

# 視深

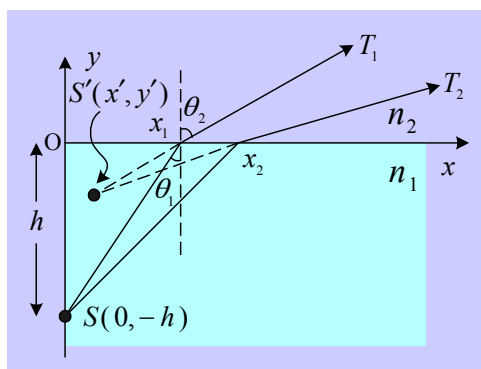
徐國誠

臺北市立成淵高級中學

## 摘要

高中物理教材中的幾何光學有提及視深（apparent depth）的公式，不過都只是假設觀察者以非常小的觀察角度觀察另一層介質中的物體，以此得出物體的像與物體都在同一條鉛直線上，並得出視深的相關近似公式。但是當觀察者以較大的角度去觀察物體時，這個近似公式就不適用了。科學教育月刊第 228 期以及 232 期，分別有國立台灣大學蔡尙芳教授（「觀察者所看到的水中光源的位置」一文）與台北市立成淵高中徐世昌老師（「視深研究」一文）討論視深問題的文章，該兩篇文章探討了觀察者由光疏介質看光密介質中的光源或物體，所觀察到像的深度的數學式。本文藉由該兩篇文章為出發點，探討了物體在光疏介質或光密介質中，其像的位置的變化。由文中可知，當觀察者由光疏介質去看光密介質中的物體時，視深會隨著觀察角度的增加而變小，而且像的位置也會愈來愈靠近觀察者；反之，若觀察者由光密介質去看光疏介質中的物體時（如水中的魚類觀察陸地上的景物），視深就會隨著觀察角度的增加而變大，且像的位置也愈來愈遠離觀察者。另外由兩層透明介質中像的位置座標與折射角的關係式，也可以推導出三層透明介質中像的位置座標與折射角的關係式，並由此得出觀察者所見每一層介質的深度，是與其他介質的實際深度和折射率無關的，同時也不會受到除了觀察者所在的介質以外的其他介質的相對順序之影響，進而歸納出多層透明介質中像的位置座標的一般公式為

$$Y = -\sum_{k=1}^{m-1} \frac{h_k n_{mk}^2 \cos^3 \theta_m}{(n_{mk}^2 - \sin^2 \theta_m)^{3/2}}$$
$$X = -\sum_{k=1}^{m-1} \frac{h_k (1 - n_{mk}^2) \sin^3 \theta_m}{(n_{mk}^2 - \sin^2 \theta_m)^{3/2}}$$



## 一、兩層透明介質的視深

圖一 觀察者位於折射率  $n_2$  的介質中，物體位於折射率  $n_1$  的介質中，界面為座標的  $x$  軸，物體的座標為  $S(0, -h)$ ，像的位置在  $S'(x', y')$  處。

假設觀察者位於折射率為  $n_2$  的介質中，將物體置於折射率為  $n_1$  的介質中，且與界面的距離為  $h$ ，界面為座標的  $x$  軸，物體的座標為  $S(0, -h)$ ，如圖一所示。若物體發出兩條極為靠近的光線，經界面折射後，經界面折射後的反向延長線交於  $S'(x', y')$ ，此  $S'$  即為像的位置。由司乃耳折射定律 (Snell's law of refraction) 我們知道

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \quad (1)$$

將上式微分，則

$$n_1 \cos \theta_1 d\theta_1 = n_2 \cos \theta_2 d\theta_2$$

$$\frac{d\theta_1}{d\theta_2} = \frac{n_2}{n_1} \sec \theta_1 \cos \theta_2 \quad (2)$$

圖一當中入射光線經過點  $(x_1, 0)$  折射後的直線方程式  $T_1$  為

$$T_1 : x = \tan \theta_2 \cdot y + x_1$$

$S'$  為  $T_1$  上的一點，因此也符合該方程式

$$x' = \tan \theta_2 \cdot y' + x_1 \quad (3)$$

如果把折射點由  $(x_1, 0)$  移至  $(x_2, 0)$ ，而  $x_2$  非常靠近  $x_1$ ，所以令  $dx_1 = x_2 - x_1$ ；由於折射點作了一個微小的改變量，使得光線折射後的直線方程式變為  $T_2$ ，而  $S'(x', y')$

仍是直線  $T_2$  上的一點，也就是將第 (3) 式微分後， $dx_1 \neq 0$ ，而  $dx' = dy' = 0$ ，因此

$$y' = -\cos^2 \theta_2 \frac{dx_1}{d\theta_2} \quad (4)$$

由圖一中我們也可以知道  $\tan \theta_1 = x_1 / h$ ，將此式微分後則

$$dx_1 = h \sec^2 \theta_1 d\theta_1 \quad (5)$$

把第 (5) 式代入第 (4) 式後，再把第 (2) 式代入第 (4) 式可得

$$y' = -\frac{h}{n_{21}} \sec^3 \theta_1 \cos^3 \theta_2 \quad (6)$$

上式中的  $n_{21}$  為相對折射率， $n_{21} = n_1 / n_2$ 。另外由第 (1) 式當  $n_{21} > \sin \theta_2$  時我們可以求出

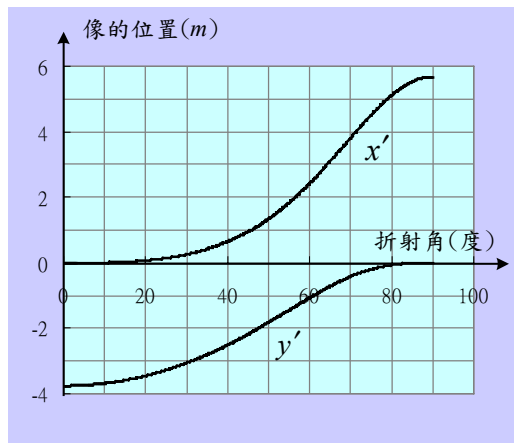
$$\sec \theta_1 = \frac{n_{21}}{\sqrt{n_{21}^2 - \sin^2 \theta_2}}$$

上式代入第 (6) 式後，最後得到像的  $y$  座標為

$$y' = -\frac{h n_{21}^2 \cos^3 \theta_2}{(n_{21}^2 - \sin^2 \theta_2)^{3/2}} \quad (7)$$

將之代入第 (3) 式後得到像的  $x$  座標為

$$x' = -\frac{h(1 - n_{21}^2) \sin^3 \theta_2}{(n_{21}^2 - \sin^2 \theta_2)^{3/2}} \quad (8)$$



圖二  $h = 5.0m$ ,  $n_{21} = 1.33/1$  時像的  $x$  座標 ( $x'$ ) 和  $y$  座標 ( $y'$ ) 與折射角的關係曲線，圖中物體的視深 (等於  $-y'$ ) 隨著觀察角度的增加而變小，而且像的位置也會愈來愈靠近觀察者。

還有一點須要說明的就是，第 (7) 式和第 (8) 式必須在  $n_{21} > \sin \theta_2$  的前提之下才能成立。假如觀察者所在的位置是光疏介質，那麼相對折射率  $n_{21} = n_1/n_2$  必大於 1，當然也大於  $\sin \theta_2$ ，這就是說，觀察者可以在任何小於  $90^\circ$  的觀察角度之下看到另一介質中的物體；如果觀察者是位於光密介質，那麼  $n_{21}$  小於 1，則觀察角度  $\theta_2$  是有限制的，也就是說當  $\theta_2 < \theta_c$  時觀察者才能觀察到另一介質中的物體，而  $\theta_c$  就是光線由密介質 ( $n_2$ ) 入射到疏介質 ( $n_1$ ) 發生內全反射 (total internal reflection) 時的臨界角 (critical angle)，因此觀察角度  $\theta_2$  與臨界角  $\theta_c$  的關係為

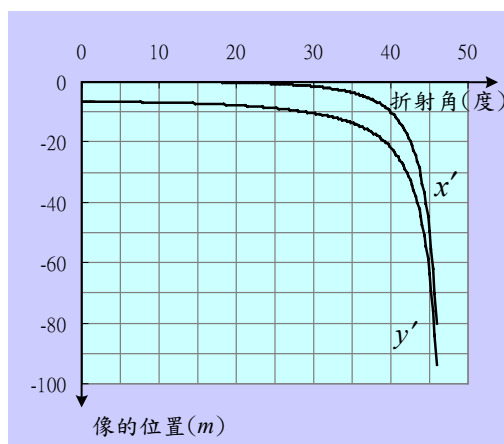
$$\theta_2 < \theta_c = \sin^{-1}(n_{21}) = \sin^{-1}(n_1/n_2)$$

所以第 (7) 式和第 (8) 式是觀察者在  $n_2$  介質中，看到在  $n_1$  介質中物體的像的

位置座標，其中是以折射角  $\theta_2$  為變數。假如我們觀察物體的角度很小，幾乎是垂直界面俯視物體的情況下，則  $x' \rightarrow 0$ ，且

$$\lim_{\theta_2 \rightarrow 0} y' = -\frac{h}{n_{21}}$$

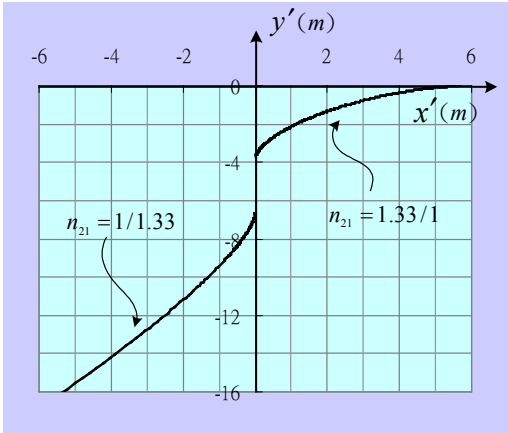
此時像的位置在  $y$  軸上，視深為物體實際深度除以相對折射率，這種情況就是高中物理教材中所講述的視深公式。



圖三  $h = 5.0m$ ,  $n_{21} = 1/1.33$  時像的  $x$  座標 ( $x'$ ) 和  $y$  座標 ( $y'$ ) 與折射角的關係曲線，圖中物體的視深隨著觀察角度的增加而變大，而且像的位置也愈來愈遠離觀察者。

圖二和圖三是我們給定  $h = 5.0m$ ， $n_{21} = 1.33/1$  和  $1/1.33$  時像的  $x$  座標和  $y$  座標與折射角的關係曲線圖 (1.33 大約是水的絕對折射率)。由圖二可以知道，當觀察者由光疏介質去看光密介質中的物體時，視深 (等於  $-y'$ ) 會隨著觀察角度的增加而變小，而且像的位置也會愈來愈靠近觀察者；反之，由圖三可以知道，當觀察者由光密介質去看光疏介質中的物體時 (如水中的

魚類觀察陸地上的景物)視深就會隨著觀察角度的增加而變大,且像的位置也愈來愈遠離觀察者,當  $\theta_2 \approx \sin^{-1}(1/1.33) = 48.75^\circ$  時,  $x'$  和  $y'$  會趨近無限大,而  $48.75^\circ$  就是光線由水中入射到空氣發生內全反射(total internal)時的臨界角(critical angle)。



圖四 假設  $h = 5.0m$ ,  $n_{21} = 1.33/1$  和  $1/1.33$  時的  $x'$  和  $y'$  關係曲線。

第 (7) 式和第 (8) 式也可以改變成以折射點  $x_1$  為變數的函數。從司乃耳折射定律和圖一中可以求得  $\sin \theta_2$  與  $\cos \theta_2$  分別為(仍然在  $\theta_2 < \sin^{-1}(n_{21})$  的條件成立下)

$$\sin \theta_2 = \frac{n_{21}x_1}{\sqrt{x_1^2 + h^2}}$$

$$\cos \theta_2 = \frac{\sqrt{(1 - n_{21}^2)x_1^2 + h^2}}{\sqrt{x_1^2 + h^2}}$$

將之代入第 (7) 式和第 (8) 式就能得到

$$y' = -\frac{h}{n_{21}} \left( 1 + (1 - n_{21}^2) \frac{x_1^2}{h^2} \right)^{3/2} \quad (9)$$

$$x' = -(1 - n_{21}^2) \frac{x_1^3}{h^2} \quad (10)$$

而第 (9) 式與第 (10) 式也可以把  $x_1$  消掉,而得出像的座標  $x'$  和  $y'$  的關係方程式為

$$y' = -\frac{1}{n_{21}} \cdot [h^{2/3} + (1 - n_{21}^2)^{1/3} \cdot x'^{2/3}]^{3/2} \quad (11)$$

圖四就是假設  $h = 5.0m$ ,  $n_{21} = 1.33/1$  和  $1/1.33$  時的  $x'$  和  $y'$  關係曲線。

## 二、三層透明介質的視深

不論觀察者由光疏介質看光密介質中的物體,或由光密介質看光疏介質中的物體,其物體的像的位置皆可由第 (7) 式和第 (8) 式(或由第 (9) 式、第 (10) 式)求得。若是觀察者與物體之間多了一個或一個以上的透明介質,則像的位置必須分段求出。例如圖五是三層透明介質中物體 (S) 和最後觀察者所看到像 (S'') 的位置的示意圖, S'' 是光線經過兩次折射後所成的像,因此比照第 (7) 式的形式,我們可以知道 S'' 的  $y$  座標應該為

$$y'' = -\frac{h'n_{32}^2 \cos^3 \theta_3}{(n_{32}^2 - \sin^2 \theta_3)^{3/2}}$$

其中相對折射率  $n_{32} = n_2/n_3$ ,  $\theta_3$  為  $n_2$ 、 $n_3$  界面光線的折射角,  $h'$  由圖五中應為

$$h' = h_2 + (-y')$$

而由第 (7) 式可以知道  $-y' = h_1 n_{21}^2 \cos^3 \theta_2 \cdot (n_{21}^2 - \sin^2 \theta_2)^{-3/2}$ ，並由司乃耳折射定律計算  $n_2$ 、 $n_3$  界面的折射而推得  $\sin \theta_2$  以及  $\cos \theta_2$ ，且將之代入  $-y'$  而得到

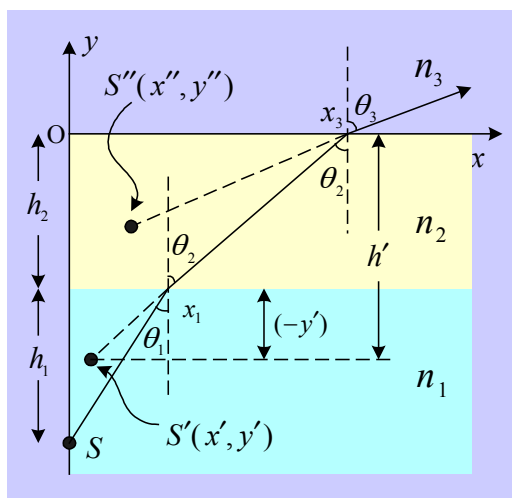
$$\sin \theta_2 = \frac{\sin \theta_3}{n_{32}}$$

$$\cos \theta_2 = \frac{\sqrt{n_{32}^2 - \sin^2 \theta_3}}{n_{32}}$$

$$-y' = h_1 n_{21}^2 \left( \frac{n_{32}^2 - \sin^2 \theta_3}{n_{31}^2 - \sin^2 \theta_3} \right)^{3/2}$$

其中  $n_{31} = n_1 / n_3$ 。因此我們把上式中的  $-y'$  代入  $h'$ ，再把  $h'$  代入  $y''$ ，就得出

$$y'' = -\frac{h_1 n_{31}^2 \cos^3 \theta_3}{(n_{31}^2 - \sin^2 \theta_3)^{3/2}} - \frac{h_2 n_{32}^2 \cos^3 \theta_3}{(n_{32}^2 - \sin^2 \theta_3)^{3/2}} \quad (12)$$



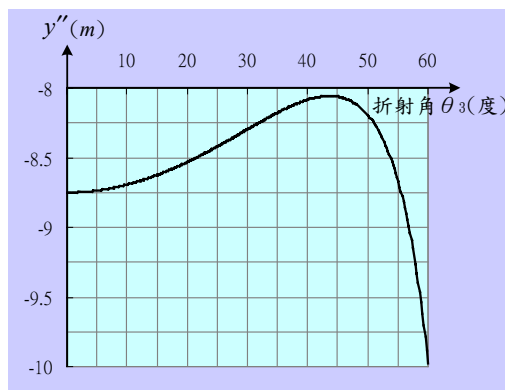
圖五 三層透明介質中的物體位置 ( $S$ ) 和最後觀察者所看到像的位置 ( $S''$ ) 之示意圖， $S''$  是光線經過兩次折射後所成的像。

相同的推導方式也可以應用在  $S''$  的  $x$  座標上。由第 (8) 式以及圖五可以寫出  $x''$  與  $x'$  的關係應為

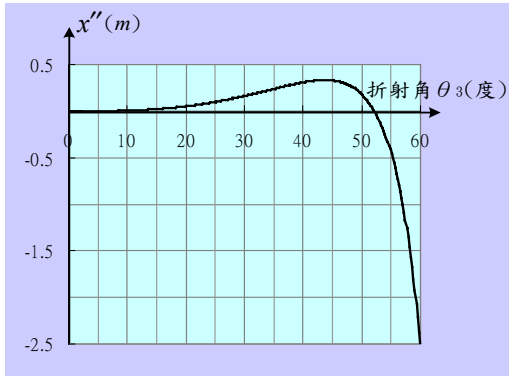
$$x'' - x' = -\frac{h'(1 - n_{32}^2) \sin^3 \theta_3}{(n_{32}^2 - \sin^2 \theta_3)^{3/2}}$$

其中從第 (8) 式可以知道  $x' = -h_1(1 - n_{21}^2) \sin^3 \theta_2 \cdot (n_{21}^2 - \sin^2 \theta_2)^{-3/2}$  將上述中的  $\sin \theta_2$ 、 $\cos \theta_2$  以及  $y'$  與  $h'$  代入  $x''$ ，最後化簡得出

$$x'' = -\frac{h_1(1 - n_{31}^2) \sin^3 \theta_3}{(n_{31}^2 - \sin^2 \theta_3)^{3/2}} - \frac{h_2(1 - n_{32}^2) \sin^3 \theta_3}{(n_{32}^2 - \sin^2 \theta_3)^{3/2}} \quad (13)$$



圖六  $h_1 = h_2 = 5.0\text{m}$ ， $n_1 = 1.33$ ， $n_2 = 2.0$ ， $n_3 = 1.4$  時觀察者所觀察到的像的  $y$  座標 ( $y''$ ) 和折射角 ( $\theta_3$ ) 的關係曲線。

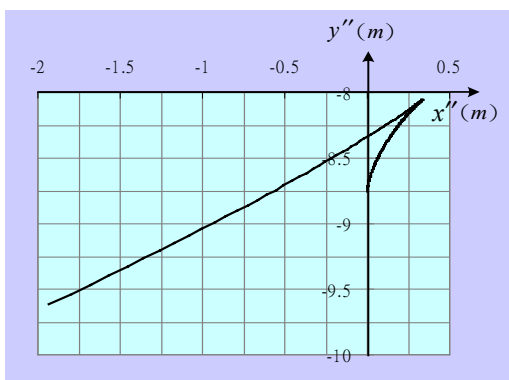


圖七  $h_1 = h_2 = 5.0m$ ， $n_1 = 1.33$ ， $n_2 = 2.0$ ， $n_3 = 1.4$  時觀察者所觀察到的像的  $x$  座標 ( $x''$ ) 和折射角 ( $\theta_3$ ) 的關係曲線。

第 (12) 式與第 (13) 式是三層透明介質中，觀察者所看到物體的像的位置方程式。如同前面的討論，假如我們觀察物體的角度很小，也就是讓  $\theta_3 \rightarrow 0$ ，則

$$\begin{cases} \lim_{\theta_3 \rightarrow 0} x'' = 0 \\ \lim_{\theta_3 \rightarrow 0} y'' = -\frac{h_1}{n_{31}} - \frac{h_2}{n_{32}} \end{cases}$$

這個結果與高中物理教材中所講述的視深公式也是相符的。

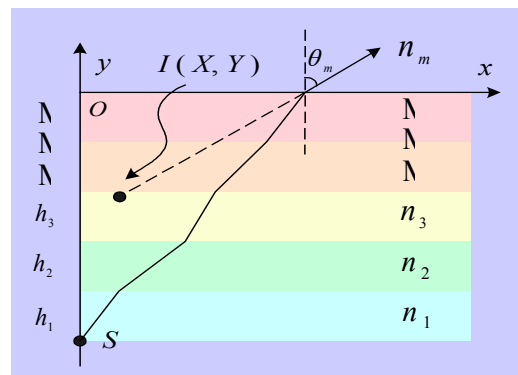


圖八 假設  $h_1 = h_2 = 5.0m$ ， $n_1 = 1.33$ ， $n_2 = 2.0$ ， $n_3 = 1.4$  時的  $x''$  與  $y''$  關係曲線，曲線中的轉折點正是圖六、圖七中  $x''$  與  $y''$  出現最大值的位置。

圖六與圖七分別是三層透明介質中的物體，其像的  $x$  和  $y$  座標與折射角的關係曲線圖，其中給定  $h_1 = h_2 = 5.0m$ ， $n_1 = 1.33$ ， $n_2 = 2.0$ ， $n_3 = 1.4$ 。當然，在計算第 (12) 式與第 (13) 式時必須考慮到介質折射率大小的關係，否則  $x''$  與  $y''$  就會出現複數，因此在二者皆為實數的情況下，觀察者的觀察角度 ( $\theta_3$ ) 是有限制的，亦即

$$\sin \theta_3 < n_{31} \quad \text{且} \quad \sin \theta_3 < n_{32}$$

例如圖六與圖七的例子中， $\sin \theta_3$  必須同時小於  $2.0 / 1.4$  與  $1.33 / 1.4$ ，以此條件所計算出  $\theta_3$  的最大值為  $\sin^{-1}(1.33/1.4) \approx 71.81^\circ$ ；若是將  $n_2$  改為 1.4 與  $n_3$  改為 2.0，則  $\theta_3$  的最大值就變成只有  $41.68^\circ$  了。圖八是  $x''$  與  $y''$  的關係曲線圖，曲線中的轉折點正是圖六、圖七中  $x''$  與  $y''$  出現最大值的位置，不過這個圖只是這裡所選取的一個較特殊的例子，並不是所有  $x''$  和  $y''$  的關係曲線都是如此；原則上，關係曲線圖的形狀與所選擇介質的折射率和介質深度的大小有關。



圖九  $m$  層透明且界面相互平行的介質，物體在第一層，而觀察者在第  $m$  層，其介質折射率由下往上分別為  $n_1、n_2、\dots、n_m$ ，各層介質的深度分別是  $h_1、h_2、\dots、h_{m-1}$ 。

### 三、多層透明介質的視深

如果觀察者與物體之間有三個以上的透明介質，那麼觀察者所見物體的像其座標又是如何呢？我們先從第(12)式將之寫成  $y'' = -Y_1 - Y_2$ ，其中

$$Y_1 = Y_1(h_1, n_{31}, \theta_3) = \frac{h_1 n_{31}^2 \cos^3 \theta_3}{(n_{31}^2 - \sin^2 \theta_3)^{3/2}}$$

$$Y_2 = Y_2(h_2, n_{32}, \theta_3) = \frac{h_2 n_{32}^2 \cos^3 \theta_3}{(n_{32}^2 - \sin^2 \theta_3)^{3/2}}$$

第(12)式告訴我們，在三層介質中的物體，其像的位置的  $y$  座標是由  $h_1$ 、 $h_2$  以及  $n_1$ 、 $n_2$ 、 $n_3$ ，和觀察角度  $\theta_3$  所決定的。但是  $y''$  又可分為  $-Y_1$  和  $-Y_2$  兩項，其中  $Y_1$  是  $h_1$ 、 $n_1$ 、 $n_3$ 、 $\theta_3$  的函數，與  $h_2$ 、 $n_2$  是無關的；相同地， $Y_2$  是  $h_2$ 、 $n_2$ 、 $n_3$ 、 $\theta_3$  的函數，與  $h_1$ 、 $n_1$  無關。因此我們可以這麼說， $Y_1$  是觀察者在折射率為  $n_3$  的介質中，以  $\theta_3$  的觀察角度去觀察折射率  $n_1$ 、實際深度  $h_1$  的介質所看到的視深，而這視深與折射率  $n_2$  介質的存在與否是無關的，即使  $n_2$  介質存在，其與  $n_1$  介質的相對順序（ $n_1$  介質在  $n_2$  介質的上方或在  $n_2$  介質的下方）也不影響  $Y_1$  的值（這一點當然也可以直接由第(12)式用數學驗證，以  $h_1$ 、 $n_1$ 、 $h_2$ 、 $n_2$  同時取代  $h_2$ 、 $n_2$ 、 $h_1$ 、 $n_1$ ，其  $y''$  的值將不改變）。

既然三層透明介質中的觀察者所見  $n_1$  介質與  $n_2$  介質的視深是相互獨立的，因此多層透明介質（三層介質以上）中每一層介質的視深也必然是相互獨立而不互相影響；而這結果以第(13)式來看，當然也可以適用在像的  $x$  座標上。也就是說在多層透明介質

中：

“觀察者所見每一層介質的深度，是與其他介質的實際深度和折射率無關的，同時也不會受到除了觀察者所在的介質以外的其他介質的相對順序之影響。”

於是我們考慮總共有  $m$  層透明且界面相互平行的介質，物體在第一層介質中，而觀察者在第  $m$  層，其介質的折射率由下往上分別為  $n_1$ 、 $n_2$  ……  $n_m$ ，各層介質的深度分別是  $h_1$ 、 $h_2$  ……  $h_{m-1}$ （觀察者在第  $m$  層，所以不考慮其深度），如圖九。以水平方向為座標的  $x$  軸，第  $m-1$  與  $m$  層的界面為座標  $y = 0$  的平面，則觀察者以觀察角度  $\theta_m$  所觀察到物體的像的位置座標為  $I(X, Y)$ ，而  $Y$  和  $X$  分別可以寫成  $m-1$  項的總和：

$$Y = -(Y_1 + Y_2 + \dots + Y_{m-1}) \\ = -\sum_{k=1}^{m-1} \frac{h_k n_{mk}^2 \cos^3 \theta_m}{(n_{mk}^2 - \sin^2 \theta_m)^{3/2}} \quad (14)$$

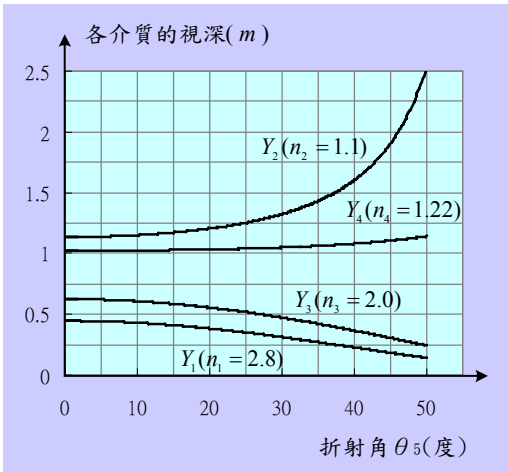
$$X = -(X_1 + X_2 + \dots + X_{m-1}) \\ = -\sum_{k=1}^{m-1} \frac{h_k (1 - n_{mk}^2) \sin^3 \theta_m}{(n_{mk}^2 - \sin^2 \theta_m)^{3/2}} \quad (15)$$

其中  $h_k$  是第  $k$  層介質的實際深度， $n_{mk} = n_k / n_m$  是第  $k$  層介質與第  $m$  層介質的相對折射率，而  $\sin \theta_m$  必須同時小於  $n_1 / n_m$ 、 $n_2 / n_m$  ……  $n_{m-1} / n_m$ ，或者是小於這些相對折射率當中的最小值，

$$\sin \theta_m < \text{Min} (n_1 / n_m, n_2 / n_m, \dots, n_{m-1} / n_m) \quad (16)$$

這裡舉一個五層透明介質視深的例子。假設每一層介質的深度皆為  $1.0m$ ，各層

介質的折射率分別為 2.8、1.1、2.0、1.22、1.25，觀察者在折射率 1.25 的介質當中，則觀察者所見各層介質的視深與觀察角度的關係曲線如圖十。圖中  $Y_1$  和  $Y_3$  因為折射率大於 1.25，所以視深隨著折射角的增加而減少，而  $Y_2$  和  $Y_4$  因為折射率小於 1.25，所以視深隨著折射角的增加而增加；若將四條曲線相加，則為一至四層介質的總視深，成為圖十一中的曲線，也就是第 (14) 式中  $Y$  的負值。另外由第 (16) 式可以知道折射角的正弦，應該小於  $1.1 / 1.25$ ，也就是折射角的最大值為  $\sin^{-1}(1.1/1.25) = 61.64^\circ$ ，不過當折射角趨近  $61.64^\circ$  時， $Y_2$  因為分母趨近於零的關係，使得  $Y_2$  的值就會變得非常大，因此視深就會趨近於無限大。



圖十 觀察者在折射率1.25的介質當中所見各層介質的視深與觀察角度的關係曲線。每一層介質的深度皆為1.0m，一至四層介質的折射率分別為2.8、1.1、2.0、1.22。

#### 四、界面的透射

由前面的分析我們知道，各介質的視深是相互獨立，而且各介質的相對順序並不影響每一個介質的視深；不過光線在遇到不同介質時，除了全反射之外，均會產生部分折射和部分反射的現象，而介質的相對順序卻會改變界面透射的比率。假如我們考慮的是線性、等向均質的透明介質 (linear, isotropic, homogeneous media) 且不考慮介質的吸收，那麼光線從第一介質入射到第二介質在界面的透射比 (transmittance)，就可以寫成以下的形式 [11]

$$T_{\perp} = \frac{4n_1 n_2 \cos \theta_1 \cos \theta_2}{(n_1 \cos \theta_1 + n_2 \cos \theta_2)^2}$$

$$T_{\parallel} = \frac{4n_1 n_2 \cos \theta_1 \cos \theta_2}{(n_1 \cos \theta_2 + n_2 \cos \theta_1)^2}$$

其中  $T_{\perp}$  是電場在垂直入射平面 (plane-of-incident) 方向上分量之透射率， $T_{\parallel}$  是電場在平行入射平面方向上分量之透射率，而入射平面指的是入射線、反射線和法線所成的平面， $n_1$ 、 $n_2$ 、 $\theta_1$ 、 $\theta_2$  為折射率和入射角與折射角。於是  $m$  層透明介質中的第  $k$  個界面的透射比為

$$T_{\perp k} = \frac{4n_k n_{k+1} \cos \theta_k \cos \theta_{k+1}}{(n_k \cos \theta_k + n_{k+1} \cos \theta_{k+1})^2} \quad (17)$$

$$T_{\parallel k} = \frac{4n_k n_{k+1} \cos \theta_k \cos \theta_{k+1}}{(n_k \cos \theta_{k+1} + n_{k+1} \cos \theta_k)^2} \quad (18)$$

而  $\cos \theta_k$ 、 $\cos \theta_{k+1}$  都可以由司乃耳折射定律求得，也就是  $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$

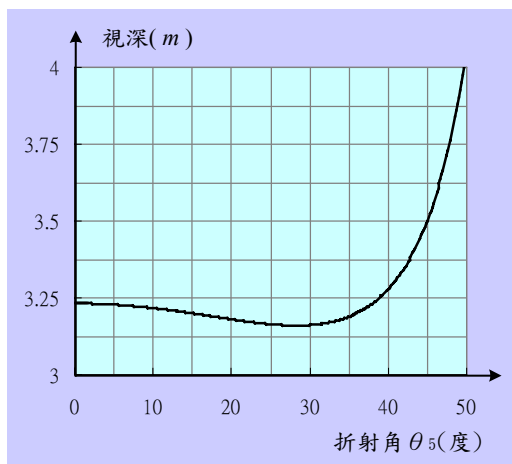


$= \dots = n_k \sin \theta_k = n_{k+1} \sin \theta_{k+1} = \dots = n_m \sin \theta_m$ ，因此  $\cos \theta_k$ 、 $\cos \theta_{k+1}$  分別為

$$\cos \theta_k = \frac{\sqrt{n_k^2 - n_m^2 \sin^2 \theta_m}}{n_k}$$

$$\cos \theta_{k+1} = \frac{\sqrt{n_{k+1}^2 - n_m^2 \sin^2 \theta_m}}{n_{k+1}}$$

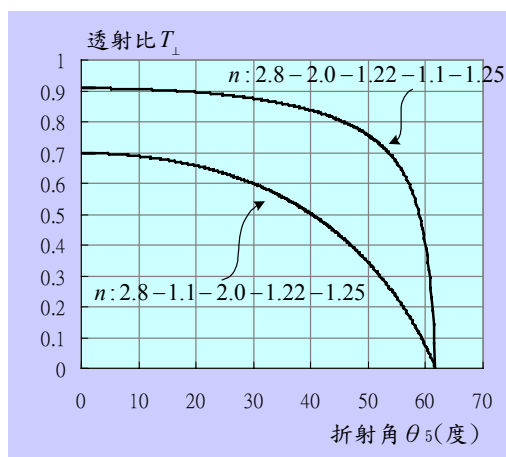
所以只要給定光線最後出射的角度  $\theta_m$ ，就可以知道每一個界面的透射率，而最後的透射率即為每一個界面透射率的乘積。



圖十一 圖十中四條曲線相加，成為一至四層介質的總視深與觀察角度的關係曲線。

以上一個例子（五層透明介質）而言，我們將介質的順序重新加以排列，使得一至五層介質折射率分別為 2.8、2.0、1.22、1.1、1.25，而觀察者所在的介質折射率仍然為 1.25，則以此新順序所得到的總透射率與觀察角度  $\theta_5$  的關係曲線，和介質原來順序所得到的總透射率之比較如圖十二、圖十三。一般而言，界面兩邊的介質折射

率相差愈多，其反射的比率愈大，而透射的比率愈小，因此由圖中可以看出，介質以 2.8 - 2.0 - 1.22 - 1.1 - 1.25 的順序排列，比另一種順序排列方式的總透射率要大。

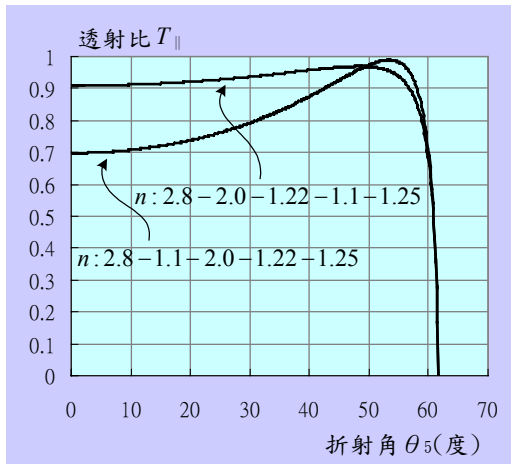


圖十二 五層透明介質中電場在垂直入射平面方向上分量的總透射比  $T_{\perp}$  與觀察角度  $\theta_5$  的關係曲線。

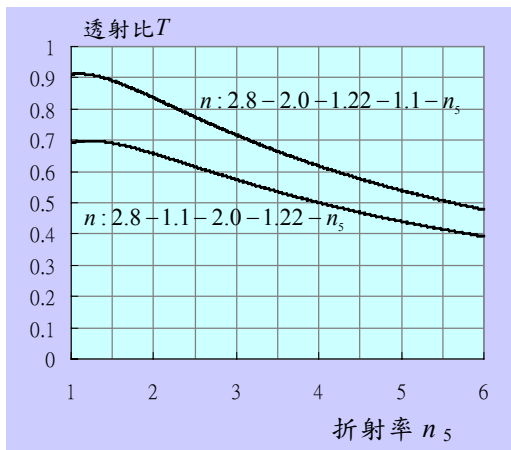
假如光線是以垂直入射的方式，也就是  $\theta_1 = \theta_2 = \dots = \theta_k = \dots = \theta_m = 0$ ，則  $m$  層透明介質中的第  $k$  個界面的透射比就變成

$$T = T_{\parallel k} = T_{\perp k} = \frac{4n_k n_{k+1}}{(n_k + n_{k+1})^2} \quad (19)$$

第 (19) 式顯示第  $k$  個界面的透射比只與界面兩邊介質的折射率有關，因此我們改變五層透明介質中的觀察者所在的折射率  $n_5$ ，其總透射比的變化如圖十四。圖中透射比較大的曲線之最大值在  $n_5 = 1.1$ ，而透射比較小的曲線之最大值在  $n_5 = 1.22$  處



圖十三 五層透明介質中電場在平行入射平面方向上分量的總透射比 $T_{||}$ 與觀察角度 $\theta_5$ 的關係曲線。



圖十四 五層透明介質中，光線以垂直入射方式的總透射比 $T$ 與折射率 $n_5$ 的關係曲線。透射比較大的曲線之最大值在 $n_5 = 1.1$ ，而透射比較小的曲線之最大值在 $n_5 = 1.22$ 處。

## 五、結論

本文所討論物體的視深，都是把物體當成是一個點，去觀看這個點的成像之位置變化，實際上物體與我們所看到物體的影像應該是立體的或是一個面，倘若物體上的每一個點的座標與觀察者的座標都可以明確標示出來的話，那麼觀察者經由多層透明介質所看到的像之位置座標，是可以由第(14)式與第(15)式計算出來。讀者若有興趣，可以進入國立台灣師範大學物理系網站，瀏覽黃福坤教授所寫的一些 java 物理動畫模擬[7]，裡面有相當生動的視深動畫，經由動手操做可以進一步了解視深的變化情況。

## 參考文獻

1. 朱光昇，觀察者的位置與視深之關係，竹南高中物理科教學網：  
<http://www3.cnsh.mlc.edu.tw/~physics/>。
2. 林明瑞主編，高中物理上冊，南一，台南，68-70 頁，民 91。
3. 建國中學主編，高級中學數理叢書—物理（第三輯），教育部中教司，台北，23-24 頁，民 82。
4. 徐世昌，視深研究，科學教育，232 期，30-34 頁，民 89。
5. 徐世昌指導，31 屆（87 年）台北市中小學科展高中組得獎作品：「所見非真—測視深」。
6. 國立台灣師範大學科學教育中心主編，高中物理第三冊，國立編譯館，台北，民 88。  
(下轉第 16 頁)