 192=743620608$，以表示此答案正確無誤。所以我們得知：甲縣築隄的正袤爲 192 尺＝19 丈 2 尺，下廣爲 $14.2+\dfrac{62\times 192}{480}=14.2+24.8=39$ 尺＝3 丈 9 尺，高爲 $3.1+\dfrac{31\times 192}{480}=3.1+12.4=15.5$ 尺＝1 丈 5 尺 5 寸，斜袤爲 $\sqrt{192\times 192+12.4\times 12.4}=\sqrt{37017.76}=192.4$

尺＝19 丈 2 尺 4 寸。

在這一術的後面注文，還留下劉衡鄉人揭廷鏘以西方開方法增補的兩算草圖解，與李潢的體例不合。[31]在羅士琳的《疇人傳續編》第四十九卷〈李潢傳〉中有提到，現引數語如下：

惜其第三術羼列西法開方兩算草，與侍郎通體義例不協，不解何意，因思此蓋揭某妄增之草，方伯芟之未盡耳。余恐世支讀侍郎書者，以此議侍郎，故特表白之。

3.3.4 求隄都積術

求隄都積術曰：置西頭高，倍之，加東頭高，又并西頭上、下廣，半而乘之。又置東頭高，倍之，加西頭高，又并東頭上、下廣，半而乘之。并二位積，以正袤乘之，六而一，得隄積也。

此術李潢原稿只留有王孝通術文，並未留下注文和解題過程，而是由其學生劉衡按照他所留下的注釋抄本來補之，羅士琳認為「原稿奪注，劉君依例補之可也」。[32]現將劉衡補充注文抄錄於下：

劉衡謹案：立方上下高廣如一，故以一邊自乘，再乘得積。若邊數不齊，則必齊其不齊，以致其齊，乃可相乘得積。一面不齊者，止須兩邊相并折半即齊。若此隄積各邊不齊，而東西高為最，非僅兩邊相并折半之法所能齊也。故必兩相互易，各三其數，始可致齊以求積。西高倍之，二數也，加東高，則三矣。東高倍之，二數也，加西高，則三矣。東三西三并之，則二三而六矣。各以取齊之廣乘之，得六冪，以袤乘之，得六積，故六而一得積。[33]

---

[31] 參閱李潢，《緝古算經考注》，郭書春主編，《中國科學技術典籍通彙》數學卷四(鄭州：河南教育出版社，1993 年)，頁 1251－1253。
[32] 引自羅士琳，〈李潢傳〉，《疇人傳續編》第四十九卷。
[33] 引自李潢，《緝古算經考注》，郭書春主編，《中國科學技術典籍通彙》數學卷四(鄭州：河南教育出版社，1993 年)，頁 1253。

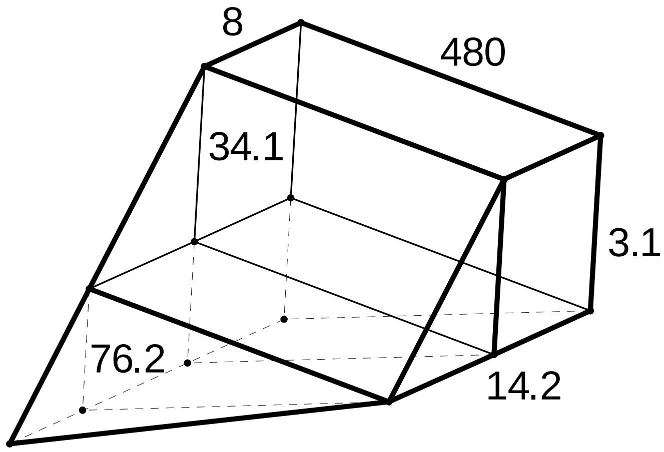


圖 3.3.4.1

劉衡根據王孝通術文的解題過程：

$$隄積=\frac{\left[(34.1\times 2+3.1)\times\frac{(8+76.2)}{2}+(3.1\times 2+34.1)\times\frac{(8+14.2)}{2}\right]\times 480}{6}$$

$$=\frac{\left[(68.2+3.1)\times\frac{84.2}{2}+(6.2+34.1)\times\frac{22.2}{2}\right]\times 480}{6}=\frac{(71.3\times 42.1+40.3\times 11.1)\times 480}{6}$$

$$=\frac{(3001.73+447.33)\times 480}{6}=\frac{3449.06\times 480}{6}=\frac{1655548.8}{6}=275924.8 \text{ 立方尺。}$$

我們模仿前術的作法，可以推得相同的結果：

隄積＝1 平隄體積＋1 塹堵體積＋1 鼈臑體積

$$=\frac{(8+14.2)}{2}\times 3.1\times 480+\frac{480\times 14.2\times 31}{2}+\frac{480\times 62\times 31}{6}$$

＝16516．8＋105648＋153760＝275924．8 立方尺。

錢寶琮認爲王孝通「求隄都積術」已經脫離《九章算術》幾何知識的範疇，在中國數學幾何學方面具有開創性的貢獻。[34]

[34] 參閱錢寶琮，〈王孝通《緝古算術》第二題、第三題術文疏證〉，杜石然主編，《李儼、錢寶琮科學史全集》第九卷(瀋陽：遼寧教育出版社，1998 年)，頁 609。

筆者已經分析完《緝古算經考注》卷上的三道題目。藉由李潢詳細的注文說明、解題過程和筆者揣摩的圖解，並儘可能地使用現代數學符號和算式來做輔助，相信可以幫助大家更了解《緝古算經》艱深難懂的內容。由此可見，李潢的《緝古算經考注》真是我們學習《緝古算經》最快的入門途徑，也是最佳的參考書籍。現在，筆者將帶領大家進入第四章，繼續爲大家分析《緝古算經考注》卷下的十七道題目。

第 4 章 《緝古算經考注》之內容分析 (卷下)

《緝古算經考注》卷下總共有十七道題目，分成三種類型：從第一術到第三術和第五術，這四題為土木工程中的土方體積問題；第四術和從第六術到第十一術，這七題是儲糧用的倉房和地窖問題；從第十二術到第十七術，這六題為勾股問題。現在，筆者就開始來作內容分析。

4.1 第一術

假令築龍尾隄，其隄從頭高、上上字衍文闊以次低狹至尾。上廣多，下廣少。隄頭上、下廣差六尺，下廣少高一丈二尺，少袤四丈八尺。甲縣二千三百七十五人，乙縣二千三百七十八人，丙縣五千二百四十七人。各人程功常積一尺九寸八分。一日役畢。三縣共築，今從隄尾與甲縣，以次與乙、丙。問龍尾隄從頭至尾高、袤、廣，及各縣別給高、袤、廣各多少？

答曰：高三丈，袤六丈六尺，上廣二丈四尺，下廣一丈八尺。
甲縣高一丈五尺，袤三丈三尺，上廣二丈一尺。
乙縣高二丈一尺，袤一丈三尺二寸，上廣二丈二尺二寸。
丙縣高三丈，袤一丈九尺八寸，上廣二丈四尺。

4.1.1 求龍尾隄廣、袤、高術

求龍尾隄廣、袤、高術曰：以程功乘總人為隄積，又六因之，為虛積。以少高乘少袤為隅冪，以少上廣乘之，為鼈隅冪冪當作積。以減虛積，餘，三約之，所得為實。并少高、袤，以少上廣乘之，為鼈從橫廉冪。三而一，加隅冪，為方法。又三除少上廣，以少袤、少高加之，為廉法，從。開立方除之，得下廣。加差即高、廣、袤。

李潢認為「法解與仰觀臺求羨道下廣同」。[1]所以，我們先假設龍尾隄下廣為 x 尺，則上廣為 x＋6 尺，袤為 x＋48 尺，高為 x＋12 尺。隄積為(2375＋2378＋5247) × 1 . 98＝10000 × 1 . 98＝19800 立方尺。模仿第三章「求羨道廣袤高術」，我們將得到以下結果：

1 塹堵體積＋2 鼈臑體積＝龍尾隄體積，

$\therefore\ \frac{1}{2}\times x\times(x+48)\times(x+12)+2\times\frac{1}{6}\times\frac{(x+6)-x}{2}\times(x+48)\times(x+12)=19800$，

$\therefore\ 3(x^3+60x^2+576x)+6(x^2+60x+576)=6\times 19800$，

$\therefore\ 3x^3+186x^2+2088x+3456=118800$，

$\therefore\ x^3+62x^2+696x=38448$。

[1] 引自李潢，《緝古算經考注》，郭書春主編，《中國科學技術典籍通彙》數學卷四(鄭州：河南教育出版社，1993 年)，頁 1255。

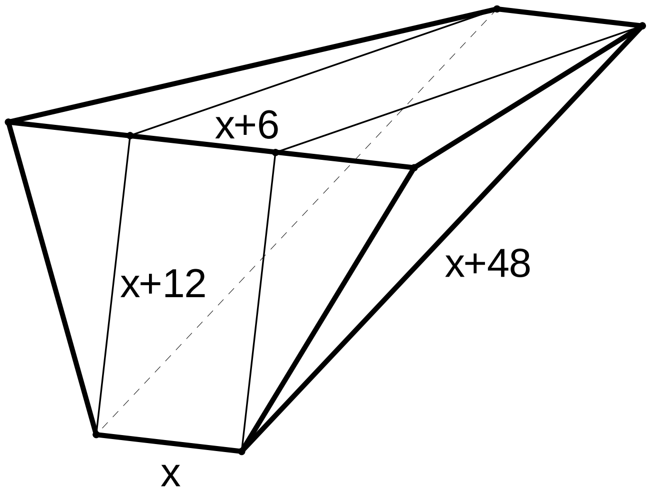


圖 4.1.1.1

李潢根據王孝通術文的解題過程：設龍尾隄下廣爲 x 尺，則上廣爲 x＋6 尺，袤爲 x＋48 尺，高爲 x＋12 尺。隄積爲(2375＋2378＋5247) × 1 . 98＝10000 × 1 . 98＝19800 立方尺。虛積爲 19800 × 6＝118800 立方尺。隅冪爲 12 × 48＝576 平方尺。鼈隅積爲 576 × 6＝3456 立方尺。實爲 $\frac{118800-3456}{3}=\frac{115344}{3}$＝38448。鼈從橫廉冪爲(12＋48) × 6＝60 × 6＝360 平方尺。方法爲 $\frac{360}{3}$＋576＝120＋576＝696。廉法爲 $\frac{6}{3}$＋12＋48＝2＋12＋48＝62。隅法爲 1。整理之後得三次方程式 $x^3+62x^2+696x=38448$，做開帶從立方得 x＝18。

所以我們得知：龍尾隄下廣 18 尺＝1 丈 8 尺；上廣 24 尺＝2 丈 4 尺；袤 66 尺＝6 丈 6 尺；高 30 尺＝3 丈。

4.1.2 求逐縣均給積尺受廣、袤術

求逐縣均給積尺受廣、袤術曰：以程功乘當縣人為積尺。各六因積尺，又乘袤冪，廣差乘高為法，除之，為實。又三因末廣，以袤乘之，廣差而一，為都廉，從。開立方除之，即甲袤。以本高乘之，以本袤除之，所得加末廣，即甲上廣。其甲上廣即乙末廣，其甲高即垣高。求實與都廉如前。又并甲上、下廣，三之，乘甲高，以乘袤冪，以法除之，得垣方，從。開立方除之，即乙袤。餘倣此。

自注：此龍尾猶羨除也。其塹堵一、鼈臑一，并而相連。今以袤再乘積此積即六因積，廣差乘高而一，所得，截鼈臑袤再自乘為立方一，又以一鼈臑截袤再自乘為立方一又以至立方一十四字皆衍文，又塹堵袤自乘為冪一，又三因末廣，以袤乘之，廣差而一，與冪為高，故為廉法。

李潢在此補充說明：「注據甲言之，故不釋垣方，其乙丙各垣方之袤，實與

各廣差下廣同一截袤也。」[2]

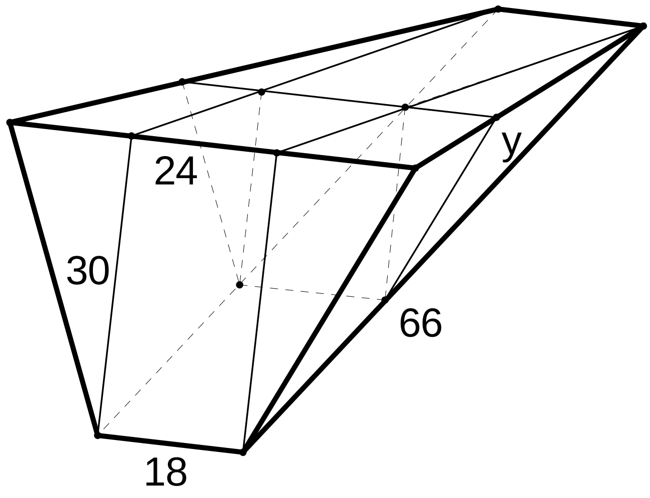


圖 4.1.2.1

李潢根據王孝通術文的解題過程：首先，設甲縣築袤為 y 尺，則甲縣築高為 $\frac{y\times 30}{66}$ 尺，甲縣築道上廣為 $18+\frac{y\times 6}{66}$ 尺，甲縣築積為 2375 × 1 . 98＝4702 . 5 立方尺。六因積為 4702 . 5 × 6＝28215 立方尺。從立方實為 $\frac{28215\times 66\times 66}{6\times 30}=\frac{28215\times 4356}{180}=\frac{122904540}{180}=682803$。都廉為 $\frac{3\times 18\times 66}{6}=\frac{54\times 66}{6}=\frac{3564}{6}=594$。隅法為 1。整理之後得三次方程式 $y^3+594y^2=682803$，做開帶從立方得 $y=33$。

所以我們得知：甲縣築袤＝33 尺＝3 丈 3 尺；高＝$\frac{33\times 30}{66}$＝15 尺＝1 丈 5 尺；上廣＝$18+\frac{33\times 6}{66}$＝21 尺＝2 丈 1 尺。

接著，設乙縣築袤為 z 尺，則乙縣築高為 $15+\frac{z\times 30}{66}$ 尺，乙縣築道上廣為 $21+\frac{z\times 6}{66}$ 尺，乙縣築積為 2378 × 1 . 98＝4708 . 44 立方尺。六因積為 4708 . 44 × 6＝28250 . 64 立方尺。從立方實為 $\frac{28250.64\times 66\times 66}{6\times 30}=\frac{28250.64\times 4356}{180}=\frac{123059787.84}{180}=683665.488$。垣方為 $\frac{(21+18)\times 3\times 15\times 66\times 66}{6\times 30}=\frac{39\times 3\times 15\times 4356}{180}=\frac{7644780}{180}=42471$。都廉為 $\frac{3\times 21\times 66}{6}=\frac{63\times 66}{6}=\frac{4158}{6}=693$。隅法為 1。整理之後得三次方程式 $z^3+693z^2+42471z=683665.488$，做開帶從立方得

[2] 引自李潢，《緝古算經考注》，郭書春主編，《中國科學技術典籍通彙》數學卷四(鄭州：河南教育出版社，1993 年)，頁 1255。

z＝13．2。

所以我們得知：乙縣築袤＝13．2 尺＝1 丈 3 尺 2 寸；高＝15＋ $\frac{13.2\times 30}{66}$ ＝ 21 尺＝2 丈 1 尺；上廣＝21＋ $\frac{13.2\times 6}{66}$ ＝22.2 尺＝2 丈 2 尺 2 寸。

最後，設丙縣築袤爲 w 尺，則丙縣築高爲 21＋ $\frac{w\times 30}{66}$ 尺，丙縣築道上廣爲 22．2＋ $\frac{w\times 6}{66}$ 尺，丙縣築積爲 5247 × 1．98＝10389．06 立方尺。六因積爲 10389．06 × 6＝62334．36 立方尺。從立方實爲 $\frac{62334.36\times 66\times 66}{6\times 30}$ ＝ $\frac{62334.36\times 4356}{180}$ ＝ $\frac{271528472.16}{180}$ ＝1508491．512。垣方爲 $\frac{(22.2+18)\times 3\times 21\times 66\times 66}{6\times 30}$ ＝ $\frac{40.2\times 3\times 21\times 4356}{180}$ ＝ $\frac{11032005.6}{180}$ ＝61288．92。都廉爲 $\frac{3\times 22.2\times 66}{6}$ ＝ $\frac{66.6\times 66}{6}$ ＝ $\frac{4395.6}{6}$ ＝732．6。隅法爲 1。整理之後得三次方程式 w^3＋732．6 w^2＋61288．92 w＝1508491．512，做開帶從立方得 w＝19．8。

所以我們得知：丙縣築袤＝19．8 尺＝1 丈 9 尺 8 寸；高＝21＋ $\frac{19.8\times 30}{66}$ ＝ 30 尺＝3 丈；上廣＝22．2＋ $\frac{19.8\times 6}{66}$ ＝24 尺＝2 丈 4 尺。

實際上，如果我們先把甲乙兩縣築積合在一起，模仿前術算出兩縣共同分派的築長，再減去分派給甲縣的築長，也可以得到乙縣的築長。[3]

4.2 第二術

假令穿河，袤一里二百七十六步，下廣六步一尺二寸；北頭深一丈八尺六寸，上廣十二步二尺四寸，南頭深二百四十一尺八寸，上廣八十六步四尺八寸。運土於河西岸造漘，北頭高二百二十三尺二寸，南頭無高；下廣四百六尺七寸五釐，袤與河同。甲郡二萬二千三百二十人，乙郡六萬八千七十六人，丙郡五萬九千九百八十五人，丁郡三萬七千九百四十四人。自穿、負、築，各人程功常積三尺七寸二分。限九十六日役河漘俱了。四郡分共造漘，其河自北頭先給甲郡，以次與乙，合均賦積尺。問逐郡各給斜、正袤、上廣及深，并漘上廣各多少？

答曰：漘上廣五丈八尺二寸一分。
甲郡正袤一百四十四丈，斜袤一百四十四丈三尺，上廣二十六丈四寸，深一十一丈一尺六寸。
乙郡正袤一百一十五丈二尺，斜袤一百一十五丈四尺四寸，上廣四十九丈九尺二

[3] 參閱林炎全，《《緝古算經》探討》(台中：教育部台灣省中等學校教師研習會，2001 年)，頁 17。

寸，深一十八丈六尺。
丙郡正袤五十七丈六尺，斜袤五十七丈七尺二寸，上廣四十八丈三尺六寸，深二十二丈三尺二寸。
丁郡正袤二十八丈八尺，斜袤二十八丈八尺六寸，上廣五十二丈八寸，深二十四丈一尺八寸。

4.2.1 求逐郡各給斜、正袤、上廣及深術

術曰：如築隄術入之。(自注：覆隄為河，彼注甚明。高深稍殊，程功是同，意可知也。按：彼注當作彼法，此係術下注語，誤置於此)。以程功乘甲郡人，又以限日乘之，四之，三而一，為積。又六因，以乘袤冪，以上廣差乘深差為法，除之，為實。又并小頭上、下廣，以乘小頭深，三之，為垣頭冪。又乘袤冪，以法除之，為垣方。三因小頭上廣，以乘正袤，以廣差除之，為都廉，從。開立方除之，即得小頭脫袤字為甲袤。求深、廣，以本袤及深廣差求之。以兩頭上廣差乘甲袤，以本袤除之，所得加小頭上廣，即甲上廣。以小頭深減南頭深，餘，以乘甲袤，以本袤除之，所得加小頭深，即甲深。又正袤自乘，深差自乘，并，而開方除之，即斜袤。若求乙、丙、丁，每以前大深、廣為後小深、廣，準甲求之，即得。

王孝通「術曰」中有提到「四之，三而一，為積」，這是《九章算術》商功篇第一問術曰中穿地與築土的比例。[4]另外，李潢在此補充說明：「穿河均積術各數兼言里步者，宜以里法步法通之方可入算，其并減乘數亦較他術為繁，今條列全形甲形於後。」筆者引數語如下：

里法三百步，步法六尺。河袤一里二百七十六步，通一里為三百步，并餘步得五百七十六步，以步法六尺通之，得三千四百五十六尺，即本袤也，自之得一一九四三九三六尺為本袤冪。下廣六步一尺二寸，通為三十七尺二寸，南北同。北上廣十二步二尺四寸，通為七四尺四寸，南上廣八十六步四尺八寸，通為五二○尺八寸，南北上廣差四四六尺四寸。北深一八尺六寸，南深二四一尺八寸，南北深差二二三尺二寸，南北上廣差南北深差相乘，得本差冪九九六三六尺四八。......[5]

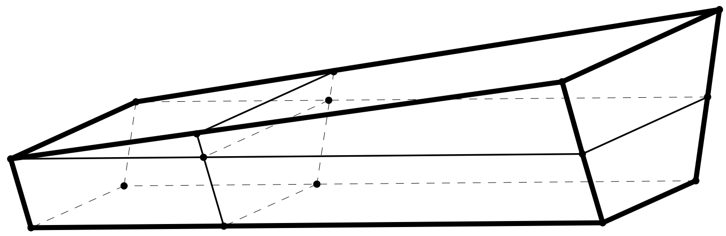


圖 4.2.1.1

首先，設甲袤為 x，甲郡負責體積為 $22320 \times 3.72 \times 96 \times \frac{4}{3} = 83030.4 \times 96$

[4] 參閱《九章算術》，郭書春、劉鈍點校，《算經十書》(台北：九章出版社，2001 年)，頁 129。
[5] 引自李潢，《緝古算經考注》，郭書春主編，《中國科學技術典籍通彙》數學卷四(鄭州：河南教育出版社，1993 年)，頁 1259。

$\times\frac{4}{3}$＝7970918 . 4 $\times\frac{4}{3}$＝$\frac{31883673.6}{3}$＝10627891 . 2 立方尺。模仿本章「求逐縣均給積尺受廣、袤術」，我們將得到以下結果：

1 平隄體積＋1 塹堵體積＋2 鼈臑體積＝甲縣負責的體積，

$\therefore\ \frac{(74.4+37.2)\times 18.6\times x}{2}+\frac{(241.8-18.6)\times x\times x\times 74.4}{2\times 3456}+$

$\frac{(241.8-18.6)\times x\times x\times(520.8-74.4)\times x}{6\times 3456\times 3456}$＝10627891 . 2，

$\therefore\ \frac{2075.76x}{2}+\frac{16606.08\times x\times x}{2\times 3456}+\frac{99636.48\times x\times x\times x}{6\times 3456\times 3456}$＝10627891 . 2，

$\therefore$ 6227 . 28x＋$\frac{49818.24\times x\times x}{3456}+\frac{99636.48\times x\times x\times x}{3456\times 3456}$＝63767347 . 2，

$\therefore$ x^3＋1728x^2＋746496x＝7644119040。

李潢根據王孝通術文的解題過程：設甲袤爲 x，甲郡負責體積爲 22320 × 3 . 72 × 96 ×$\frac{4}{3}$＝83030 . 4 × 96 ×$\frac{4}{3}$＝7970918 . 4 ×$\frac{4}{3}$＝$\frac{31883673.6}{3}$＝10627891 . 2 立方尺。六因積爲 10627891 . 2 × 6＝63767347 . 2 立方尺。從立方實爲 63767347 . 2 × $\frac{11943936}{99636.48}$＝$\frac{761633113846579.2}{99636.48}$＝7644119040。垣頭冪爲 (74 . 4＋37 . 2) × 18 . 6 × 3＝111 . 6 × 18 . 6 × 3＝2075 . 76 × 3＝6227 . 28。垣方爲 6227 . 28 × $\frac{11943936}{99636.48}$＝$\frac{74378233774.08}{99636.48}$＝746496。都廉爲$\frac{3\times 74.4\times 3456}{446.4}$＝$\frac{223.2\times 3456}{446.4}$＝$\frac{771379.2}{446.4}$＝1728。隅法爲 1。整理之後得三次方程式 x^3＋1728x^2＋746496x＝7644119040，做開帶從立方得 x＝1440。

所以我們得知：甲袤爲一千四百四十尺＝一百四十四丈。

4.2.2 求滑上廣術

求滑上廣術曰：以程功乘總人，又以限日乘之，為積。六因之，為實。以正袤除之，又以高除之。所得，以下廣減之，餘，又半之，即滑上廣。

劉衡在此補充說明：「此條係求堤滑上廣原文也，抄本止備原文而脫注釋，因依法以注之」。[6]現將劉衡補充注文抄錄於下：

并四郡共一十八萬八千三百二十五人，以程功尺每人三尺七寸二分乘之得七OO五六九尺，又以限日九六乘之得六七二五四六二四尺為堤積，六因之得四O三五二七七四四尺為實，以正袤三四五六尺除之得一一六七六一尺五，又以高二二三尺二除之得五二三尺一二五為倍上廣、一下廣共數，內減下廣四O六尺七O

[6] 引自李潢，《緝古算經考注》，郭書春主編，《中國科學技術典籍通彙》數學卷四(鄭州：河南教育出版社，1993 年)，頁 1262。

五餘一一六尺四二，半之五丈八尺二寸一分為滑上廣。[7]

劉衡補充注文的解題過程：四郡人數總共爲 22320＋68076＋59985＋37944＝188325 人。以每人每日工作量乘之得 3 . 72 × 188325＝700569 立方尺。又以工期乘之得 96 × 700569＝67254624 立方尺爲堤積。六因之得 6 × 67254624＝403527744 立方尺爲實。以正袤除之得 $\frac{403527744}{3456}$ ＝116761 . 5 平方尺。又以高除之得 $\frac{116761.5}{223.2}$ ＝523 . 125 尺。減去下廣得 523 . 125－406 . 705＝116 . 42 尺。半之得 $\frac{116.42}{2}$ ＝58 . 21 尺爲滑上廣。

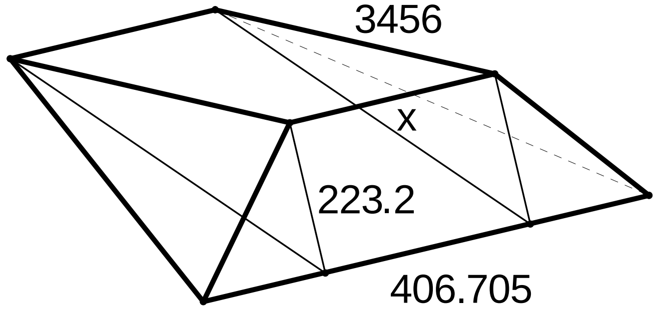


圖 4.2.2.1

我們模仿第三章「求羨道廣袤高術」，將得到相同的結果：

1 塹堵體積＋2 鼈臑體積＝滑的體積，設上袤爲 x，

$\frac{3456\times 223.2\times x}{2}+\frac{(406.705-x)\times 3456\times 223.2}{6}$ ＝(22320＋68076＋59985＋37944) × 3 . 72 × 96，

∴ $\frac{3456\times 223.2\times x}{2}+\frac{(406.705-x)\times 3456\times 223.2}{6}$ ＝67254624，

∴ 3 × 3456 × 223 . 2 × x＋(406 . 705－x) × 3456 × 223 . 2＝403527744，

∴ 3 × 223 . 2 × x＋(406 . 705－x) × 223 . 2＝116761 . 5，

∴ 3 x＋(406 . 705－x)＝523 . 125，

∴ 2 x＋406 . 705＝523 . 125，

∴ 2 x＝116 . 42，

∴ x＝58 . 21。

4.3 第三術

假令四郡輸粟，斛法二尺五寸。一人作功為均，自上給甲，以次與乙、丙、丁。其甲郡輸粟三萬八千七百四十五石六斗，乙郡輸粟三萬四千九百五石六斗，丙郡輸粟二萬六千二百七十石四斗，丁郡輸粟一萬四千七十八石四斗。四郡共穿

[7] 引自李潢，《緝古算經考注》，郭書春主編，《中國科學技術典籍通彙》數學卷四(鄭州：河南教育出版社，1993 年)，頁 1262。

窖，上袤多於上廣一丈，少於下袤三丈，多於深六丈，少於下廣一丈。各計粟多少均出丁夫。自穿、負、築，冬程人功常積一十二尺，一日役。問窖上、下廣、袤、深，郡別出人及窖深、廣各多少？

答曰：窖上廣八丈，上袤九丈，下廣一十丈，下袤一十二丈，深三丈。
甲郡八千七十二人，深一十二尺，下袤一十丈二尺，廣八丈八尺。
乙郡七千二百七十二人，深九尺，下袤一十一丈一尺，廣九丈四尺。
丙郡五千四百七十三人，深六尺，下袤一十一丈七尺，廣九丈八尺。
丁郡二千九百三十三人，深三尺，下袤一十二丈，廣一十丈。

4.3.1 求窖深、廣、袤術

求窖深、廣、袤術曰：以斛法乘總粟為積尺。又廣差乘袤差，三而一，為隅陽冪。乃置截上廣，半廣差加之，以乘截上袤，為隅頭冪。又半袤差乘截上廣，以隅陽冪及隅頭冪加之，為方法。又置截上袤及截上廣，并之，為大廣。又并廣差及袤差，半之，以加大廣，為廉法，從。開立方除之，即深。各加差，即合所問。

我們模仿第三章「求仰觀臺上下廣袤高術」，先假設窖深爲 x 丈，則上袤爲 x＋6 丈，上廣爲 x＋5 丈，下袤爲 x＋9 丈，下廣爲 x＋7 丈。窖的體積爲 2 . 5 × (38745 . 6＋34905 . 6＋26270 . 4＋14078 . 4)＝2 . 5 × 114000＝285000 立方尺＝285 立方丈。

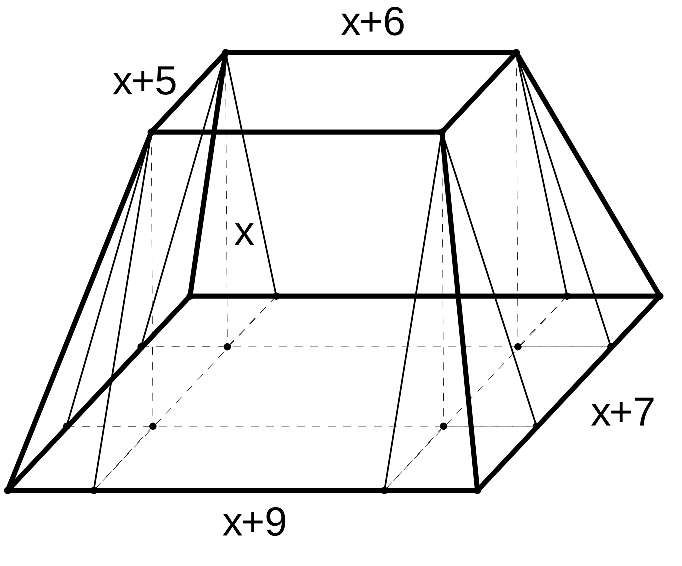


圖 4.3.1.1

於是，我們得到一個中央立方體積＝(x＋5)x(x＋6)＝x^3＋$5x^2$＋$6x^2$＋30x。

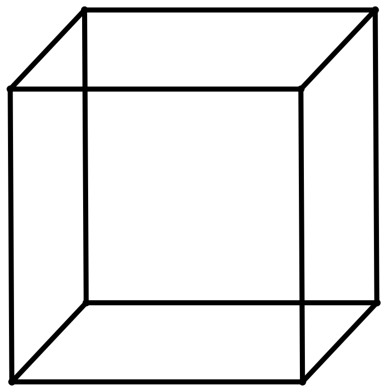


圖 4.3.1.2

接著，我們得到二個短塹堵體積＝$2\times\frac{1}{2}\times\frac{[(x+9)-(x+6)]}{2}\times(x+5)\times x=\frac{3}{2}x(x+5)=\frac{3}{2}x^2+\frac{15}{2}x$。

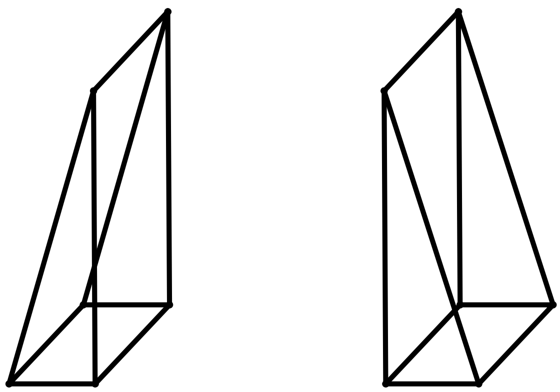


圖 4.3.1.3

再來，我們得到二個長塹堵體積＝$2\times\frac{1}{2}\times\frac{[(x+7)-(x+5)]}{2}\times(x+6)\times x=x(x+6)=x^2+6x$。

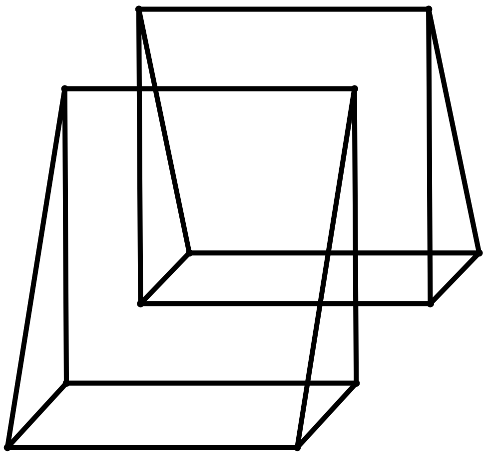


圖 4.3.1.4

最後，我們得到四個陽馬體積＝$4\times\frac{1}{3}\times\frac{[(x+9)-(x+6)]}{2}\times\frac{[(x+7)-(x+5)]}{2}\times x$ ＝2x。

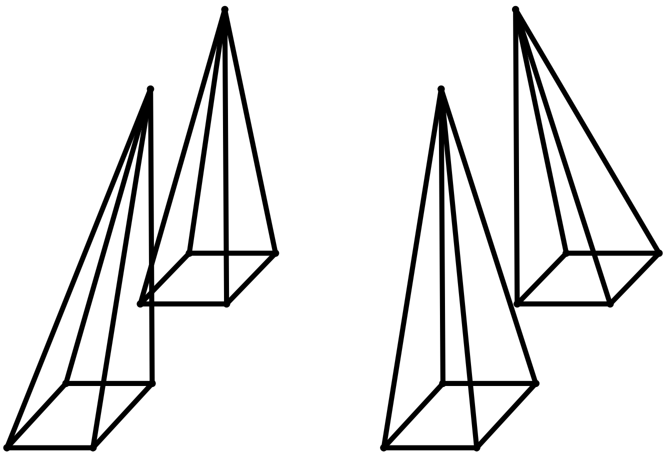


圖 4.3.1.5

綜合以上圖形和數學算式，我們將得到以下結果：

1 中央立方體積＋2 短塹堵體積＋2 長塹堵體積＋4 陽馬體積＝窖的體積，

$\therefore (x^3+5x^2+6x^2+30x)+(\frac{3}{2}x^2+\frac{15}{2}x)+(x^2+6x)+2x=285$，

$\therefore x^3+\frac{27}{2}X^2+\frac{91}{2}x=285$。

李潢根據王孝通術文的解題過程：設窖深爲 x 丈，則上袤爲 x＋6 丈，上廣爲 x＋5 丈，下袤爲 x＋9 丈，下廣爲 x＋7 丈。實爲 2 . 5 × (38745 . 6＋34905 . 6＋26270 . 4＋14078 . 4)＝2 . 5 × 114000＝285000 立方尺＝285 立方丈。隅陽冪爲 $\frac{[(x+9)-(x+6)]\times[(x+7)-(x+5)]}{3}=\frac{3\times2}{3}$ ＝2 平方丈＝200 平方尺。隅頭冪爲

$\{[(x+5)-x]+\frac{[(x+7)-(x+5)]}{2}\}\times[(x+6)-x]=6\times6=36$ 平方丈＝3600 平方尺。方法爲 $\frac{[(x+9)-(x+6)]}{2}\times[(x+5)-x]+2+36=\frac{91}{2}$ 平方丈＝4550 平方尺。大廣爲 $[(x+6)-x]+[(x+5)-x]=11$ 丈＝110 尺。廉法爲 $\frac{[(x+7)-(x+5)]+[(x+9)-(x+6)]}{2}+11=\frac{27}{2}$ 丈＝135 尺。隅法爲 1。y^3 項係數稱爲隅法，y^2 項係數稱爲廉法，y 項係數稱爲方法，常數項稱爲實，整理之後得三次方程式 $y^3+135y^2+4550y=285000$，做開帶從立方得 $y=30$。

李潢在最後加入了自己的驗算過程：$[(30+135)\times30+4550]\times30=(165\times30+4550)\times30=(4950+4550)\times30=9500\times30=285000$，以表示此答案正確無誤。所以我們得知：窖深 30 尺＝3 丈，上廣 3＋5＝8 丈，上袤 3＋6＝9 丈，下廣 3＋7＝10 丈，下袤 3＋9=12 丈。

4.3.2 求均給積尺受廣、袤、深術

求均給積尺受廣、袤、深術曰：如築臺術入之。以斛法乘甲郡輸粟為積尺。又三因，以深冪乘之，以廣差乘袤差而一，為實。深乘上廣，廣差而一，為上廣之高。深乘上袤，袤差而一，為上袤之高。上廣之高乘上袤之高，三之，為方法。又并兩高，三之，二而一，為廉法，從。開立方除之，即甲深。以袤差乘之，以本深除之，所得加上袤，即甲下袤。以廣差乘之，本深除之，所得加上廣，即甲下廣。若求乙、丙、丁，每以前下廣、袤為後上廣、袤。以次皆準此求之，即得。若求人數，各以程功約當郡積尺。

李潢在此補充說明：「如築隄術隄當作臺。」[8]

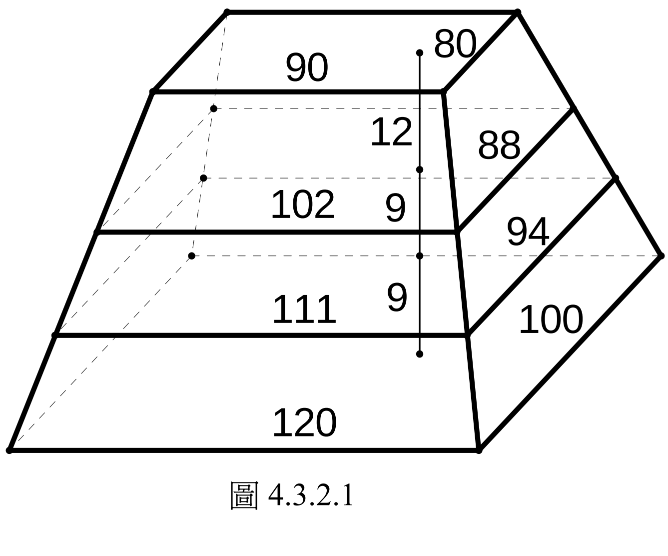


圖 4.3.2.1

李潢根據王孝通術文的解題過程：甲郡負責體積爲 2 . 5 × 38745 . 6＝96864

[8] 引自李潢，《緝古算經考注》，郭書春主編，《中國科學技術典籍通彙》數學卷四(鄭州：河南教育出版社，1993 年)，頁 1265。

立方尺。實爲 $\frac{3\times96864\times30\times30}{20\times30}=\frac{290592\times900}{600}=\frac{261532800}{600}=435888$ 立方尺。上廣之高爲 $\frac{30\times80}{20}=\frac{2400}{20}=120$ 尺。上袤之高爲 $\frac{30\times90}{30}=\frac{2700}{30}=90$ 尺。方法爲 $3\times120\times90=32400$ 平方尺。廉法爲 $\frac{(120+90)\times3}{2}=\frac{630}{2}=315$ 尺。隅法爲 1。整理之後得三次方程式 $x^3+315x^2+32400x=435888$，做開帶從立方得 $x=12$。

所以我們得知：甲郡出 $\frac{96864}{12}=8072$ 人，負責深 12 尺，下袤 $\frac{12\times30}{30}+90=102$ 尺＝10 丈 2 尺，下廣 $\frac{12\times20}{30}+80=88$ 尺＝8 丈 8 尺。

乙郡負責體積爲 $2.5\times34905.6=87264$ 立方尺。從立方實爲 $\frac{3\times87264\times30\times30}{20\times30}=\frac{261792\times900}{600}=\frac{235612800}{600}=392688$ 立方尺。上廣之高爲 $\frac{30\times88}{20}=\frac{2640}{20}=132$ 尺。上袤之高爲 $\frac{30\times102}{30}=\frac{3060}{30}=102$ 尺。方法爲 $3\times132\times102=40392$ 平方尺。廉法爲 $\frac{(132+102)\times3}{2}=\frac{702}{2}=351$ 尺。隅法爲 1。整理之後得三次方程式 $x^3+351x^2+40392x=392688$，做開帶從立方得 $x=9$。

所以我們得知：乙郡出 $\frac{87264}{12}=7272$ 人，負責深 9 尺，下袤 $\frac{9\times30}{30}+102=111$ 尺＝11 丈 1 尺，下廣 $\frac{9\times20}{30}+88=94$ 尺＝9 丈 4 尺。

求丙、丁法倣此。

4.4 第四術

假令亭倉，上小、下大。上下方差六尺，高多上方九尺，容粟一百八十七石二斗。今已運出五十石四斗。問倉上、下方、高及餘粟深、上方各多少？

答曰：上方三尺，下方九尺，高一丈二尺。餘粟深、上方俱六尺。

4.4.1 求倉方、高術

求倉方、高術曰：以斛法乘容粟為積尺。又方差自乘，三而一，為隅陽冪。以乘截高，以減積，餘為實。又方差乘截高，加隅陽冪，為方法。又置方差，加截高，為廉法，從。開立方除之，即上方。加差，即合所問。

李潢依據《九章算術》商功篇的古法，[9]將亭倉切割成一個中央立方、四個

[9] 參閱《九章算術》，郭書春、劉鈍點校，《算經十書》(台北：九章出版社，2001 年)，頁 132。

塹堵和四個陽馬。首先，我們先假設上方 x 尺，則下方 x＋6 尺，高 x＋9 尺。容粟體積爲 2 . 5 × 187 . 2＝468 立方尺。

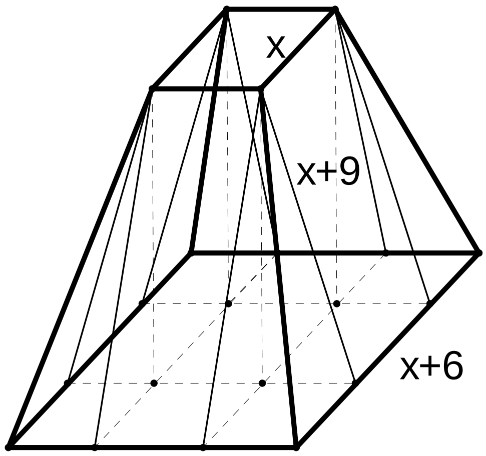


圖 4.4.1.1

於是，我們得到一個中央立方體積＝$x \times x \times (x+9) = x^3 + 9x^2$。

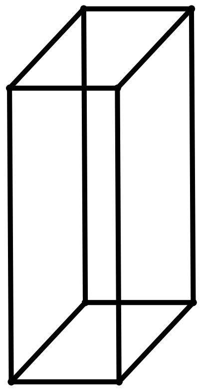


圖 4.4.1.2

接著，我們得到四個塹堵體積＝$4 \times \frac{1}{2} \times \frac{[(x+6)-x]}{2} \times x \times (x+9) = 6x(x+9) = 6x^2 + 54x$。

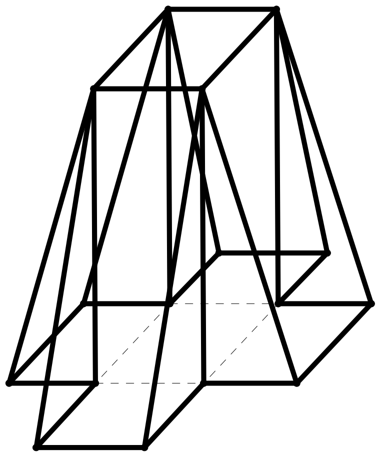


圖 4.4.1.3

再來，我們得到四個陽馬體積＝$4\times\frac{1}{3}\times\frac{[(x+6)-x]}{2}\times\frac{[(x+6)-x]}{2}\times(x+9)=$ $12(x+9)=12x+108$。

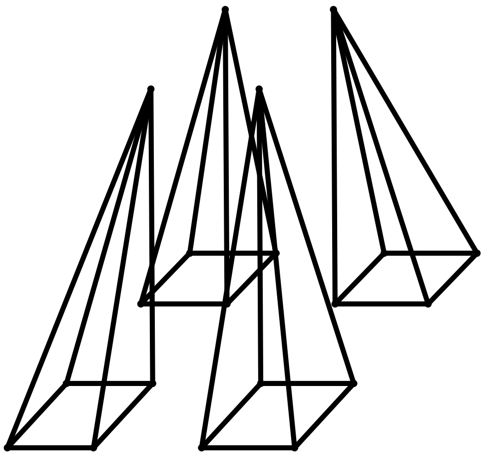


圖 4.4.1.4

綜合以上圖形和數學算式，我們將得到以下結果：

1 中央立方體積＋4 塹堵體積＋4 陽馬體積＝容粟體積，

$\therefore (x^3+9x^2)+(6x^2+54x)+(12x+108)=468$，

$\therefore x^3+15x^2+66x=360$。

依據「九章方亭術曰：上下方相乘，又各自乘，并之，以高乘之，三而一。」[10]我們可以得到相同的結果：

$$\frac{[x\times x+x(x+6)+(x+6)(x+6)](x+9)}{3}=468，$$

$\therefore (x^2+6x+12)(x+9)=468$，

[10] 引自《九章算術》，郭書春、劉鈍點校，《算經十書》(台北：九章出版社，2001 年)，頁 132。

$\therefore x^3+15x^2+66x=360$。

李潢根據王孝通術文的解題過程：容粟體積為 $2.5\times 187.2=468$ 立方尺。隅陽冪為 $\frac{6\times 6}{3}=12$ 平方尺。實為 $468-12\times 9=468-108=360$ 立方尺。方法為 $6\times 9+12=66$ 平方尺。廉法為 $6+9=15$ 尺。隅法為 1。整理之後得三次方程式 $x^3+15x^2+66x=360$，做開帶從立方得 $x=3$。

所以我們得知：上方 3 尺，下方 $3+6=9$ 尺，高 $3+9=12$ 尺 $=1$ 丈 2 尺。

4.4.2 求餘粟高及上方術

求餘粟高及上方術曰：以斛法乘出粟，三之，以乘高冪，令方差冪而一，為實。(自注：此是大、小高各自乘，又相乘，各乘取高。是大高者，即是取高與小高并。潢按：是大高者之是當作凡)。高乘上方，方差而一，為小高。令自乘，三之，為方法。三因小高，為廉法，從。開立方除之，得取出高。以減本高，餘即殘粟高。置出粟高，又以方差乘之，以本高除之，所得加上方，即餘粟上方。

自注：此本術曰：上下方相乘，又各自乘，并，以高乘之，三而一。今還元，三之，又高冪乘之，差冪而一，得大小高相乘，又各自乘之數。何者？若高乘下方，方差而一，得大高也。若高乘上方，方差而一，得小高也。然則斯本下方自乘，故須高脫冪字乘之，差自乘而一，即得大高自乘之數。小高亦然。凡大高者，即是取高於當作與小高并，相連。今大高自乘為大方。大方之內即有取高自乘冪一，隅頭小高自乘冪一，又其兩邊各有以取高乘小高為冪二。又大小高相乘為中方。中方之內即有小高乘取高冪一，又小高自乘即是小方之冪又一。則小高乘大高，又各自乘三等冪，皆以乘取高為立積。故三因小冪為方，及三小高為廉也。

李潢認為王孝通「自注」有脫文和錯誤的地方，因此，「今俱校補於後」：

此本術曰：上下方相乘，又各自乘，并，以高乘之，三而一。今還元，三之，又高冪乘之，差冪而一，得大小高相乘，又各自乘之數。何者？若高乘下方，方差而一，得大高也。若高乘上方，方差而一，得小高也。然則斯本下方自乘，故須高冪乘之，差自乘而一，即得大高自乘之數。小高亦然。若上下方相乘，高冪乘之，差自乘而一，即得大小高相乘之數也。凡大高者，即是取高與小高并，相連。今大高自乘為大方。大方之內即有取高自乘冪一，隅頭小高自乘冪一，又其兩邊各有以取高乘小高為冪二。又大小高相乘為中方。中方之內有小高自乘冪一，即有小高乘取高冪一，又小高自乘為小方，即是小方之冪又一。則小高乘大高，又各自乘三等冪，皆以乘取高為立積。故三因小冪為方，及三小高為廉也。

首先，我們先假設出粟深 x 尺，則出粟下方 $\frac{6x}{12}+3=\frac{x}{2}+3$ 尺。出粟體積為 $2.5\times 50.4=126$ 立方尺。

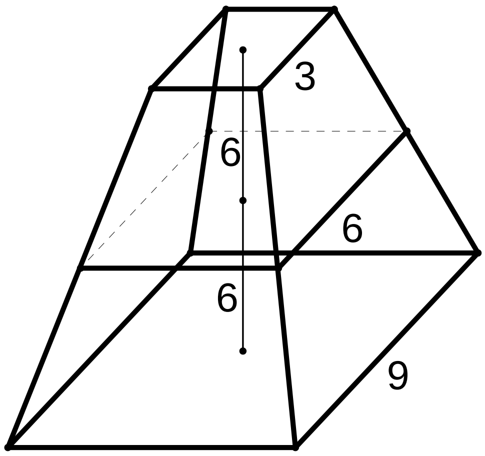


圖 4.4.2.1

模仿前術，我們將得到以下結果：

1 中央立方體積＋4 塹堵體積＋4 陽馬體積＝出粟體積，

$\therefore \frac{1}{12}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 9x = 126$，

$\therefore x^3 + 18x^2 + 108x = 1512$。

依據「九章方亭術曰：上下方相乘，又各自乘，并之，以高乘之，三而一。」[11]我們可以得到相同的結果：

$$\frac{\left[3\times 3+3\left(\frac{x}{2}+3\right)+\left(\frac{x}{2}+3\right)\left(\frac{x}{2}+3\right)\right]x}{3} = 126，$$

$\therefore (\frac{1}{4}x^2 + \frac{9}{2}x + 27)x = 378$，

$\therefore \frac{1}{4}x^3 + \frac{9}{2}x^2 + 27x = 378$，

$\therefore x^3 + 18x^2 + 108x = 1512$。

李潢根據王孝通術文的解題過程：出粟體積爲 $2.5 \times 50.4 = 126$ 立方尺。從立方實爲 $\frac{126\times 3\times 12\times 12}{6\times 6} = \frac{54432}{36} = 1512$ 立方尺。小高爲 $\frac{12\times 3}{6} = 6$ 尺。方法爲 $6 \times 6 \times 3 = 108$ 平方尺。廉法爲 $6 \times 3 = 18$ 尺。隅法爲 1。整理之後得三次方程式 $x^3 + 18x^2 + 108x = 1512$，做開帶從立方得 $x = 6$。

所以我們得知：餘粟深 $12 - 6 = 6$ 尺，餘粟上方 $\frac{6\times 6}{12} + 3 = 6$ 尺。

[11] 引自《九章算術》，郭書春、劉鈍點校，《算經十書》(台北：九章出版社，2001 年)，頁 132。

4.5 第五術

假令芻甍上袤三丈，下袤九丈，廣六丈，高一十二丈。有甲縣六百三十二人，乙縣二百四十三人。夏程人功常積三十六尺，限八日役。自穿、築，二縣共造。今甲縣先到，問自下給高、廣、袤各多少？

答曰：高四丈八尺，上廣三丈六尺，袤六丈六尺。

求甲縣均給積尺受廣、袤術曰：以程功乘乙縣人數，又以限日乘之，為積尺。以六因之，又高冪乘之，又袤差乘廣而一，所得，又半之為實。高乘上袤，袤差而一，為上袤之高。三因上袤之高，半之，為廉法，從。開立方除之，得乙高。以減甍高，餘即甲高。求廣、袤，依率求之。

自注：此乙積本倍下袤，上袤從之，以下廣及高乘之，六而一，為一甍積。今還元，須六因之，以高冪乘之，為實。乘乘字衍文袤差乘廣而一，得取高自乘。以乘二上袤之高當作以乘上袤之高者三，并大廣袤相連之數此句衍文，則三小高為廉法，各以取高為方。仍有取高為立方者當作為立方者二，故半之為立方一，又須半廉法。

李潢依據《九章算術》商功篇的古法，[12]將芻甍切割成二個塹堵和四個陽馬。所以，得到下列結果：

$$芻甍體積＝2\ 塹堵體積＋4\ 陽馬體積＝\frac{3\times6\times12}{2}+\frac{(9-3)\times6\times12}{3}＝108＋144$$
$$＝252\ 立方丈。$$

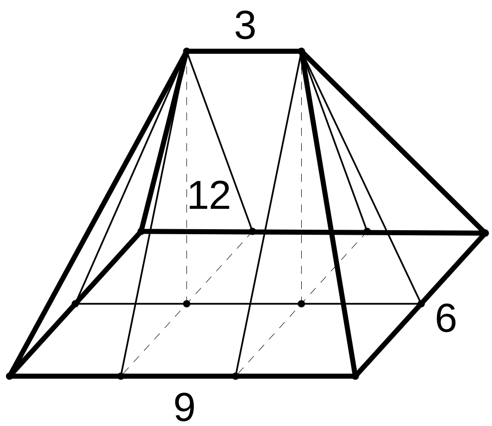


圖 4.5.1

依據「九章芻甍術曰：倍下袤，上袤從之，以廣乘之，又以高乘之，六而一。」[13]我們可以得到相同的結果：

[12] 參閱《九章算術》，郭書春、劉鈍點校，《算經十書》(台北：九章出版社，2001 年)，頁 135。
[13] 引自《九章算術》，郭書春、劉鈍點校，《算經十書》(台北：九章出版社，2001 年)，頁 135。

芻甍體積 $=\dfrac{(2\times 9+3)\times 6\times 12}{6}=\dfrac{1512}{6}=252$ 立方丈。

接下來，我們算出上袤之高爲 $\dfrac{3\times 12}{6}=6$ 丈。設乙縣高爲 x 丈，則下袤爲 $\dfrac{3(x+6)}{6}=\dfrac{x}{2}+3$ 丈，下廣爲 $\dfrac{6x}{12}=\dfrac{x}{2}$ 丈。乙縣負責體積爲 243 × 36 × 8＝8748 × 8＝69984 立方尺＝69 . 984 立方丈。

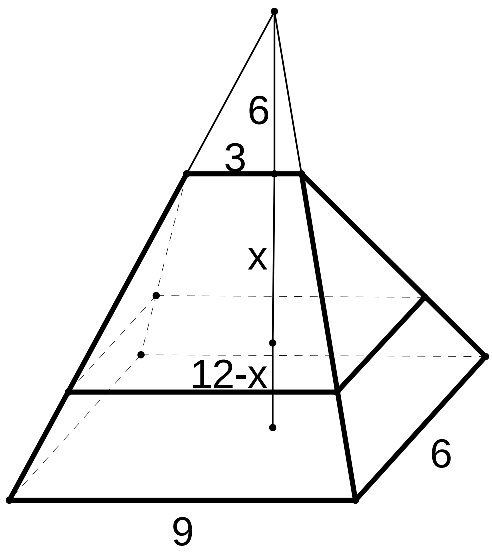


圖 4.5.2

模仿前術，我們將得到以下結果：

$$\dfrac{\left[2\left(\dfrac{x}{2}+3\right)+3\right]\times\dfrac{x}{2}\times x}{6}=69\ .\ 984\text{，}$$

$\therefore\ (x+9)\times\dfrac{1}{2}x^2=419\ .\ 904$，

$\therefore\ \dfrac{1}{2}x^3+\dfrac{9}{2}x^2=419\ .\ 904$，

$\therefore\ x^3+9x^2=839\ .\ 808$，

做開帶從立方得 $x=7\ .\ 2$。

所以我們得知：乙縣高爲 7 . 2 丈＝72 尺。

李潢根據王孝通術文的解題過程：乙縣負責體積爲 243 × 36 × 8＝8748 × 8＝69984 立方尺。從立方實爲 $\dfrac{69984\times 6\times 120\times 120}{60\times 60\times 2}=\dfrac{419904\times 14400}{3600\times 2}=\dfrac{6046617600}{3600\times 2}=\dfrac{1679616}{2}=839808$ 立方尺。上袤之高爲 $\dfrac{3\times 12}{6}=6$ 丈＝60 尺。

廉法爲 $\frac{3\times 6}{2}$ ＝9 丈＝90 尺。隅法爲 1。整理之後得三次方程式 $y^3+90y^2=839808$，做開帶從立方得 $y=72$。

李潢在最後加入了自己的驗算過程：$(72\times 1+90)\times 72\times 72=162\times 72\times 72=11664\times 72=839808$，以表示此答案正確無誤。所以我們得知：乙縣高爲 72 尺＝7.2 丈，甲縣高爲 120－72＝48 尺＝4.8 丈，甲縣上袤＝乙縣下袤＝$\frac{7.2}{2}+3$＝6.6 丈＝6 丈 6 尺，甲縣上廣＝乙縣下廣＝$\frac{7.2}{2}$＝3.6 丈＝3 丈 6 尺。

4.6 第六術

假令圓囤上小、下大。斛法二尺五寸。以率徑一，周三。上、下周差一丈二尺，高多上周一丈八尺。容粟七百五斛六斗。今已運出二百六十六石四斗。問殘粟去口上、下周、高，各多少？

答曰：上周一丈八尺，下周三丈，高三丈六尺。去口一丈八尺，粟周二丈四尺。

4.6.1 求圓囤上、下周及高術

求圓囤上、下周及高術曰：以斛法乘容粟，又三十六乘之，三而一，為方亭之積。又以周差自乘，三而一，為隅陽冪。以乘截高，以減亭積，餘為實。又周差乘截高，加隅陽冪，為方法。又以周差加截高，為廉法，從。開立方除之，得上周。加差，而合所問。

首先，我們先假設上周 x 尺，則下周 x＋12 尺，高 x＋18 尺。圓亭體積爲 2.5 × 705.6＝1764 立方尺。

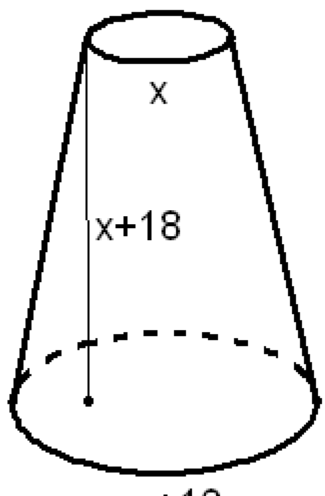


圖 4.6.1.1

依據「九章圓亭術曰：上、下周相乘，又各自乘，并之，以高乘之，三十六而一。」[14]我們可以得到下列的結果：

$$\frac{[x\times x+x(x+12)+(x+12)(x+12)]\times(x+18)}{36}=1764，$$

$\therefore (3x^2+36x+144)(x+18)=63504$，
$\therefore (x^2+12x+48)(x+18)=21168$，
$\therefore x^3+30x^2+264x+864=21168$，
$\therefore x^3+30x^2+264x=20304$。

李潢根據王孝通術文的解題過程：方亭體積為$\frac{2.5\times705.6\times36}{3}=\frac{1764\times36}{3}=\frac{63504}{3}=21168$立方尺。隅陽冪為$\frac{12\times12}{3}=48$平方尺。從立方實為$21168-48\times18=21168-864=20304$立方尺。方法為$12\times18+48=216+48=264$平方尺。廉法為$12+18=30$尺。隅法為1。整理之後得三次方程式$x^3+30x^2+264x=20304$，做開帶從立方得$x=18$。

所以我們得知：上周18尺＝1丈8尺，下周18＋12＝30尺＝3丈，高18＋18＝36尺＝3丈6尺。

這一術主要是討論圓亭，但「術曰」中卻是使用方亭的算法。李潢在此補充說明：「三十六乘一圓亭，得二十七方亭，以九為一，作三方亭算之，亦同作徑算也。以三方亭算之，乃上徑十八尺，下徑三十尺，高三十六尺之積，而三因之者。」。[15]題目中有出現「以率徑一，周三」的敘述，可見王孝通是假設圓周率為3，與劉徽在《九章算術》商功篇中的注釋不同。[16]

4.6.2 求粟去口術

求粟去口術曰：以斛法乘出粟，三十六乘之，以乘高冪，如周差冪而一，為實。高乘上周，周差而一，為小高。令自乘，三之，為方法。三因小高，為廉法，從。開立方除之，即去口。(自注：三十六乘訖，即是截方亭。之前方窖不別。按：之當作與)。置去口，以周差乘之，以本高除之，所所下脫得字加上周，即粟周。

首先，我們按照李潢的補充說明：「置去口，以周差乘之，以本高除之，所得加上周，即粟周。亦句股比例，本高為股，周差為句，去口為股，所得為句。」[17]假設粟去口高 x 尺，則粟周$\frac{12x}{36}+18=\frac{x}{3}+18$尺。出粟體積為$2.5\times266.4=$

[14] 引自《九章算術》，郭書春、劉鈍點校，《算經十書》(台北：九章出版社，2001年)，頁132。
[15] 引自李潢，《緝古算經考注》，郭書春主編，《中國科學技術典籍通彙》數學卷四(鄭州：河南教育出版社，1993年)，頁1271－1272。
[16] 劉徽注：「上、下周相乘，又各自乘，并之，以高乘之，又二十五乘之，九百四十二而一。」我們可以推算出圓周率為157/50＝3.14。
[17] 引自李潢，《緝古算經考注》，郭書春主編，《中國科學技術典籍通彙》數學卷四(鄭州：河南教育出版社，1993年)，頁1272。

666 立方尺。

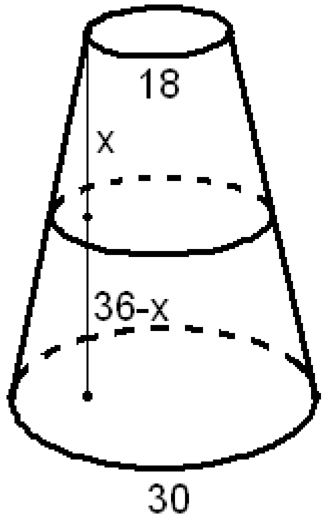


圖 4.6.2.1

依據「九章圓亭術曰：上、下周相乘，又各自乘，并之，以高乘之，三十六而一。」[18]我們可以得到下列的結果：

$$\frac{\left[18\times18+18\left(\frac{x}{3}+18\right)+\left(\frac{x}{3}+18\right)\left(\frac{x}{3}+18\right)\right]\times x}{36}=666，$$

$\therefore (\frac{1}{9}x^2+18x+972)x=23976$，

$\therefore \ \frac{1}{9}x^3+18x^2+972x=23976$，

$\therefore x^3+162x^2+8748x=215784$。

李潢根據王孝通術文的解題過程：出粟體積爲 $2.5\times266.4=666$ 立方尺。從立方實爲 $\frac{666\times36\times1296}{144}=\frac{23976\times1296}{144}=\frac{31072896}{144}=215784$ 立方尺。小高爲 $\frac{36\times18}{12}=54$ 尺。方法爲 $54\times54\times3=2916\times3=8748$ 平方尺。廉法爲 $54\times3=162$ 尺。隅法爲 1。整理之後得三次方程式 $x^3+162x^2+8748x=215784$，做開帶從立方得 $x=18$。

所以我們得知：粟去口高 18 尺＝1 丈 8 尺，粟周 $\frac{12\times18}{36}+18=6+18=24$ 尺＝2 丈 4 尺。

王孝通在「術曰」中所稱的「小高」，是給一個稍微複雜而又重複使用的算式特別的稱呼，功用同之前所稱的「隅陽冪」、「隅陽截積」、「隅頭冪」、「隅頭截

[18] 引自《九章算術》，郭書春、劉鈍點校，《算經十書》(台北：九章出版社，2001 年)，頁 132。

積」和「正數」等，是補救未能符號化的權宜之計。[19]

4.7 第七術

假令有粟二萬三千一百二十斛七斗三升。欲作方倉一、圓窖一，盛各滿中，而粟適盡。令高、深等，使方面少於圓徑九寸，多於高二丈九尺八寸。率：徑七、周二十二。問方、徑、深各多少？

答曰：倉方四丈五尺三寸。窖徑四丈六尺二寸。高與深各一丈五尺五寸。

求方徑高、深術曰：十四乘斛法，以乘粟數，二十五而一，為實。又倍多加少，以乘少數，又十一乘之，二十五而一。多自乘加之，為方法。又倍少數，十一乘之，二十五而一，又倍多加之，為廉法，從。開立方除之，即高、深。各加差，即方、徑。

自注：一十四乘斛法，以乘粟，為積尺。前一十四除，今還元，一十四乘。為徑自乘者是一十一，方自乘者是一十四，故并之為二十五。凡此方圓二徑長短不同，二徑各自乘為方按：此方即方冪，大小各別。然則此截方二丈九尺八寸、截徑三丈七寸皆成立方按：立方當作方面。此應截方自乘一十四乘之，截徑自乘一十一乘之，二十五而一，為隅冪，即方法也。但二隅方按：方當作冪皆以截數為方面。今此術就省，倍小隅方按：此方即方面，術文倍多是也加差按：差即術所云少為短按：短當作矩，以差乘之為短按：亦當作矩冪。一十一乘之，二十五而一。又差自乘之數即是方圓之隅，同有此數。若二十五乘之，還須二十五除。直以小隅方自乘加之按：此下脫為方法三字，故不復乘除。又須當作直倍二廉之差，一十一乘之，二十五而一，倍二廉按：當作小廉加之，故按：故字衍文為廉法，不復二十五乘除之也。

首先，我們先假設倉高 x 尺，窖深 x 尺，則倉方 x＋29．8 尺，圓徑 x＋29．8＋0．9＝x＋30．7 尺。容粟體積爲 2．5 × 23120．73＝57801．825 立方尺。根據題目意思，我們得到下列結果：

$$(x+29.8)^2x+\left(\frac{x+30.7}{2}\right)^2\times\frac{22}{7}x=57801.825,$$

$$\therefore (x^2+59.6x+888.04)x+\frac{1}{4}(x^2+61.4x+942.49)\times\frac{22}{7}x=57801.825,$$

$$\therefore (x^3+59.6x^2+888.04x)+\frac{11}{14}(x^3+61.4x^2+942.49x)=57801.825,$$

$$\therefore (14x^3+834.4x^2+12432.56x)+(11x^3+675.4x^2+10367.39x)=809225.55,$$

$$\therefore 25x^3+1509.8x^2+22799.95x=809225.55,$$

$$\therefore x^3+60.392x^2+911.998x=32369.022,$$

做開帶從立方得 x＝15．5。

[19] 參閱林炎全，《《緝古算經》探討》(台中：教育部台灣省中等學校教師研習會，2001 年)，頁 25。

所以我們得知：倉高 15 . 5 尺，窖深 15 . 5 尺，則倉方 15 . 5＋29 . 8＝45 . 3 尺，圓徑 15 . 5＋30 . 7＝46 . 2 尺。

李潢根據王孝通術文的解題過程：從立方實為 $\dfrac{2500\times14\times23120.73}{25}=\dfrac{35000\times23120.73}{25}=\dfrac{809225550}{25}$＝32369022 立方寸。方法為 $\dfrac{(2\times298+9)\times9\times11}{25}+298^2=\dfrac{605\times9\times11}{25}+298^2=\dfrac{59895}{25}+298^2$＝2395 . 8＋88804＝91199 . 8 平方寸。廉法為 $\dfrac{2\times9\times11}{25}+2\times298=\dfrac{198}{25}+596$＝7 . 92＋596＝603 . 92 寸。隅法為 1。整理之後得三次方程式 y^3＋603 . 92y^2＋91199 . 8y＝32369022，做開帶從立方得 y＝155。

李潢在最後加入了自己的驗算過程：$155^3+155^2\times$ 603 . 92＋155 × 91199 . 8 ＝3723875＋14509178＋14135969＝32369022，以表示此答案正確無誤。所以我們得知：倉高 155 寸＝1 丈 5 尺 5 寸，窖深 155 寸＝1 丈 5 尺 5 寸，倉方 155＋298＝453 寸＝4 丈 5 尺 3 寸，圓徑 155＋307＝462 寸＝4 丈 6 尺 2 寸。

還元術曰：倉方自乘，以高乘之，為實。圓徑自乘，以深乘之，一十一乘，一十四而一，為實。皆以斛法(斛法二尺五寸)除之，即得容粟。

劉衡在此補充說明：「此還元術，原文也，未見注釋，因為補之。」[20]可見李潢並未留下此術的注文。

劉衡根據王孝通術文的解題過程：$\dfrac{45.3\times45.3\times15.5+46.2\times46.2\times15.5\times\frac{11}{14}}{2.5}=\dfrac{2052.09\times15.5+2134.44\times15.5\times\frac{11}{14}}{2.5}=\dfrac{31807.395+33083.82\times\frac{11}{14}}{2.5}=\dfrac{31807.395+25994.43}{2.5}=\dfrac{57801.825}{2.5}$＝23120 . 73 斛＝23120 斛 7 斗 3 升。

這一術題目提供數據時以倉方為準，但列式時卻用倉高，這樣會增加算法的複雜性，未知數的選擇不適當。題目中有出現「率：徑七、周二十二」的敘述，可見王孝通是假設圓周率為 $\dfrac{22}{7}$，與其他中國古代算經比較，算是蠻特別的。[21]而最後面的「還元術」似乎是為了驗算答案使用。[22]

[20] 引自李潢，《緝古算經考注》，郭書春主編，《中國科學技術典籍通彙》數學卷四(鄭州：河南教育出版社，1993 年)，頁 1275。
[21] 王孝通是假設圓周率為約率 22/7，與其他算經所假設為 3、祖冲之的密率 355/113 或劉徽的徽術 157/50 不同。
[22] 參閱林炎全，《《緝古算經》探討》(台中：教育部台灣省中等學校教師研習會，2001 年)，頁 26。

4.8 第八術

假令有粟一萬六千三百四十八石八斗。欲作方倉四、圓窖三，令高深等。方面少於圓徑一丈，多於高五尺。斛法二尺五寸。率：徑七、周二十二。問方、高、徑各多少？

答曰：方一丈八尺，高、深一丈三尺，圓徑二丈八尺。

術曰：以一十四乘斛法，以乘粟數，如八十九而一，為實。倍多加少，以乘少數，三十三乘之，八十九而一。多自乘加之，為方法。又倍少數，以三十三乘之，八十九而一，倍多加之，為廉法，從。開立方除之，即高、深。各加差，即方、徑。

自注：一十四乘斛法，以乘粟，為徑自乘及方自乘數，與前同。今方倉四，即四因十四；圓窖三，即三因十一。并之，為八十九，而一。此截徑一丈五尺，截方五尺，以高為立方。自外意同前。

李潢在此補充說明：「四因方率十四得五十六，三因圓率十一得三十三，并之，得八十九方倉。蓋以十四乘方四圓三之共積，則方四為五十六，圓三為四十二，而圓十四與方十一等，則四十二圓即三十三方也，餘悉與前同。」[23]首先，我們先假設倉高 x 尺，窖深 x 尺，則倉方 x＋5 尺，圓徑 x＋5＋10＝x＋15 尺。容粟體積爲 2 . 5 × 16348 . 8＝40872 立方尺。根據題目意思，我們得到下列結果：

$$4(x+5)^2x+3(\frac{x+15}{2})^2\times\frac{22}{7}x=40872,$$

$$\therefore (4x^2+40x+100)x+\frac{3}{4}(x^2+30x+225)\times\frac{22}{7}x=40872,$$

$$\therefore (4x^3+40x^2+100x)+\frac{33}{14}(x^3+30x^2+225x)=40872,$$

$$\therefore (56x^3+560x^2+1400x)+(33x^3+990x^2+7425x)=572208,$$

$$\therefore 89x^3+1550x^2+8825x=572208,$$

$$\therefore x^3+\frac{1550}{89}x^2+\frac{8825}{89}x=\frac{572208}{89},$$

通分乘以 89 得 $89x^3+1550x^2+8825x=572208$。

李潢根據王孝通術文的解題過程：從立方實爲 $\frac{2.5\times14\times16348.8}{89}=\frac{35\times16348.8}{89}=\frac{572208}{89}=6429\frac{27}{89}$ 立方尺。方法爲 $\frac{(2\times5+10)\times10\times33}{89}+5^2=\frac{20\times10\times33}{89}+25=\frac{6600}{89}+25=74\frac{14}{89}+25=99\frac{14}{89}$ 平方尺。廉法爲 $\frac{2\times10\times33}{89}+$

[23] 引自李潢，《緝古算經考注》，郭書春主編，《中國科學技術典籍通彙》數學卷四(鄭州：河南教育出版社，1993 年)，頁 1276－1277。

$2\times 5=\frac{660}{89}+10=7\frac{37}{89}+10=17\frac{37}{89}$ 尺。隅法爲 1。整理之後得三次方程式

$x^3+17\frac{37}{89}x^2+99\frac{14}{89}x=6429\frac{27}{89}$，通分乘以 89 得

$89x^3+1550x^2+8825x=572208$，做開帶從立方得 $x=13$。

李潢在最後加入了自己的「還元法」：$[(13\times 89+1550)\times 13+8825]\times 13=[(1157+1550)\times 13+8825]\times 13=(2707\times 13+8825)\times 13=(35191+8825)\times 13=44016\times 13=572208$，以表示此答案正確無誤。所以我們得知：倉高 13 尺＝1 丈 3 尺，窖深 13 尺＝1 丈 3 尺，倉方 13＋5＝18 尺＝1 丈 8 尺，圓徑 18＋10＝28 尺＝2 丈 8 尺。

4.9 第九術

假令有粟三千七十二石。欲作方倉一、圓窖一，令徑與方等，方多於窖深二尺，少於倉高三尺，盛各滿中，而粟適盡。(自注：圓率、斛法並與前同)。問方、徑、高、深各多少？

答曰：方、徑各一丈六尺，高一丈九尺，深一丈四尺。

術曰：三十五乘粟，二十五而一，為率。多自乘，以并多少乘之，以乘一十四，如二十五而一，所得以減率，餘為實。并多少，以乘多，倍之，乘一十四，如二十五而一。多自乘加之，為方法。又并多少，以乘一十四，如二十五而一，倍多加之，為廉法，從。開立方除之，即窖深。各加差，即方、徑、高。

自注：截高五尺，截徑及方二尺，以深為立方。十四乘斛法，故三十五乘粟。多自乘，并多少乘之，為截高隅積，即二廉，方各二尺，長五尺。自外意旨皆與前同。

首先，我們先假設窖深 x 尺，則倉方 x＋2 尺，圓徑 x＋2 尺，倉高 x＋2＋3＝x＋5 尺。容粟體積爲 $2.5\times 3072=7680$ 立方尺。圓周率爲 $\frac{22}{7}$。根據題目意思，我們得到下列結果：

$$(x+2)^2(x+5)+\left(\frac{x+2}{2}\right)^2\times\frac{22}{7}x=7680，$$

$$\therefore (x^2+4x+4)(x+5)+\frac{1}{4}(x^2+4x+4)\times\frac{22}{7}x=7680，$$

$$\therefore (x^3+9x^2+24x+20)+\frac{11}{14}(x^3+4x^2+4x)=7680，$$

$$\therefore (14x^3+126x^2+336x+280)+(11x^3+44x^2+44x)=107520，$$

$$\therefore 25x^3+170x^2+380x=107240，$$

$$\therefore x^3+\frac{170}{25}x^2+\frac{380}{25}x=\frac{107240}{25}，$$

$$\therefore x^3+6.8x^2+15.2x=4289.6，$$

做開帶從立方得 x＝14。

李潢根據王孝通術文的解題過程：率爲 $\frac{2.5\times 3072\times 14}{25}=\frac{7680\times 14}{25}=\frac{107520}{25}$ ＝4300．8。從立方實爲 4300．8－ $\frac{2\times 2\times (2+3)\times 14}{25}$ ＝4300．8－ $\frac{20\times 14}{25}$ ＝4300．8 － $\frac{280}{25}$ ＝4300．8－11．2＝4289．6 立方尺。方法爲 $\frac{(2+3)\times 2\times 2\times 14}{25}+2^2=$ $\frac{20\times 14}{25}$ ＋4＝ $\frac{280}{25}$ ＋4＝11．2＋4＝15．2 平方尺。廉法爲 $\frac{(2+3)\times 14}{25}+2\times 2=\frac{70}{25}$ ＋4＝2．8＋4＝6．8 尺。隅法爲 1。整理之後得三次方程式 $x^3+6.8x^2+15.2x=4289.6$，做開帶從立方得 x＝14。

李潢在最後加入了自己的「還元法」：[(14＋6．8)× 14＋15．2]× 14＝(20．8 × 14＋15．2) × 14＝(291．2＋15．2) × 14＝306．4 × 14＝4289．6，以表示此答案正確無誤。所以我們得知：窖深 14 尺＝1 丈 4 尺，倉方 14＋2＝16 尺＝1 丈 6 尺，圓徑 14＋2＝16 尺＝1 丈 6 尺，倉高 14＋2＋3＝19 尺＝1 丈 9 尺。

另外，李潢在此提出了一種新的驗算方法。首先，我們假設 a 爲初商，b 爲次商，將 x＝a＋b 代入 $x^3+6.8x^2+15.2x$，就可以得到下列推論過程：

$$
\begin{aligned}
&(a+b)^3+6.8\,(a+b)^2+15.2\,(a+b)\\
&=(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)+6.8\,(a^2+2ab+b^2)+15.2\,(a+b)\\
&=(a^3+6.8a^2+15.2a)+(3a^2b+6.8\times 2ab+15.2b)+(3ab^2+b^3+6.8b^2)\\
&=(a^2+6.8a+15.2)a+(3a^2+6.8\times 2a+15.2)b+(3a+b+6.8)\,b^2\\
&=[(a+6.8)a+15.2]a+[(3a+6.8\times 2)a+15.2]b+[(3a+b+6.8)b]b\\
&=[(a+6.8)a+15.2]a+[(3a+6.8\times 2)a+15.2+(3a+b+6.8)b]b。
\end{aligned}
$$

接著，令 a＝10，b＝4 代入上面算式中，我們將得到下列驗算過程：

$$
\begin{aligned}
&(10+4)^3+6.8\,(10+4)^2+15.2\,(10+4)\\
&=[(10+6.8)\times 10+15.2]\times 10+[(3\times 10+6.8\times 2)\times 10+15.2+(3\times 10+4+6.8)\times 4]\times 4\\
&=(168+15.2)\times 10+[(30+13.6)\times 10+15.2+(30+4+6.8)\times 4]\times 4\\
&=1832+(436+15.2+40.8\times 4)\times 4\\
&=1832+(436+15.2+163.2)\times 4\\
&=1832+614.4\times 4=1832+2457.6\\
&=4289.6。
\end{aligned}
$$
[24]

雖然這個驗算過程比較複雜難懂，但是結果卻是正確的，也帶給我們在數學教育上一些不一樣的啓發和省思。

[24] 參閱李潢，《緝古算經考注》，郭書春主編，《中國科學技術典籍通彙》數學卷四(鄭州：河南教育出版社，1993 年)，頁 1279。

4.10 第十術

假令有粟五千一百四十五石。欲作方窖、圓窖各一，令口小底大，方面與圓徑等，兩深亦同。其深少於下方七尺，多於上方一丈四尺，盛各滿中，而粟適盡。(自注：圓率、斛法並與前同。)問方、徑、深各多少？

答曰：上方、徑各七尺，下方、徑各二丈八尺，深各二丈一尺。

術曰：以四十二乘斛法，以乘粟，七十五而一，為方亭積。令方差自乘，三而一，為隅陽冪。以截多乘之，減積，餘，為實。以多乘差，加冪，為方法。多加差為廉法，從。開立方除之，即上方。加差，即合所問。

自注：凡方亭，上、下方相乘，又命按：當作各自乘，并，以乘高，為虛。又十一乘之，四十二而一，為圓亭積。今方、圓二積并在一處，故以四十二復乘之，即得圓虛十一，方虛十四，凡二十五，而一，得一虛之積。又三除虛積，為方亭實。乃依方亭覆問法，見上、下方差及高差與積求上、下方、高術入之。故三乘，二十五而一。

首先，我們先假設方窖上方 x 尺，圓徑 x 尺，則深 x＋14 尺，方窖下方 x＋14＋7＝x＋21 尺，圓徑 x＋21 尺。容粟體積爲 2 . 5 × 5145＝12862 . 5 立方尺。圓周率爲 $\frac{22}{7}$ 。

依據《九章算術》少廣篇的「祖暅原理」，[25]一個方窖體積：一個圓窖體積＝4：π＝4：$\frac{22}{7}$＝14：11。所以，一個方窖體積：(一個方窖體積＋一個圓窖體積)＝14：(14＋11)＝14：25＝42：75。再依據「九章方亭術曰：上下方相乘，又各自乘，并之，以高乘之，三而一。」[26]我們可以得到下列的結果：

$$\frac{[x\times x+x(x+21)+(x+21)(x+21)](x+14)}{3}+$$
$$\frac{\pi}{4}\times\frac{[x\times x+x(x+21)+(x+21)(x+21)](x+14)}{3}=12862.5,$$
$$\therefore\frac{[x\times x+x(x+21)+(x+21)(x+21)](x+14)}{3}+$$
$$\frac{11}{14}\times\frac{[x\times x+x(x+21)+(x+21)(x+21)](x+14)}{3}=12862.5,$$
$$\therefore\frac{14[x\times x+x(x+21)+(x+21)(x+21)](x+14)}{42}+$$
$$\frac{11[x\times x+x(x+21)+(x+21)(x+21)](x+14)}{42}=12862.5,$$

25 參閱《九章算術》，郭書春、劉鈍點校，《算經十書》(台北：九章出版社，2001 年)，頁 125。
26 引自《九章算術》，郭書春、劉鈍點校，《算經十書》(台北：九章出版社，2001 年)，頁 132。

$\therefore \dfrac{25[x\times x+x(x+21)+(x+21)(x+21)](x+14)}{42}=12862.5$，

$\therefore 25(3x^2+63x+441)(x+14)=540225$，

$\therefore 75(x^2+21x+147)(x+14)=540225$，

$\therefore x^3+35x^2+441x+2058=7203$，

$\therefore x^3+35x^2+441x=5145$。

李潢根據王孝通術文的解題過程：方亭積爲$\dfrac{42\times 2.5\times 5145}{3\times 25}=\dfrac{105\times 5145}{75}=\dfrac{540225}{75}=7203$立方尺。隅陽冪爲$\dfrac{21\times 21}{3}=\dfrac{441}{3}=147$平方尺。從立方實爲$7203-147\times 14=7203-2058=5145$立方尺。方法爲$14\times 21+147=294+147=441$平方尺。廉法爲$14+21=35$尺。隅法爲1。整理之後得三次方程式$x^3+35x^2+441x=5145$，做開帶從立方得$x=7$。

所以我們得知：方窖上方7尺，圓徑7尺，深$7+14=21$尺$=2$丈1尺，方窖下方$7+14+7=28$尺$=2$丈8尺，圓徑28尺$=2$丈8尺。

4.11 第十一術

假令有粟二萬六千三百四十二石四斗。欲作方窖六、圓窖四，令口小、底大，方面與圓徑等，其深亦同。其深少於下方七尺，多於上方一丈四尺，盛各滿中，而粟適盡。(自注：圓率、斛法並與前同。)問上、下方、深數各多少？

答曰：方窖上方七尺，下方二丈八尺，深二丈一尺；圓窖上下方與方窖同。

劉衡在此補充說明：「上下方之方當作徑。」[27]

術曰：以四十二乘斛法，以乘粟，三百八十四而一，為方亭積尺。令方差自乘，三而一，為隅陽冪。以多乘之，以減積，餘為實。以多乘差，加冪為方法。又以多加差，為廉法，從。開立方除之，即上方。加差，即合所問。

自注：今以四十二乘。圓虛十一者四，方虛十四者六，合一百二十八虛，除之，為一虛之積。得者仍三而一，為方亭實積。乃依方亭見差覆問求之，故三乘一百二十八除之。

李潢在此補充說明：「方亭見差與前注方高覆問法同，乃亭倉術省文。」[28]首先，我們先假設方窖上方x尺，圓徑x尺，則深$x+14$尺，方窖下方$x+14+7=x+21$尺，圓徑$x+21$尺。容粟體積爲$2.5\times 26342.4=65856$立方尺。圓周率爲$\dfrac{22}{7}$。

[27] 引自李潢，《緝古算經考注》，郭書春主編，《中國科學技術典籍通彙》數學卷四(鄭州：河南教育出版社，1993年)，頁1281。

[28] 引自李潢，《緝古算經考注》，郭書春主編，《中國科學技術典籍通彙》數學卷四(鄭州：河南教育出版社，1993年)，頁1282。

依據《九章算術》少廣篇的「祖暅原理」，[29]一個方窖體積：一個圓窖體積$=4:\pi=4:\dfrac{22}{7}=14:11$。所以，一個方窖體積：(六個方窖體積＋四個圓窖體積)$=14:(6\times14+4\times11)=14:(84+44)=14:128=42:384$。再依據「九章方亭術曰：上下方相乘，又各自乘，并之，以高乘之，三而一。」[30]我們可以得到下列的結果：

$$6\times\frac{[x\times x+x(x+21)+(x+21)(x+21)](x+14)}{3}+4\times\frac{\pi}{4}\times\frac{[x\times x+x(x+21)+(x+21)(x+21)](x+14)}{3}=65856,$$
$$\therefore 6\times\frac{[x\times x+x(x+21)+(x+21)(x+21)](x+14)}{3}+\frac{44}{14}\times\frac{[x\times x+x(x+21)+(x+21)(x+21)](x+14)}{3}=65856,$$
$$\therefore \frac{84[x\times x+x(x+21)+(x+21)(x+21)](x+14)}{42}+\frac{44[x\times x+x(x+21)+(x+21)(x+21)](x+14)}{42}=65856,$$
$$\therefore \frac{128[x\times x+x(x+21)+(x+21)(x+21)](x+14)}{42}=65856,$$
$$\therefore 128(3x^2+63x+441)(x+14)=2765952,$$
$$\therefore 384(x^2+21x+147)(x+14)=2765952,$$
$$\therefore x^3+35x^2+441x+2058=7203,$$
$$\therefore x^3+35x^2+441x=5145。$$

李潢根據王孝通術文的解題過程：方亭積爲$\dfrac{42\times2.5\times26342.4}{3\times128}=\dfrac{105\times26342.4}{384}=\dfrac{2765952}{384}=7203$立方尺。隅陽冪爲$\dfrac{21\times21}{3}=\dfrac{441}{3}=147$平方尺。從立方實爲$7203-147\times14=7203-2058=5145$立方尺。方法爲$14\times21+147=294+147=441$平方尺。廉法爲$14+21=35$尺。隅法爲 1。整理之後得三次方程式
$x^3+35x^2+441x=5145$，做開帶從立方得$x=7$。

所以我們得知：方窖上方 7 尺，圓徑 7 尺，深 7＋14＝21 尺＝2 丈 1 尺，方窖下方 7＋14＋7＝28 尺＝2 丈 8 尺，圓徑 28 尺＝2 丈 8 尺。

4.12 第十二術

假令有句股相乘冪七百六、五十分之一，弦多於句三十六、十分之九。問三事各多少？

[29] 參閱《九章算術》，郭書春、劉鈍點校，《算經十書》(台北：九章出版社，2001 年)，頁 125。
[30] 引自《九章算術》，郭書春、劉鈍點校，《算經十書》(台北：九章出版社，2001 年)，頁 132。

答曰：句十四、二十分之七，股四十九、五分之一，弦五十一、四分之一。

術曰：冪自乘，倍多數而一，為實。半多數為廉法，從。開立方除之，即句。以弦多數加之，即弦。以句除冪，即股。

自注：句股相乘冪自乘，即句冪乘股冪之積。故以倍句弦差而一，得一句與半差相連，乘句冪為方。故半差為廉法，從。開立方除之。

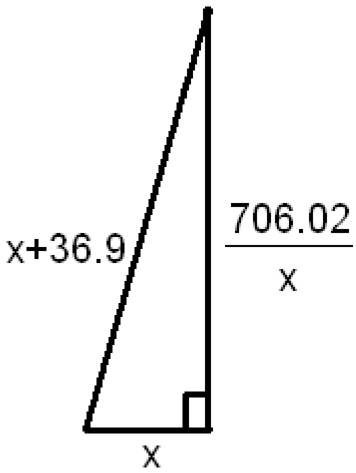


圖 4.12.1

王孝通將句股術中的句股弦都設定爲純數，沒有附加長度單位，而且，句股弦的比例都不是我們所熟知的 3：4：5。[31]首先，我們先假設句爲 x，則股爲 $\frac{706\frac{1}{50}}{x}=\frac{706.02}{x}$，弦爲 $x+36\frac{9}{10}=x+36.9$。根據句股定理可得：[32]

$$x^2+\left(\frac{706.02}{x}\right)^2=(x+36.9)^2,$$
$$\therefore x^4+498464.2404=x^4+73.8x^3+1361.61x^2,$$
$$\therefore 498464.2404=73.8x^3+1361.61x^2,$$
$$\therefore x^3+18.45x^2=6754.258。$$

李潢根據王孝通術文的解題過程：從立方實爲 $\frac{706.02\times 706.02}{2\times 36.9}=\frac{498464.2404}{73.8}=6754.258$。廉法爲 $\frac{36.9}{2}=18.45$。隅法爲 1。整理之後得三次方程式 $x^3+18.45x^2=6754.258$，做開帶從立方得 $x=14.35$。

---

[31] 參閱林炎全，《《緝古算經》探討》(台中：教育部台灣省中等學校教師研習會，2001 年)，頁 30。

[32] 參閱《九章算術》，郭書春、劉鈍點校，《算經十書》(台北：九章出版社，2001 年)，頁 185。

所以我們得知：句爲 $14.35=14\frac{7}{20}$，股爲 $\frac{706.02}{14.35}=49.2=49\frac{1}{5}$，弦爲 $14.35+36.9=51.25=51\frac{1}{4}$。句：股：弦 $=14\frac{7}{20}:49\frac{1}{5}:51\frac{1}{4}=\frac{287}{20}:\frac{246}{5}:\frac{205}{4}=\frac{7}{20}:\frac{6}{5}:\frac{5}{4}=7:24:25$。

劉衡在此補充說明：「三六九乘隅，當作又以倍三六九之七三八乘隅，得七三八為隅也。」[33]可見，李潢在最後通分的過程有錯誤，「又以多三六九乘廉法、隅法，得一三六一六一為廉法，三六九為隅法。」應該改成「又以倍三六九乘廉法、隅法，得一三六一六一為廉法，七三八為隅法。」正確的通分過程如下：

實爲 $706.02\times706.02=498464.2404$。廉法爲 $36.9\times36.9=1361.61$。隅法爲 $1\times2\times36.9=73.8$。整理之後得三次方程式 $73.8x^3+1361.61x^2=498464.2404$，做開帶從立方得 $x=14.35=14\frac{35}{100}=14\frac{7}{20}$。

4.13 第十三術

假令有句股相乘冪四千三十六、五分之一，股少於弦六、五分之一。問弦多少？

答曰：弦一百一十四、十分之七。

術曰：冪自乘，倍少數而一，為實。半少為廉法，從。開立方除之，即股。加差即弦。

---

33 引自李潢，《緝古算經考注》，郭書春主編，《中國科學技術典籍通彙》數學卷四(鄭州：河南教育出版社，1993 年)，頁 1283。

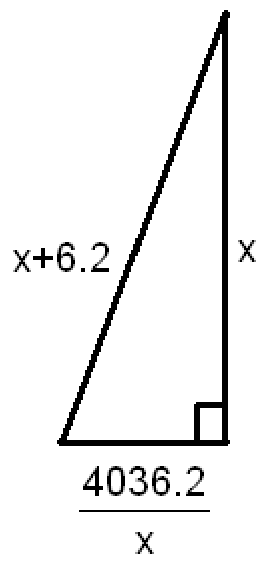


圖 4.13.1

首先，我們先假設股爲 x，則句爲 $\dfrac{4036\frac{1}{5}}{x}=\dfrac{4036.2}{x}$，弦爲 $x+6\frac{1}{5}=x+6.2$。根據句股定理可得：[34]

$$x^2+\left(\frac{4036.2}{x}\right)^2=(x+6.2)^2,$$
$$\therefore\ x^4+16290910.44=x^4+12.4x^3+38.44x^2,$$
$$\therefore\ 16290910.44=12.4x^3+38.44x^2,$$
$$\therefore\ x^3+3.1x^2=1313783.1。$$

李潢根據王孝通術文的解題過程：從立方實爲 $\dfrac{4036.2\times4036.2}{2\times6.2}=\dfrac{16290910.44}{12.4}=1313783.1$。廉法爲 $\dfrac{6.2}{2}=3.1$。隅法爲 1。整理之後得三次方程式 $x^3+3.1x^2=1313783.1$，做開帶從立方得 $x=108.5$。

所以我們得知：股爲 $108.5=108\frac{1}{2}$，句爲 $\dfrac{4036.2}{108.5}=37.2=37\frac{1}{5}$，弦爲 $108.5+6.2=114.7=114\frac{7}{10}$。句：股：弦＝$37\frac{1}{5}:108\frac{1}{2}:114\frac{7}{10}=\dfrac{186}{5}:\dfrac{217}{2}:\dfrac{1147}{10}=\dfrac{6}{5}:\dfrac{7}{2}:\dfrac{37}{10}=12:35:37$。

[34] 參閱《九章算術》，郭書春、劉鈍點校，《算經十書》(台北：九章出版社，2001 年)，頁 185。

4.14 第十四術

假令有句弦相乘冪一千三百三十七、二十分之一，弦多於股一、十分之一。問股多少？

答曰：九十二、五分之二。

術曰：冪自乘，倍多而一，為立冪。又多再自乘，半之，減立冪，餘為實。又多數自乘，倍之，為方法。又置多數，五之，二而一，為廉法，從。開立方除之，即股。

由於王孝通「注文爛脫」，所以李潢「今以意補之」：

句弦相乘冪自乘，即句冪乘弦冪之積。故以倍股弦差而一，得一股與半差，再乘得股冪為方，今多再自乘，半之為隅，減立冪，餘為實。橫虛二立廉、從一立廉，皆多自乘為冪，故倍之為從隅方，從二方廉、橫虛一方廉，半多為上廉，即二多并半多，皆得股冪，為方法，故五之二而一。[35]

李潢在此又補充說明，現將李潢補充注文抄錄於下：

潢案：立冪者，立積也。九章少廣篇開立方術注云：「開平冪者，方百之面十；開立冪者，方千之面十也。」又商功篇城垣術：「并上下廣而半之，得中平之廣，以高若深乘之，得一頭之立冪。又以深乘之，得立冪之積。」穿渠術注：「以渠廣深之立冪為法也。」皆以冪之立者為立冪，言各有指，不可強合。[36]

再乘得股冪為方，猶上句股相乘冪注文：「以倍句弦差而一，得一句與半差，再乘得句冪為方也。」兩冪相乘為三乘方，以平方除之，則得平方，止以一數除之，則得立方。乃云再乘得冪為方者，此方即開平方立方。以初商乘下法之方，孫子、張邱建開平立方皆然，惟九章不云方法而云法，徽注於立方，以方冪釋之。此以股冪為立方之方法，再以股乘之得立方也。[37]

[35] 引自李潢，《緝古算經考注》，郭書春主編，《中國科學技術典籍通彙》數學卷四(鄭州：河南教育出版社，1993 年)，頁 1284。
[36] 引自李潢，《緝古算經考注》，郭書春主編，《中國科學技術典籍通彙》數學卷四(鄭州：河南教育出版社，1993 年)，頁 1284。
[37] 引自李潢，《緝古算經考注》，郭書春主編，《中國科學技術典籍通彙》數學卷四(鄭州：河南教育出版社，1993 年)，頁 1284。

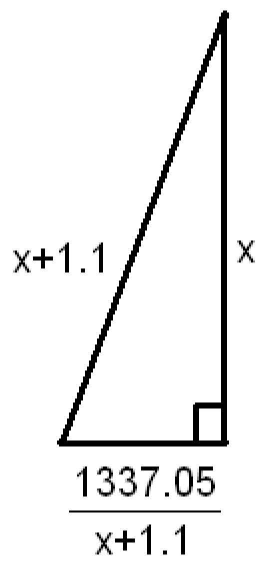


圖 4.14.1

首先，我們先假設股為 x，則弦為 $x+1\frac{1}{10}=x+1.1$，句為 $\frac{1337\frac{1}{20}}{x+1.1}=\frac{1337.05}{x+1.1}$。根據句股定理可得：[38]

$$x^2+(\frac{1337.05}{x+1.1})^2=(x+1.1)^2,$$

$\therefore x^4+2.2x^3+1.21x^2+1787702.7025=x^4+4.84x^2+1.4641+4.4x^3+5.324x+2.42x^2$，

$\therefore 2.2x^3+1.21x^2+1787702.7025=4.4x^3+7.26x^2+5.324x+1.4641$，

$\therefore 2.2x^3+6.05x^2+5.324x=1787701.2384$。

李潢根據王孝通術文的解題過程：從立方實為 $1337.05\times1337.05-2.2\times\frac{1.1\times1.1\times1.1}{2}=1787702.7025-2.2\times0.6655=1787702.7025-1.4641=1787701.2384$。方法為 $2.2\times2\times1.1\times1.1=2.2\times2.42=1.4641$。廉法為 $2.2\times\frac{5\times1.1}{2}=2.2\times2.75=6.05$。隅法為 $2.2\times1=2.2$。整理之後得三次方程式 $2.2x^3+6.05x^2+5.324x=1787701.2384$，做開帶從立方得 $x=92.4$。

所以我們得知：股為 $92.4=92\frac{2}{5}$，弦為 $92.4+1.1=93.5=93\frac{1}{2}$，句為 $\frac{1337\frac{1}{20}}{92.4+1.1}=\frac{1337.05}{93.5}=14.3=14\frac{3}{10}$。句：股：弦 $=14\frac{3}{10}:92\frac{2}{5}:93\frac{1}{2}=\frac{143}{10}:\frac{462}{5}:\frac{187}{2}=\frac{13}{10}:\frac{42}{5}:\frac{17}{2}=13:84:85$。

[38] 參閱《九章算術》，郭書春、劉鈍點校，《算經十書》(台北：九章出版社，2001 年)，頁 185。

依據李潢注文的說明，我們可以得到另一種解法：

設股爲 x，則弦爲 $x+1\frac{1}{10}=x+1.1$。

$$\because \frac{(句\times弦)(句\times弦)}{2(弦-股)}=\frac{1337.05\times1337.05}{2\times1.1},$$

$$\therefore \frac{(句\times句)(弦\times弦)}{2(弦-股)}=812592.1375,$$

$$\therefore \frac{[(弦\times弦)-(股\times股)](弦\times弦)}{2(弦-股)}=812592.1375,$$

$$\therefore \frac{[(弦+股)(弦-股)](弦\times弦)}{2(弦-股)}=812592.1375,$$

$$\therefore \frac{(弦+股)(弦\times弦)}{2}=812592.1375,$$

$$\therefore (股+\frac{弦-股}{2})\times 弦^2=812592.1375,$$

$$\therefore (x+\frac{1.1}{2})(x+1.1)^2=812592.1375,$$

$$\therefore (x+\frac{1.1}{2})(x^2+2.2x+1.21)=812592.1375,$$

$$\therefore x^3+2.75x^2+2.42x+0.6655=812592.1375,$$

$$\therefore x^3+2.75x^2+2.42x=812591.4720,$$

做開帶從立方得 $x=92.4$。

李潢在接下來的第十五術之前有一段補充說明：「王氏句股六術，其四、五、六術，原本俱爛脫，今以陽城張氏所增補者錄之。」[39]可見李潢是採用張敦仁《緝古算經細草》中修補的術文。

4.15 第十五術

假令有股弦相乘冪四千七百三十九、五分之三，句少於弦五十四、五分之二。問股多少？

答曰：六十八。

術曰：冪自乘，倍少數而一，為立冪。又少數再自乘，半之，以減立冪，餘為實。又少數自乘，倍之，為方法。又置少數，五之，二而一，為廉法，從。開立方除之，即句。加差即弦。弦除冪即股。

[39] 引自李潢，《緝古算經考注》，郭書春主編，《中國科學技術典籍通彙》數學卷四(鄭州：河南教育出版社，1993 年)，頁 1286。

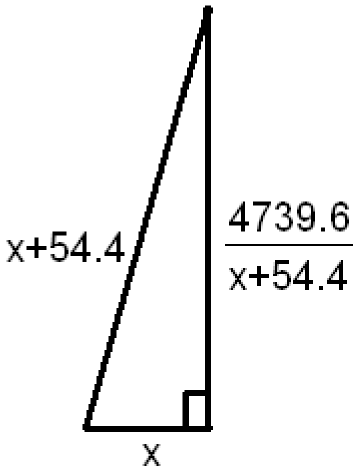


圖 4.15.1

首先，我們先假設句爲 x，則弦爲 $x+54\frac{2}{5}=x+54.4$，股爲 $\frac{4739\frac{3}{5}}{x+54.4}=\frac{4739.6}{x+54.4}$。根據句股定理可得：[40]

$$x^2+(\frac{4739.6}{x+54.4})^2=(x+54.4)^2，$$

$\therefore x^4+108.8x^3+2959.36x^2+22463808.16=x^4+11837.44x^2+8757811.6096+217.6x^3+643956.736x+5918.72x^2$，

$\therefore 108.8x^3+2959.36x^2+22463808.16=217.6x^3+17756.16x^2+643956.736x+8757811.6096$，

$\therefore 108.8x^3+14796.8x^2+643956.736x=13705996.5504$。

李潢根據王孝通術文的解題過程：從立方實爲 $4739.6\times4739.6-108.8\times\frac{54.4\times54.4\times54.4}{2}=22463808.16-108.8\times80494.592=22463808.16-8757811.6096=13705996.5504$。方法爲 $108.8\times2\times54.4\times54.4=108.8\times5918.72=643956.736$。廉法爲 $108.8\times\frac{5\times54.4}{2}=108.8\times136=14796.8$。隅法爲 $108.8\times1=108.8$。整理之後得三次方程式 $108.8x^3+14796.8x^2+643956.736x=13705996.5504$，做開帶從立方得 $x=15.3$。

所以我們得知：句爲 $15.3=15\frac{3}{10}$，弦爲 $15\frac{3}{10}+54\frac{2}{5}=69\frac{7}{10}$，股爲 $\frac{4739\frac{3}{5}}{69\frac{7}{10}}=\frac{4739.6}{69.7}=68$。句：股：弦 $=15\frac{3}{10}:68:69\frac{7}{10}=\frac{153}{10}:68:\frac{697}{10}=\frac{9}{10}:4:\frac{41}{10}$

40 參閱《九章算術》，郭書春、劉鈍點校，《算經十書》(台北：九章出版社，2001 年)，頁 185。

＝9：40：41。

4.16 第十六術

假令有股弦相乘冪七百二十六，句七、十分之七。問股多少？

答曰：股二十六、五分之二。

術曰：冪自乘為實，句自乘為方法。從。開方除之，所得又開方即股。

李潢認爲王孝通「原注脫爛」，所以「今別擬之」：

股弦相乘冪自乘，即股冪乘弦冪之數，亦是股冪乘句冪股冪并之積。以弦冪為長，以股冪為方，故句自乘為方法。開方得股冪，又開方得股，此原本訛此為北，今正之分母常法。[41]

李潢在此補充說明：「九章開平方術云：積有分者，通分內子為定實，乃開之。訖，開其母，報除。[42]此術以股冪為方面，意與之同。」[43]

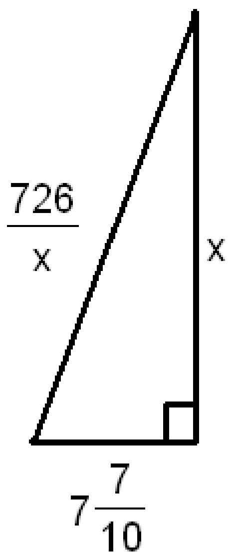


圖 4.16.1

首先，我們先假設股爲 x，則弦爲 $\frac{726}{x}$，句爲 $7\frac{7}{10}$。根據句股定理可得：[44]

[41] 引自李潢，《緝古算經考注》，郭書春主編，《中國科學技術典籍通彙》數學卷四(鄭州：河南教育出版社，1993 年)，頁 1287。
[42] 參閱《九章算術》，郭書春、劉鈍點校，《算經十書》(台北：九章出版社，2001 年)，頁 122。
[43] 引自李潢，《緝古算經考注》，郭書春主編，《中國科學技術典籍通彙》數學卷四(鄭州：河南教育出版社，1993 年)，頁 1287。
[44] 參閱《九章算術》，郭書春、劉鈍點校，《算經十書》(台北：九章出版社，2001 年)，頁 185。

$$x^2+(7\frac{7}{10})^2=(\frac{726}{x})^2，$$

$$\therefore x^2+(7.7)^2=(\frac{726}{x})^2，$$

$$\therefore x^4+59.29x^2=527076。$$

李潢根據王孝通術文的解題過程：實爲 $726\times726=527076$。方法爲 $7.7\times7.7=59.29$。隅法爲 1。整理之後得四次方程式 $x^4+59.29x^2=527076$，做開帶從平方得 $x^2=696.96$。再做開平方得 $x=26.4=26\frac{2}{5}$。

所以我們得知：句爲 $7\frac{7}{10}$，股爲 $26\frac{2}{5}$，弦爲 $\frac{726}{26\frac{2}{5}}=\frac{726}{26.4}=27.5=27\frac{1}{2}$。

句：股：弦$=7\frac{7}{10}:26\frac{2}{5}:27\frac{1}{2}=\frac{77}{10}:\frac{132}{5}:\frac{55}{2}=\frac{7}{10}:\frac{12}{5}:\frac{5}{2}=7:24:25$。

4.17 第十七術

假令有股十六、二分之一。句弦相乘冪一百六十四、二十五分之十四。問句多少？

答曰：句八、五分之四。

術曰：冪自乘為實，股自乘為方法。從。開方除之，所得又開方即句。

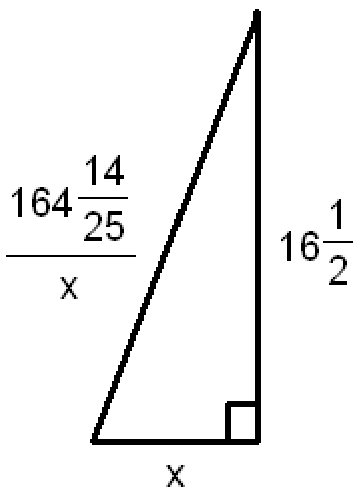


圖 4.17.1

首先，我們先假設句爲 x，則弦爲 $\frac{164\frac{14}{25}}{x}$，股爲 $16\frac{1}{2}$。根據句股定理可得：[45]

[45] 參閱《九章算術》，郭書春、劉鈍點校，《算經十書》(台北：九章出版社，2001 年)，頁 185。

$$x^2+(16\frac{1}{2})^2=(\frac{164\frac{14}{25}}{x})^2，$$

$$\therefore x^2+(16.5)^2=(\frac{164.56}{x})^2，$$

$$\therefore x^4+272.25x^2=27079.9936。$$

李潢根據王孝通術文的解題過程：實爲 164 . 56 × 164 . 56＝27079 . 9936。方法爲 16 . 5 × 16 . 5＝272 . 25。隅法爲 1。整理之後得四次方程式 $x^4+272.25x^2=27079.9936$，做開帶從平方得 $x^2=77.44$。再做開平方得 $x=8.8=8\frac{4}{5}$。

所以我們得知：句爲$8\frac{4}{5}$，股爲$16\frac{1}{2}$，弦爲$\dfrac{164\frac{14}{25}}{8\frac{4}{5}}=\dfrac{164.56}{8.8}=18.7=18\dfrac{7}{10}$。

句：股：弦＝$8\frac{4}{5}:16\frac{1}{2}:18\frac{7}{10}=\frac{44}{5}:\frac{33}{2}:\frac{187}{10}=\frac{4}{5}:\frac{3}{2}:\frac{17}{10}=8:15:17$。

根據上述，筆者也已經分析完《緝古算經考注》卷下的十七道題目。藉由李潢詳細的注文說明、解題過程和筆者揣摩的圖解，並儘可能地使用現代數學符號和算式來做輔助，相信可以幫助大家更了解《緝古算經》艱深難懂的內容。由此可見，李潢的《緝古算經考注》真是我們學習《緝古算經》最快的入門途徑，也是最佳的參考書籍。

綜合前文之論述，李潢除了依據《九章算術》的古法來分析解題之外，他還按照王孝通的術文寫成詳細的解題過程。可惜的是，他並沒有留下圖解。另外，李潢在解題過程中都保留了王孝通自創的許多名詞，例如「隅陽冪」、「隅陽截積」、「隅頭冪」、「隅頭截積」和「正數」等，這是給一個稍微複雜而又重複使用的算式特別的稱呼，功用是爲了補救未能符號化的權宜之計。而且，他在每個數字後面都會附上長度單位，例如「丈」、「尺」和「寸」等，這樣可以和實體連結比較緊密，抽象度比較低。最後，他還會加上自己的驗算方法「還元術」。最重要的是，他在開帶從立方之前通分分母的處理方式，已經跳脫王孝通限制隅法爲 1 的束縛，數字計算比較簡單。[46] 李潢在《緝古算經考注》中，總共處理了三十個方程式，包括三次方程式有二十八個，四次方程式有二個。[47]可惜的是，他也和王孝通一樣，並沒有提供「開帶從立方」的詳細過程。雖然，李潢的《緝古算經考注》仍有一些美中不足的地方。但是，它卻是最貼近《緝古算經》的時代背景，最符合王孝通思考脈絡的一本注解。

[46] 參閱錢寶琮，〈王孝通《緝古算術》第二題、第三題術文疏證〉，杜石然主編，《李儼、錢寶琮科學史全集》第九卷(瀋陽：遼寧教育出版社，1998 年)，頁 609。
[47] 參閱筆者所整理出的附錄八。

第 5 章 結論

綜合前文之論述，我們對於李潢的生平、交遊與數學著作有了更進一步的認識與了解。李潢爲清代中期乾嘉學派重要的數學家，曾參與《四庫全書》的編撰，一心闡明古算，致力於復原古算書和傳統算法，與同屬「中法派」的李銳，並稱「南李北李」。李潢在「興復古學、昌明中法」的職志之下，著有《九章算術細草圖說》九卷、《海島算經細草圖說》一卷和《緝古算經考注》二卷。筆者認爲，李潢對於興復中國古代數學的重大貢獻，這一點真的是無庸置疑。而且，他對待朋友的誠懇和提攜後進的用心，更是令人感動。所以，李潢身爲乾嘉學派「中法派」的重要代表性人物，真的是當之無愧。

5.1 《緝古算經考注》的特色

《緝古算經考注》是以《緝古算經》的體例爲基礎，內容依序爲「題目」、「答曰」、「術曰」和王孝通的「自注」，再加上李潢的「潢案」及少部分「劉衡謹案」所組成。李潢將《緝古算經》中的二十道題目拆成上下二卷，卷上包含前面三道題目，卷下則包含後面十七道題目。他在內容中加入了非常多的「潢案」，除了用來校勘文字和錯誤內容、補充說明王孝通的「術曰」和「自注」，並用來詳細列出解題的過程，使研究《緝古算經》的人能夠更容易瞭解其內容。

《緝古算經考注》內容中的「潢案」，雖然沒有像《九章算術細草圖說》和《海島算經細草圖說》內容中細分成「潢按」、「補圖」、「細草」和「說曰」。[1]但是，除了「補圖」的部分之外，李潢已經在「潢案」中包含了「潢按」、[2]「細草」和「說曰」的意義。舉例說明如下：

(1)「潢按」的意義，用來校勘文字和錯誤內容。見卷上第二術的「潢案：原本各答數皆以上廣、下廣、上袤、下袤為次，通檢各條皆上廣、上袤、下廣、下袤，各以類從，不得此條獨異。又臺下廣、下袤即甲下廣、下袤；甲上廣、上袤即乙下廣、下袤；乙上廣、上袤即臺上廣、上袤。羡道下廣即甲下廣；甲上廣即乙下廣；乙上廣即羡道上廣。各條類此者悉不複舉，此皆備書。又羡道上本無袤，於甲增出上袤。又云下袤一十四丈，大乖以袤均積之法，尤為紕謬。今悉據本書義例正之。」[3]

(2)「細草」的意義，用來詳細列出解題的過程。見卷下第六術的「潢案：容粟七百五斛六斗，以斛法二尺五寸尺為單位乘之得一七六四尺，又三十六乘之得六三五○四尺，三而一，得二一一六八尺為方亭積。周差一二尺自之得一四四尺，三而一，得四八尺為隅陽冪。乘截高一八尺得八六四尺為截積。以減亭積，餘二○三○四尺為從立方實。又周差乘截高得二一六尺，并隅陽冪四八尺得二六

---

[1] 參閱洪正川，《李潢《九章算術細草圖說》之內容分析》(台北：國立台灣師範大學數學研究所碩士論文，2006 年)，頁 17。

[2] 「案」與「按」同音，故可通借。李潢在《緝古算經考注》中，只在卷上第一術使用「潢按」，其餘皆使用「潢案」。

[3] 引自李潢，《緝古算經考注》，郭書春主編，《中國科學技術典籍通彙》數學卷四(鄭州：河南教育出版社，1993 年)，頁 1224－1225。

四尺為方法。又周差加截高得三○尺為廉法。一為隅。開立方得十八尺為上周。此以一方亭算之，乃上徑一八尺、下徑二十尺、高三十六尺之積。」[4]

(3)「說曰」的意義，用來補充說明王孝通的「術曰」和「自注」內容。見卷下第十四術的「潢案：立冪者，立積也。九章少廣篇開立方術注云：『開平冪者，方百之面十；開立冪者，方千之面十也。』又商功篇城垣術：『并上下廣而半之，得中平之廣，以高若深乘之，得一頭之立冪。又以深乘之，得立冪之積。』穿渠術注：『以渠廣深之立冪為法也。』皆以冪之立者為立冪，言各有指，不可強合。」[5]

按照《九章算術細草圖說》和《海島算經細草圖說》的脈絡，《緝古算經考注》也應該細分成「潢按」、「補圖」、「細草」和「說曰」。筆者推測，李潢之所以沒有這樣做，可能是他晚年來不及爲《緝古算經考注》細分內容和補圖，他就病故了。之後劉衡和吳蘭修雖然有幫李潢算校內容，卻沒有幫他完成後續的工作，實在是令人感到有些不解和遺憾。

《緝古算經考注》是以《九章算術》的古法來解釋《緝古算經》之作，而不是以「天元術」或西法來解釋。主要的原因在於李潢是乾嘉學派「中法派」的重要代表性人物，一生以「興復古學、昌明中法」爲職志。所以，李潢認爲應該貼近古代算書的時代背景來寫注，才能符合原書作者的思考脈絡，我們從他所撰寫的《九章算術細草圖說》和《海島算經細草圖說》都可以看出這一個模式。因此，李潢選擇以秦漢的《九章算術》來解釋隋唐的《緝古算經》，而不是以宋元的「天元術」或明清的西法來解釋。李兆洛曾爲序說：「是書立法之根，如鉅解木，如錐劃土，又復補正脫誤，條理秩然，信王氏之功臣矣。」吳蘭修也曾爲序說：「是書之蘊畢宣，王氏之真盡出，無庸以天元一術推算矣。」[6]可見李潢的《緝古算經考注》是最符合王孝通的原來意思。

另外，李潢在解題過程中都保留了王孝通自創的許多名詞，例如「隅陽冪」、「隅陽截積」、「隅頭冪」、「隅頭截積」和「正數」等，這是給一個稍微複雜而又重複使用的算式特別的稱呼，功用是爲了補救未能符號化的權宜之計。而且，他在每個數字後面都會附上長度單位，例如「丈」、「尺」和「寸」等，這樣可以和實體連結比較緊密，抽象度比較低。最後，他還會加上自己的驗算方法「還元術」。最重要的是，他在開帶從立方之前通分分母的處理方式，已經跳脫王孝通限制隅法爲 1 的束縛，數字計算比較簡單。這些都是《緝古算經考注》內容的特色。李潢在《緝古算經考注》中，總共處理了三十個方程式，包括三次方程式有二十八個，四次方程式有二個。可惜的是，他也和王孝通一樣，並沒有提供「開帶從立方」的詳細過程。

綜合以上所述，我們可以知道，《緝古算經考注》真是一本非常有特色的書。

---

[4] 引自李潢，《緝古算經考注》，郭書春主編，《中國科學技術典籍通彙》數學卷四(鄭州：河南教育出版社，1993 年)，頁 1271。

[5] 引自李潢，《緝古算經考注》，郭書春主編，《中國科學技術典籍通彙》數學卷四(鄭州：河南教育出版社，1993 年)，頁 1284。

[6] 引自吳蘭修，〈《緝古算經考注》序〉，郭書春主編，《中國科學技術典籍通彙》數學卷四(鄭州：河南教育出版社，1993 年)，頁 1218。

透過李潢寶貴的數學研究成果和心得，不但能使我們了解乾嘉時期的數學研究水準，也是我們學習《緝古算經》的最重要途徑。

5.2 《緝古算經考注》對數學教育的啓發

李潢曾經說過：「陳其數者，下學之言也。知其義者，上達之功也。有數先有象，有象皆可繪。」他認爲學習數學不能只知道如何計算，還要瞭解其中的數學原理，而且還可以透過圖形來幫助理解。所以，李潢在他的《緝古算經考注》中，除了有詳細的解題過程之外，還引用了許多《九章算術》中的數學原理來做說明。可惜的是，他並沒有留下圖解，這部份的工作只好由筆者根據題意和《九章算術細草圖說》中同樣名詞的圖形來揣摩並繪圖。李潢在解這麼複雜的題目過程中，不用去藉助任何圖形的輔助，就能夠清楚說明並詳細解題，實在是令人難以置信。此外，他與學術知己交從甚密，對於學生更是用心指導。由此可見，李潢可說是一位很好的數學教育家。

李潢在《緝古算經考注》中，沿用了許多王孝通自創的名詞，例如「隅陽冪」、「隅陽截積」、「隅頭冪」、「隅頭截積」和「正數」等，這些名詞的選擇，顯然不是亂選的，而是用來呼應它所對應到的概念。在符號還不發達的情況之下，一個會將概念作適當命名的人，就可以做比較複雜和深刻的思考，這在整個數學教育上是可以被啓發的。但是，並不是每個人都具有這個能力，所以，符號的學習就變得不可或缺。也就是說，數學物件的意義化其實是非常重要的。

若以 HPM 的觀點做切入，《緝古算經考注》就像是一本數學題目集的解題秘笈，類似於現在坊間的數學參考書。內容中不但有題目的詳細解法和驗算過程，還有清楚的解題說明和分析，可以說是我們學習《緝古算經》最佳的參考書籍。《緝古算經》中的三次方程式解法，其實是走向「天元術」的一個重要過渡，沒有「天元術」的方法來處理三次方程式，就會開始產生問題。如果這一段歷史，包括這些題目的解法，能夠做一個適當地編輯，對於數學教學是相當有用的。當數學教師在教代數單元，尤其是三次方程式的時候，就會產生求解的需求感。所以，爲什麼後人會那麼推崇卡當諾(*Girolamo Cardano*, 1501-1576)，一定是有它的道理的。

在王孝通那個時代背景，解三次方程式的數學知識還不夠完備的情況之下，他一定有他獨特的方法，或是題型上讓他容易處理的模式，這些部份在 HPM 裡就產生了作用。另外，數學教師在學生學習的過程中，對於三次方程式的問題，要選用什麼樣的例題帶進來，然後讓學生很容易去看出解題規則，或者只是想讓學生用一些特解的方式去處理，這些在教學上也可以產生作用。至少在題目的選取上，可以給其他數學教師當作參考。而且，數學教師若是能夠在代數和幾何的相關學習單元中，引進李潢的生平事蹟和《緝古算經考注》的內容做介紹，相信一定可以使學生們更了解數學發展的歷史脈絡，進而引發學習動機，而能夠更輕鬆自在地學習數學。