中學生通訊解題第五十二期題目參考解答與評註

臺北市立建國高級中學　數學科

問題編號
5201

若 x 是實數，定義$[x]$表示小於或等於 x 的最大整數，試求方程式 $2x^2-5[x]+1=0$ 的解。

參考解答：

[法 1]

1. 令 $\alpha = x-[x]$，則 $0 \le \alpha <1$

   代入原式得 $2x^2-5(x-\alpha)+1 = 0$

   $\Rightarrow 2x^2-5x+1 = -5\alpha$

   因為 $0 \le \alpha <1$，

   故得 $-5 < 2x^2-5x+1=-5\alpha \le 0$

   $\Rightarrow 2x^2-5x+6 > 0$ 且 $2x^2-5x+1 \le 0$

(1) $2x^2-5x+6 = 2(x-\frac{5}{4})^2+\frac{23}{8} \ge \frac{23}{8}>0$ 對於所有實數 x 恆成立。

(2) $2x^2-5x+1 \le 0$

$\Rightarrow 0<\frac{5-\sqrt{17}}{4} \le x \le \frac{5+\sqrt{17}}{4} < 3$

$\therefore [x] = 0$ 或 1 或 2

2.

(1) 若$[x]=0$，代回原式得 $2x^2-0+1=0$

$\Rightarrow x$ 無解

(2) 若$[x]=1$，代回原式得 $2x^2-5+1 = 0$

$\Rightarrow x = \sqrt{2}$

(3) 若$[x] = 2$，代回原式得 $2x^2-10+1 = 0$

$\Rightarrow x = \frac{3}{2}\sqrt{2}$

故 $x=\sqrt{2}$ 或 $\frac{3}{2}\sqrt{2}$ 。

[法 2]

1. $2x^2-5[x]+1 = 0 \Rightarrow [x] = \frac{2x^2+1}{5} \ge \frac{1}{5}>0$，

   又$[x]$為整數且 $x\ge[x]$，故 $x\ge[x]\ge 1$

2. 利用$[x]$為整數，直接分段討論

(1) 當 $1\le x <2$ 時 $\Rightarrow [x] = 1$，代回原式得 $x = \sqrt{2}$

(2) 當 $2\le x <3$ 時 $\Rightarrow [x] = 2$，

代回原式得 $x = \frac{3}{2}\sqrt{2}$

(3) 當 $3\le x$ 時

$\Rightarrow 2x^2-5[x]+1$

$= 2x\cdot x-5[x]+1\ge 2(3\cdot x)-5[x]+1$

$= 6x-5[x]+1\ge 1>0$

故此時 $2x^2-5[x]+1=0$ 無解

因此由以上討論可知 $x = \sqrt{2}$ 或 $\frac{3}{2}\sqrt{2}$ 。

[法 3]

$2x^2-5[x]+1= 0$ 的解即為 $y = 2x^2$ 與 $y = 5[x]-1$ 作圖交點的 x 座標。

作圖可得交點的 x 座標在 0~1 及 1~2 之間

$\Rightarrow [x] = 1$ 或 2

代回原式即可得 $x = \sqrt{2}$ 或 $\frac{3}{2}\sqrt{2}$ 。

解題重點：

解題時可由下列三方向下手：

(1) 利用 $0 \le x-[x]<1$(或$[x] \le x < [x]+1$)的範圍，求出 x 的範圍。[法 1]

(2) 利用$[x]$爲整數，分段討論 x 的解。[法 2]

(3) 利用作圖求交點的 x 座標。[法 3]練習本題，可增加同學們對高斯符號$[x]$的熟悉度。

解題評註：

1. 本題參與徵答同學的作答方式大部分用[法 1]。
2. 有二位同學利用$[x]$爲整數，分段討論 x 的解，清楚明瞭[法 2]。
3. 有二位同學利用作圖求交點，解法與眾不同[法 3]。

問題編號
5202

有一植物成長的高度只受肥料的酸鹼性、日照長短、溫度高低等影響，且這三類因素都互相獨立不影響。有人做了四組成長高度實驗，並表列如下：

組別	實驗組合內容	十天後成長高度(cm)
A	鹼性、短時間、低温	25
B	鹼性、長時間、高温	23
C	酸性、短時間、高温	9
D	酸性、長時間、低温	27

今天爲了使得植物的栽培在十天後得到最高的高度，應該如何選擇肥料的酸鹼、日照的長短、溫度的高低，才能達到最佳的條件？（假設這三種條件是各自獨立的，且可以使用加法計算各條件所影響的高度）又此時最高的高度應爲幾公分？

參考解答：

假設肥料鹼性與酸性分別可以使植物成長 A1 公分，與 A2 公分；日照時間長與短分別可以使植物成長 B1 公分，與 B2 公分；溫度高與低分別可以使植物成長 C1 公分，與 C2 公分。

由表格可以得到：

A1+B2+C2=25…(1)

A1+B1+C1=23…(2)

A2+B2+C1=9…(3)

A2+B1+C2=27…(4)

(1)+(2)-(3)-(4)：A1-A2=6

⇒選擇肥料鹼性爲佳！

(1)+(3)-(2)-(4)：B2-B1=-8…(5)

⇒選擇日照時間長爲佳！

(1)+(4)-(2)-(3)：C2-C1=10

⇒選擇溫度低爲佳！

爲了達到最佳生長高度，因此要選擇肥料鹼性、日照時間長、溫度低。

成長高度

=A1+B1+C2

=A1+(B2+8)+C2　　（由(5)）

=A1+B2+C2+8

=25+8　　（由(1)）

=33（公分）

解題評註：

本題屬代數的應用問題，其實只要仔細分析題目，便可列出簡單的數學式子，進而設法解決。由於題目容易，難得吸引相當多人徵答，激起越來越多同學挑戰的興致，也歡迎這些同學能繼續挑戰更難的題目！

問題編號
5203

有五人的年齡分別為 A、B、C、D、E，已知 A<B<C<D<E，且任意兩人年齡和計有下列九種不同歲數：31 歲、32 歲、36 歲、37 歲、41 歲、42 歲、47 歲、48 歲、52 歲。試問 A、B、C、D、E 五位年齡分別為何？

參考解答：

設 A<B<C<D<E，將各種組合列出如下：

A+B、A+C、A+D、A+E、B+C、B+D、B+E、C+D、C+E、D+E 共十種組合。

由於任意兩人年齡和有 9 種，可見有一組年齡重複，因此假設此組年齡為 x。

將這十種組合加起來：

4×(A+B+C+D+E)

=31+32+36+37+41+42+47+48+52+ x

=366 + x

因此 $A+B+C+D+E=\dfrac{366+x}{4}$

由於 366 除以 4 餘 2，可見 x 除以 4 也必須餘 2

又九種年齡組合中只有一組 42 歲除以 4 餘 2，因此 x=42。

$$A+B+C+D+E=\frac{366+x}{4}=102$$

又 A+B=31 且 D+E=52

A+B+D+E=83

C=(A+B+C+D+E)-(A+B+D+E)=102-83=19

又 A+C=32 且 C+E=48

A=13、E=29、B=18、D=23

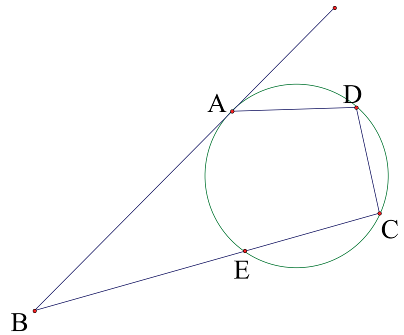
因此 A、B、C、D、E 的年齡分別為 13 歲、18 歲、19 歲、23 歲、29 歲

解題評註：

本題在測驗每個人的觀察能力，從題目中尋找出隱藏的線索。關鍵在於所有任兩人的年齡和應該有 10 種組合，但題目卻給 9 種，可見有 1 種重複。再來就是要觀察出 A+B 就是最小年齡 31 且 D+E 是最大年齡 52。有的人更從數據中推測出 D-C=4 的條件。條件越多，越容易拼湊出真相。

問題編號
5204

如圖 $\overline{AB}$ 切圓於 A 點，$\overparen{AE}=\overparen{EC}$ 且 $\angle ABC=30^\circ$，求 $\angle ADC=$？



參考解答 I：

(1) 設 O 爲圓心

作 EC 的中垂線，交 EC 於 H 且交圓於 M

連 MD、AO

因爲 OA 垂直 AB 且 OH 垂直 BH，所以 ABHO 爲圓內接四邊形

因此

$\angle AOH=180^\circ-\angle ABH=180^\circ-30^\circ=150^\circ$

$\angle ADM=\dfrac{\angle AOM}{2}=\dfrac{150^\circ}{2}=75^\circ$

(2) 因爲 $\overparen{EM}=\overparen{MC}$ 且 $\overparen{AE}=\overparen{EC}$

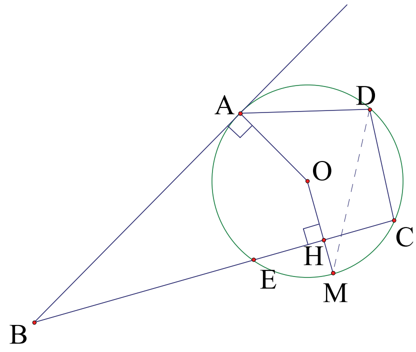
所以 $\overparen{AM}:\overparen{MC}=3:1$

因此

$\angle MDC=\dfrac{\angle MOC}{2}=\dfrac{\angle AOM/3}{2}=\dfrac{150^\circ}{6}=25^\circ$

(3) 由(1)與(2)可知

$\angle ADC=\angle ADM+\angle MDC=75^\circ+25^\circ=100^\circ$



參考解答 II：

(1) 連接 $\overline{AC},\overline{AE}$

(2) 假設 $\angle ECA=x^\circ$

因爲 $\overparen{AE}=\overparen{EC}$ 且 $\overline{AB}$ 切圓於 A 點（即 $\angle BAE$ 爲 $\overparen{AE}$ 的弦切角）

所以 $\angle ECA=\angle EAC=\angle BAE=x^\circ$

(3) 在 ΔABC 中，

$\angle ABC+\angle BAC+\angle BCA=180^\circ$

即 $30+(2x)+x=180\Rightarrow x=50$

(4) 因爲 AECD 爲圓內接四邊形

所以 $\angle ADC=\angle AEB=2x^\circ=100^\circ$

解題評註：

本題屬幾何的圓內接四邊形的應用題，只要善用輔助線，以及熟用圓內接四邊形、圓周角、圓心角的基本性質，便可以自創出各式各樣的解法。有一位同學獨自想到了三種解題方法，實在難得。這次徵答人數踴躍，可以看出大家對幾何性質的熟練，普遍均能得高分，只可惜有些同學的表示法不佳或不詳，尚須多加練習數學的表達能力，相信未來一定能有更好的表現。

問題編號
5203

能否將正整數 1~25 分別填入右邊表中的 25 個方格，使得各行之和與各列之和恰好出現 10 個連續整數。

參考解答：

不行。

假設可以做得到，則計算各行及各列的和時，每個方格中的數字均被計算兩次，則各行各列之和爲$(1 + 2 + 3 + \ldots + 25)\times 2 = 25\times 26$，但是方程式 $x + (x + 1) + (x + 2) + \ldots + (x + 9) = 25\times 26$ 之解爲 $x = 60.5$，所以不可能發生。