

第 44 屆國際數學奧林匹亞競賽試題與參考解答

傅承德* 洪文良**

*中央研究院 統計科學研究所

**國立新竹師範學院 數學教育系

2003 年第 44 屆國際數學奧林匹亞競賽 (IMO) 是在日本的東京舉行；本屆共有 82 個國家與會，合計 457 位學生代表參賽。競賽活動是由各國領隊組成的評審會議 (Jury Meeting) 揭開序幕，除了確認各項議題外，評審會議的一個主要工作是挑選本屆的競賽試題。國際數學奧林匹亞競賽試題是先由各參賽國(主辦國除外)於規定時間期限內提交 0~6 道試題，再由主辦國的試題委員會 (Problem Selection Committee) 研究選出大約 30 道預選試題，分屬代數、分析、數論、幾何及組合數學等不同領域和不同難度的試題；最後再經由評審會議票選暨修訂出最後 6 道 IMO 試題，再依主題內容及難易層次分配成兩份試題，分別在連續的兩天舉行競試，每天三道試題，考試時間都是 4.5 小時。本屆試題經由主辦國的試題委員會選出他們認為較適當的 27 道試題，再由各國領隊組成的評審會議經過三天的討論票選出一道代數題、二道數論題、二道幾何題及一道組合題，其中第一題為組合題、第二題為數論題、第三題為幾何題、第四題為幾何題、第五題為代數題、第六題為數論題。

今年我國六位學生：林金毅（建國中學）、趙心宇（建國中學）、黃紹倫（建國中學）、黃道生（建國中學）、廖紹棠（高雄中

學）、葉仲恆（鳳西國中），總成績 114 分，榮獲一面金牌、二面銀牌、二面銅牌，在 82 隊中名列第十六名。總分前二十名的國家依次為：保加利亞、中國大陸、美國、越南、俄羅斯、韓國、羅馬尼亞、土耳其、日本、匈牙利、英國、加拿大、哈薩克、烏克蘭、印度、台灣、德國、伊朗、泰國、白俄羅斯。本文針對此次我國代表團所翻譯成中文版的六道 IMO 試題提供參考解答，以供國內相關學者、數學教師等輔導數學資優生之研究、應用與參考。

一、第 44 屆國際數學奧林匹亞競賽試題

第一天

東京，2003 年 7 月 13 日

考試時間：4.5 小時

第一題：

令 $S = \{1, 2, \dots, 1000000\}$ ，而 A 是一個恰有 101 個元素的 S 的子集合。試證，在 S 中存在著 t_1, t_2, \dots, t_{100} 使得下面的這些集合

$$A_j = \{x + t_j \mid x \in A\}, j = 1, 2, \dots, 100$$

任何相異的兩個都不相交。

第二題：

求所有能使 $\frac{a^2}{2ab^2 - b^3 + 1}$ 成爲正整數的正整數對 (a, b) 。

第三題：

凸六邊行的任何兩個對邊都有下面的性質：兩對邊中點間的距離恰等於這兩個對邊長的和的 $\sqrt{3}/2$ 倍。試證這六邊形的所有內角都相等。

(一個凸六邊形 $ABCDEF$ 有三組對邊： AB 和 DE ； BC 和 EF 以及 CD 和 FA)

第二天

東京，2003 年 7 月 14 日

考試時間：4.5 小時

第四題：

設 $ABCD$ 爲一個圓內接四邊形，自點 D 向直線 BC ， CA 和 AB 做垂線，設垂足分別爲 P ， Q 和 R 。試證 $PQ = QR$ 的充分必要條件是： $\angle ABC$ 的分角線， $\angle ADC$ 的分角線和 AC 這三線交於一點。

第五題：

設 n 爲一個正整數且 $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ 均爲實數。試證

$$\left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |x_i - x_j| \right)^2 \leq \frac{2(n^2 - 1)}{3} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (x_i - x_j)^2$$

證明上式中等號成立的充分必要條件是 x_1, x_2, \dots, x_n 爲一個等差序列。

第六題：

設 p 爲一個質數。試證：存在一個質數 q ，使得對所有的整數 $n, n^p - p$ 都不能被 q 整除。

二、第 44 屆國際數學奧林匹亞競賽成績統計

表 1. 2003 年第 44 屆 IMO 前 20 名國家各國成績統計表

名次	國名	總分	金牌	銀牌	銅牌	參賽人數
1	保加利亞	227	6	0	0	6
2	中國大陸	211	5	1	0	6
3	美國	188	4	2	0	6
4	越南	172	2	3	1	6
5	俄羅斯	167	3	2	1	6
6	韓國	157	2	4	0	6
7	羅馬尼亞	143	1	4	1	6
8	土耳其	133	1	3	1	6
9	日本	131	1	3	2	6
10	匈牙利	128	1	3	1	6
10	英國	128	1	2	3	6
12	加拿大	119	2	0	3	6
12	哈薩克	119	1	2	2	6
14	烏克蘭	118	1	2	3	6
15	印度	115	0	4	1	6
16	台灣	114	1	2	2	6
17	德國	112	1	2	1	6
17	伊朗	112	0	3	2	6
19	泰國	111	1	1	3	6
19	白俄羅斯	111	1	2	2	6

表 2. 2003 年第 44 屆 IMO 中華民國學生代表得分及成績統計表

姓名	第 1 題	第 2 題	第 3 題	第 4 題	第 5 題	第 6 題	總分	獎牌
黃紹倫	7	7	0	7	7	1	29	金牌
葉仲恆	7	3	0	7	4	0	21	銀牌
黃道生	2	3	0	7	7	1	20	銀牌
趙心宇	7	3	0	7	1	0	18	銅牌
林金毅	7	3	0	7	0	0	17	銅牌
廖紹棠	2	0	0	0	7	0	9	榮譽獎

三、第 44 屆國際數學奧林匹亞競賽試題詳解

第一題：

令 $S = \{1, 2, \dots, 1000000\}$ ，而 A 是一個恰有 101 個元素的 S 的子集合。試證，在 S 中存在著 t_1, t_2, \dots, t_{100} 使得下面的這些集合

$$A_j = \{x + t_j \mid x \in A\}, j = 1, 2, \dots, 100$$

任何相異的兩個都不相交。

試題委員會公布的參考答案：

參考解答：考慮集合 $D = \{x - y \mid x, y \in A\}$ ，

則集合 D 的元素個數至多有 $101 \times 100 + 1 = 10101$ 個。因為兩個集合 $A + t_i$ 與 $A + t_j$ 具有非空交集的充分必要條件為 $t_i - t_j \in D$ 。所以我們僅需要依照此想法

選取 100 個元素即可。

我們以數學歸納法選取這些元素。由 S 中任取一個元素。假設我們已選取 k 個元素，此處 $k \leq 99$ 。(此 k 個元素選取的方式為：任一元素 x 已被選取，則我們不能從集合 $x + D$ 選取另外一個元素。)

在 k 個元素被選取之後，則 S 中至多有 999999 (因為 $10101k \leq 999999$) 個元素不能被選取。因此，我們可以再選取下一個元素。

推廣結果：令 $S = \{1, 2, \dots, n\}$ ，且 m 是一個正整數使得 $n > (m-1) \binom{k}{2} + 1$ ，而 A 是一個恰有 k 個元素的 S 的子集合。試證，在 S 中存在著 t_1, t_2, \dots, t_m 使得下面的這些集合

$$A_j = \{x + t_j \mid x \in A\}, j = 1, 2, \dots, m$$

任何相異的兩個都不相交。

參考解答：考慮集合 $B = \{x - y \mid x, y \in A\}$ ，

則集合 B 的元素個數至多有 $\binom{k}{2} + 1$ 個。

我們僅需要證明：在 S 中存在著 t_1, t_2, \dots, t_m

使得 $|t_i - t_j| \notin B, i \neq j$ 。

底下我們以數學歸納法選取 t_1, t_2, \dots, t_m 。

在 S 中選取一個元素 $t_1 = 1$ 且考慮集合

$$C_1 = S \setminus (B + t_1) \text{。則 } |C_1| \geq n - \left(\binom{k}{2} + 1\right) > (m-2) \left(\binom{k}{2} + 1\right) \text{。}$$

對於 $1 \leq i < m$ ，假設 t_1, t_2, \dots, t_i 已被選取且

$$C_i \text{ 已被定義， } |C_i| > (m-i-1) \left(\binom{k}{2} + 1\right) \geq 0 \text{。}$$

因此，我們可由集合 C_i 選取一個最小元素

t_{i+1} 而且考慮集合 $C_{i+1} = C_i \setminus (B + t_{i+1})$ 。則

$$|C_{i+1}| \geq |C_i| - \left(\binom{k}{2} + 1\right) > (m-i-2) \left(\binom{k}{2} + 1\right) \geq 0$$

依照上述的方式，我們可選取符合題意的

t_1, t_2, \dots, t_m 。

林金毅同學的解法：

由題意設

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_{101} \mid 1 \leq a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_{101} \leq 1000000\}$$

。定義 1000000 個集合： $A(p) = \{x + p \mid x \in A\}$ ，

其中 p 屬於 S ，則在 S 中選出滿足題設條件的 t_1, t_2, \dots, t_{100} 即是從以上定義出的 1000000 個集合中選出 100 個集合使得兩兩沒有交集。

而對每一個 p ， $A(p)$ 至多有 $\binom{101}{2} = 5050$ 個

$p' > p$ 使得 $A(p)$ 和 $A(p')$ 的交集是非空。此因而這必然是存在一對 $u > v$ 屬於 $\{1, 2, \dots, 101\}$ 使得 $A(p)$ 的第 u 個元素和

$A(p')$ 的第 v 個元素相同而對於每一對 $u > v$ 屬於 $\{1, 2, \dots, 101\}$ 恰有一 $p' > p$ 使得 $a_u + p' = a_v + p$ 或 $a_u + p = a_v + p'$ 成立。
(事實上，若 $u < v$ 則 $a_u + p = a_v + p'$ 不可能成立) 由於這樣 u, v 共有 5050 組，所以這樣的 p' 也至多有 5050 個。

把 $A(1), A(2), \dots, A(1000000)$ 排列起來選，現逐次選取 $t_1, t_2, t_{100} : t_1 = 1, t_{n+1} =$ 選完 t_n 後可以選的最小數。其中 t_n 不可以選的就是 $A(t_n)$ 會和之前選出的某 $A(t_k)$ 的交集非空。於是只在每次選完 t_n 時把那些會和他有交集的集合 $A(t'_n)$ (至多有 5050 個) 和

$A(t_n)$ (合起來至多有 50501 個) 從可以選

的範圍去掉再選就沒有問題了。底下證明：對所有 $n \leq 100$ ，可以選出 t_n 。

我們利用反證法，假設不然。則由以上選法知：選完了 t_{n-1} 以後，從 $1, 2, \dots, 1000000$ 共 1000000 都不可以選了。但是選了 $n-1$ 次最多排除了 $5051(n-1) \leq 5051 \times 99 < 1000000$ 可以選。矛盾。

所以 t_1, t_2, \dots, t_{100} 都選出來了，這些

t_1, t_2, \dots, t_{100} 根據選法確實滿足題意。

第二題：

求所有能使 $\frac{a^2}{2ab^2 - b^3 + 1}$ 成為正整數的正整數對 (a, b) 。

試題委員會公布的參考答案：

參考解答：令 (a, b) 是滿足題意的一個序對。因

$$k = \frac{a^2}{2ab^2 - b^3 + 1} > 0$$

$$\Rightarrow 2ab^2 - b^3 + 1 > 0, a > \frac{b}{2} - \frac{1}{2b^2}$$

$$\Rightarrow a \geq \frac{b}{2}$$

根據上式，可得 $k \geq$ 或

$$a^2 \geq b^2(2a - b) + 1, (\Rightarrow a^2 > b^2(2a - b) \geq 0.$$

因此 Equation Section (Next)

$$a > b \text{ or } 2a = b \quad (1)$$

對於固定正整數 k 和 b ，考慮方程式

$$a^2 - 2kb^2a + k(b^3 - 1) = 0 \quad (2)$$

的兩根 a_1, a_2 (假設 $a_1 \geq a_2$)。由根與係數關係知：

$$a_1 + a_2 = 2kb^2, a_1a_2 = k(b^3 - 1)。$$

根據上述，我們可得：

$$a_1 \geq kb^2 > 0, 0 \leq a_2 = \frac{k(b^3 - 1)}{a_1} \leq \frac{k(b^3 - 1)}{kb^2} < b。$$

結合(1)式可得： $a_2 = 0$ 或 $a_2 = \frac{b}{2}$ (此處 b 必為偶數)。

(i) 若 $a_2 = 0$ 則 $b^3 - 1 = 0$ 。因此 $a_1 = 2k, b = 1$ 。

(ii)若 $a_2 = \frac{b}{2}$ 則 $k = \frac{b^2}{4}$ 且 $a_1 = \frac{b^4}{2} - \frac{b}{2}$ 。

由上述的討論可知滿足題意的序對 (a, b)

為：對於某個正整數 ℓ

$(a, b) = (2\ell, 1)$ 或 $(\ell, 2\ell)$ 或 $(8\ell^4 - \ell, 2\ell)$ 。

註解 1：(1)式的另一種解法：固定 $a \geq 1$ 且考

慮方程式 $f_a(b) = 2ab^2 - b^3 + 1$ 。則 $f_a(b)$

在區間 $\left[0, \frac{4a}{3}\right]$ 是遞增函數，在區間

$\left[\frac{4a}{3}, \infty\right)$ 是遞減函數。由此可得

$$\begin{aligned} f_a(a) &= a^3 + 1 > a^2, \\ f_a(2a-1) &= 4a^2 - 4a + 2 > a^2, \\ f_a(2a+1) &= -4a^2 - 4a < 0. \end{aligned}$$

因此，若 $b \geq a$ 且 $\frac{a^2}{f_a(b)}$ 是一個正整數則

$b = 2a$ 。

若 $a \leq b \leq \frac{4a}{3}$ 則 $f_a(b) \geq f_a(a) > a^2$ 且

$\frac{a^2}{f_a(b)}$ 不是一個正整數。(矛盾)

若 $b > \frac{4a}{3}$ 則

(i)若 $b \geq 2a+1$ 則 $f_a(b) \leq f_a(2a+1) < 0$ (矛盾)；

(ii)若 $b \leq 2a-1$ 則 $f_a(b) \geq f_a(2a-1) > a^2$ ，且

$\frac{a^2}{f_a(b)}$ 不是一個正整數。(矛盾)

註解 2：此題有很多種解法，底下列出其中三種。

解法(一)：令 D 為方程式(2)的判別式，則 D 是某個非負整數 d 的平方，即

$$D = (2b^2k - b)^2 + 4k - b^2 = d^2.$$

(i) 若 $e = 2b^2k - b = d$ ，則 $4k = b^2$ 且

$$a = 2b^2k - \frac{b}{2}, \frac{b}{2}.$$

(ii)若 $e \neq d$ ，則

$$|d^2 - e^2| \geq 2e - 1 \Rightarrow |4k - b^2| \geq 4b^2k - 2b - 1.$$

(iii)若 $4k - b^2 > 0$ ，則 $b = 1$ 。

其他情形是無解。

解法(二)：假設 $b \neq 1$ 且令 $s = \gcd(2a, b^3 - 1)$ ，

$2a = su, b^3 - 1 = st'$ ， $2ab^2 - b^3 + 1 = st''$ 則 $t + t' = ub^2$ 且 $\gcd(u, t) = 1$ 。由 $st | a^2$ ，可得 $t | s$ 令 $s = rt$ 。則原問題可簡化成底下的引理：

引理：令 b, r, t, t', u 是滿足 $b^3 - 1 = rtt'$ 與 $t + t' = ub^2$ 的正整數。則 $r = 1$ 且 t, t', u 三數之中有一為 1。

證明：由 $b^3 - 1 = rtt'$ 與 $t + t' = ub^2$ 可得

$$b^3 - 1 = rt(ub^2 - t) = rt'(ub^2 - t)。$$

因 $rt^2 \equiv rt'^2 \equiv 1 \pmod{b^2}$ ，若 $rt^2 \neq 1$ 且

$rt'^2 \neq 1$ ，則 $t, t' > \frac{b}{\sqrt{r}}$ 。我們可得

$$r \frac{b}{\sqrt{r}} \left(ub^2 - \frac{b}{\sqrt{r}} \right) \geq b^3 - 1, \text{ 除非 } r = u = 1.$$

解法(三)：我們沿用上述的符號，因

$rt^2 | (b^3 - 1)^2$ ，所以僅需要證明底下的引理：

引理：令 $b \geq 2$ 。若一正整數 $x \equiv 1 \pmod{b^2}$

能被 $(b^3 - 1)^2$ 整除，則 $x = 1$ 或 $x = (b^3 - 1)^2$

或 $(b, x) = (4, 49)$ 或 $(4, 81)$ 。

證明：令 p, q 是正整數具有 $p > q > 0$ 且滿

足 $(b^3 - 1)^2 = (pb^2 + 1)(qb^2 + 1)$ 。則

$$\begin{aligned} b^4 &= 2b + p + q + pqb^2 \\ \Rightarrow (q(pq - b^2) + 1)b^4 &= p - (q + 2b)(qb^2 - 1) \\ \Rightarrow -3 < \frac{p - (q + 2b)(qb^2 - 1)}{b^4} < 1. \end{aligned}$$

根據上述，可得證。

趙心宇同學的解法：設 $\frac{a^2}{2ab^2 - b^3 + 1} = k$,

$a^2 - 2kb^2a + b^3k - k = 0$ ，視為 a 的二次方程式。因為 a 是整數，所以判別式必須是一個完全平方數。由 $\Delta = 4(k^2b^4 - b^3k + k)$ ，而 4 是一個完全平方數，故

$k^2b^4 - b^3k + k = m^2$ ，其中 m 是自然數。但是當 b 為偶數時易得不等式：

$$\left(kb^2 - \frac{b}{2} + 1\right)^2 > k^2b^4 - b^3k + k = \left(kb^2 - \frac{b}{2}\right)^2 + k - \frac{b^2}{4} > \left(kb^2 - \frac{b}{2} - 1\right)^2$$

故必有

$$k^2b^4 - b^3k + k = \left(kb^2 - \frac{b}{2}\right)^2 + k - \frac{b^2}{4} = \left(kb^2 - \frac{b}{2}\right)^2 \Rightarrow k = \frac{b^2}{4}$$

若 b 是奇數，

$$\left(kb^2 - \frac{b}{2} + \frac{1}{2}\right)^2 > k^2b^4 - b^3k + k = \left(kb^2 - \frac{b}{2}\right)^2 + k - \frac{b^2}{4} > \left(kb^2 - \frac{b}{2} - \frac{1}{2}\right)^2$$

上述不等式成立的條件是 $b = 1$ ，故 b 不可能是大於 1 的奇數。

(i) $b = 1$ 時，必有 $a = 2k$ 。所以 $(2k, 1)$ 是其一中一組解。

(ii) b 偶數時，將 $k = \frac{b^2}{4}$ 代入，得出：

$$a = \frac{2kb^2 \pm \sqrt{\Delta}}{2} = kb^2 \pm \left(kb^2 - \frac{b}{2}\right) = \frac{b}{2}, \frac{b^4 - b}{2}$$

帶入驗證皆合乎條件。

故滿足題意的所有解為：

$$(2k, 1) \left(\frac{b}{2}, b \right) \left(\frac{b^4 - b}{2}, b \right)$$

第三題：

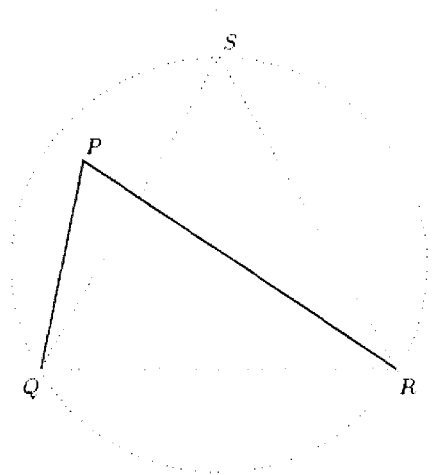
凸六邊行的任何兩個對邊都有下面的性質：兩對邊中點間的距離恰等於這兩個對邊長的和的 $\sqrt{3}/2$ 倍。試證這六邊形的所有內角都相等。

(一個凸六邊形 $ABCDEF$ 有三組對邊： AB 和 DE ； BC 和 EF 以及 CD 和 FA)

試題委員會公布的參考答案：

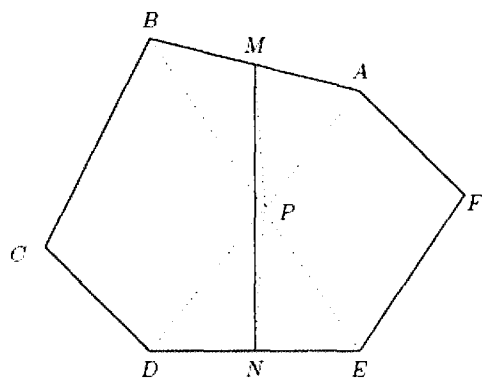
參考解答(一)：首先我們先證底下的一個引理：

引理：考慮一個三角形 PQR 其中 $\angle QRP \geq 60^\circ$ 。令 L 是 QR 的中點。則 $PL \leq \frac{\sqrt{3}}{2} QR$ ，此處等號成立的充分必要條件是三角形 PQR 為正三角形。



證明: 令 S 是使得三角形 QRS 為正三角形的一個點, 此處 P 點與 S 點在 QR 的同一側。則 P 點落在三角形 QRS 的外接圓之內部。

同時, P 點也落在以 L 為中心, $\frac{\sqrt{3}}{2}QR$ 為半徑的圓內。故得證。



因為凸六邊行的主對角線可形成一個三角形 (此三角形可能是退化的), 所以我們可選取其中的兩條主對角線使其形成的角大於或等於 60° 。不失其一般性, 我們可假設凸六邊行 $ABCDEF$ 的兩條主對角線 AD 與 BE 滿足 $\angle APB \geq 60^\circ$, 此處 P 點是主對角線 AD 與 BE 的交點。根據上述引理, 可得:

$$MN = \frac{\sqrt{3}}{2}(AB + DE) \geq PM + PN \geq MN,$$

此處 M 與 N 分別是 AB 與 DE 的中點。所以三角形 ABP 與 DEP 是正三角形。

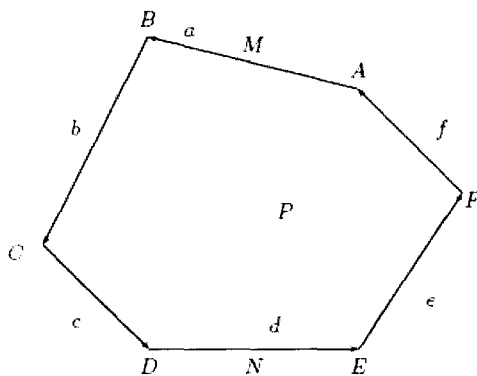
另一方面, 主對角線 CF 與 AD 或 BE 可形成一個大於或等於 60° 的角。不失其一般性, 我們可假設此角為 $\angle A Q F \geq 60^\circ$, 其中 Q 是主對角線 AD 與 CF 的交點。依上述的方法, 我們可得: 三角形 $A Q F$ 與 $C Q D$ 是正三角形。由此可知: $\angle B R C = 60^\circ$, 其中 R 是主對角線 BE 與 CF 的交點。再依據上述的作法, 可得: 三角形 $B C R$ 與 $E F R$ 是正三角形。

故得證。

參考解答 (二):

令 $ABCDEF$ 為一給定的凸六邊形且

$$a = \overline{AB}, b = \overline{BC}, \dots, f = \overline{FA},$$



Equation Section (Next)

令 M, N 分別為 AB 與 DE 的中點, 則

$$\overline{MN} = \frac{1}{2}a + b + c + \frac{1}{2}d \text{ 和 } \overline{MN} = -\frac{1}{2}a - f - e - \frac{1}{2}d.$$

所以

$$\overline{MN} = \frac{1}{2}(b + c - e - f). \quad (1)$$

根據題意，可得

$$\overline{MN} = \frac{\sqrt{3}}{2} (|a| + |d|) \geq \frac{\sqrt{3}}{2} |a - d|. \quad (2)$$

令 $x = a - d, y = c - f, z = e - b$ 。由(1)與(2)，可得

$$|y - z| \geq \sqrt{3}|x|. \quad (3)$$

同理可得

$$|z - x| \geq \sqrt{3}|y|. \quad (4)$$

$$|x - y| \geq \sqrt{3}|z|. \quad (5)$$

觀察得

$$(3) \Leftrightarrow |y|^2 - 2yz + |z|^2 \geq 3|x|^2,$$

$$(4) \Leftrightarrow |z|^2 - 2zx + |x|^2 \geq 3|y|^2,$$

$$(5) \Leftrightarrow |x|^2 - 2xy + |y|^2 \geq 3|z|^2.$$

由上式可得

$$-|x|^2 - |y|^2 - |z|^2 - 2yz - 2zx - 2xy \geq 0,$$

$$\text{或 } -|x + y + z|^2 \geq 0.$$

因此，我們可得

$$x + y + z = 0$$

$$|y - z| = \sqrt{3}|x|, \quad a \parallel d \parallel x,$$

$$|z - x| = \sqrt{3}|y|, \quad c \parallel f \parallel y,$$

$$|x - y| = \sqrt{3}|z|, \quad e \parallel b \parallel z,$$

假設 PQR 是一個三角形使得

$$\overline{PQ} = x, \overline{QR} = y, \overline{RP} = z. \text{ 不失其一般性，}$$

我們可假設 $\angle QPR \geq 60^\circ$ 。令 L 為 QR 的中

$$\text{點，則 } PL = \frac{|z - x|}{2} = \frac{\sqrt{3}|y|}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} QR. \text{ 根據解法(一)，可知：} PQR \text{ 是一個正三角形。}$$

所以 $\angle ABC = \angle BCD = \dots = \angle FAB = 120^\circ$ 。

黃道生同學的解法：如圖(一)，考慮三角形 ABC 及 AB 的中點 M 。考慮 CM 的長度與角 C 的關係，此處以 C 代表角 C 的大小。下證：

Equation Section (Next)

$$\text{引理一：當 } C > 60^\circ, CM < \frac{\sqrt{3}}{2} AB.$$

由餘弦定律知：

$$AC^2 + BC^2 = AB^2 + 2AC \cdot BC \cos C < AB^2 + 2AC \cdot BC \cos 60^\circ \leq AB^2 + \frac{AC^2 + BC^2}{2}$$

(1)

所以 $AC^2 + BC^2 < 2AB^2$ 。再由中線定理知： $4CM^2 + AB^2 = 2AC^2 + 2BC^2 < 4AB^2$ 。所

$$\text{以 } 4CM^2 < 3AB^2 \Rightarrow CM < \frac{\sqrt{3}}{2} AB.$$

如圖(二)：設凸六邊形 $ABCDEF$ ， M, N 分別為 AB, DE 之中點， P 為對角線 AD, BE 之交點。若 $\angle APB > 60^\circ$ ，則由引理一及三角不等式可得：

$$MN \leq MP + NP < \frac{\sqrt{3}}{2} (AB + DE), \text{ 此與題}$$

設不合，所以， $\angle APB \leq 60^\circ$ (引理二)。

主證明：如圖(三)，由引理(二)： $\angle APB, \angle FQE, \angle CRD$ 全都小於或等於 60° 。但，顯然這三個角的和為 180° (不論有沒有退化)。所以， $\angle APB = \angle FQE = \angle CRD = 60^\circ$ 。由引理

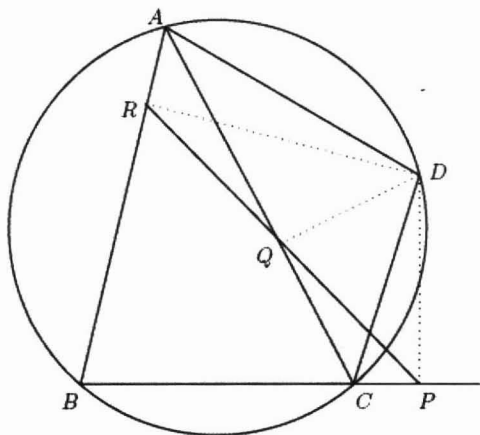
一的證明中(1)式可知：若 $\angle APB = 60^\circ$ 而不等號必須成爲等號（在引理一中，

$$CM = \frac{\sqrt{3}}{2} AB), \text{ 必須 } AC = CB, \text{ 因爲 } M$$

爲中點所以 CM 垂直 AB 。而且 CM 爲角 C 的平分線。現在有 $\angle APB, \angle CRD$ 的平分線，互相夾角爲 120° ， AB 垂直 $\angle APB$ 之平分線， AF 垂直 $\angle CRD$ 之平分線，而且 $ABCDEF$ 爲凸六邊形。所以 $\angle BAF = 120^\circ$ 。同理可得凸六邊形 $ABCDEF$ 的每個角都是 120° ，故每個角都相等。

第四題：

設 $ABCD$ 爲一個圓內接四邊形，自點 D 向直線 BC ， CA 和 AB 做垂線，設垂足分別爲 P ， Q 和 R 。試證 $PQ = QR$ 的充分必要條件是： $\angle ABC$ 的分角線， $\angle ADC$ 的分角線和 AC 這三線交於一點。



試題委員會公布的參考答案：

參考解答（一）：由 Simson 定理知 P, Q, R 三點共線。因 $\angle DPC$ 與 $\angle DQC$ 爲直角且

D, P, Q, C 四點共圓，所以 $\angle DCA = \angle DPQ = \angle DPR$ 。同理， D, Q, R, A 四點共圓，所以 $\angle DAC = \angle DRP$ 。因此 $\triangle DCA \sim \triangle DPR$ 。同理可證：

$\triangle DAB \sim \triangle DQP$ 與 $\triangle DBC \sim \triangle DRQ$ 。則

$$\frac{DA}{DC} = \frac{DR}{DP} = \frac{DB \cdot \frac{QR}{BC}}{DB \cdot \frac{PQ}{BA}} = \frac{QR}{PQ} \cdot \frac{BA}{BC}$$

故 $PQ = QR$ 充分必要條件是 $\frac{DA}{DC} = \frac{BA}{BC}$ 。

由此可得證。

參考解答（二）：假設 $\angle ABC$ 的分角線與 $\angle ADC$ 的分角線分別與 AC 交於 L 與 M 兩點。因爲

$$\frac{AL}{CL} = \frac{AB}{CB} \quad \text{與} \quad \frac{AM}{CM} = \frac{AD}{CD}$$

所以， $\angle ABC$ 的分角線， $\angle ADC$ 的分角線和 AC 這三線交於一點的充分必要條件是

$$\frac{AB}{CB} = \frac{AD}{CD}, \text{ 即 } AB \cdot CD = CB \cdot AD. \text{ 底下，}$$

我們將證明： $AB \cdot CD = CB \cdot AD$ 的充分必要條件是 $PQ = QR$ 。

因爲 $DP \perp BC, DQ \perp AC, DR \perp AB$ 所以我們有：(i) 以 DC 爲直徑的圓包含了 P, Q 兩點；(ii) 以 DA 爲直徑的圓包含了 Q, R 兩點。因此， $\angle PDQ = \gamma$ 或 $180^\circ - \gamma$ ，其中 $\gamma = \angle ACB$ 。同理可得： $\angle QRD = \alpha$ 或 $180^\circ - \alpha$ ，其中 $\alpha = \angle CAB$ 。由正弦定律，可得

$$PQ = \sin \gamma \quad \text{與} \quad QR = AD \sin \alpha.$$

所以， $PQ=QR$ 的充分必要條件是

$$\frac{CD}{AD} = \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma}$$

另一方面，再由正弦定律，可得：

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} = \frac{CB}{AB}$$

要條件是 $\frac{CD}{AD} = \frac{CB}{AB}$ ，即

$$AB \cdot CD = CB \cdot AD$$

葉仲恆同學的解法：

(i) 設 $\angle ADC, \angle ABC$ 之角平分線分別交 AC 於 F 與 f 兩點。由角平分線定理知：

$$\frac{DC}{DA} = \frac{CF}{FA}, \frac{BC}{BA} = \frac{Cf}{fA}$$

$\angle ADC, \angle ABC$ 之角平分線和 AC 三線共點的充分必要條件是 F 與 f 兩點重合。所以 $\angle ADC, \angle ABC$ 之角平分線和 AC 三線共

點的充分必要條件是 $\frac{DC}{DA} = \frac{BC}{BA}$ 。

(ii) 由於 $\angle DRC = \angle DQC = 90^\circ, \angle DQA + \angle DPA = 180^\circ$ ，可知 $DRCQ, DQPA$ 四點共圓。又 DR, DA 分別在 $DRCQ, DQPA$ 的外接圓對 90° 的圓周角，可知 DR, DA 分別是 $DRCQ, DQPA$ 的外接圓的直徑。由正弦定律知：

$$RQ = DC \sin \angle RDQ, PQ = DA \sin \angle PDQ$$

再由 $DRCQ, DQPA$ 四點共圓，可知： $\angle RDQ = \angle BCA, \angle PDQ = \angle BAC$ ，即 $RQ = DC \sin \angle BCA, PQ = DA \sin \angle BAC$ 。

$$\text{所以 } \frac{RQ}{PQ} = \frac{\sin \angle BCA}{\sin \angle BAC}$$

(iii) 由正弦定律知： $\frac{BC}{BA} = \frac{\sin \angle BCA}{\sin \angle BAC}$ ，推得

$$\frac{DC}{DA} = \frac{BC}{BA} = \frac{\sin \angle BCA}{\sin \angle BAC} \Leftrightarrow DC \sin \angle BCA = DA \sin \angle BAC \Leftrightarrow PQ = RQ$$

所以， $\angle ADC, \angle ABC$ 之角平分線和 AC 三線共點的充分必要條件是 $PQ = RQ$ 。

第五題：

設 n 為一個正整數且 $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ 均為實數。

試證

$$\left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |x_i - x_j| \right)^2 \leq \frac{2(n^2-1)}{3} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (x_i - x_j)^2$$

證明上式中等號成立的充分必要條件是 x_1, x_2, \dots, x_n 為一個等差序列。

試題委員會公布的參考答案：

參考解答：(1) 因不等式兩邊對於 x_1, x_2, \dots, x_n 的任意變換是不變的，所以在不失一般性的情況下我們可假設

$$\sum_{i=1}^n x_i = 0$$

$$\sum_{i,j=1}^n |x_i - x_j| = 2 \sum_{i < j} (x_i - x_j) = 2 \sum_{i=1}^n (2i - n - 1) x_i$$

由 Cauchy-Schwartz 不等式可得

$$\left(\sum_{i,j=1}^n |x_i - x_j| \right)^2 \leq 4 \sum_{i=1}^n (2i - n - 1)^2 \sum_{i=1}^n x_i^2 = 4 \cdot \frac{n(n+1)(n-1)}{3} \sum_{i=1}^n x_i^2$$

另一方面，我們有

$$\sum_{i,j=1}^n (x_i - x_j)^2 = n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{j=1}^n x_j + n \sum_{j=1}^n x_j^2 = 2n \sum_{i=1}^n x_i^2$$

因此

$$\left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |x_i - x_j| \right)^2 \leq \frac{2(n^2-1)}{3} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (x_i - x_j)^2$$

(2)如果等式成立，則 $x_i = k(2i - n - 1)$ ，對於某個 k ，其意為 x_1, x_2, \dots, x_n 是一個等差數列。

另一方面，假設 x_1, x_2, \dots, x_n 是一個具有公差為 d 的等差數列。則我們可得

$$x_i = \frac{d}{2}(2i - n - 1) + \frac{x_1 + x_n}{2}.$$

x_1, x_2, \dots, x_n 經由 $-\frac{x_1 + x_n}{2}$ 的變換可得

$x_i = \frac{d}{2}(2i - n - 1)$ 與 $\sum_{i=1}^n x_i = 0$ 。由此可得

等號成立。

Equation Section (Next)

廖紹棠同學的解法：

因 $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |x_i - x_j| = 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} |x_i - x_j|$ ，所

以原命題可化為

$$\frac{n^2 - 1}{3} \sum_{1 \leq i < j \leq n} |x_i - x_j|^2 \geq \left(\sum_{1 \leq i < j \leq n} |x_i - x_j| \right)^2. \quad (1)$$

令 $|x_i - x_j| = a_i$ ，

即 $|x_i - x_{i+k}| = a_i + a_{i+1} + \dots + a_{i+k-1}$ 。

考慮一數列

$$S = (n-1) \times 1^2 + (n-2) \times 2^2 + (n-3) \times 3^2 + \dots + 1 \times (n-1)^2 = \frac{n^4 - n^2}{12}$$

令

$$S' = (n-1) \times \left(\frac{2}{n}\right)^2 + (n-2) \times \left(\frac{4}{n}\right)^2 + \dots + 1 \times \left(\frac{2n-2}{n}\right)^2 = \frac{4}{n^2} S = \frac{n^2 - 1}{3}$$

因此(1)之左式可化為

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{1 \leq i < j \leq n} |x_i - x_j|^2 \right) \left((n-1) \times \left(\frac{2}{n}\right)^2 + (n-2) \times \left(\frac{4}{n}\right)^2 + \dots + 1 \times \left(\frac{2n-2}{n}\right)^2 \right) \\ & \geq \left(\frac{2}{n} a_1 + \frac{2}{n} a_2 + \dots + \frac{2}{n} a_{n-1} + \frac{4}{n} (a_1 + a_2) + \dots + \frac{4}{n} (a_{n-2} + a_{n-1}) + \dots \right. \\ & \quad \left. \frac{2n-2}{n} (a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}) \right) \end{aligned} \quad (2)$$

接著我們若能證明(2)之右式等於(1)之右式，則此題得證。

在(1)之右式中，平方前 a_k 的係數為：

$$a_k = \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 - \left|k - \frac{n+1}{2}\right|^2, \text{ 當 } n \text{ 是奇數。}$$

$$a_k = \frac{n^2 + 2n}{4} - \left(\left|k - \frac{n+1}{2}\right| - \frac{1}{2} \right) \left(\left|k - \frac{n+1}{2}\right| + \frac{1}{2} \right), \text{ 當 } n \text{ 是偶數。}$$

在(2)之右式中，平方前 a_k 的係數為：

$$a_k = \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 - \left|k - \frac{n+1}{2}\right|^2, \text{ 當 } n \text{ 是奇數。}$$

$$a_k = \frac{n^2 + 2n}{4} - \left(\left|k - \frac{n+1}{2}\right| - \frac{1}{2} \right) \left(\left|k - \frac{n+1}{2}\right| + \frac{1}{2} \right), \text{ 當 } n \text{ 是偶數。}$$

因此，可知(2)之右式等於(1)之右式。故此命題得證。

第六題：

設 p 為一個質數。試證：存在一個質數 q ，使得對所有的整數 $n, n^p - p$ 都不能被 q 整除。

試題委員會公布的參考答案：

參考解答：

因 $\frac{p^p - 1}{(p-1)} = 1 + p + p^2 + \dots + p^{p-1} \equiv p + 1 \pmod{p^2}$ ，我們

可得 $\frac{p^p - 1}{(p-1)}$ 至少有一質因數 q 且 $q \not\equiv 1 \pmod{p^2}$ 。此質因數 q 即為所求，證明如下。

(下轉第 72 頁)