

七年級學生運用數常識 (Number Sense) 解路徑問題 之探究

尤欣涵¹、楊德清²

¹國立嘉義大學數學教育研究所、²國立嘉義大學數學教育研究所

摘要

本研究之主要目的是透過數常識測驗卷了解現今七年級學生運用數常識解路徑問題的表現。研究者針對彰化市某國中七年級 30 名學生進行數常識活動，結果顯示，學生在數常識測驗卷第一部分答題正確率不到五成，而第二部份更只有一名學生正確作答。分析學生在第一部份之解題發現，對於已知的數據，學生較能藉由計算直接求出答案，而非計算式的判斷題目則較難正確作答，且對於單位量感與題目間的概念關係也難以進一步進行思考，而在第二部份之解題上，大多數學生僅考慮每個點之後會使得數據最大的路徑，卻忽略了其路徑前後可能造成的影響，顯示學生在運用數常識的能力上仍顯不足。

關鍵詞：七年級、路徑問題、數常識

壹、前言

日常生活中，數字與我們息息相關，舉凡食、衣、住、行、育、樂，無一不與數字有關。澳洲教育研究中心 (Australian Education Council, 簡稱AEC, 1991) 以及美國數學教師協會 (National Council of Teachers of Mathematics, 簡稱NCTM, 1989) 皆認為，數常識教學為中小學數學教育所不可缺少的主題。NCTM (2000) 所出版的「學校數學課程原則標準」 (The Principles and Standards for School Mathematics) 中強調了發展數常識為中小學數學課程的主要目的，並闡明「本標準之中心旨在發展兒童數常識的能力」 (p.32)，由此可知，國際間已逐漸重視數常識的理念與發展，國內對數常識的研究 (楊德清, 2002) 更是投入了大量的關注與重視。數常識不僅成為近代數學中的後起新思潮，亦成為各國國民義務教育中的主要目標之一 (Berch, 2005; Kilpatrick, Swafford, & Findell, 2001)。

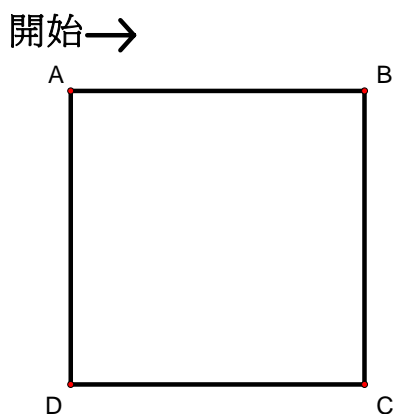
然而，受到考試文化的影響，傳統教師的教學與學生的學習淪為機械性的了解，學生的思考模式也缺乏靈活性與發展性 (Markovits & Sowder, 1994; Reys & Yang, 1998)。縱使學生在成績上獲得較高的分數，其邏輯思考、概念理解甚至對於現實生活的運用卻顯不足。在楊德清 (2000) 的研究中發現我國數學教育長期偏重訓練學生計算能力、計算速度及技巧，傳統算則的解題模式深深影響學生的思考方式，缺乏數常識的表現。當要求學生由小至大排序 0.4899 , $\frac{16}{25}$, $\frac{8}{15}$, $\frac{19}{18}$, 0.91 時，竟有學生將所有的數轉成分數 $\frac{4899}{10000}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{8}{15}$, $\frac{19}{18}$, $\frac{91}{100}$ ，然後企圖將所有分數通分，找出同分母以判斷分數大小，學生缺乏對數字有意義的了解，便將自己困住，無法有效解題。另外，要求學生找出 $534.6 \times 0.545 = 291357$ 的小數點的位置時，沒有學生可以使用數常識概念找出答案，他們認為被乘數有 1 位小數，乘數有 3 位小數，所以答案要有 4 位小數為 29.1357。由此可見，學生可能因過去學校僵化式的學習方式，而只會運用統一的標準算則，也逐漸失去思考的能力，並失去對數字真正的認知理解，也大大減低了學生的數常識能力。

而研究者觀察現今教材在路徑問題上的教學活動，其佈題方式多為直線式的 (例如：請在線段上畫出 $\frac{4}{5}$ 所在的位置)，學生在路徑問題上也習慣用平分線段的方式進行表徵。有鑑於此，研究者欲透過不同的佈題方式來設計數常識測驗卷以了解現今七年級學生在數常識方面上的表現為何並分析學生的數常識表現。

貳、數常識測驗活動

研究者針對彰化市某國中七年級 30 名學生進行數常識測驗活動，學生在此之前已學習過整數、分數與小數之概念與其乘除性質，數常識測驗時間為 40 分鐘，測驗後，研究者再依數常識測驗卷進行量化與質化的分析。量的部份，研究者針對學生每題的作答分為正確與錯誤兩部分，以了解學生於各題的答題正確率為何；質的部份，研究者針對學生的數常識測驗卷活動紀錄進行編碼與轉譯，並從中分析學生在解題歷程上所使用的策略為何。數常識測驗卷參考 Number Sense: Simple Effective Number Sense Experience (McIntosh, Reys & Reys, 1997) 所設計而成：

第一部分：以下問題皆由 A 點開始，並以順時針的方向進行。

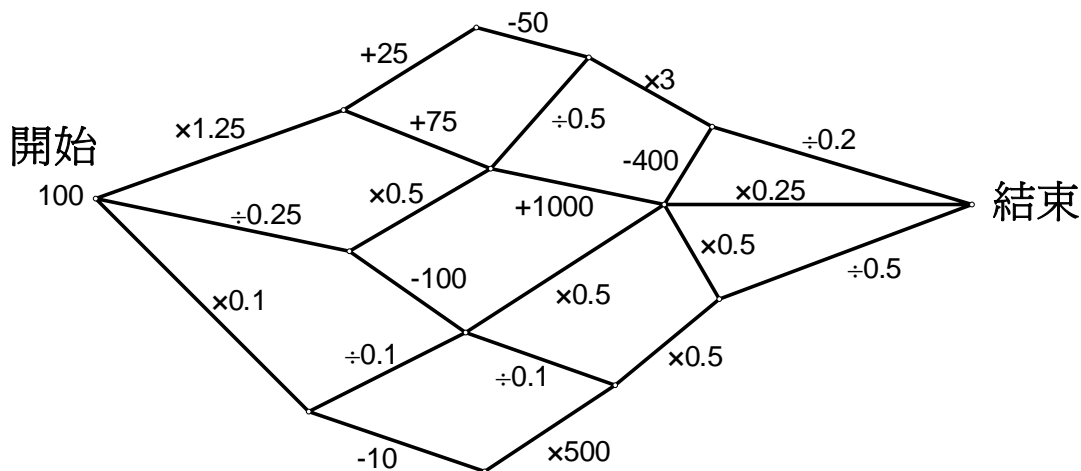


1. 你會在這裡，當.....
 - a. 你在正方形全路徑的 $\frac{1}{4}$ 時？
 - b. 你在正方形全路徑的 $\frac{1}{3}$ 時？請將此點標上 W。
 - c. 你在正方形全路徑的 $\frac{1}{5}$ 時？請將此點標上 X。
 - d. 你在正方形全路徑的 $\frac{3}{5}$ 時？請將此點標上 Y。
 - e. 你在正方形全路徑的 $\frac{2}{3}$ 時？請將此點標上 Z。
2. 如果這個正方形的全路徑長為 100 公尺

a. 則正方形全路徑的 $\frac{3}{5}$ 會是多長呢？

b. 如果你從 A 點順時針行走了 80 公尺，你的位置將在哪兩個點之間呢？

第二部分：請判斷走哪條路徑可以得到最大的值。(請由左至右不回頭走)



我的思考過程與想法：

參、學生整體表現

在 30 位學生的數常識測驗卷上，各部份及各小題的答題狀況如表 1 所示：

表 1：數常識測驗卷學生作答情形

題目	答對人數	答錯人數	答對率(%)
第一部份	14	16	46.7
第 1 題	14	16	46.7
1a	22	8	73.3
1b	19	11	63.3
1c	19	11	63.3
1d	16	14	53.3
1e	15	15	50.0
第 2 題	22	8	73.3
2a	26	4	86.7
2b	23	7	76.7
第二部份	1	29	3.3

學生整體的作答情形可分為兩部分，其中，第一部分的學生不到半數答題正確，而第二部份僅有一名學生正確作答。在第一部分的題目中，分為 1、2 兩題，學生在第 2 題的表現優於第 1 題。在第一題的各小題中，以 a 小題有最高的答對率，依次為 b 與 c、d、e；而在第 2 題的部份，a 小題答對率高於 b 小題。

進一步分析第一部份的題目，第 1 題學生需在正方形全路徑上標示各不同分量的位置，在 a 小題時，學生易察覺全路徑的 $\frac{1}{4}$ 即為 B 點所在的位置，但單位量變化後，學生較難判斷正確的位置，而後數據變為單位量的倍數，難度更加增高，學生的答對率也因此下降，但 1e 題學生的表現仍有 50% 的答對率。

第 2 題試題為告知全路徑長，學生需求出全路徑的 $\frac{3}{5}$ 為多長，值得注意的是，此題竟有 86.7% 的答對率，學生在已知路徑長的情境下，都經由計算直接求出答案，反觀第 1 題的 d 小題，學生只有 53.3% 的答對率，顯示學生對於全路徑的 $\frac{3}{5}$ 所在的位置並不清楚，但在數據已知的狀況下，學生可以藉由計算直接算出答案，卻不能因此反思而找出全路徑的 $\frac{3}{5}$ 所在的位置。在 b 部分學生的答對率也比第一題各小題高，學生一樣經由計算求出答案，大部分學生將 100 先分成 4 等分，算出每一等分的長度為 25 公尺，再進一步判斷 80 公尺為三等份後再多出 5 公尺，因此答出 D 與 A 點之間。由 1、2 小題之資料分析，研究者發現學生在有數據操作時較能正確作答，也因為題目的設計，學生對於圖形上的長度單位量感便受圖形四邊所影響，而由學生的答題表現也可看出學生對於數常識的概念仍顯不足。

第二部份，學生須找出一條使得數據結果最大的路徑。在此部份，僅有一名學生正確作答，研究者分析學生的工作單發現，大多數學生僅考慮每個點之後會使得數據最大的路徑，卻忽略了其路徑前後可能造成的影響；因此，學生在此題一開始便選擇 $\div 0.25$ 而後 -100 、 $\div 0.1$ 、 $\times 0.5$ 最後 $\div 0.5$ 。而唯一正確的學生，便是能考慮其前後碰到的數據所造成的影響，因此能夠正確作答。

肆、學生數常識測驗卷分析

研究者進一步就學生在數常識測驗卷第一、二部份學生的表現進行分析：

數常識不足之學生在第一部分表現分析

1. **由已知圖形與數據直接進行運算**：學生 S1 在 1.1b 與 1.1d 的題目中，受到題目四邊形之影響，將正方形全路徑視為 $\frac{1}{4}$ ，在求正方形全路徑的 $\frac{1}{3}$ 時，學生將 $\frac{1}{4} \div \frac{1}{3} = \frac{3}{4}$ ，但類似的題目 1d，學生卻使用 $\frac{1}{4} \times \frac{3}{5} = \frac{3}{20}$ ，也未能在圖上標示出所求得的数据位置，研究者分析，學生對於路徑之部分與整體概念仍不清楚，故由已知數據單純進行運算。

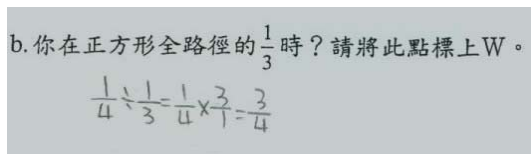


圖 1：S1 學生工作單 1.1b

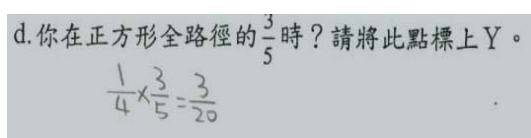


圖 2：S1 學生工作單 1.1d

2. **嘗試將正方形全路徑視為一條直線**：學生 S2 嘗試用一條數線代表正方形，再依據題目要求將此數線分成三或四等分。此名學生在測驗卷上原畫有一條數線，並依據題目要求畫上各分量所在的位置，但學生最後無法由數線所在的位置轉換成正方形全路徑的位置，因此產生錯誤而將數線擦掉。研究者分析此名學生對於直線的各分量能進行畫記，但對於題目所給予的正方形全路徑，可能因為圖形已被劃分成四等分，因此對於三等分或五等分的畫記，學生便受此影響而未能順利標出正確位置。

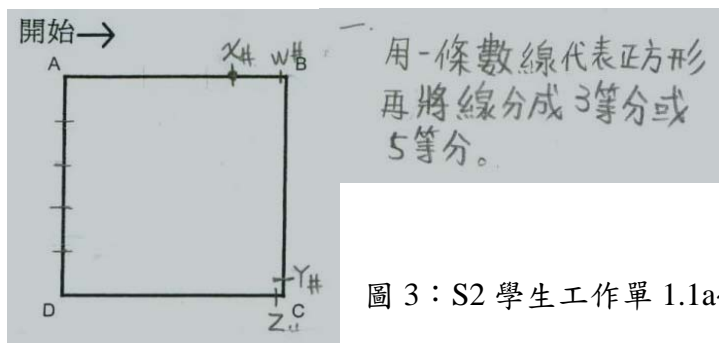


圖 3：S2 學生工作單 1.1a~e

3. **丈量長度直接計算**：此名學生未做任何估測，直接丈量測驗卷上的正方形長度，測得邊長為 3.8，並依此數據算出各小題欲求的路徑長，再藉

由尺丈量出各小題路徑長所在的位置。此方式顯示學生完全依賴實際的數據進行判斷，未能由已知圖形或各部份單位量進行估測。

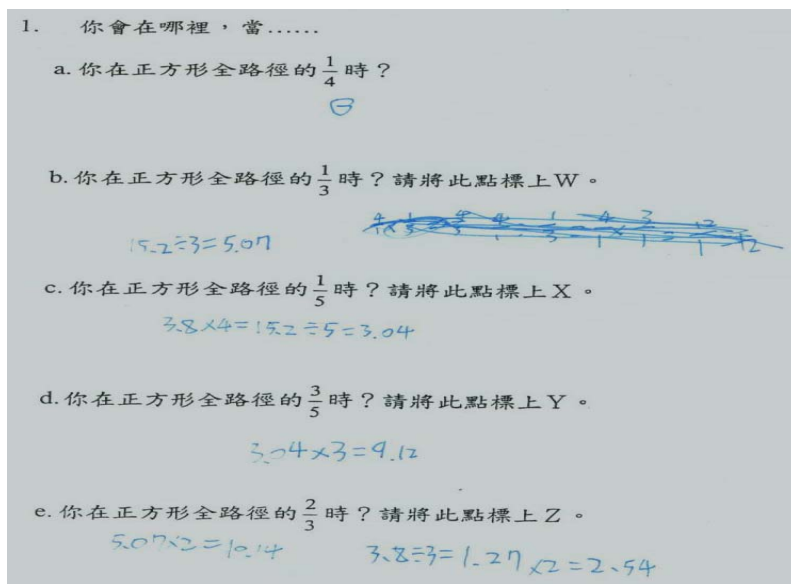


圖 4：S3 學生工作單 1.1a~e

具數常識之學生在第一部分表現分析

第一部分：以下問題皆由 A 點開始，並以順時針的方向進行。

1. 你會在這裡，當.....

a. 你在正方形全路徑的 $\frac{1}{4}$ 時？ A: B 點
 正方形全路徑的 $\frac{1}{4}$ = 正方形的邊長
 從 A 開始到下一個直角 (B 點)

b. 你在正方形全路徑的 $\frac{1}{3}$ 時？請將此點標上 W。
 $\{4.3\} = 12$ $\frac{1}{3} = \frac{4}{12}$

c. 你在正方形全路徑的 $\frac{1}{5}$ 時？請將此點標上 X。
 $\frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{5}{20} - \frac{4}{20} = \frac{1}{20}$

d. 你在正方形全路徑的 $\frac{3}{5}$ 時？請將此點標上 Y。
 $\frac{3}{5} - \frac{2}{4} = \frac{12}{20} - \frac{10}{20} = \frac{2}{20}$

e. 你在正方形全路徑的 $\frac{2}{3}$ 時？請將此點標上 Z。
 $\frac{1}{5} = \frac{8}{40}$

2. 如果這個正方形的全路徑長為 100 公尺

a. 則正方形全路徑的 $\frac{3}{5}$ 會是多長呢？
 $100 \times \frac{3}{5} = 60$
 A: 60m

b. 如果你從 A 點順時針行走了 80 公尺，你的位置將在哪兩個點之間呢？
 $100 \div 4 = 25$
 $80 \div 25 = 3 \dots 5$
 A: D 和 A 之間

圖 5：S4 學生工作單 1.1a~e、1.2a~b

1. **由圖形的邊長判斷單位量**：此名學生由圖形為正方形進而判斷出正方形全路徑的 $\frac{1}{4}$ 即為一個邊長所代表的距離。
2. **由圖形邊數與欲分割的單位量求出分割數**：在 b 小題中，學生由圖形邊數 (4) 與欲分割的單位量 (3) 求出圖形的分割數 (12)，再將 $\frac{1}{3}$ 轉變為符合分割數的分數 ($\frac{4}{12}$)，最後，在計數 12 格中的 4 格即為全路徑的 $\frac{1}{3}$ 處。同理，e 小題學生將 $\frac{2}{3}$ 轉變為符合分割數的分數 ($\frac{8}{12}$)，最後，在計數 12 格中的 8 格即為全路徑的 $\frac{1}{3}$ 處。
3. **先以 $\frac{1}{4}$ 為單位量判斷位置落於何處，再以 $\frac{1}{20}$ 為單位量找出正確位置**：此名學生在 c 與 d 小題中，並沒有使用如同 b、e 小題的方式，進一步的，學生先以 $\frac{1}{4}$ 為單位量判斷全路徑的 $\frac{1}{5}$ 應落於 A、B 區間，而後將 $\frac{1}{4}$ 與 $\frac{1}{5}$ 相減算出 $\frac{1}{20}$ ，即為從 B 點往回數全路徑的 $\frac{1}{20}$ 的距離，值得注意的是，此名學生對於 $\frac{1}{4}$ 與 $\frac{1}{20}$ 的單位概念非常清楚，在圖中，他將一邊邊長表示為全路徑的 $\frac{1}{4}$ ，再將其分成 5 等分，進而得知每一等分即為全路徑的 $\frac{1}{20}$ ，因此 X 點即為從 B 點往回數全路徑的 $\frac{1}{20}$ 長度所在之處。同理，在 d 小題中，學生先以全路徑的 $\frac{1}{4}$ 為單位量，判斷 $\frac{3}{5} > \frac{2}{4}$ (也就是 2 個全路徑的 $\frac{1}{4}$)，所以全路徑的 $\frac{3}{5}$ 應落於 C、D 區間，而後將 $\frac{3}{5}$ 與 $\frac{2}{4}$ 相減算出 $\frac{2}{20}$ ，即為從 C 點往前數全路徑的 $\frac{2}{20}$ 的距離。

從工作中，研究者發現此名學生具有良好的數常識概念，尤其在 c、d 小題中，學生能先判斷位置的落點 (比 $\frac{1}{4}$ 、 $\frac{2}{4}$ 大或小)，再由相減的結果單位量 $\frac{1}{20}$

進一步將 $\frac{1}{4}$ 分成 5 等分即為 5 個 $\frac{1}{20}$ ，最後以 $\frac{1}{20}$ 為單位量正確判斷全路徑的 $\frac{1}{5}$ 與全路徑的 $\frac{3}{5}$ 位置。此外，學生在 a~e 五小題中使用了三種不同的方式判斷各分量的位置，更加說明此學生能靈活運用各種不同的策略進行解題活動，其數常識的能力是值得肯定的。

數常識不足之學生在第二部分表現分析

1. **僅依據運算之性質進行判斷：**此種策略方式是大多數學生所使用的，但在此種策略上學生也產生較多迷思，如學生 S5 認為一個數乘越大的數、除越小的數或加越大的數，其數值會越來越大，一個數減越大的數，其數值會越來越小，但對於不同運算間的大小關係，學生卻無法進行分析；學生 S6 則是認為只要乘或加，所得的數就是最大的；學生 S7 認為只要是乘的都會變越小，除的會變越大；學生 S8 雖有數字的乘除概念，但在第一段路徑時，卻選擇了 $\times 1.25$ 而非 $\div 0.25$ 。這些迷思概念，都顯示學生對於運算間的關係仍不清楚，也未考慮乘數或所加的數字大小，更可能是僅單純記憶公式化的結果。

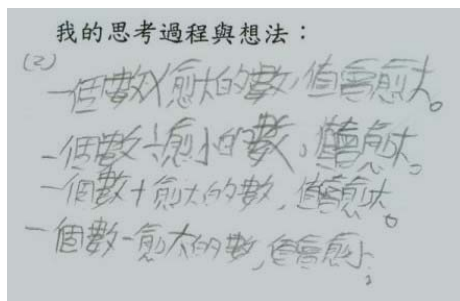


圖 6：S6 學生工作單 2



圖 7：S6 學生工作單 2



圖 8：S7 學生工作單 2

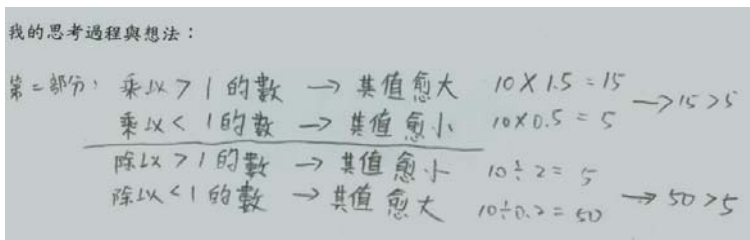


圖 9：S8 學生工作單 2

2. 就每個路徑點考慮可獲得的最大數據進行選擇：學生 S9 與 S10 的作法皆將每一路徑會遇到的運算進行比較，再選出數值結果最大者，過程當中並未考慮路徑之後會遇到的運算所產生的影響，僅單就每個階段進行分析。其中，S9 之學生在過程部份更使用了錯誤的方式列出的等式。

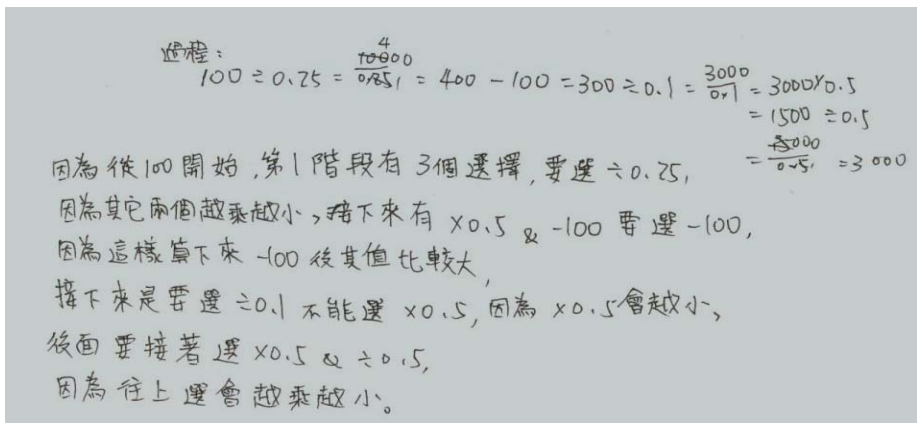


圖 10：S9 學生工作單 2

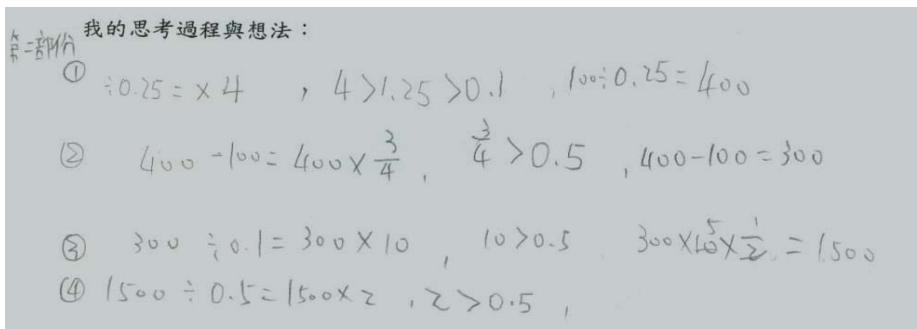


圖 11：S10 學生工作單 2

3. 直接算出路徑值：學生 S11 直接計算各路徑的數值結果，再選出數值較大者進行下一路徑的運算，並不能藉由觀察運算間的關係進行選擇，僅單純依賴實際計算的數據選擇路徑，在過程中，也產生計算錯誤的部份。

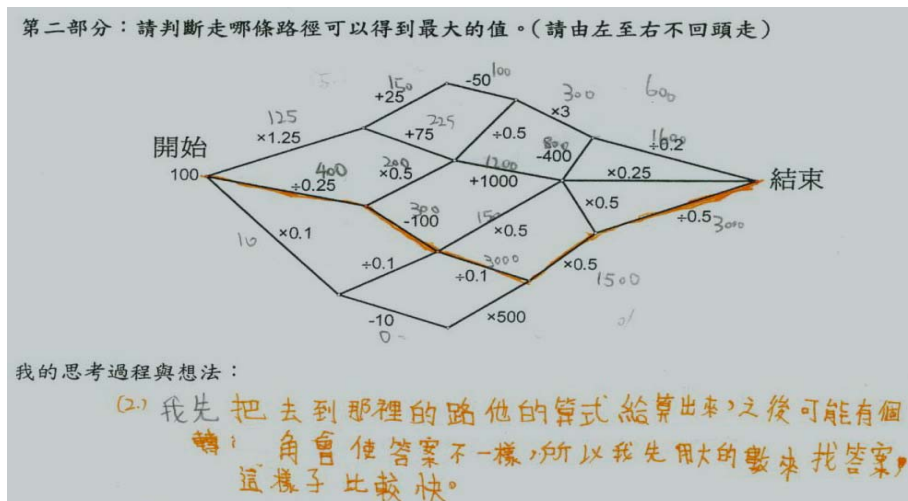


圖 12：S11 學生工作單 2

具數常識之學生在第二部分表現分析

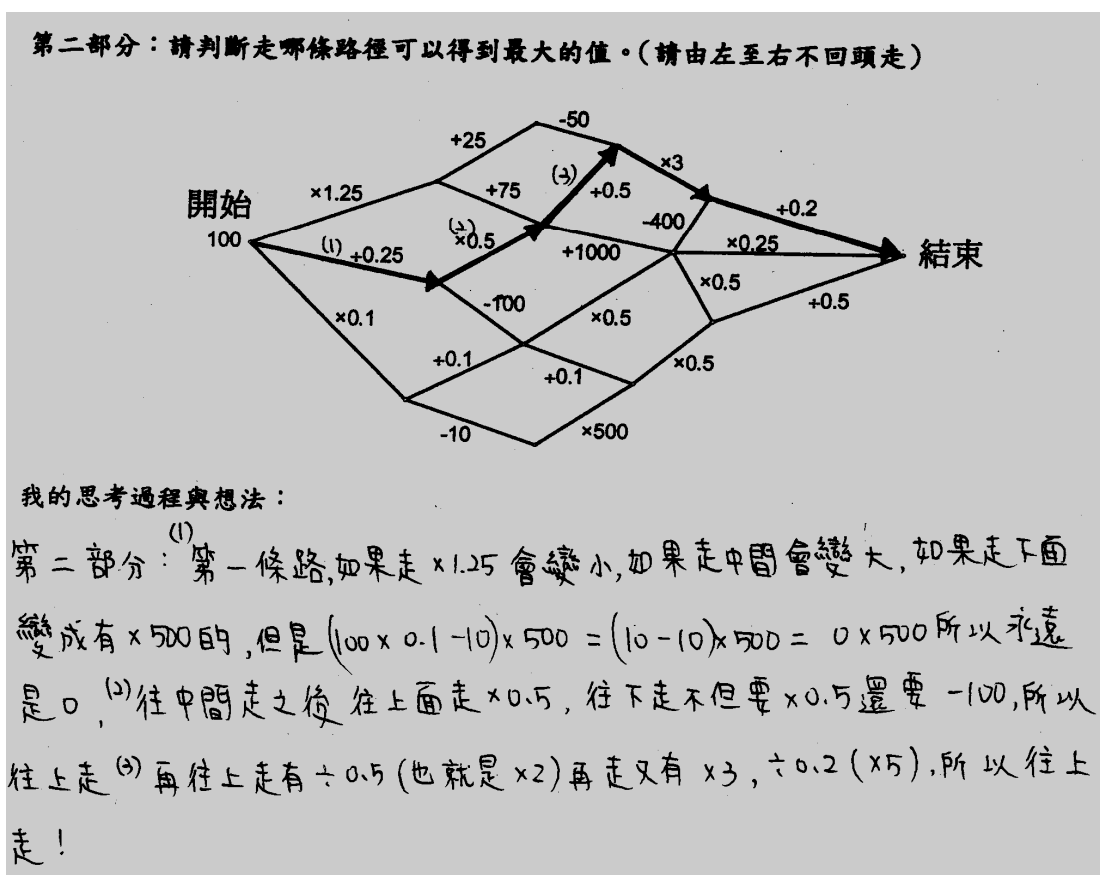


圖 13：S12 學生工作單 2

1. 考慮之後路徑的運算所造成的數據改變來進行每一步驟的選擇：學生在每條路徑的選擇上，皆能先分析路徑之後的運算所造成的數據改變，再

由此選擇出會使得數據最大的路徑。如學生的工作單所述，希望選到有 $\times 500$ 的路徑，但進一步發現 $100 \times 0.1 - 10$ 之後會使得其值為0，因此往下的路徑並不能獲得最大值。

2. **不經由實際算出數值而選取路徑**：此名學生在路徑的選擇上有別於其他學生，並不直接算出數值，只有在選擇 $\times 500$ 的路徑上進一步算出

$100 \times 0.1 - 10$ 其值為0，其餘的路徑選擇，皆以使數據變大為考量依據。

此名學生是本次受測30名學生中唯一答對的學生，也是唯一在分析上有考慮路徑之後的運算所造成數據的改變。學生在剛開始寫下 $\times 1.25$ 會變小，研究者猜測此名學生可能在乘比1大或比1小的數字大小變化上仍有概念不清楚，但其分析的方式有別於其他學生僅單獨考慮每一點的最大值，所以能找出正確的路徑。其分析的過程當中並不直接算出數值，只是以數據變大變小為考量依據。因此，此名學生具有較好的數常識能力。

小結

進一步針對第一、二部分學生數常識測驗卷進行分析，發現在第一部分數常識不足之學生的解題策略為(1)由已知圖形與數據直接進行運算，(2)嘗試將正方形全路徑視為一條直線，(3)丈量長度直接計算；而具數常識之學生的解題策略有(1)由圖形的邊長判斷單位量，(2)由圖形邊數與欲分割的單位量求出分割數，(3)先以大單位量判斷位置落於何處，再以小單位量找出正確位置。而第二部分數常識不足之學生的解題策略有(1)僅依據運算之性質進行判斷，(2)就每個路徑點考慮可獲得的最大數據進行選擇(3)直接算出路徑值；而具數常識之學生的解題策略有(1)考慮之後路徑的運算所造成的數據改變來進行每一步驟的選擇(2)不經由實際算出數值而選取路徑。

五、省思

此次的數常識測驗活動，由於時間、地點及研究對象所限，研究者不能進一步對學生進行訪談以了解其解題歷程與想法，為本研究不足之處。然而，學生的答題狀況發現，雖第一部分各題學生皆有近50%的答對率，但由各小題的正確率也可看出對於已知的數據，學生較能藉由計算直接求出答案，而非計算式的判斷

題目學生較難正確作答，甚至於受測的學生當中有一名學生竟直接將試卷上的正方形長度用尺測量出來，再直接依題目算出各單位量的長度，最後再用尺測量出長度並在正方形圖形上標出座標點；而在試卷 2a 能正確作答的學生也很少進一步思考而在試卷 1d 正確作答，這些都足以顯示學生在數常識概念上的不足，僅單純藉由計算求出答案，對於單位量感與題目間的概念關係也很難進一步進行思考。而第二部份為試卷較難的題目，僅有一名學生正確作答，分析學生的表現研究者發現，大多數學生僅考慮每個點之後會使得數據最大的路徑，卻忽略了其路徑前後可能造成的影響，因此未能正確作答。

藉由此次的活動，研究者不僅發現學生對於數常識的概念仍顯不足，更看出熟於傳統計算的學生在試題的靈活思考上是有所受限的，而大部分學生處理數學問題時，也無法對題目作全面性的了解與思考，此結果整與先前之研究發現相呼應(Markovits & Sowder, 1994; Yang, 2003, 2005)，中小學生之數常識能力普遍表現不佳，學校之數學教育應進一步加強數常識之發展與培養。因此，本研究更呼應了 NCTM (2000) 中所強調發展數常識為中小學數學課程的主要目的。學生的數常識概念應被重視、被發現、被瞭解，並適時透過有效的教學與補救策略以提升學生的數感能力。

而在路徑活動的設計上，本次研究者所設計之數常識測驗卷屬於概念性知識，試題中的路徑為封閉式，不同於以往所呈現的直線式，許多學生也因此無法解題，研究者推測學生平時可能慣於在路徑問題上利用直接平分數線的方式解題，或是直接由已知數據運算出答案，也因此無法靈活運用分數的相對大小進行解題。研究者建議教師於此部分的教學上，可設計直線式與封閉式的路徑問題讓學生進行思考與討論，並以此檢視學生的學習成效，教學中也可刺激學生採用不同的解題策略，以建構學生的數常識能力。

參考文獻

- 楊德清(2000)。國小六年級學生回答數字常識問題所使用之方法，*科學教育學刊*，8(4)，379-394。
- 楊德清(2002)。從教學活動中幫助國小六年級學生發展數字常識能力之研究，*科學教育學刊*，10(3)，233-260。
- Australian Education Council. (1991). *A national statement on mathematics for Australian schools*. Melbourne: Curriculum Corporation.
- Berch, D. B. (2005). Making sense of number sense: Implications for children with mathematical disabilities. *Journal of Learning Disabilities*, 38(4), 333-339.
- Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (Eds.). (2001). *Adding It Up: Helping Children Learn Mathematics*. Washington, DC: National Academy Press.
- McIntosh, A., Reys, B. J., & Reys, R. E. (1992). A proposed framework for examining Basic number sense. *For the Learning of Mathematics*, 12(3), 2-8.
- McIntosh, A., Reys, B. J., & Reys, R. E. (1997). *Number Sense grades 6-8*, Palo Alto: Dale Seymour Publications.
- National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *The Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Reys, R. E. & Yang, D. C. (1998). Relationship between Computational Performance and Number Sense among Sixth- and Eighth-Grade Students in Taiwan, *Journal for Research in Mathematics Education*, 29, 225-37.
- Yang, D. C. (2003). Teaching and Learning Number Sense—An Intervention Study of fifth grade students in Taiwan, *International Journal of Science and Mathematics Education*, 1(1), 115-134.
- Yang, D. C. (2005). Number Sense Strategies used by Sixth Grade Students in Taiwan, *Educational Studies*, 31(3), 317-334.