

### 第三章 遙控車路徑控制

#### 3.1 本章內容

當我們欲對遙控車做路徑控制時，首先需了解車子行進中的運動方程式(kinematic equation)，理論上，據此可得到精確的控制。在本章我們先對不同的車輛驅動架構做介紹，然後對我們所設計的車輛驅動架構推導其運動方程式，最後對車輛的一些基本運動行為做分析，主要為能用於做障避物的規避。

#### 3.2 車輛驅動種類

車輛的驅動架構大致上可分為二輪、三輪、四輪車輛(如圖 3.1)。其中二輪車輛以左右輪的轉速差來控制車輛的方向，兩輪同時等速運轉來達到前進後退的動作，通常會在車上裝置另一個輔助輪，使車輛能平滑動作。而三輪及四輪車輛的驅動架構其運動方式相當類似，同樣都是以兩後輪驅動使車輛前進或後退，不同點在於三輪車輛控制方向的前輪只有一輪，而四輪車輛有兩輪。

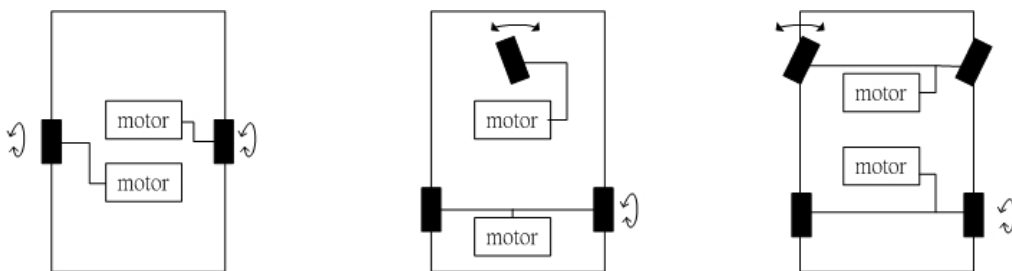


圖 3.1 不同的車輛驅動架構

### 3.2 車輛運動方程式

不同的車輛驅動架構有不同的運動方程式。本文中所使用驅動架構為一雙軸四輪架構，前輪由伺服馬達負責車輛的轉動方向，後輪則是做車輛前進後退的控制。此種驅動架構有如圖 3.2 的運動模型。為了方便推導其運動方程式，我們假設：

- 車子的後輪是與車體成平行的
- 前輪可自由的左右轉動，無論轉至任何角度兩輪的轉動角度均是相同的，亦既車輛前兩輪是互相平行的。
- 輪子在運轉時是只會發生滾動(roll)或旋轉(spin)而不會有滑動(slip)的現象產生

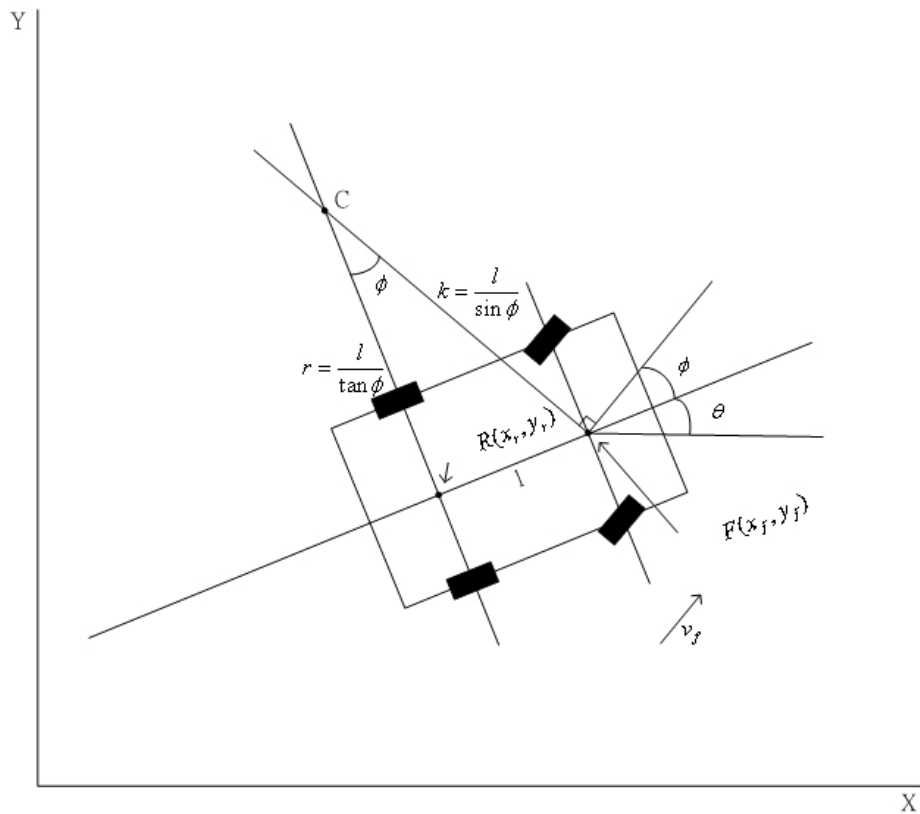


圖 3.2 車輛運動模型

以下是各參數的意義：

$\theta$ ：為車身方向與 X 軸所形成的角度

$\phi$ ：為車身方向與車輪的角度

C：為車輛以  $\phi$  角度轉彎時，車輛做圓周運動所形成的圓心

k：前輪軸心到圓心的距離

l：前輪軸心與後輪軸心的距離

r：後輪軸心到圓心的距離，為車輛做圓周運動時的迴轉半徑

$R(x_r, y_r)$ ：後輪座標

$F(x_f, y_f)$ ：前輪座標

$v_f$ ：為前輪轉  $\phi$  角度時的速度

根據[6]、[7]，車輛運動模型可以以 nonholonomic constraints 的方式來描述，亦即運動方程式滿足：

$$\dot{y}_r \cos \theta - \dot{x}_r \sin \theta = 0 \quad (3.1)$$

參考圖 3.2，可知前後輪座標的相對關係為：

$$\begin{cases} x_r = x_f - l \cos \theta \\ y_r = y_f - l \sin \theta \end{cases} \quad (3.2)$$

將(3.2)式對時間微分。

$$\begin{cases} \dot{x}_r = \dot{x}_f + \dot{\theta} l \sin \theta \\ \dot{y}_r = \dot{y}_f - \dot{\theta} l \cos \theta \end{cases} \quad (3.3)$$

將(3.3)代入(3.1)。

$$\begin{aligned} \Rightarrow & (\dot{y}_f - \dot{\theta} l \cos \theta) \cos \theta - (\dot{x}_f + \dot{\theta} l \sin \theta) \sin \theta = 0 \\ \Rightarrow & \dot{y}_f \cos \theta - \dot{\theta} l \cos^2 \theta - \dot{x}_f \sin \theta - \dot{\theta} l \sin^2 \theta = 0 \\ \Rightarrow & \dot{x}_f \sin \theta - \dot{y}_f \cos \theta + \dot{\theta} l = 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

再參考圖 3.2，前輪速度於 x 軸、y 的分量分別為：

$$\begin{cases} \dot{x}_f = v_f \cos(\theta + \phi) \\ \dot{y}_f = v_f \sin(\theta + \phi) \end{cases} \quad (3.5)$$

將(3.5)代入(3.4)式。

$$\begin{aligned} \Rightarrow & v_f \cos(\theta + \phi) \sin \theta - v_f \sin(\theta + \phi) \cos \theta + \dot{\theta} l = 0 \\ \Rightarrow & v_f (\sin \theta \cos(\theta + \phi) - \cos \theta \sin(\theta + \phi)) + \dot{\theta} l = 0 \\ \Rightarrow & v_f (\sin(\theta - \theta - \phi)) + \dot{\theta} l = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \dot{\theta} = \frac{v_f \sin \phi}{l} \quad (3.6)$$

(3.5)式和(3.6)即為此車輛之運動方程式，我們將其整理如下

$$\begin{cases} \dot{x}_r = v_f \cos \theta \cos \phi \\ \dot{y}_r = v_f \sin \theta \cos \phi \\ \dot{\theta} = v_f \frac{\sin \phi}{l} \end{cases} \quad (3.7)$$

由於(3.7)式是以前輪速度做為控制項，而我們能控制的是後輪的轉動速度，因此我們需要一前後輪的速度轉換關係來代換此式子。

由圖 3.2 可以得知前後輪之間速度的關係為：

$$v_r = v_f \cos \phi \quad (3.8)$$

將(3.8)式代入(3.7)可得：

$$\begin{cases} \dot{x}_r = v_r \cos \theta \\ \dot{y}_r = v_r \sin \theta \\ \dot{\theta} = \frac{v_r \tan \phi}{l} \end{cases} \quad (3.9)$$

(3.9)式即為以後輪速度與前輪轉動角度為控制項所得的車輛運動方程式。我們將(3.9)式對時間積分可以獲得各時間車輛的位置。

我們將(3.9)以向量的方式表示以方便後來的運算，如下：

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_r \\ \dot{y}_r \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 \\ \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_r(t) \\ v_r(t) \rho(t) \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

其中  $\rho(t)$  為此車輛的目前行走的曲率，即：

$$\rho(t) = \frac{1}{r} = \frac{\tan \phi}{l}$$

### 3.3 最小迴轉半徑

以駕駛者的觀點來說，當我們在開車欲進行迴轉時，如果只是稍微轉動方向盤，車輛的迴轉半徑一定是很大。如果方向盤轉很多，迴轉半徑則是相對的減少。而且在迴轉時車速越慢則角度可以更小，反之則加大，這是我們一般的經驗法則，我們可以了解到車輛的回轉半徑是與速度成正比，而與前輪轉動角度成反比的關係。但由於我們的遙控車前輪的轉彎角度有限制，在控制車輛作較大角度的轉彎時，例如：90 度的轉彎或 180 度的迴轉，我們有必要知道遙控車所能作的最小迴轉半徑(minimum turning radius)，亦為圖 3.2 中  $r$  的最小值。

$$r = R_{\min} = \frac{l}{\tan \theta} \quad (3.11)$$

而  $r$  的最小值，對應轉彎角度的最大值，已知遙控車的左、右轉最大角度為 20 度，且  $l$  (即前輪軸心至後輪軸心的距離) 為 21cm，因而我們可以知道本車的最小迴轉半徑為：

$$R_{\min} = \frac{21(\text{cm})}{\tan 20^\circ} = \frac{21}{0.364}(\text{cm}) = 57.7(\text{cm})$$

### 3.4 變換車道路徑規劃

在這小節中我們將描述遙控車在進行變換車道的動作時，所進行的路徑規劃策略(maneuver)。我們使用[6]、[8]中所提的指數策略標記法(exponential maneuver notation)。以下即為此路徑策略的表示式(式 3.12)：

$$\Phi = p_0 e^{s_1 V_1} \dots e^{s_n V_n} \quad (3.12)$$

其中  $p_0$  為車輛座標系為參考座標一點， $V$  為圍繞此點的向量場。因此我們可以找到一路徑  $L(s)$  開始於  $p_0$  且根據此一向量場  $V$  移動。即此一路徑可滿足：

$$L(0) = p_0 \quad \text{而且} \quad \dot{L}(s) = V_{L(s)}$$

其中  $\dot{L}(s)$  為  $L(s)$  的時間導數(time derivative)。  $V_{L(s)}$  則為隨著路徑  $L(s)$  上  $V$  的值。  $L$  與  $V$  的關係可以下式表示：

$$p(s) = L(s) = p_0 e^{sV}$$

此一參數路徑的意思即為從  $p_0$  開始，依據向量  $V$  及路徑長  $s$ ，我們會依循此路徑到達點  $p(s)$ 。

我們令  $\Phi$  為一路徑規劃，  $p_0$  為路徑起始點，給予  $s_1$  使車輛依循著向量  $V_1$  前進到達  $p_1$ ，接著給予  $s_2$  使車輛依循著向量  $V_2$  前進，最後車輛到達點  $p_2$ ，此一路徑規劃可寫成：

$$\Phi = p_0 e^{s_1 V_1} e^{s_2 V_2}$$

其中  $p_1 \equiv p_0 e^{s_1 V_1}$

$$p_2 \equiv p_1 e^{s_2 V_2} \equiv (p_0 e^{s_1 V_1}) e^{s_2 V_2}$$

因此由以上我們可以了解，式 3.12 表示多段路徑的結果。

接下來我們考慮車輛向左變換車道的路徑規劃。根據一般駕駛經驗，我們會有兩個動作，是先將方向盤往左打一段時間後，再往右打，因此我們將其表示成遙控車從 P1 點走至 P2 點(即駕駛者方向盤往左打，車輛行走一短暫時間後所經的路徑)，接著從 P2 點走至 P3 點(此時駕駛者方向盤往右打，車輛行走一短暫時間後，車輛已平行於車道行走的路徑)，共分成兩段路徑的組合。圖 3.3 為此一路徑運動模型，據此可以得到一路徑策略表示式為：

$$\Phi = p_1 e^{s_1 V_1} e^{s_2 V_2} \quad (3.13)$$

其中我們定義：

$$V_1 = \begin{bmatrix} v(t) \cos \theta \\ v(t) \sin \theta \\ \frac{v(t)}{R_1} \end{bmatrix}, V_2 = \begin{bmatrix} v(t) \cos \theta \\ v(t) \sin \theta \\ \frac{v(t)}{R_2} \end{bmatrix}.$$

$V_1$  為遙控車從 P1 走至 P2 時的運動向量，

$V_2$  為遙控車從 P2 走至 P3 時的運動向量，

以上兩向量即為以式 3.9 和 3.11 運動方程式定義之兩向量

$s_1$  為遙控車從 P1 走至 P2 時的路徑長，

$s_2$  為遙控車從 P2 走至 P3 時的路徑長。



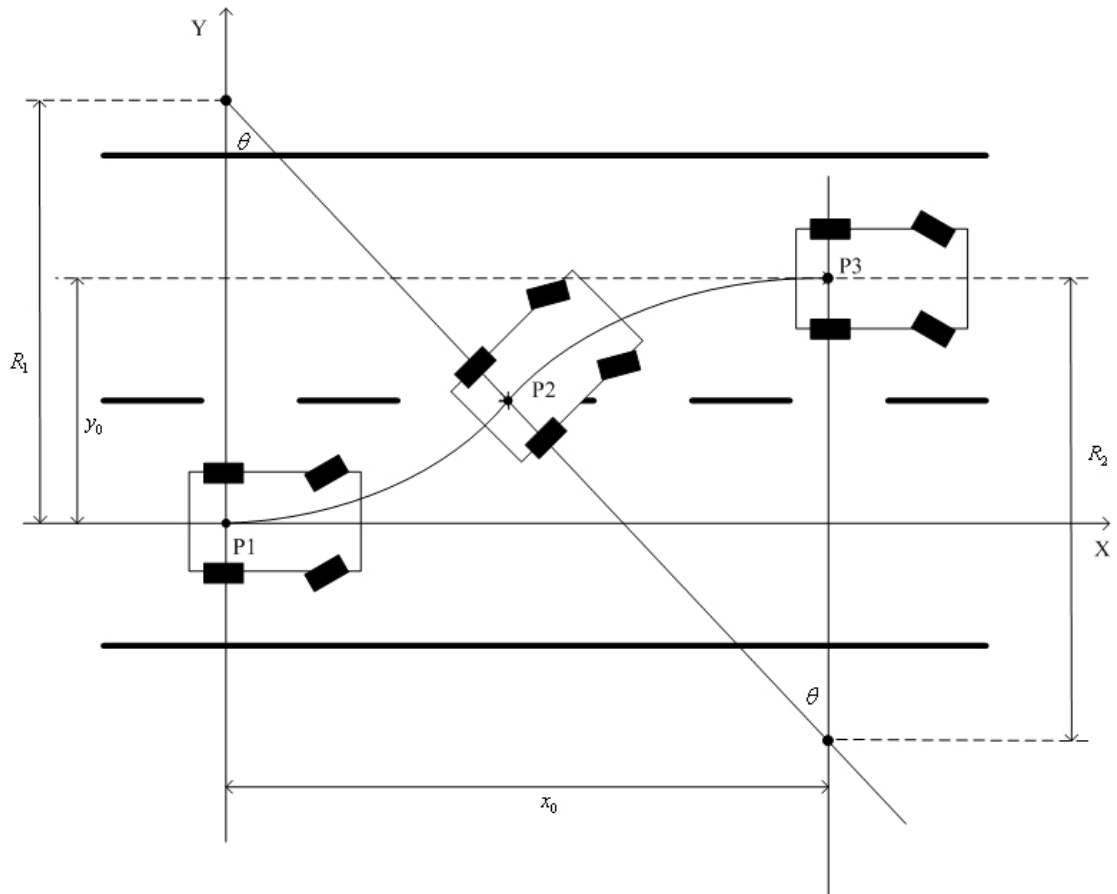


圖 3.3 車輛變換車道運動模型

$R_1$ ：為遙控車自 P1 走至 P2 時，遙控車的迴轉半徑。

$R_2$ ：為遙控車自 P2 走至 P3 時，遙控車的迴轉半徑。

$x_0$ ：為遙控車自 P1 走至 P3 於 X 軸的位移。

$y_0$ ：為遙控車自 P1 走至 P3 於 Y 軸的位移。

另外  $s_1$ 、 $s_2$ 、 $\theta$  計算如下：

我們令  $\Delta_T x$ 、 $\Delta_T y$ 、 $\Delta_T \theta$  分別代表遙控車由 P1 點移動至 P3 點於  $x$  軸方向、 $y$  軸方向、 $\theta$  的位移量。由圖 3.3 可以知道  $\Delta_T x = x_0$ ，即將遙控車從 P1 點移動至 P2 點於  $X$  軸方向的投影長度加上遙控車從 P2 點移動至 P3 點於  $X$  軸方向的投影長度。同理  $\Delta_T y = y_0$ 、 $\Delta_T \theta = 0$ ，可得到：

$$\begin{aligned}\Delta_T x = x_0 &= R_1 \sin \theta - R_2 \sin \theta = (R_1 - R_2) \sin \theta \\ \Delta_T y = y_0 &= R_1(1 - \cos \theta) - R_2(1 - \cos \theta) = (R_1 - R_2)(1 - \cos \theta) \quad (3.14) \\ \Delta_T \theta = 0 &= \Delta_1 \theta + \Delta_2 \theta = \frac{s_1}{R_1} + \frac{s_2}{R_2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow s_1 &= \theta R_1 \\ s_2 &= -\theta R_2, \\ \theta &= \arccos\left(1 - \frac{|y_0|}{R_1 - R_2}\right)\end{aligned} \quad (3.15)$$

在獲得上述的路徑策略後，對於式 3.13，我們知道不同的  $R_1$ 、 $R_2$  可形成無限多組解。將  $R_1$ 、 $R_2$  表示成  $(R_1, R_2)$  標示於座標系第一象限可得如圖 3.4，其中  $R_{\min}$  為最小迴轉半徑：

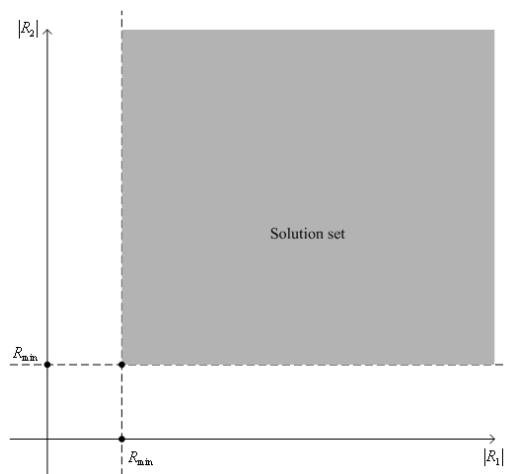


圖 3.4  $(R_1, R_2)$  之 solution set

但是圖 3.4 所示之 solution set 只考慮到車輛本身的限制，而沒有考慮到車輛行車環境所造成的限制，以下我們將環境因素考慮進來。根據圖 3.5，可以知道車輛由 P1 點至 P2 點行走的路徑對 Y 軸投影的長度必定要小於車輛在車道能行走的最大寬度。因此可得到：

$$R_1 - R_1 \cos \theta = W - w$$

$$\Rightarrow R_1 = \frac{W - w}{1 - \cos \theta} \quad (3.16)$$

同樣的對於  $R_2$ ，也能以上述方式求得一限制，得到下式(3.17)：

$$R_2 = \frac{W - w}{1 - \cos \theta} \quad (3.17)$$

因而可得到一新的 solution set 區間，如圖 3.6 所示。

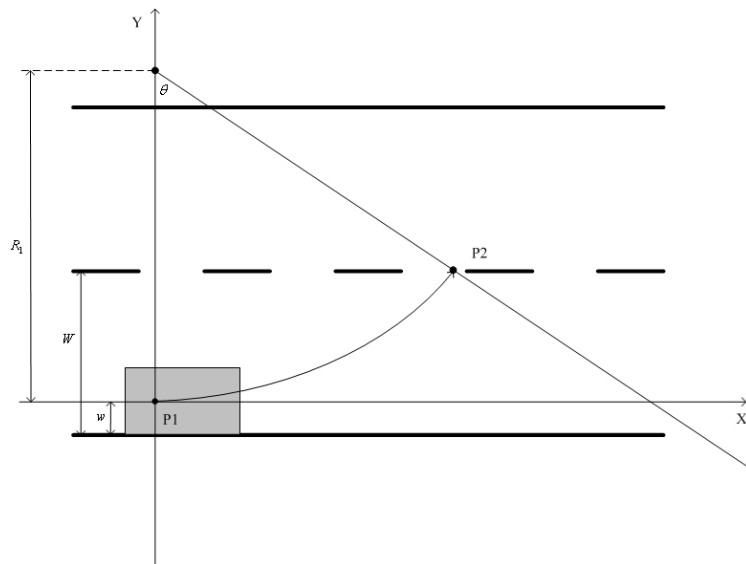


圖 3.5 車輛進行轉彎時的限制

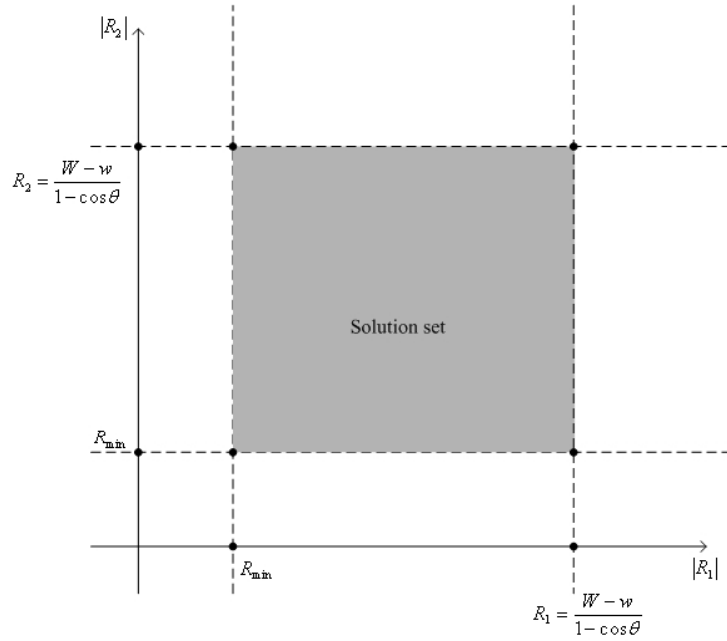


圖 3.6 依車輛本身及環境限制所成之 solution set

### 3.4.1 路徑避障策略

當我們得到了路徑規劃後，需避免當車輛按照此一規劃行走時可能產生的碰撞。車輛在變換車道時可能產生碰撞的情形如圖 3.7 所示。為避免此一情形產生，我們需對先前的路徑策略做一些限制。

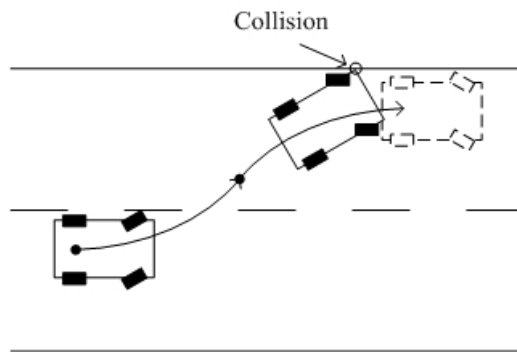


圖 3.7 車輛進行變換車道策略時，可能發生碰撞的情形

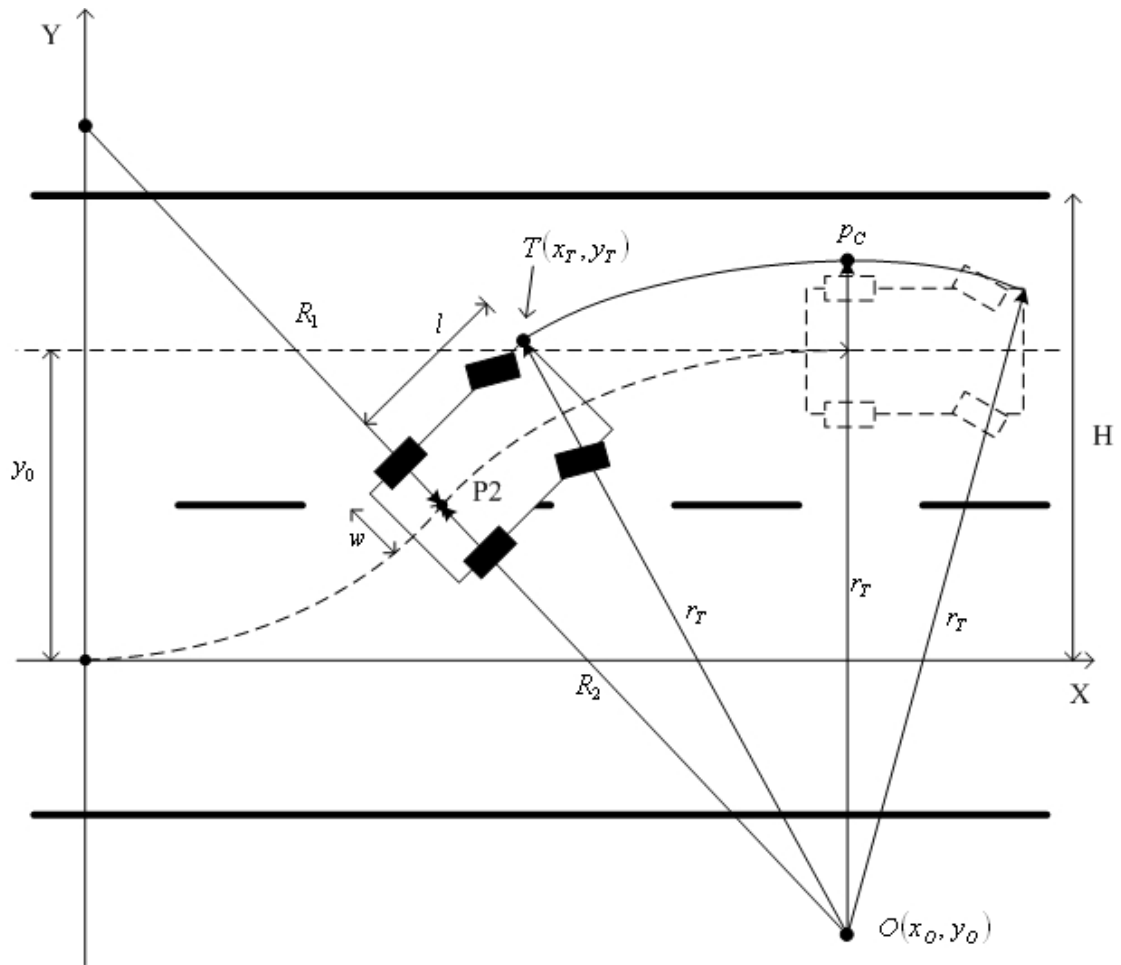


圖 3.8 Q 點於車輛行進時的路徑

$T(x_T, y_T)$ ：為車輛左前端頂點的座標

$r_T$ ：車輛左前端頂點到  $O$  點的距離

$H$ ：為車輛起點至左車道邊線的距離

$w$ ：為車輛後輪軸至車輛前沿距離

$l$ ：為車輛後輪軸心至輪胎距離

$p_c$ ：為  $Q$  行經路徑中距離左車道邊線最近的點

由圖 3.7 可看出，當發生碰撞時，是因為車輛左前端頂點與車道左端發生接觸的關係。因此我們定義此一頂點為  $T$  點，只要我們控制  $T$  點在行經路徑點  $p_c$  時，不與車道左端發生碰觸即可避免碰撞，即如圖 3.8 所示，當  $T$  點位於  $p_c$  時，其  $Y$  軸座標  $y_T$  小於  $H$  時，可避免碰撞。因此我們可求得以下式子：

$$\begin{aligned} y_T &= |r_T| + y_o = \sqrt{(|R_2| + w)^2 + l^2} + y_o \\ &= \sqrt{(|R_2| + w)^2 + l^2} + y_o - |R_2| < H \end{aligned} \quad (3.18)$$

由 3.18 化簡可得到：

$$\begin{aligned} (H + |R_2| - y_o)^2 &> (|R_2| + w)^2 + l^2 \\ \Rightarrow |R_2|^2 + 2|R_2|(H - y_o) + (H - y_o)^2 &> |R_2|^2 + 2|R_2|w + w^2 + l^2 \\ \Rightarrow 2|R_2|(H - y_o - w) &> w^2 + l^2 - (H - y_o)^2 \\ \Rightarrow |R_2| &> \frac{w^2 + l^2 - (H - y_o)^2}{2(H - y_o - w)} \end{aligned} \quad (3.19)$$

因此當  $R_2$  大於時即可避免車輛與車道邊緣產生碰撞。此一限制我們可加入先前所獲得之 solution set 中，最後可得到的 solution set，如圖 3.9。

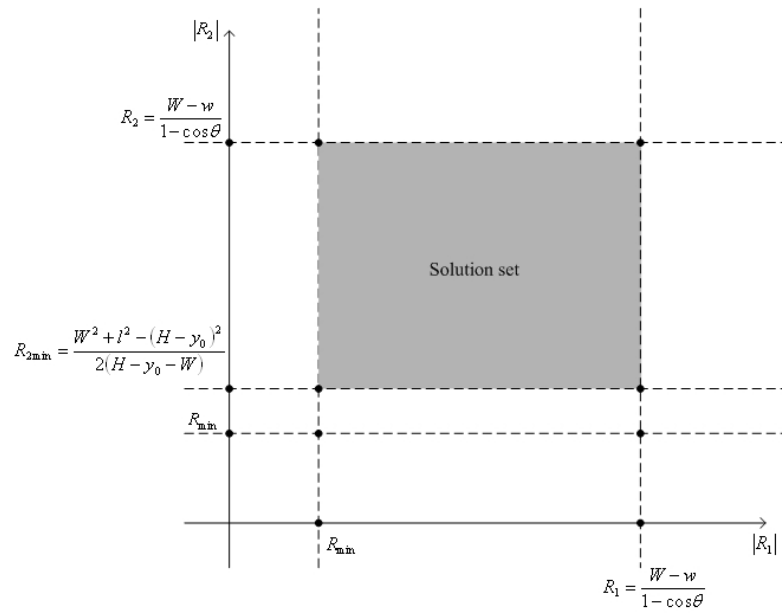


圖 3.9 考慮碰撞可能之 solution set