

## 第二章 文獻探討

### 2-1 文獻回顧

倒單擺控制最簡單的方法，是將系統在不穩定平衡點處(操作點處)線性化。在此不穩定平衡點附近，只要使用狀態回授控制或是 PID 控制，就能完成穩定直立。此外，為了改善擺杆遠離穩定直立操作點時的非線性現象，Lin 利用兩種控制法則切換的方式(Hybrid System)，使用模糊邏輯來甩起倒單擺，到了穩定直立點附近時，才切換成線性化的狀態回授控制[11]。而 Widjaja 則是研究分別運用線性二次調節整器(Linear Quadratic Regulator, LQR)與具有自動調整解析度的模糊邏輯控制來使倒單擺穩定直立[12]，而 Haihua Gaoh 利用李雅普諾夫(Lyapunov)方法設計並延伸適性控制在倒單擺控制的效能[13]。Williams 與 Nelson 分別使用倒傳遞類神經網路(Back Propagation Network)與小腦模型神經網路(CMAC Network)等智慧型控制來學習倒單擺系統動態與控制器行為[32-33]。

在倒單擺穩定直立的同時，如果也要求滑車能具備定位的功能，那麼一維倒單擺就是個單輸入(對滑車的施力)、雙輸出(擺杆的角度與滑車的位置)的系統。Bradshaw 使用線性二次調整器(LQR)的設計就能夠同時完成倒單擺穩定倒立與定位[14]。Chen 以滑順模式控制為主體，以模糊邏輯補償系統的非線性，利用系統輸出與一參考模型對模糊邏輯做自適應(Adaptive)調整，因為此一參考模型的幫助，系統遵循設定好的軌跡而同時完成穩定倒立與定位[15]。Li 則是根據人類以手操作舉起倒單擺的經驗，設計兩個模糊順滑控制器，一個處理倒單擺角度與滑車位置同為正負號的情況，另一個處理倒單擺角度與滑車位置不同號的情況，這兩個控制器彼此間適當地切換，就能同時完成平衡定位控制[16]。

關於 ANFIS 在倒單擺控制上的應用，Song 和 Smith 利用快速增量最佳估測直接搜循(Fast IBEDS)，建立在以 Takagi-Sugeno 型為構架的模糊控制器，在論文提出利用 ANFIS 和 Fast IBEDS 去得到全域模糊控制器的最佳化 [17]。Ghanbari 和 Farrokhi 提出利用 ANFIS 和滑順模式運用在二維倒單擺系的控制方法，其中二維倒單擺被分為兩個子系統，各別運用滑動模式控制，再利用 ANFIS 學習產生所需的模糊控制器[18]。

## 2-2 滑車直線運動之簡單無擺錘倒單擺系統的數學模型推導

被控制系統(Plant)的數學模型推導建立大致可以分為兩種：實驗建模和機構建模。實驗建模就是通過在研究的對象上面加上一系列的事先確定的輸入訊號，激勵被控制對象並透過感測器檢測其可觀測的輸出訊號，應用數學手段建立起系統輸入—輸出關係。這裡面包括輸入訊號的設計選取，輸出信號的精確擷取與偵測，數學推導的研究等等內容。機構建模就是分析研究對象的運動規律的基礎上，透過物理、化學的知識和數學的手段推導建立系統內部的輸入—狀態關係。

由於倒單擺系統，本身就是非常不穩定的系統，數學模型推導的過程存在著相當的困難度。但是經過小心的假設忽略掉一些次要的因素後，倒單擺系統就是一個典型的剛體運動系統，可以在慣性坐標系內應用古典力學理論建立系統的動力微分方程式。本節後面所將陳述的，就是過去文獻所提出的數學模型推導方法，常用的方法有兩種，一是“牛頓—尤拉方法”(Newton-Euler)，另一是“能量法”。

### 2-2-1 數學模型之動力微分方程式的推導(牛頓—尤拉方法)

在忽略了空氣阻力，及各種摩擦之後，可將滑車直線運動之無擺錘倒單擺系統抽象的表示成為滑車和均質擺杆組成的系統，如下圖 2-1 所示。

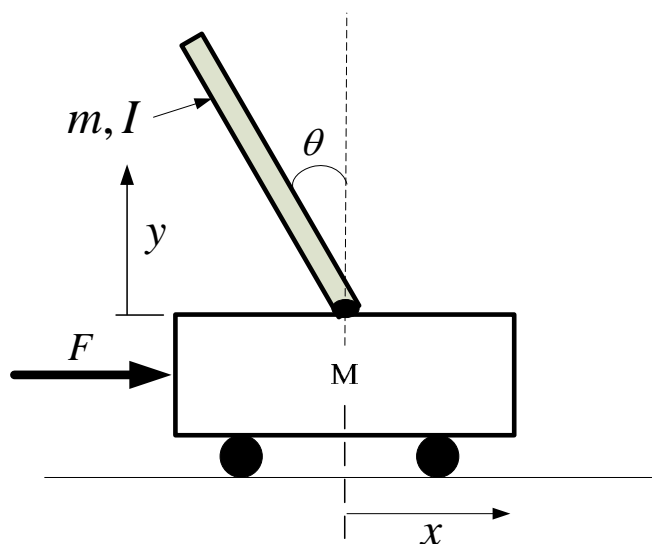


圖 2-1 滑車直線運動之無擺錘之倒單擺系統

上圖 2-1 可先做以下的變量假設：

$M$ ：滑車的質量

$m$ ：擺杆質量

$b$ ：滑車摩擦系數

$l$ ：擺杆轉動軸心到桿質心的長度

$I$ ：擺杆慣量

$F$ ：加在滑車上的力

$x$ ：滑車位置

$\phi$ ：擺杆與垂直向上方向的夾角

$\theta$ ：擺杆與垂直向下方向的夾角(考慮到擺杆初始位置為豎立向下)

下圖 2-2 是系統中滑車和擺杆的受力分析的自由體圖。其中， $N$  和  $P$  為滑車與擺杆相互作用力的水平和垂直方向的分量。此處有點要特別注意，是在實際倒單擺系統中檢測和執行裝置的正負方向已經完全確定，因而向量方向定義如圖 2-2 所示，圖示方向為向量正方向。

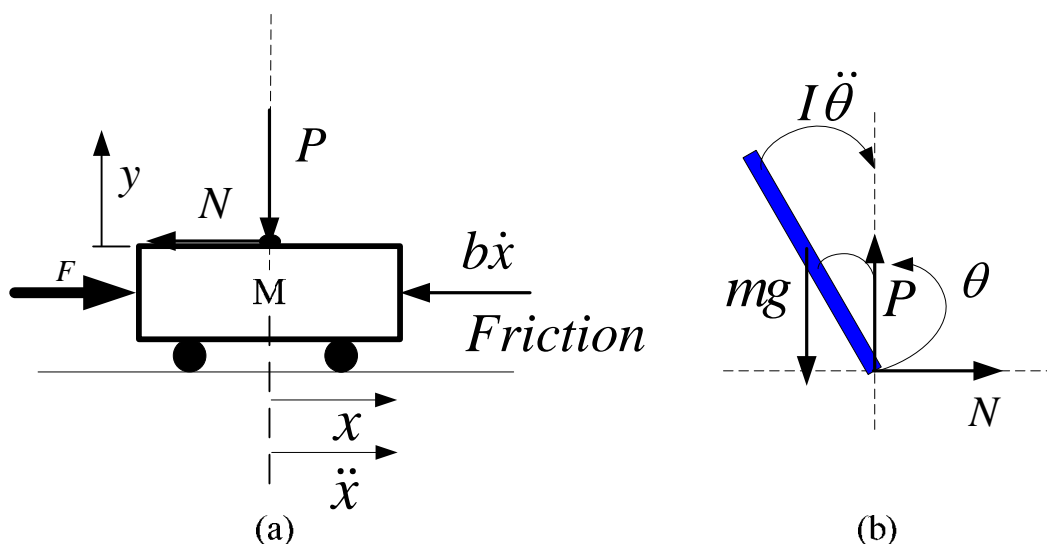


圖 2-2 (a)滑車隔離受力的自由體 (b)擺杆隔離受力的自由體圖

分析滑車水平方向所受的合力，可得以下平衡方程式：

$$M\ddot{x} = F - b\dot{x} - N \quad (2-1)$$

由於擺杆水平方向所受的合力，可以得到下面等式：

$$N = m \frac{d^2}{dt^2} (x + l \sin \theta) \quad (2-2)$$

即： $N = m\ddot{x} + ml\ddot{\theta} \cos \theta - ml\dot{\theta}^2 \sin \theta$ ，把這個等式代入上式中，就得到系統的第一個運動方程式：

$$(M + m)\ddot{x} + b\dot{x} + ml\ddot{\theta} \cos \theta - ml\dot{\theta}^2 \sin \theta = F \quad (2-3)$$

為了推導出系統的第二個運動方程式，可對擺杆垂直方向上的合力進行分析，可以得到下面方程式：

$$P - mg = m \frac{d^2}{dt^2} (l \cos \theta) \quad (2-4)$$

即:  $P - mg = -ml\ddot{\theta} \sin \theta - ml\dot{\theta}^2 \cos \theta$

力矩平衡方程式如下:

$$-Pl \sin \theta - Nl \cos \theta = I\ddot{\theta} \quad (2-5)$$

在此注意,此方程式力矩的方向,由於  $\theta = \pi + \phi$ ,  $\cos \phi = -\cos \theta$ ,  $\sin \phi = -\sin \theta$ , 故等式前面有負號。

合併這兩個方程式,約去 P 和 N, 得到第二個運動方程式:

$$(I + ml^2)\ddot{\theta} + mgl \sin \theta = -ml\ddot{x} \cos \theta \quad (2-6)$$

設  $\theta = \pi + \phi$  ( $\phi$  是擺杆與垂直向上方向之間的夾角), 假設  $\phi$  與 1(弧度)相比很小, 即  $\phi \ll 1$ , 則可以進行近似處理:  $\cos \theta = -1$ ,  $\sin \theta = -\phi$ ,  $(\frac{d\theta}{dt})^2 = 0$ 。用  $u$  來代表被控制對象的輸入力  $F$ , 線性化後兩個運動方程式如下:

$$\begin{cases} (I + ml^2)\ddot{\phi} - mgl\phi = ml\ddot{x} \\ (M + m)\ddot{x} + b\dot{x} - ml\ddot{\phi} = u \end{cases} \quad (2-7)$$

### 2-2-2 系統的轉移函數

對聯立方程組(2-7)進行拉普拉斯轉換, 得到

$$\begin{cases} (I + ml^2)\Phi(s)s^2 - mgl\Phi(s) = mlX(s)s^2 \\ (M + m)X(s)s^2 + bX(s)s - ml\Phi(s)s^2 = U(s) \end{cases} \quad (2-8)$$

在此處, 推導轉移函數(Transform Function)時假設初始條件為 0。由於輸出角度  $\phi$ , 求解角聯立方程組(2-8)的第一個方程, 可以得到

$$X(s) = \left[ \frac{(I + ml^2)}{ml} - \frac{g}{s^2} \right] \Phi(s) \quad (2-9)$$

把上式代入聯立方程組(2-8)的第二個方程式，可以得到

$$(M + m) \left[ \frac{(I + ml^2)}{ml} - \frac{g}{s^2} \right] \Phi(s) s^2 + b \left[ \frac{(I + ml^2)}{ml} - \frac{g}{s^2} \right] \Phi(s) s - ml \Phi(s) s^2 = u(s) \quad (2-10)$$

將它們整理後得到轉移函數：

$$\frac{\Phi(s)}{U(s)} = \frac{\frac{ml}{q} s^2}{s^4 + \frac{b(I + ml^2)}{q} s^3 - \frac{(M + m)mgl}{q} s^2 - \frac{bmg l}{q} s} \quad (2-11)$$

其中

$$q = [(M + m)(I + ml^2) - (ml)^2] \quad (2-12)$$

### 2-2-3 系統的狀態空間方程式

系統的狀態空間方程式的型式為

$$\begin{aligned} \dot{X} &= AX + Bu \\ y &= CX + Du \end{aligned} \quad (2-13)$$

方程組(2-3)對  $\ddot{x}$ ， $\ddot{\phi}$  解代數方程，得到的解如下：

$$\begin{cases} \dot{x} = \dot{x} \\ \ddot{x} = \frac{-(I + ml^2)b}{I(M + m) + Mml^2} \dot{x} + \frac{m^2 gl^2}{I(M + m) + Mml^2} \dot{\phi} + \frac{(I + ml^2)}{I(M + m) + Mml^2} u \\ \dot{\phi} = \dot{\phi} \\ \ddot{\phi} = \frac{-mlb}{I(M + m) + Mml^2} \dot{x} + \frac{mgl(M + m)}{I(M + m) + Mml^2} \dot{\phi} + \frac{ml}{I(M + m) + Mml^2} u \end{cases} \quad (2-14)$$

整理後得到無擺錘之倒單擺系統的狀態空間方程式：

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \dot{\phi} \\ \ddot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-(I+ml^2)b}{I(M+m)+Mml^2} & \frac{m^2gl^2}{I(M+m)+Mml^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{-mlb}{I(M+m)+Mml^2} & \frac{mgl(M+m)}{I(M+m)+Mml^2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \phi \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{I+ml^2}{I(M+m)+Mml^2} \\ 0 \\ \frac{ml}{I(M+m)+Mml^2} \end{bmatrix} u \quad (2-15)$$

及

$$y = \begin{bmatrix} x \\ \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \phi \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (2-16)$$

#### 2-2-4 數學模型的動力微分方程式的推導(能量法)

除了用牛頓—尤拉方法建模，有些文獻是利用拉格朗日方程(Lagrange's Equation)，即廣義坐標動力學方程式，推求無擺錘倒單擺系統的數學模型。

系統的拉格朗日方程式可表示為：

$$L(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) - V(q, \dot{q}) \quad (2-17)$$

其中， $L$ 為拉格朗日算子， $q$ 為系統的廣義座標， $T$ 為系統的動能， $V$ 為系統的位能。拉格朗日方程式由廣義座標和 $L$ 表示為：

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = u_i \quad (2-18)$$

其中， $i=1,2,3 \cdots n$ ， $q_i$ 為對應的廣義速度， $u_i$ 為系統沿該廣義座標方向上的外力(力或的矩)，本系統中，設系統的兩個廣義座標分別是 $x$ 與 $\theta$ 。如下圖 2-3 所示，如同前面利用牛頓—尤拉方法推導建模的系統一樣，系統抽象成為均質滑車、均質擺杆組成的剛體系統。假設

$M$  : 滑車的質量

$m$  : 擺杆質量

$b$  : 滑車摩擦系數

$L$  : 擺杆長度

$k$  : 擺杆上分析點與滑車之距離

$\rho_l$  : 擺杆密度( $m/l$ )

$F$  : 加在滑車上的力

$x$  : 滑車位置(移動距離)

$\theta$  : 擺杆搖擺角度

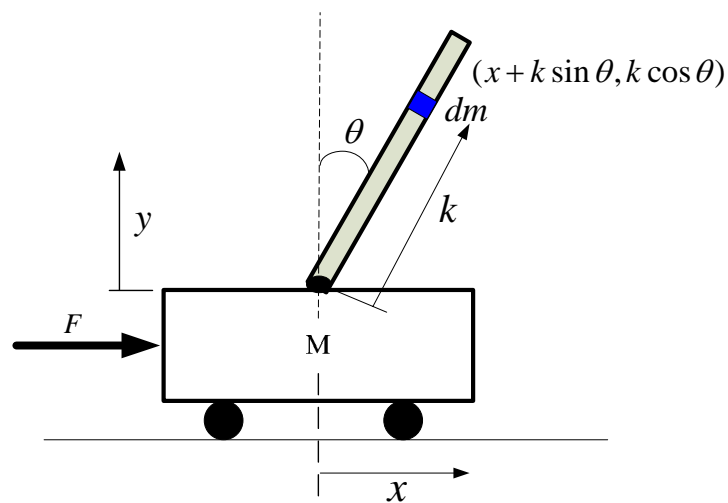


圖 2-3 無擺錘倒單擺之能量法分析圖

無擺錘之倒單擺系統的動能可表示為

$$T = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \int \frac{1}{2} \cdot dm \cdot V_m^2 \quad (V_m : \text{擺杆速度}, \dot{x} = \frac{dx}{dt})$$



$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \int \rho_l \cdot dk \cdot [(\dot{x} + k \cdot \cos \theta \cdot \dot{\theta})^2 + (k \cdot \sin \theta \cdot \dot{\theta})^2] \\
&= \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \cdot \rho_l \int dk \cdot [(\dot{x} + k \cdot \cos \theta \cdot \dot{\theta})^2 + (k \cdot \sin \theta \cdot \dot{\theta})^2] \\
&= \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{\rho_l}{2} \left[ \int \dot{x}^2 dk + \int 2 \dot{x} k \cos \theta \cdot \dot{\theta} \cdot dk + \int k^2 \cos^2 \theta \cdot \dot{\theta}^2 \cdot dk + \int (k \sin \theta \cdot \dot{\theta})^2 dk \right] \\
&= \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{\rho_l}{2} \left[ l \cdot \dot{x}^2 + 2 \dot{x} \cos \theta \cdot \dot{\theta} \left( \frac{l^2}{2} \right) + \cos^2 \theta \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \left( \frac{l^3}{2} \right) + \sin^2 \theta \cdot \dot{\theta}^2 \left( \frac{l^3}{2} \right) \right] \\
&= \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} ml \cos \theta \dot{x}^2 + \frac{1}{6} ml^2 \dot{\theta}^2 \tag{2-19}
\end{aligned}$$

系統位能為

$$\begin{aligned}
V &= \int dm \cdot g \cdot dk \cdot \cos \theta \\
&= \int g \cdot \cos \theta \cdot \rho_l \cdot k \cdot dk \\
&= \rho_l g \cdot \cos \theta \int_0^l k \cdot dk \\
&= \rho_l g \cdot \cos \theta \cdot \frac{l^2}{2} = \frac{1}{2} mgl \cos \theta \\
&= \frac{1}{2} mgl \cos \theta \tag{2-20}
\end{aligned}$$

將(2-19)式與(2-20)式代入(2-17)式，Lagrange 函數可表示為

$$L = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} ml \cos \theta \dot{x}^2 + \frac{1}{6} ml^2 \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} mgl \cos \theta \tag{2-21}$$

再將(2-21)式帶入(2-18)式，取  $x$  (位置) 為變數可得

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = F \tag{2-22}$$

也就是

$$(M + m) \ddot{x} + \frac{1}{2} ml \cos \theta \ddot{\theta} - \frac{1}{2} ml \sin \theta \dot{\theta}^2 = F \tag{2-23}$$

同理，取  $\theta$  (擺杆的擺角) 為變量可得

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \quad (2-24)$$

即

$$\frac{1}{2} ml \cos \theta \ddot{x} + \frac{1}{3} ml^2 \ddot{\theta} - \frac{1}{2} ml \sin \theta = 0 \quad (2-25)$$

由(2-23)式與(2-25)式，可得

$$\begin{bmatrix} M+m & \frac{1}{2} ml \cos \theta \\ \frac{1}{2} ml \cos \theta & \frac{1}{3} ml^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} ml \sin \theta \dot{\theta} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} ml \sin \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2-26)$$

(2-26)式，即為無擺錘之倒單擺系統的動態方程式。由(2.26)式可以求出  $\ddot{x}$  與  $\ddot{\theta}$ ，即

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} &= \frac{1}{\frac{1}{3}(M+m)ml^2 - \frac{1}{4}m^2l^2 \cos^2 \theta} \begin{bmatrix} \frac{1}{3}ml^2 & -\frac{1}{2}ml \cos \theta \\ -\frac{1}{2}ml \cos \theta & M+m \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{3}(M+m)ml^2 - \frac{1}{4}m^2l^2 \cos^2 \theta} \begin{bmatrix} \frac{1}{3}ml^2 F + \frac{1}{6}m^2l^3 \sin \theta \dot{\theta}^2 - \frac{1}{4}m^2 l^2 g \cos \theta \sin \theta \\ -\frac{1}{2}ml \cos \theta F - \frac{1}{4}m^2l^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\theta}^2 + (M+m)mg \frac{1}{2} \sin \theta \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2-27)$$

在此式並不考慮空氣阻力與摩擦力的影響，(2-27)式乃是一個非線性的系統。為了簡化問題，將(2-27)式加以線性化(Linearization)。假設擺桿擺動角度( $\theta$ )極小時，利用  $\theta \rightarrow 0 \Rightarrow \cos \theta \rightarrow 1$ ， $\theta \rightarrow 0 \Rightarrow \sin \theta \rightarrow \theta$ ，且忽略非線性項  $\theta \dot{\theta}$  及  $\dot{\theta}^2$ ，則可將(2-15)式線性化為

$$\begin{bmatrix} M+m & \frac{1}{2} ml \\ \frac{1}{2} ml & \frac{1}{3} ml^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} ml \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2-28)$$

由(2-28)式可得

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} M+m & \frac{1}{2}ml \\ \frac{1}{2}ml & \frac{1}{3}ml^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} F \\ \frac{1}{2}mgl\theta \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{3}(M+m)ml^2 - \frac{1}{4}m^2l^2} \begin{bmatrix} \frac{1}{3}ml^2 & -\frac{1}{2}ml \\ -\frac{1}{2}ml & M+m \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} F \\ \frac{1}{2}mgl\theta \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2-29)$$

將(2-29)式化成狀態變數形式(state-variable form)，即

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m^2gl^2}{I(M+m)+Mml^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{mgl(M+m)}{I(M+m)+Mml^2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{I+ml^2}{I(M+m)+Mml^2} \\ 0 \\ \frac{ml}{I(M+m)+Mml^2} \end{bmatrix} F \quad (2-30)$$

此式對於細長的擺杆而言， $I = \frac{1}{3}ml^2$  等於擺杆相對於滑車上樞軸支點上的慣性矩。在與上一節所述，運用牛頓—尤拉方法推導數學模型(2-15)式相比，若不考慮與空氣的影響和忽略摩擦力，則所得的式子相等。

## 2-3 模糊理論

模糊理論誕生於 1965 年，由美國加州柏克萊大學的 L. A. Zadeh 教授提出以模糊集合(Fuzzy Sets)，以仿照人類的思考模式，用邏輯推理的方式將模糊資訊量化的理論[19]，以彌補傳統明確集合二分法的缺點。模糊理論和傳統數學理論在結構上很類似，但本質上有所不同。傳統邏輯是採用二值邏輯，不是真就是假，而模糊邏輯是採用多值邏輯，敘述除了可以是真或假外，其中還允許許多漸進的值；而模糊集合論中，集合的歸屬度，不再只有“是”與“否”二個選項，而是有程度上是多或是少的差別。

英國倫敦大學分校聖馬麗女王學院(Queen Mary College)的 E. H. Mamdani 教授首先根據 L. A. Zadeh 所提出的語意式分析法(Linguistic Approach)與模糊推論(Fuzzy Inference),將模糊邏輯(Fuzzy Logic)成功的應用於蒸汽機的壓力與速度控制[20-21],從此模糊控制便逐漸在控制領域受到矚目,而成為控制領域的一支。1980 年代日本工業界將模糊邏輯廣泛應用於家電產品及地下鐵自動駕駛系統上,更是因而聲名大噪。根據模糊控制理論所設計出來的模糊邏輯控制器(Fuzzy Logic Controller, FLC),是一個容易控制與掌握的非線性控制器,並具有絕佳的自適應(Adaptation)、強健性(Robustness)以及容錯能力(Fault Tolerance)等優點,因此特別適用於非線性、時變或模式不確定的系統上。目前與模糊控制有關的研究,在理論方面有, Qiao 和 Mizumoto 利用非等距式三角型歸屬函數以及局部線性化的技巧,將 FLC 近似為傳統的 PD 控制器[22];Lewis 和 Liu 利用非等距式三角型歸屬函數解析輸入與輸出之關係,只要輸入或輸出歸屬函數呈現非等距式分佈, FLC 才能提供足夠的非線性程度[23]。模糊控制是由模糊集合所衍生出來的控制理論,因此底下先由模糊集合開始來做模糊控制理論的概論式的介紹。

## 2-4 模糊集合

傳統普通集合稱為明確集合(Crisp Set),屬於二元邏輯,而模糊集合則是將二元邏輯延伸至多元邏輯,兩者間的差異可以從特徵函數(Characteristic Function)和歸屬函數(Membership Function)的定義來區分。

### 一、特徵函數

假設  $A$  為論域  $X$  中的一個集合,則對任意的  $x \in X$ , 令

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}, \mu_A(x) \text{ 定義為傳統集合 } A \text{ 的特徵函數。其中,}$$

特徵函數  $\mu_A(x)$  不是 1 就是 0，亦即元素  $x$  屬於集合  $A$  或不屬於集合  $A$ 。

## 二、歸屬函數

定義  $\underline{A}$  為論域  $X$  上的模糊集合，則  $\mu_{\underline{A}}(x)$  即為模糊集合  $\underline{A}$  的歸屬函數(Membership Function)，歸屬函數以連續數值來描述一個集合， $\mu_{\underline{A}}(x)$  的值位於  $[0,1]$  的區間之內，並給定模糊集合的模糊程度以定量表示，稱為歸屬度(Membership Grade)，當  $\mu_{\underline{A}}(x)=1$  時，表示  $x$  完全屬於  $\underline{A}$ ；當  $\mu_{\underline{A}}(x)=0$  時，表示  $x$  完全不屬於  $\underline{A}$ ；當  $\mu_{\underline{A}}(x)=0.8$ ，則表示  $x$  歸屬於  $\underline{A}$  的程度是高的，但不完全屬於  $\underline{A}$ 。

## 三、模糊集合的表示式

模糊集合的表示式可以分為以下兩種：

離散型：當論域  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  是有限元素的集合時，

$$\underline{A} = \sum_{i=1}^n \frac{\mu_{\underline{A}}(x)}{x_i} \quad (2-31)$$

連續型：當論域  $X$  是由連續的數值所形成的集合時，

$$\underline{A} = \int_x \frac{\mu_{\underline{A}}(x)}{x} \quad (2-32)$$

### 2-4-1 模糊集合之基本性質

#### 一、 $\alpha$ -截集( $\alpha$ -Cut)

模糊集合  $A$  的  $\alpha$ -截集係一明確集合，以符號  $A_{\sim\alpha}$  來表示，定義為在論域  $X$  中，歸屬度大於或等於  $\alpha$  的所有元素的集合，表示為：

$$A_{\sim\alpha} = \{x \mid \mu_A(x) \geq \alpha, x \in X\} \quad (2-33)$$

## 二、支集(Support)

模糊集合  $A$  的支集，定義為在論域  $X$  中，歸屬度大於 0 的所有元素的集合，表示為：

$$Supp(A) = \{x \mid \mu_A > 0, x \in X\} \quad (2-34)$$

## 三、核心(Core 或 Kernel)

模糊集合  $A$  的核心，定義為在論域  $X$  中，歸屬度等於 1 的所有元素的集合，表示為：

$$Core(A) = \{x \mid \mu_A(x) = 1, x \in X\} \quad (2-35)$$

## 四、高度

模糊集合  $A$  的高度，定義為在論域  $X$  中的最大歸屬度，表示為：

$$Height(A) = \max_{x \in X} \mu_A(x) \quad (2-36)$$

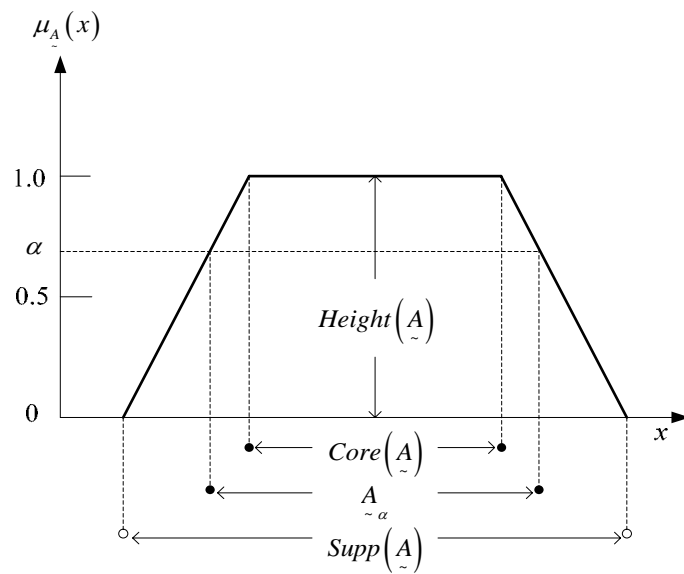


圖 2-4 模糊集合基本性質之示意圖

## 五、語意變數(Linguistic Variables)

語意變數是指在指定的論域之下用來描述一些自然語言的模糊集合，語意變數的論域可以和明確集合的論域相同，但是論域之下則為許多模糊子集合的彙總，語意變數是以自然語言中的字句為值，稱為語意值(Linguistic Value)，而不是以數為值的變數[24]。如圖 2-5 所示，一部汽車的「車速」就是一個語意變數，令車速的範圍是時速 0~240(km/hr)，吾人可以主觀地在論域[0,240]下，定義三個語意值：慢、中、快。

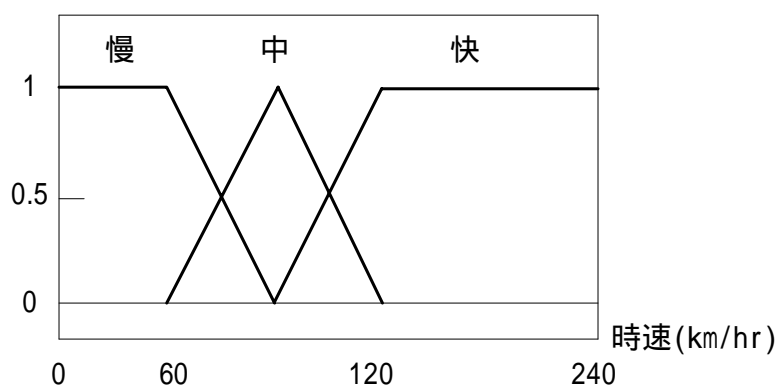


圖 2-5 車速的歸屬函數圖

### 2-4-2 模糊集合之基本運算

傳統集合中交集、聯集與補集的運算法則是唯一的，但在模糊集合運算中，此三個基本運算法則並非唯一的。因為模糊集合的歸屬函數可為介於[0,1]區間中的任何數值，因此模糊集合中交集、聯集與補集的運算必須加以修正，以適應模糊集合的特性[25]。

#### 一、 模糊交集(Fuzzy Intersection)

模糊集合的交集運算是取最小值，若令兩個模糊集合為  $\underline{A}$  和  $\underline{B}$ ，則其交集  $\underline{C} = \underline{A} \cap \underline{B}$  的歸屬函數可由下式表示：

$$\underline{C} = \mu_{\underline{A} \cap \underline{B}}(x) = \wedge [\mu_{\underline{A}}(x), \mu_{\underline{B}}(x)] = \min [\mu_{\underline{A}}(x), \mu_{\underline{B}}(x)] \quad (2-37)$$

其中  $\wedge$  表示取最小值運算。

除了取最小值運算外，亦可採用其他方式，這些運算方式統稱為三角範數(Triangular Norm，簡稱 T-norm)，如表 2-1 為常用之三角範數。



表 2-1 常用之三角範數(norm)

中文名稱	英文名稱	運算方式
最小值	Minimum	$T_{\min}(a, b) = a \wedge b = \min(a, b)$
幾何積	Algebraic Product	$T_{ap}(a, b) = a \cdot b = ab$
邊界積	Bounded Product	$T_{bp}(a, b) = a \odot b = \max(0, a + b - 1)$
激烈積	Drastic Product	$T_{dp}(a, b) = a \cap b = \begin{cases} a, & b = 1 \\ b, & a = 1 \\ 0, & a, b < 1 \end{cases}$

## 二、 模糊聯集(Fuzzy Union)

模糊集合的聯集運算是取最大值，若令兩個模糊集合為  $\underline{A}$  和  $\underline{B}$ ，則其聯集  $\underline{C} = \underline{A} \cup \underline{B}$  的歸屬函數可由下式表示：

$$\underline{C} = \mu_{\underline{A} \cup \underline{B}}(x) = \vee \left[ \mu_{\underline{A}}(x), \mu_{\underline{B}}(x) \right] = \max \left[ \mu_{\underline{A}}(x), \mu_{\underline{B}}(x) \right] \quad (2-38)$$

其中  $\vee$  表示取最大值運算。

除了取最大值運算外，亦可採用其他方式，這些運算方式統稱為反三角範數(Triangular Conorm，簡稱 T-conorm 或 S-norm)，如表 2-2 為常用之反三角範數。

表 2-2 常用之反三角範數(Norm)

中文名稱	英文名稱	運算方式
最大值	Maximum	$S_{\max}(a, b) = a \vee b = \max(a, b)$
幾何和	Algebraic Sum	$S_{as}(a, b) = a \hat{+} b = a + b - ab$
邊界和	Bounded Sum	$S_{bs}(a, b) = a \oplus b = \min(1, a + b)$
激烈和	Drastic Sum	$S_{ds}(a, b) = a \dot{+} b = \begin{cases} a, & b = 0 \\ b, & a = 0 \\ 1, & a, b > 0 \end{cases}$

### 三、 模糊補集(Fuzzy Complement)

若定義  $\bar{A}$  為模糊集合  $A$  的補集，則  $\bar{A}$  的歸屬函數表示成下式：

$$\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x) \quad (2-39)$$

### 2-5 模糊推論

模糊推論(Fuzzy Inference)是依據近似推理(Approximate Reasoning)的概念發展而來，和傳統的明確推理(Exact Reasoning)比較起來，顯得更合理且更具彈性[26]。近似推理有二個重要的模糊蘊含推論規則(Fuzzy Implication Inference Rules)，一個稱為廣義的肯定前件論式(Generalized Modus Ponens, GMP)，又稱為前向推理(Forward Reasoning)；另一個稱為廣義的否定後件論

式 (Generalized Modus Tollens, GMT) , 又稱為後向推理 (Backward Reasoning)。事實上, 廣義的肯定前件論式是肯定前件論式 (Modus Ponens) 的一般化, 而廣義的否定後件論式是肯定後件論式 (Modus Tollens) 的一般化, 分別以表 2-3 及表 2-4 來加以描述。

表 2-3 廣義的肯定前件論式

描 述	實 例
前題 1(規則) : IF x is $\tilde{A}$ , THEN y is $\tilde{B}$	如果天下雨, 則地是濕的
前題 2(事實) : x is $\tilde{A}'$	天下雨了
推理結果 : y is $\tilde{B}'$	地是濕的

表 2-4 廣義的否定後件論式

描 述	實 例
前題 1(規則) : IF x is $\tilde{A}$ , THEN y is $\tilde{B}$	如果天下雨, 則地是濕的
前題 2(事實) : y is $\tilde{B}'$	地是乾的
推理結果 : x is $\tilde{A}'$	天沒有下雨

### 2-5-1 模糊推論方式

在一個模糊控制系統中，控制規則可以用模糊關係來表示，而模糊推論則以合成運算的方式來完成，合成運算的方式有很多種，不同方式的合成運算所得到的結果也會有所差異。目前模糊推論的方法雖然有許許多多，但大體來說可以分為直接推論法和間接推論法兩種，由於直接法在模糊控制裡使用最多，底下作直接法的說明。

規 則：IF  $x$  is  $\tilde{A}$  , THEN  $y$  is  $\tilde{B}$

事 實：  $x$  is  $\tilde{A}'$

結 論：  $y$  is  $\tilde{B}'$  (2-40)

其中「 $x$  is  $\tilde{A}$ 」稱為前件部(前題部)，而「 $y$  is  $\tilde{B}$ 」稱為後件部(結論部)。

所謂的「直接推論法」就是將控制規則利用模糊關係  $\tilde{R}$  來表示後，再將模糊關係  $\tilde{R}$  與事實  $\tilde{A}'$  透過合成運算的方式推論得到結論  $\tilde{B}'$ ，其演算過程可以由圖 2-6 來表示。

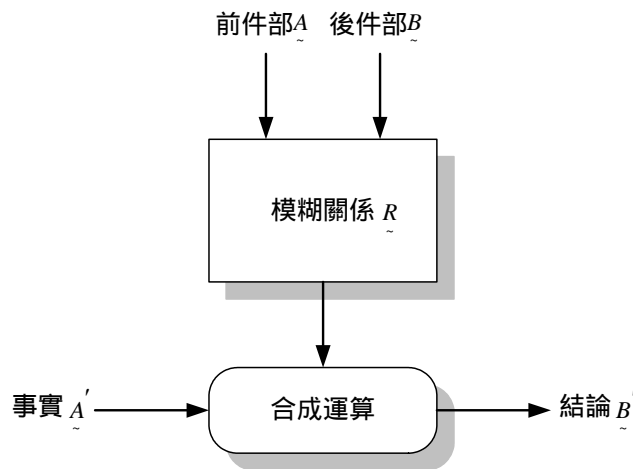


圖 2-6 直接推論法的演算過程

上圖 2-6 的 "If-Then" 規則可構成模糊規則庫，應用在如下圖 2-7 的純模糊邏輯系統，如框圖所示。模糊推論機在模糊推論系統中起著關鍵性的作用，它將輸入模糊集合按照模糊規則映射為輸出模糊集合。純模糊邏輯系統的輸入與輸出均為模糊集合，它提供了一種量化的專家語言訊息和在模糊邏輯原則下系統地利用這類語言訊息的一般化模式。

由於純模糊邏輯系統的輸入和輸出均為模糊集合，而真實的世界絕大部份的工程系統的輸入與輸出都是明確值，因此純模糊邏輯系統不能直接用於實際的工程中。為解決此一問題，有些學者在純模糊邏輯系統的基礎上提出了具有模糊化產生器和解模糊器的模糊邏輯系統（Mamdani 型）。而日本學者高木（Takagi）和關野（Sugeno）則提出了模糊規則的後件部結論為明確值的模糊邏輯系統，稱為高木 - 關野型模糊邏輯系統（Takagi and Sugeno's Fuzzy If-Then Rule）。

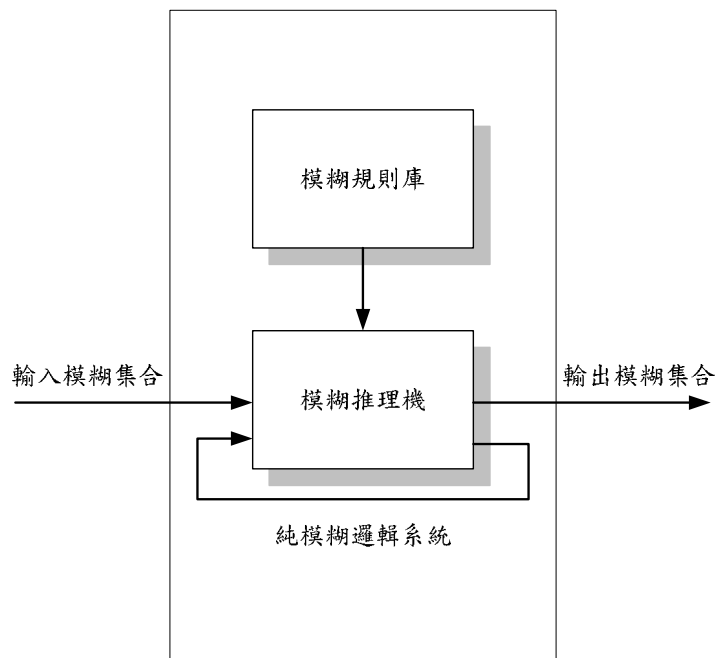


圖 2-7 純模糊邏輯系統之直接推論法的演算過程

## 2-5-2 具有模糊化和解模糊化的模糊邏輯系統

在純模糊邏輯系統的輸入和輸出部分分別添加模糊產生器和模糊消除器，得到的模糊邏輯系統的輸入與輸出均為明確量，因而可以直接在實際工程中加以應用，這類模糊邏輯系統就稱為具有模糊化和解模糊化的模糊邏輯系統。由於其應用的廣泛性，通常就將其簡稱為模糊邏輯系統。這類型的模糊邏輯系統的結構如下圖 2-8 所示。

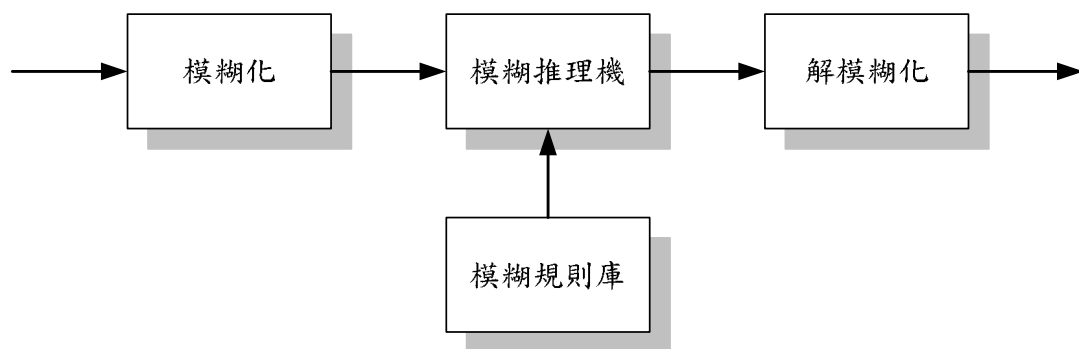


圖 2-8 具有模糊化和解模糊化的模糊邏輯系統

## 2-5-3 Sugeno 型模糊邏輯系統

Takagi-Sugeno 型模糊邏輯系統(又被稱為 Sugeno 型或者 T-S 型模糊邏輯系統)的每個控制規則的前件部與 Mamdani 模糊推論法相同，而特點是其後件部為輸入變數之線性組合，例如假設一個兩輸入單輸出的模糊控制系統，且兩條模糊控制規則分表示成如下二，其推論過程示意圖，如圖 2-9 所示

$$R_1 : \text{IF } x_1 \text{ is } A_{\sim 11} \text{ and } x_2 \text{ is } A_{\sim 12}, \text{ THEN } y_1 = a_1x_1 + b_1x_2 + c_1$$

$$R_2 : \text{IF } x_1 \text{ is } A_{\sim 21} \text{ and } x_2 \text{ is } A_{\sim 22}, \text{ THEN } y_2 = a_2x_1 + b_2x_2 + c_2$$

整個推論步驟之說明如下：

1. 由已知輸入值為  $x_1^0$ 、 $x_2^0$ ，計算各規則前件部之適合度  $w_i$ ，即：

$$w_i = \mu_{A_{\sim 11}}(x_1^0) \wedge \mu_{A_{\sim 12}}(x_2^0)$$

2. 計算每一規則的推論值，即：

$$y_i = a_i x_1 + b_i x_2 + c_i$$

3. 統合所有規以加權平均法來解模糊化求得明確輸出值  $y^0$ ，亦即：

$$y^0 = \frac{\sum_{i=1}^n w_i y_i}{\sum_{i=1}^n w_i}$$

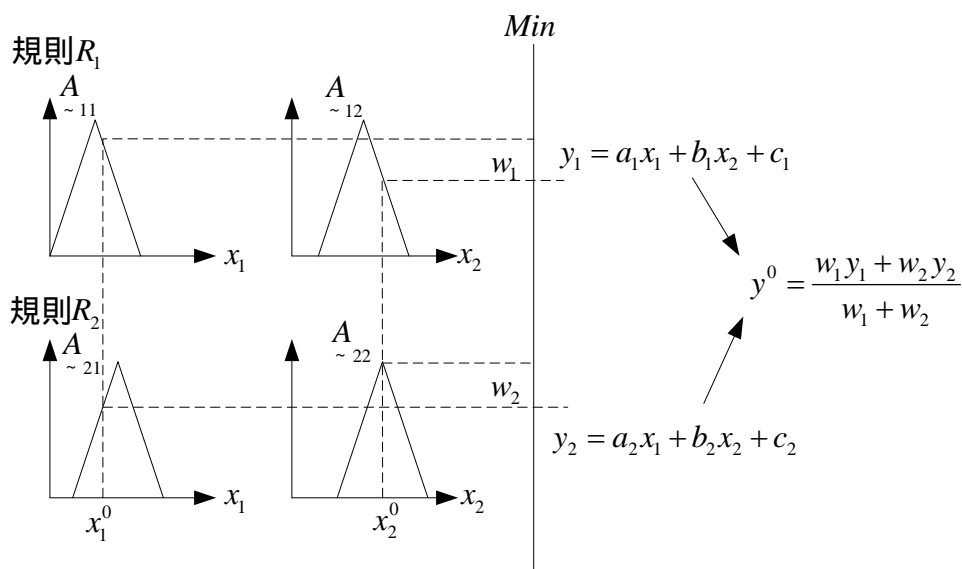


圖 2-9 Sugeno 型模糊邏輯系統示意圖

在本論文中，可調整擺錘之倒單擺追蹤系統，運用 ANFIS 學習所產生的模糊控制器，將屬於 Sugeno 型的模糊邏輯系統。

## 2-6 模糊控制

模糊控制簡單地說就是將專家的知識和操作人員的經驗，表示成「If-Then」的語意式控制規則後，再利用模糊推論法則得到輸出量來達成控制目的，因此模糊邏輯控制器不像傳統控制器需要具有分析控制系統的數學工具，茲歸納其特點如下[27-28]：

1. 不用數值而用語意式的模糊變數來描述系統特徵。
2. 利用條件式控制法則來描述系統變數之間的關係。
3. 不必事先對受控體建立完整的數學模型。
4. 具有較佳的自適應、強健性及容錯能力。
5. 特別適用於非線性、時變和模型不確定的系統。

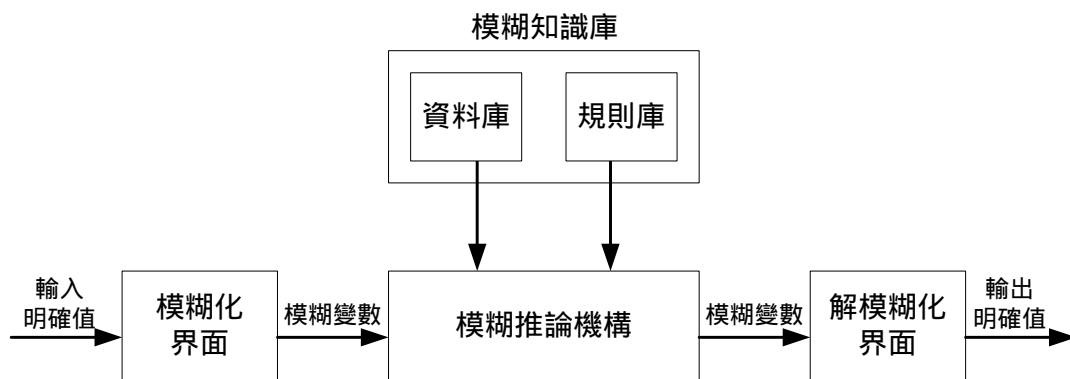


圖 2-10 模糊邏輯控制器方塊圖

如圖 2-10 所示為模糊邏輯控制器方塊圖，其中包括四個主要單元：模糊化界面、知識庫、模糊推論機構與解模糊化界面。一般而言，模糊邏輯控制器(FLC)的設計可分成四大步驟，分別說明如下：

### 步驟一：定義輸入及輸出變數

首先要決定受控系統有那些操作狀態是必須被量測的，以及那些輸出動作是必須被控制的。通常將 FLC 輸入變數的個數稱為維數，



從理論上來講，FLC 的維數愈高，控制的效果愈好，但是維數高的 FLC 實現起來相當複雜和困難；而維數低的 FLC，控制效果又不理想。因此，目前大都使用二維 FLC，其控制精度即可滿足一般要求，一般輸入變數選擇誤差和誤差的變化，輸出變數選擇控制量的變化。決定好輸出入變數後，最後必須考量其實際操作範圍，經由比例因子 (Scaling Factor) 轉換到適當的論域。

## 步驟二：決定模糊化(Fuzzification)的策略

安排每個模糊變數的語意值，亦即將每個輸出入變數分別切割成數個模糊子集合，如：正大(PB)、正中(PM)、正小(PS)、零(ZO)、負小(NS)、負中(NM)、負大(NB)，並決定其相對應的歸屬函數。訂定歸屬函數的適當與否，對於控制器的效能有著重大影響，在一般理論的研究與探討中，常用的歸屬函數形式有三角形、梯形、高斯函數形和鐘形四種，分別說明如下：

### 1. 三角形歸屬函數

三角形歸屬函數具有構造簡單、運算容易，同時在適當的安排下，可以簡化理論分析之複雜度，以符號  $\Lambda(x; a, b, c)$  來表示，其數學公式為：

$$\Lambda(x; a, b, c) = \begin{cases} 0 & , x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & , a \leq x \leq b \\ \frac{c-x}{c-b} & , b \leq x \leq c \\ 0 & , c \leq x \end{cases} \quad (2-41)$$

其中， $a$ 、 $b$ 、 $c$  為實數值之參數且  $a < b < c$ 。

### 2. 梯形歸屬函數

梯形歸屬函數類似於三角形歸屬函數，以符號  $\Pi(x; a, b, c)$  來表示，其數學公式為：

$$\Pi(x; a, b, c, d) = \begin{cases} 0 & , x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & , a \leq x \leq b \\ 1 & , b \leq x \leq c \\ \frac{d-x}{d-c} & , c \leq x \leq d \\ 0 & , d \leq x \end{cases} \quad (2-42)$$

其中， $a$ 、 $b$ 、 $c$ 、 $d$  為實數值之參數且  $a < b < c < d$ 。

### 3. 高斯函數歸屬函數

高斯函數歸屬函數與梯形歸屬函數的最大不同點是，梯形歸屬函數的支點在論域中為有界集合，而高斯函數歸屬函數的支點則涵蓋整個論域，以符號  $G(x; m, \sigma)$  來表示，其數學公式為：

$$G(x; m, \sigma) = e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (2-43)$$

其中， $m$  代表高斯函數的中心值， $\sigma$  代表高斯函數的標準差。

### 4. 鐘形歸屬函數以符號 $B(x; a, b, c)$ 來表示，其數學公式為：

$$B(x; a, b, c) = \frac{1}{1 + \left| \frac{x-c}{a} \right|^{2b}} \quad (2-44)$$

其中， $a$ 、 $b$ 、 $c$  為實數值之參數。

### 步驟三：模糊規則之建立與推論

模糊規則庫是由一條一條的「If—Then」形式的表示式所組成，一般規則庫的建立方式，是事先將專家的知識與現場操作人員的經驗，轉化成語意式的控制規則，此法的缺點是無法做線上修正。因此，可以結合類神經網路來做線上即時的規則庫修改，以適應外在變化；模糊推論是模糊控制的核心，目前的模糊推論法則有許多不同的方法，例如 Mamdani 型模糊推論法和 Sugeno 型模糊推論法，視不同的情況而有不同的選擇。

### 步驟四：決定解模糊化(Defuzzification)的策略

模糊推論所得到的結果，最後必須經由解模糊化方法，將模糊量轉換成明確的輸出控制量，才能用來實際下命令給致動器。以下僅說明常用的解模糊化法：重心法(Center of Gravity)和高度法(Height)。

#### 1. 重心法

重心法是求推論結果陰影面積的重心，並以其對應的元素為輸出操作量，這是最常用的，也是似乎最合理的，可惜的是計算時間稍長，其數學表示式如下：

(1) 當論域是連續時，

$$y^0 = \frac{\int_y \mu_B(y) \cdot y dy}{\int_y \mu_B(y) dy} \quad (2-45)$$

(2) 當論域是離散時，

$$y^0 = \frac{\sum_{i=1}^l \mu_{\tilde{B}}(y_i) \cdot y_i}{\sum_{i=1}^l \mu_{\tilde{B}}(y_i)} \quad (2-46)$$

其中， $l$  代表輸出模糊變數  $y$  的量化數， $y^0$  代表解模糊化後的明確輸出量， $y_i$  代表輸出變數  $y$  第  $i$  個量化值， $\mu_{\tilde{B}}(y_i)$  代表  $y_i$  屬於模糊集合  $\tilde{B}$  的歸屬度。

## 2. 高度法

高度法是以被觸動規則前件部的適合度為後件部的高度，計算方法相當簡單，不像重心法需要動用到積分來解決，因此使用解模糊化法的運算效率很高。

$$y^0 = \frac{\sum_{i=1}^n h(B_{\tilde{i}}) \cdot y_i}{\sum_{i=1}^n y_i} \quad (2-47)$$

其中， $n$  代表觸發到的規則數， $h(B_{\tilde{i}})$  代表後件部模糊集合  $B_{\tilde{i}}$  的高度， $y_i$  代表後件部模糊集合  $B_{\tilde{i}}$  在未經砍頭前之最高點的  $y$  值。

### 2-7 Sugeno 型模糊推論系統設計

傳統的模糊系統為 Mamdani 型模糊模型，輸出為模糊量。而 Sugeno 型系統採用的則是另一種不同的模糊推理的方法，它是在 1985 年被最早提出的。在許多方面與 Mamdani 型系統非常相似，實際上這兩種方法在推理過程

的前兩個步驟(即輸入變量的模糊化和模糊集的合成運算)是完全一致的。Mamdani 型和 Sugeno 型系統最主要的區別就在於：對於 Sugeno 型模糊推論系統，推論規則後項結論中的輸出變量和輸出歸屬函數只能是與輸入有關的常數(Constant)或是線性(Linear)函數。

對於 Sugeno 型模糊推論系統，輸出變量的歸屬度如為線性函數，則稱為一階系統。在零階 Sugeno 型模型中的一條典型的模糊規則具有如下形式：

$$\text{if } x \text{ is } A \text{ and } B \text{ then } z = k$$

其中  $A$  和  $B$  是前項條件中的模糊集，而  $k$  是後項結中所準確定義的常數(非模糊的概念)。如果每條規則的輸出結果都是這樣的常數值，這樣的 Sugeno 型系統與 Mamdani 型系統是非常相似的。所不同的只是：零階 Sugeno 型系統所有規則輸出的歸屬函數都是一個單點集合並且是固定的。Sugeno 型模糊系統的蘊涵算法採用的是簡單的乘法運算(這裡乘法運算與最小運算結果是相同的，因為單點集合在單點上的歸屬度值為 1)，而合成運算採用的只是簡單的將這些單點集合相加。

Sugeno 型推論規則後項結論中的輸出變量和輸出歸屬函數，其函數形式可為：

$$y = a$$

$$y = ax + b$$

在這裡，可看出它與 Mamdani 型模糊模型的區別在於：

- (1)輸出變數為常數值或線性函數；
- (2)輸出為明確量。

Sugeno 型的模糊推理系統非常適於分段線性控制系統，例如在航空載具的飛行控制中，可根據高度和速度(馬赫數)建立 Sugeno 型的模糊推論系

統，實現性能良好的線性控制。在應用中更為普遍的一階 Sugeno 型模糊模型中的模糊規則一般具有以下形式：

$$\text{if } x \text{ is } A \text{ and } y \text{ is } B \text{ then } z = p \times x + q \times y + r$$

其中  $A$  和  $B$  是前項條件中的模糊集合，而  $p$ 、 $q$  和  $r$  都是確定的常數。一階 Sugeno 型系統可以看作是零階系統的擴展，即每一條規則定義了一個動態移動的單點集合的位置(也就是使零階系統規則輸出單點集，以線性的方式在輸出空間根據輸入來上移單點模糊集的位置)，這種方式使得系統的表述十分緊湊和有效率。更高階的 Sugeno 型系統在理論上也是可行的，但是，系統階次的升高往往使問題變得非常複雜且對於解決問題沒有什麼明顯的助益。所以在應用中高階的 Sugeno 型系統是很少見的。目前 MATLAB 的模糊邏輯工具箱也不能直接支援高於一階的 Sugeno 型推論系統，一般的做法可以在模糊邏輯工具箱上進行二次開發，使其支持高階的 Sugeno 型系統。以下說明一階 Sugeno 型模糊模型的建立的例子：

設輸入  $X \in [0,5]$ ， $Y \in [0,10]$ ，將它們模糊化為兩個模糊量：小，大。輸出  $Z$  為輸入  $(x, y)$  的線性函數，模糊規則為：

$$\text{if } X \text{ 為 } small \text{ and } Y \text{ 為 } small \text{ then } Z = -x + y - 3$$

$$\text{if } X \text{ 為 } small \text{ and } Y \text{ 為 } big \text{ then } Z = x + y + 1$$

$$\text{if } X \text{ 為 } big \text{ and } Y \text{ 為 } small \text{ then } Z = -2y + 2$$

$$\text{if } X \text{ 為 } big \text{ and } Y \text{ 為 } big \text{ then } Z = 2x + y - 6$$

模擬出的模糊推論系統的輸入歸屬函數曲線及輸入—輸出曲線如下圖 2-11 及圖 2-12 所示。

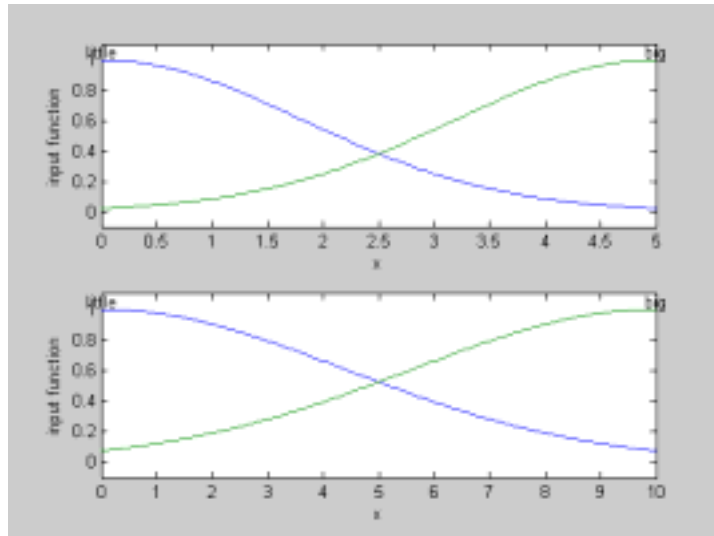


圖 2-11 Sugeno 型模糊推論系統的輸入歸屬函數曲線

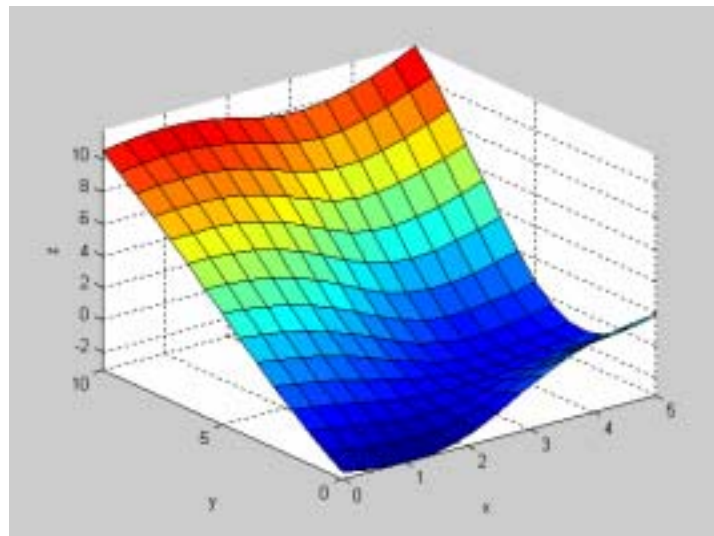


圖 2-12 Sugeno 模糊推論系統的輸入/輸出曲面

當 Sugeno 型模糊推論方法應用於一個非線性系統中時，因為每條規則與系統輸入變量之間有著線性關係，Sugeno 型模糊推論方法可以作為多個線性控制器的內插處理器(多線性系統的綜合處理器)，而這些線性控制器分別對應於動態非線性系統對象不同的工作條件(工作點)。例如飛行器的性能會隨著高度和馬赫數的改變而顯著地變化，線性控制器雖然易於計算並且

能很好地工作於不同的工作狀態，但是這些線性控制器必須進行不斷和平滑的變動來保持與飛行器的工作狀態一致。Sugeno 型的模糊推論系統就是完成這些對輸入空間矩陣線性增益的光滑內插的一種極好的辦法。本質上 Sugeno 方法適合作為這種高效能的處理器的核心控制機制，類似地，它也能通過線性模型內插的方式來應用於非線性系統的數學模型推導問題。

由於 Sugeno 型系統比 Mamdani 系統在形式上更加緊湊和易於計算，使得它可以很方便地採用自適應控制的觀念來建立系統模型。可以用自適應控制的算法來得到輸入變量的歸屬度函數，從而使得我們的模糊模型能以最佳的狀態，匹配我們採用的輸入變量的數據。由於 Sugeno 推論方法具有以下的優點：

1. 計算效率高(線性函數和常數值函數易於計算)。
2. 可以與已有的線性系統理論做好地結合(例如 PID 控制)。
3. 可以與最佳化和自適應技術結合運用。
4. 保證了輸出曲面的連續性。
5. 非常合於數學分析。

所以，本研究的可調整擺錘之倒單擺系統，將以 ANFIS 去設計產生追蹤控制器是不錯的選擇。

## 2-8 自適應網路模糊推論系統

自適應網路模糊推系統(Adaptive Network-Based Fuzzy Inference System)簡稱為 ANFIS，在 1993 年由 Jang 所提出[9]，其主要架構是以模糊推論系統(Fuzzy Inference System, FIS)為網路模式，並結合類神經網路自我組織的特



性。模糊推論以模糊 If-Then 規則對人類知識(Knowledge)與推論過程(Reasoning Processes)執行定性描述與分析，惟缺乏準確的定量分析與數值的校正；另一方面，類神經網路雖具有極佳的自我學習(Learning)能力與組織能力，卻無法處理定性的知識與邏輯論過程，因此 ANFIS 將模糊推論系統與類神經網路結合，也就是將模糊推論系統架構於類神經網路上，使其充發揮模式對於系統不確定性(Uncertainty)與不精確性(Imprecisely)的處理能力，同時具有自我學習與組織力，能夠調整模式的參數。

由於 ANFIS 是以模糊推論系統為基礎，以模糊規則庫為模式架構，不但可將原規則以模糊推論系統為基礎，以模糊規則庫為模式架構，不但可將原規則逐一轉換為模糊規則，亦可藉由資料的模糊聚類(Fuzzy Clustering)或其它聚類分析，將龐大的資料轉換為數量較少的模糊規則庫，以減少參數計算的負擔與資料儲存空間的浪費，同時也可以將專家的經驗與知識轉換成推論規則，以彌補資料對系統描述的不足。

在本章節前面所討論過的一些模糊推論系統在推論時都要經過一系列的映射過程：將變量的輸入特性映射到歸屬度函數，輸入歸屬度函數映射到規則，規則映射到一系列的輸出特性，輸出特性映射到輸出歸屬度函數，輸出歸屬度函數映射到一個單值輸出點或是與輸出有相關的對應函數值。在推論這些過程的時候，只考慮一些給定的（專家經驗）或是任意選取的（直覺經驗）隸屬度函數，因此我們所建立的模糊推論系統模型的模糊規則，在本質上是在操控人員按照已有的知識和經驗對被控制模型的特徵進行解釋的基礎上預先獲得的。

ANFIS 的類神經網路系統之一大特點就是它的自行學習功能，將這種自行學習的方法應用於對模型特徵的分析和建模上，產生了自適應的類神經網路(Adaptive Neural Network)技術。這種自適應的類神經網路對於模糊系統的

模糊規則庫建立，是有用且有效的工具。

ANFIS 最大的特點就是，該系統是基於產生輸出—輸入數據的建模方法的。ANFIS 統中的模糊隸屬度函數及模糊規則是通過對大量已知數據的學習得到的，而不是基於經驗或是直覺任意給定的。這對於那些特性還不被人們所完全了解，或者特性非常複雜的系統是非常有用而且重要的。

基於上述的問題思考，自適應控制是一種解決的方法。但是自適應控制的方法給系統的設計和建構帶來很大的困難和麻煩，涉及到許多專業的高深理論。而不同的自適應控制理論和方法的適用性範圍比較窄，最終的模糊邏輯的自適應控制設計和實現都比較困難。

由於模糊邏輯和類神經網路的發展，使得近十年以來智慧控制得到十分明顯的進步。模糊邏輯和神經網路是兩個不同的領域，但是它們皆為人工智慧領域的科學。經過不斷的研究，兩者理論的相關研究實作的結果證明這兩種理論是可以相互融合的，ANFIS 就是這種結合的一個產物。

由於模糊推論本身不具備自行學習的功能，其應用就受到了很大限制，而且類神經網路又不能表達模糊語言，實際上類似一個黑箱，缺少透明度，所以不能很好地表達如人類頭腦的推理功能。ANFIS 則可將兩者巧妙地給合起來，既能發揮兩者的優點，又可以彌補各自的不足。模糊控制系統原來有一個很明顯的缺點，就是它缺乏有效的學習機制。ANFIS 的優異之所在，乃是它可以用神經網路的學習機制補償模糊控制系統原有的缺點。

Mamdani 型模糊推論和 Sugeno 型模糊推論各有優缺點。對 Mamdani 型模糊推論，由於其規則形式符合人類思維和語言表達的習慣，因而能夠方便地表達人類的知識，但是因為如此推論所牽扯的計算過程複雜、不利於數學分析為其缺點；而 Takagi-Sugeno 型模糊推論則具有計算簡單、利於數學分析的優點，且易於和 PID 控制方法以及最佳化、應適性控制等方法結合，從

而實現具有最佳化與自適應控制能力的控制器或模糊建模工具。根據 Sugeno 型模糊推論的特性，有關學者將其與神經網路結合，用於建構具有自適應學習能力的神經網路模糊系統。

在 If-Then 規則與模糊推論中採用 Sugeno 模糊模式，且同一層節點的歸屬函數或轉換函數採用相似的函數，來建立 ANFIS 模式的主體架構；在學習與參數調整方面，則是結合前饋式類神經網路與監督式學習方法，使得模糊推論系統的所有參數可獲得適當的調整，讓推論形式具有自我學習與組織能力[29]。

與一階 Sugeno 模型相對應，Jang 指出了與一階 Sugeno 型模糊推理系統功能相同的 ANFIS，其結構如下圖 2-13 所示，其同一層的每個節點具有相似的功能(圖中用  $O_{1,i}$  表示第一層的第  $i$  個的節點的輸出)。

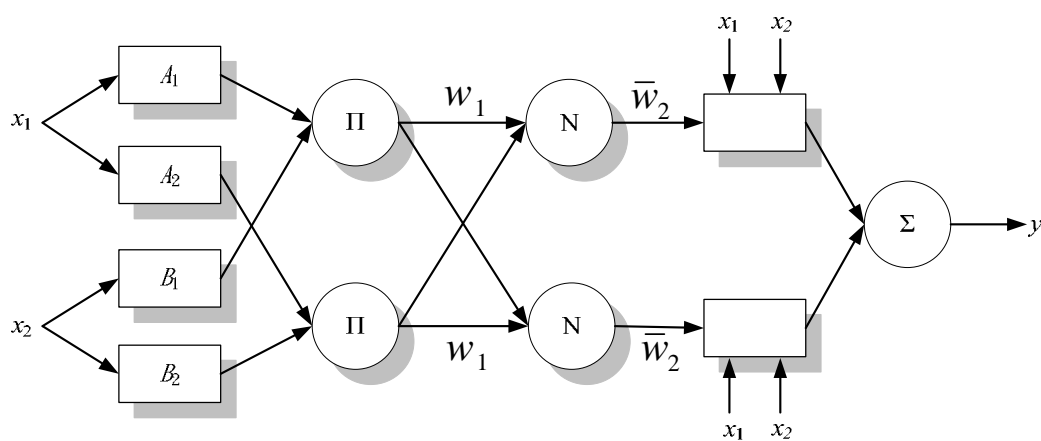


圖 2-13 典型 ANFIS 系統結構範例

第一層(輸入層)：該層每個節點  $i$  是以節點函數表示的方形節點(該層參數是可變的)：

$$O_{1,i} = \mu_{A_i}(x_1), \quad i=1,2 \quad O_{1,i} = \mu_{B_{(i-2)}}(x_2), \quad i=3,4 \quad (2-48)$$

其中， $x_1$  (或  $x_2$ ) 為節點  $i$  的輸入， $A_i$  (或  $B_{i-2}$ ) 是與該節點函數值相關的語句變量，如"大"或"小"等。或者說  $O_{1,i}$  是模糊集  $A$  ( $A = A_1, A_2, B_1, B_2$ ) 的歸屬函數，通常可以選用鐘型函數。

第二層(規則層)：該層的節點在圖 2-6 中用  $\Pi$  表示，將輸入訊號相乘，而將其乘積輸出為

$$O_{2,i} = w_i = \mu_{A_i}(x_1)\mu_{B_i}(x_2), \quad i = 1, 2 \quad (2-49)$$

第三層(正規化層)：該層的節點在圖 2-6 中用  $N$  表示，第  $i$  個節點計算第  $i$  條規則的  $w_i$  與全部規則  $w$  之和的比值為：

$$O_{3,i} = \bar{w}_i f_i = \frac{w_i}{w_1 + w_2}, \quad i = 1, 2 \quad (2-50)$$

第四層(結論推論層)：該層的每個節點  $i$  為自適應節點，其輸出為：

$$O_{4,i} = \bar{w}_i f_i = \bar{w}_i (p_i x_1 + q_i x_2 + r_i), \quad i = 1, 2 \quad (2-51)$$

第五層(輸出層)：該層的單節點是一個固定節點，計算所有輸入訊號的總輸出為：

$$O_{5,i} = \sum_i \bar{w}_i f_i = \frac{\sum_i \bar{w}_i f_i}{\sum_i \bar{w}_i} \quad (2-52)$$

ANFIS 模式在時具有許多彈性，例如在第一層架構輸入變數的映射集合

時，可預先設定好每一種輸入變數的集合數目，再利用排列組合的方式組合出所有可能的規則。也可以使用聚類(Clustering)的方式獲得前提與結論部分的組合，也就是將輸入變數與輸出變數合併，利用聚類的方法找出所需的中心點數目，確定中心點後，再將輸入變數部分與輸出變數的部分分開，由輸入變數所組成的集合形成 *if-then* 規則中的前提部分，而輸出變數則形成結論部分；通常聚類的方法有許多種，如 K-means, Fuzzy c-means 與模糊減法聚類等(Jang, 1997)。此外，亦可結合專家系統或從知識中萃取的規則，將之用於 If-Then 規則之中。再者，在推論部分的應用，也可選擇不同的模糊模式。例如：Mamdani 模糊模式、Tsukamoto 模糊模式等[30-31]。

這些彈性都是模糊推論系統的特性，但是在模糊推論系統中，並無法有效地調整模式的所有相關參數。然而 ANFIS 模式由於結合了類神經網路的自我學習與組織能力，使得模式的參數可獲得了適當的調整，這些優點使得 ANFIS 在建置的過程中幾乎不受什麼限制，只有模式中的歸屬函數與解模糊化的函數必須是片斷連續(Piecewise)可微分的限制，而這個限制是來自於學習演算法使用坡降法，若改用遺傳算法取而代之，則模式就幾乎沒有任何限制了。

## 2-9 非線性受控系統之數學模型的線性化

對於一般比較簡單的受控系統，不需數學描述，利用精度不太高的頻率響應曲線，就可設計達到目的的控制器。但是對複雜、較高階、不穩定系統，在設計控制器時，則就需要對系統的動態特性做精確的描述。雖然在實際上我們接觸到的系統都是非線性系統，然而在某個參考狀態的某個有限範圍內可以用近似線性化的分析方法。使用線性系統理論的原因，基本上是因為線性系統理論設計出來的控制器往往具有線性函數的性質，此外與 Sugeno 型

模糊推論之類系統結構的搭配性佳，加上本研究所要設計之追蹤控制系統，所運用的 ANFIS 方法所設計之控制器是架構在 Sugeno 型模糊推論之下，因此對非線性狀態方程式進行線性化的方法必需有了解的必要。

受控系統的數學系統描述，可根據物理定律的位能(Potential Energy)、動能(Kinetic Energy)和消耗能(Dissipation)及 Lagrange 方程式中之能量觀念來推導出受控系統的動力微分方程式(本論文將以自由體圖的方式，來推求系統的動力微分方程式)。再以代入消去法整理，使微分方程式僅含一個最高微分，把其它變數的最高微分項消除，然後定義狀態變數，再根據狀態變數的定義和整理後的動力微分方程式，推導出  $n$  個一階微分狀態方程式。

如本論文所研究的可調整錘狀態之倒單擺系統，若以狀態回授控制理論的系統去設計，可用「極點配置設計狀態回授控制器」達成平衡定位控制的目的，並且可以利用 ANFIS 的方法去設計控制器，以達到追蹤控制的目的。其中狀態變數可定義如下：倒單擺擺杆與鉛垂線之間的擺角為  $\theta = x_1$ ，擺杆的角加速度為  $\dot{\theta} = x_2$ ，滑車之位置為  $x = x_3$ ，滑車的速度為  $\dot{x} = x_4$ 。

應用極點配置方法可以去穩定系統，並透過狀態回授控制來實現，使系統具有要求的閉迴路極點。但這需要對受控體模型進行線性化，將非線性狀態方程式在操作點  $(x_0, u_0)$  附近線性化，以得到線性化之系統狀態方程式。若令  $x_0 = [k \ 0 \ 0 \ 0]^T$ ，且將非線性狀態方程式以函數向量表示為

$$\dot{x} = f(x(t), u(t)) \quad (2-53)$$

其中  $f(x(t), u(t))$  為  $4 \times 1$  函數向量，代表  $\dot{x}$  是由狀態向量  $x(t)$  與輸入  $u(t)$  所形成的函數。且(2-54)式又可表示為

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}(t), u(t)) \\ f_2(\mathbf{x}(t), u(t)) \\ f_3(\mathbf{x}(t), u(t)) \\ f_4(\mathbf{x}(t), u(t)) \end{bmatrix} \quad (3-54)$$

在操作點 $(x_0, u_0)$ 附近一階泰勒級數近似，則可得系統在操作附近之線性化狀態方程，其狀態耦合矩陣及輸入耦合向量可分別由式(2-55)求得。

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \right|_{x_0, u_0} & \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right|_{x_0, u_0} & \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \right|_{x_0, u_0} & \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_4} \right|_{x_0, u_0} \\ \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \right|_{x_0, u_0} & \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right|_{x_0, u_0} & \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \right|_{x_0, u_0} & \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_4} \right|_{x_0, u_0} \\ \left. \frac{\partial f_3}{\partial x_1} \right|_{x_0, u_0} & \left. \frac{\partial f_3}{\partial x_2} \right|_{x_0, u_0} & \left. \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \right|_{x_0, u_0} & \left. \frac{\partial f_3}{\partial x_4} \right|_{x_0, u_0} \\ \left. \frac{\partial f_4}{\partial x_1} \right|_{x_0, u_0} & \left. \frac{\partial f_4}{\partial x_2} \right|_{x_0, u_0} & \left. \frac{\partial f_4}{\partial x_3} \right|_{x_0, u_0} & \left. \frac{\partial f_4}{\partial x_4} \right|_{x_0, u_0} \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial f_1}{\partial u} \right|_{x_0, u_0} \\ \left. \frac{\partial f_2}{\partial u} \right|_{x_0, u_0} \\ \left. \frac{\partial f_3}{\partial u} \right|_{x_0, u_0} \\ \left. \frac{\partial f_4}{\partial u} \right|_{x_0, u_0} \end{bmatrix} \quad (2-55)$$

最後，可將系統表示為線性化狀態方程：

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) \quad (2-56)$$

