

# 公因數與公倍數解題模組

陳昭龍

雲林縣立褒忠國民中學

## 壹、前言

在國中數學一年級課程中公因數與公倍數的應用問題乃為師生最頭疼的單元之一。老師用心講解公因數與公倍數的基本概念，然後解釋「約分」、「擴分」的數學原理，接著進入分數的加減與四則運算，到此，師生的互動還算順利，學生的學習也有一定的成效。然而，當公因數與公倍數應用到解決一些「數論問題」或「應用問題」時，學生便開始出現「有聽沒有懂」的現象，上焉者主動向老師、同學或其他管道請益，探求問題解決之道，下焉者開始排斥數學，更甚者拒絕學習，也因為如此，師生之間對學習的認知與學習的態度便開始產生落差。

吾人從事數學基礎教育十幾年來亦被此問題困擾多時，今特將吾人所發展之「公因數與公倍數解題模組」供與大家參考，一來讓教學者更能掌握問題講解精要之處，二來也使學習者更容易解題，讓師生之間的互動從抽象思維到具體表徵都能準確無誤地溝通。

## 貳、模組解說

推論一：

$\chi$ 、 $a$ 、 $b$ 、 $c$  為四個相異的正整數，其中  $\chi$  為變數， $a$ 、 $b$ 、 $c$  為定數  
若  $a \div \chi = Q_1$ ，則  $\chi$  為  $a$  的因數-----①  
若  $b \div \chi = Q_2$ ，則  $\chi$  為  $b$  的因數-----②  
若  $c \div \chi = Q_3$ ，則  $\chi$  為  $c$  的因數-----③  
 $\therefore \chi$  為  $a$ 、 $b$ 、 $c$  之公因數

推論二：

$\chi$ 、 $a$ 、 $b$ 、 $c$  為四個相異的正整數，其中  $\chi$  為變數， $a$ 、 $b$ 、 $c$  為定數  
若  $\chi \div a = Q_1$ ，則  $\chi$  為  $a$  的倍數-----①  
若  $\chi \div b = Q_2$ ，則  $\chi$  為  $b$  的倍數-----②  
若  $\chi \div c = Q_3$ ，則  $\chi$  為  $c$  的倍數-----③  
 $\therefore \chi$  為  $a$ 、 $b$ 、 $c$  之公倍數

問題一：

648 用某正整數去除餘 18，747 用此整數去除餘 12，求此正整數為何？

【教法】：

設此正整數為  $\square$

則  $648 \div \square = ? \dots\dots 18$  -----①

(其中 ? 表示「商數」)

$747 \div \square = ? \dots\dots 12$  -----②

(其中 ? 表示「商數」)

$\therefore (648 - 18) \div \square = \chi$  (其中  $\chi$  表示「商數」)

$(747 - 12) \div \square = \chi$  (其中  $\chi$  表示「商數」)

【概念：「除法」之本意為「分東西」，想辦法將其分完】

$$\begin{aligned} \therefore 630 \div \square = \text{ㄨ} \quad (630 \text{ 能被 } \square \text{ 整除}) \\ 735 \div \square = \text{ㄨ} \quad (735 \text{ 能被 } \square \text{ 整除}) \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \therefore 630 \div \square = \text{ㄨ} \\ 735 \div \square = \text{ㄨ} \end{aligned}} \right\}$$

此部分為老師必須強調的概念

$$\begin{aligned} \therefore \square \text{ 為 } 630 \text{ 的因數, } \square \text{ 為 } 735 \text{ 的因數} \\ \therefore \square \text{ 為 } 630 \text{ 與 } 735 \text{ 的公因數} \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \therefore \square \text{ 為 } 630 \text{ 的因數} \\ \therefore \square \text{ 為 } 630 \text{ 與 } 735 \text{ 的公因數} \end{aligned}} \right\}$$

此部分為解題時最重要的概念

$$\begin{aligned} 630 &= 1 \times 630 = 2 \times 315 = 3 \times 210 = 5 \times 126 \\ &= 6 \times 105 = 7 \times 90 = 9 \times 70 = 10 \times 63 \\ &= 14 \times 45 = 15 \times 42 = 18 \times 35 = 21 \times 30 \\ \therefore 630 \text{ 的因數有 } &1、2、3、5、6、7、9、10、 \\ &14、15、18、21、30、35、 \\ &42、45、63、70、90、105、 \\ &126、210、315、630 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 735 &= 1 \times 735 = 3 \times 245 = 5 \times 147 = 7 \times 105 \\ &= 15 \times 49 = 21 \times 35 \\ \therefore 735 \text{ 的因數有 } &1、3、5、7、15、21、35、 \\ &49、105、147、245、735 \end{aligned}$$

【註：可補充利用標準分解式檢核正因數個數

$$630 = 2 \times 3^2 \times 5 \times 7 \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{正因數個數} &= (1+1)(2+1)(1+1)(1+1) \\ &= 24 \end{aligned}$$

$$735 = 3 \times 5 \times 7^2 \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{正因數個數} &= (1+1)(1+1)(2+1) \\ &= 12 \end{aligned}$$

$$\therefore 630 \text{ 與 } 735 \text{ 的公因數有 } 1、3、5、7、15、21、35、105$$

$$\therefore \square = 1、3、5、7、15、21、35、105$$

代回①、②二式，因 $\square$ 為除數，不可比餘數小，所以 $\square = 21、35、105$

$\therefore$ 滿足此題條件之正整數為 21、35、105

動動腦：

一般所謂公因數乃為共同的因數，除上述作法外（分別求其因數，再找共同的因數），還有別的作法嗎？

ANS：

630 與 735 的公因數為 1、3、5、7、15、21、35、105，而 105 為最大之數，是為最大公因數，且 1、3、5、15、21、35、105 為最大公因數之因數，所以可以簡化找公因數的方法，亦即先找出 630 與 735 的最大公因數，再將其因數分解即可，分解出來的數便是公因數。算式如下：

$$(630, 735) = 105$$

$$105 = 1 \times 105 = 3 \times 35 = 5 \times 21 = 7 \times 15$$

$\therefore$ 公因數有 1、3、5、7、15、21、35、105

**問題二：**

已知一年一班學生人數在 30~50 人之間。9 月 4 日恰好有三同學同時生日，他們分別帶來了 76 顆牛奶糖，152 顆巧克力糖和 114 顆水果軟糖與班上同學同樂。結果每種糖果都能恰好平均分給每位同學而沒有剩下，試問一年一班班上有幾位同學？每人共可拿到多少個糖果？

【教法】：

設一年一班有同學 $\square$ 人

$$\text{則 } 76 \div \square = ? \quad (76 \text{ 能被 } \square \text{ 整除})$$

$$152 \div \square = ? \quad (152 \text{ 能被 } \square \text{ 整除})$$

$$114 \div \square = ? \quad (114 \text{ 能被 } \square \text{ 整除})$$

∴□為 76 的因數，□為 152 的因數，  
□為 114 的因數

∴□為 76、152 與 114 的公因數

$$(76, 152, 114) = 38$$

$$38 = 1 \times 38 = 2 \times 19$$

∴□ = 1, 2, 19, 38

因班上人數 30~50 人之間，所以滿足  
題意條件之人數為 38 人

∴每人共分得  $76 \div 38 + 152 \div 38 + 114 \div 38$   
= 9 (個)

### 問題三：

褒忠國中社區服務隊進行編組，每 6  
人一組，8 人一組，都可把人數編完而且  
沒有剩下。若此服務隊總人數介於 40 到  
60 之間，則該服務隊原有人數多少？

#### 【教法】：

設此服務隊總人數為□人

則  $\square \div 6 = ?$  (其中 ? 表示「商數」)-----①

$\square \div 8 = ?$  (其中 ? 表示「商數」)-----②

∴□能被 6 整除，□能被 8 整除

∴□為 6 的倍數，□為 8 的倍數

∴□為 6、8 的公倍數

$$\therefore [6, 8] = 24$$

$$\therefore \square = 24, 48, 72, \dots$$

因服務隊總人數介於 40 到 60 之間，  
所以服務隊總人數為 48 人

### 問題四：

某正整數被 3、5、8 除都餘 1，若此  
正整數介於 100 到 500 之間，求此正整數  
為何？

#### 【教法】：

設此正整數為□

則  $\square \div 3 = ? \dots 1$  (其中 ? 表示「商數」)----①

$\square \div 5 = ? \dots 1$  (其中 ? 表示「商數」)----②

$\square \div 8 = ? \dots 1$  (其中 ? 表示「商數」)----③

∴  $(\square - 1) \div 3 = \text{又}$  (其中又表示「商數」)

$(\square - 1) \div 5 = \text{又}$  (其中又表示「商數」)

$(\square - 1) \div 8 = \text{又}$  (其中又表示「商數」)

∴  $(\square - 1)$  能被 3 整除， $(\square - 1)$  能被 5 整  
除， $(\square - 1)$  能被 8 整除

∴  $(\square - 1)$  為 3 的倍數， $(\square - 1)$  為 5 的倍  
數， $(\square - 1)$  為 8 的倍數

∴  $(\square - 1)$  為 3、5、8 的公倍數

[在此可引導學生分別求出 3、5、8 的倍  
數，再找出公倍數，而後簡化成下述寫法]

$$\therefore [3, 5, 8] = 120$$

$$\square - 1 = 120, 240, 360, 480, 600, \dots$$

$$\therefore \square = 121, 241, 361, 481$$

(因此正整數介於 100 到 500 之間)

以上四數代回①、②、③式，皆滿足  
題意，所以此題之解為 121, 241, 361,  
481

### 問題五：

(1) 兩個分數  $\frac{7}{39}$ 、 $\frac{8}{65}$  分別乘以一個正

整數後都變成整數，求此乘上之正整  
數最小值為何？

(2) 兩個分數  $\frac{14}{39}$ 、 $\frac{8}{65}$  分別乘以一個正

分數後都變成整數，求此乘上之正分  
數最小值為何？

【教法】：

(1) 設乘上的正整數為□

則  $\frac{7}{39} \times \square$  及  $\frac{8}{65} \times \square$  皆為整數

試想： $\frac{7}{39} \times \square$  及  $\frac{8}{65} \times \square$  化為整數，其算式有何特性？

$$\frac{7}{39} \times \square = \frac{7 \times \square}{39} = \frac{7 \times \square}{\cancel{39}_1} \rightarrow$$

經過「化簡(約分)」後分母變成 1

亦即  $\square \div 39 = ?$  (其中 ? 表示「商數」)

∴ □ 能被 39 整除

∴ □ 為 39 的倍數

同理 □ 為 65 的倍數

∴ □ 為 39、65 的公倍數

∴ □ = 195、390、585.....

∴ 乘上的最小整數為 195

(2) 設乘上的正分數為  $\frac{x}{y}$

則  $\frac{14}{39} \times \frac{x}{y}$  及  $\frac{8}{65} \times \frac{x}{y}$  皆為整數

試想： $\frac{14}{39} \times \frac{x}{y}$  及  $\frac{8}{65} \times \frac{x}{y}$  化為整數，其算式有何特性？

$$\frac{14}{39} \times \frac{x}{y} = \frac{14 \times x}{39 \times y} = \frac{\cancel{14} \times x}{\cancel{39} \times y} \rightarrow$$

經過「化簡(約分)」後分母變成 1

亦即  $x \div 39 = ?$  (其中 ? 表示「商數」)

$14 \div y = ?$  (其中 ? 表示「商數」)

∴ x 能被 39 整除，14 能被 y 整除

∴ x 為 39 的倍數，y 為 14 的因數---①

同理 x 為 65 的倍數，y 為 8 的因數---②

∴ x 為 39、65 的公倍數，y 為 14、8 的公因數

∴ x = 195、390、585.....

y = 1、2

依分數概念：分母愈大且分子愈小則分數愈小

∴ 乘上之正分數最小值 =  $\frac{195}{2}$

參、結語

數學教學首重分析(解析)，尤其將題意轉化成「有意義的數學式子」，然後再將此「有意義的數學式子」與所學數學知識做「具體」且「有效」的連結，如此一來，不管是老師的「教」，或是學生的「學」，都將能為彼此的溝通及互動建立起數學探索的樂趣！誠如九年一貫課程數學領域正式綱要所揭櫫的「教學總體目標」：

- 一、培養學生的「演算能力」、「抽象能力」、「推論能力」及「溝通能力」。
- 二、學習應用問題的解題方法。
- 三、奠定下一階段的數學基礎。
- 四、培養欣賞數學的態度與能力。

就讓數學知識的傳播與推廣盡其在  
我！