螺旋變式數學課程之還原理念簡介－以青浦變式教學中“以新歸舊”概念理解教學實踐[1]為例

孫旭花

香港教育學院院校協作與課堂學習研究中心

近年，中國內地和香港學者都有個共識，變式[2]教學反映了中國數學教學的某些合理之處。如，鮑建生、黃榮金、易凌峰、顧泠沅（2003），(Huang, 2002)，顧泠沅、黃榮金、馬頓 （2005）(聶必凱，2004)，鄭毓信（2006），（張奠宙，2007），(孫旭花，2007b； Wong, 2007; Wong, Lam, & Sun, 2006)，等研究。變式（Variation），一瞬間成為數學教育領域的熱點研究，出現上述相關研究。事實上，筆者認為變式在數學教育研究中，具有突出地位，主要因爲變式，通過“變中發現不變”來學習抽象化，和“以不變應萬變來”學習公理化，貼近地強調了，數學教學的中心問題----- “抽象化”和“公理化”，而“公理化”和“抽象化”一直是數學教學的難點。變式的角度，因培養數學的眼光，保證了在數學教與學的位置（孫旭花，2007a），變式研究因有助於“公理化”和“抽象化”學習，“數學教學”重要部分。大陸方面，變式教學主要從教學角度，研究數學知識的有效傳播之方法。

另一方面，變式也一直是學習領域的主要陣地，如朱新明，李亦菲，朱丹（1997），司馬賀 （1986）,Copper & Sweller (1987)., Anderson (1989)等大量認知心理學，也通過“變中發現不變”和“以不變應萬變來”，研究“遷移”是否發生，“推理”是否發生，變式研究因有助於“遷移”和“推理”學習，成為“學習領域”重要部分。其中，以 Marton 為首的歐洲現象圖示學習理論學派，特別注意“變與不變”的變異對教學的啓示，出現系列研究，如 Marton & Booth (1997), Marton & Tse

1 本文為筆者的博士論文中的一小部分。愿此文献给顧泠沅教授，以及千千万万寻找中国自己数学教育道路的“土学者”。感谢导师黄毅英林智中教授对本文的指導和大力支持。

[2]本文泛指“变中发现不变元素”。

通訊作者：孫旭花 sunxuhua@gmail.com

(2005);Runesson (1999) , Lo, Pong, & Chik (2005)，該學派主要成果之一，現象圖示學的變易理論(theory of variation)，從學習領域，解釋如何設置“變異空間”，有助於區分變中的不變要素。變異理論主要從學習角度，關注了“變易”設計是學習的發生之條件。

有趣的是，在香港，東方遇到西方，當教學理論遇到學習理論，變式教學遇到變異理論，《螺旋變式數學課程設計》便是兩者結合的產物，相遇的結晶。螺旋變式課程設計，基於數學問題之間的“變”與“不變”的角色、結構和功能（孫旭花、黃毅英、林智中、張奠宙，2006），分析了中國內地數學課程中的合理元素之一----變式題組，以這個基礎，參照了東方青浦課堂教學實踐和西方變異理論（Marton & Booth, 1997），結合了數學和數學學習過程的本質，歸納出螺旋變式課程設計模型，強調有系統地“變”，利用問題組，“結構”教學，實現概念連接，從而達成知識的“深、廣、透”設計，圍繞“變中發現不變”來學習抽象化，和“以不變應萬變來”學習公理化的設計理念，以分數除法、速度、體積課程設計為例進行設計，並在香港 21 班級，實驗證明顯著有效（孫旭花，2007b；Wong, 2007; Wong, Lam, & Sun, 2006）。

目前中國大陸大部分數學變式實踐，以變式練習為主，如《人教大綱版課後習題變式思維（初中三年下冊）》（韋靜雅，2004），但系統地把變式引入到新授課的課堂教學，目前成功且形成一定規模，並可以考證的案例只有顧泠沅領導的青浦變式，青浦變式體現國內數學教育特點，強調實踐，特別注重課堂教學的實踐，理論層面相對較弱（而西方數學教育則恰恰相反），螺旋變式課程設計基本思路之一就是,嘗試基於實踐進行理論升華，這樣基於實踐之根的理論，才更可能真正服務課堂，服務教學，步入實踐驗證理論，理論指導實踐的發展道路。

華人數學教育受到的最大批評之一就是，“機械練習死記硬背，導致的記憶而不是有意義的理解，Ma（1999）的研究發現美國教師的知識“是一點一點的”，而中國教師的知識“是一組一組” 的知識包，運用實證地有力諷刺了美國數

學教育的概念理解，刻畫了一個令美國數學教育尷尬的數學知識比較的畫面，這個研究在一定程度上，說明概念的連接與否似乎是美國數學教育薄弱環節之一。缺少連接，當然知識是“一點一點的”，而不是“一組一組的”的原因之一，教學如何把新舊概念連接，是數學概念理解的教學之重要環節。

90年代數學教育的口號“數學理解”（80年代數學教育的口號問題解決），數學理解作為教學的目標，得到數學教育界的一致認可(Hiebert & Carpenter ,1992)，強調理解地學數學，學習為了理解，學好了就意味著理解了，都意味理解是數學學習的目標、理解是數學學習的手段、理解是數學學習的評價。因此，教學不能實現數學概念理解，一切將沒有意義。然而說了好像等於沒說，理解的意義任何人都明白，關鍵并沒有提出導致概念理解**有法可依的**任何指導。

螺旋變式課程設計[3]，努力的方向之一就是，為課堂教學提出**有法可依**的指導，其中還原理念，即「以新歸舊」就是教學要注意的方法之一，相對難以理解，因爲以往中國數學教學僅僅強調「以舊引新」的去路，而較少關注「以新歸舊」的回路，雖然大家都知道，學習者也不可能像白紙一般，而是會帶著已有的觀念，去接觸新觀念。透過學習活動，讓新舊知識融合，新舊經驗銜接，新舊概念接軌，建立整體一致的理解。但是，新舊知識重新編輯，進行概念的還原的回程，對於剛剛接觸學習內容的學生至關重要，教師的知識結構，已經建立了兩個方向的連接，而學生可能剛剛建立一個方向的連接，需要在「以舊引新」基礎上，反復強調「以新歸舊」，才可能實現新舊概念的真正接軌。「以舊引新」，一般學者教師都知道，而「以新歸舊」較少學者教師知道，而不用說「以新歸舊」的實踐。

例如，很多教師常常「以舊引新」，會從加法引入減法，從加法引入乘法，

3 這裡做一個比喻，以期達到通俗易懂，深入淺出之目的。概念還原好像旅遊路綫的**回程**路綫，一般教學較爲重視**去程**路綫，即「以舊引新」環節，往往認爲既然去程知道，回程“**自然**”掌握，其實教學未必“自然”，因爲對於遊客而言，仍然是全新視野，「以新歸舊」仍需要大量教學支持。這裡概念還原也看為一種廣義的逆向思維。

從減法引入除法，從乘法引入乘方，但反過來，把很少會減法看為一個特殊的加法，把乘法看為一個特殊的加法，把除法看為一個特殊的減法，把乘方看為一個特殊的乘法，雖然表面只是解釋有少許出入，但對初學者而言，去程和回程出入很大，雖然同一條路徑，眼睛方向不同，視野全然不同，旅遊時，去程迷路很少，而回程迷路卻多，因此「以新歸舊」對教學至關重要。因爲當前的教學上有意識，強調「以新歸舊」的概念還原[4]，卻沒有受到「以舊引新」同等程度的重視。而且「以新歸舊」理念在以往數學教學理論層面強調不多，而且教學著實需要這方面的指導，螺旋變式課程設計還原理念，針對這個實踐的理論。我們認爲螺旋結構和序進結構不同在於，所有的概念都要還原爲「中心軸」，螺旋與序進描述，差異主要在於是否回到「中心軸」，這對於概念理解教學理論層面拓展，具有一定的積極意義。

這裡不是提出一個很新的理論，這裏僅僅把中國本土數學教師下意識使用的方法，熟悉的教學處理，顯然成立的實踐，合理的要素挖掘，提升到理論層面，把本土實踐理論化，以便使更多不會用、下意識用教師，而經常用、有意識地實踐，指導教學，從而步入實踐—理論---再實踐的循環。因此很可能本文例舉的方法，老師都熟悉，並不新奇，只是教學常常相對忽視，不常用，不多用這「**以新歸舊**」的概念還原理念去教學，雖然僅僅解釋上變了個角度，對於初學者，而是培養一個新舊知識連接的眼光，而形成一個整體理解，整體理念，還原理念是螺旋變式課程設計重要部分之一。

另一方面，在數學解題上，「**以新歸舊**」是一個重要思想方法，即化歸思想，把新問題轉化爲舊問題，在歷史上，周髀算經“以類和類”“以類通類”，也有「以新歸舊」之意義。但以往教學理論上，強調不多，以往變式教學實踐強調不多，當時青浦教學改革的主要成果，可概括爲四條基本原理：情意原理、

4 這裡做一個比喻，以期達到通俗易懂，深入淺出之目的。概念還原好像旅遊路綫的**回程**路綫，一般教學較爲重視**去程**路綫，即「以舊引新」環節，往往認爲既然去程知道，回程“**自然**”掌握，其實教學未必“自然”，因爲對於遊客而言，仍然是全新視野，「以新歸舊」仍需要大量教學支持。這裡概念還原也看為一種廣義的逆向思維。

序進原理、活動原理、回饋原理"，其中"序進原理" 強調課與課之間建立精當的序列關係，實施方法是變式教學。而青浦變式數學教學實踐中，提供了不少的「以新歸舊」的概念還原教學實踐，當時理論層面概括，強調不足，這裡螺旋變式課程設計，提出「以新歸舊」，也是基於這個背景，基於這樣的方向，基於這樣的努力。

螺旋變式課程設計的理念之一，強調概念還原，即所有的新概念，必須「還原」到舊的概念體系之中，原概念成爲「中心軸」，新概念都圍繞「中心軸」而 「螺旋式」前進。例如，除法還原為乘法「中心軸」，分數除法還原為整數除法「中心軸」(孫旭花，2007b)， 這樣的理念不是空中樓閣的理論，來源實踐，來源於青浦變式教學回到「中心軸」的實踐，這樣的實踐不僅是變式教學的精華，又恰恰補充原來理論概括的不足，這裏以青浦課堂實錄變式教學中的概念理解教學方法，以新歸舊為例子說明，解釋螺旋變式數學課程設計的還原理念。讀者可能要問為什麼選擇青浦課堂實錄？

選擇青浦課堂實錄原因主要是：

"本土化"。一般說來，教育的繼承和發展，需從理論到實踐，再從實踐升華理論的反複，周而復始的發展，極少"無中生有"的理論和實踐，得以長期發展存活。大多數心理學、教學論、思辨哲學研究領域的研究成果，這些研究成果並不能直接應用到課堂，主要因為"理論"是從"實驗室"獲取的理論，本身限制於"個體水平""實驗室條件"，而不能推廣到教學的"群體水平"。理論一定要從實踐中來，課程理論一定要從課程實踐中來，而不是來自實驗室，從實踐中來的課程理論，才更"自然"，更有"生命力"，有著長期存活並符合本土文化的土壤。

文革以後，中國教育改革一直學習蘇聯，學美國，學德國，大部分教改往往曇花一現，而難以持續發展，其中原因之一是"不服水土"，不符合本民族自己的歷史、社會、文化、哲學的"土壤"。"青浦教改"總結的經驗是"中國本土已

有的，有效經驗的總結”（青浦實驗教學小組，1991，16 頁）。從這個意義上，“青浦教改”代表中國數學教學“精華中的精華”，因此，本文選擇青浦教學實錄作為實踐源泉，更具民族的數學教學文化意義。

“有效”。青浦變式教學改革的突出試驗效果，也說明教學具有合理的要素。自解放後，在中國教學改革歷史上，時間之久，規模之大，極少能和青浦教學改革相媲美。歷時二十年之久，說明經過時間和實踐的考驗(顧泠沅,1994）。

“以全縣上下教改合力爲後盾，我們的數學教改獲得了初步的成功。尤其作為義務教育最後階段的初中畢業班成績，從 1979 年平均 32.5 分，合格率 16%，在逐年穩步上升，至 1984 年以來連續多年保持在較高水準線上，1986 年平均分 79.2，合格率達到 85%，80 分以上學生比率 62%......”（青浦縣數學教改實驗小組，1991,13 頁）。

因為 1979 年和 1984 年兩次評估的對象不同，評估工具已經不同，因此這個數據很難説明確定的效果，但數據説明至少不是失敗教學改革，效果背後，必有合理的成分。

“鮮活”。青浦課堂實錄，在課堂內較爲靈活地綜合應用了“變式教學”，需要根據教學內容與學生水平，設計變式“變”的度，恰如其分點撥學生思考，恰如其分發揮作爲腳手架的特質，更自然呈現教學全過程的模式。而以往的變式練習，直接用於課堂教學並不可行。

“代表性”。雖然變式教學在中國大班課堂教學實踐較為普遍化，已被一些學者意識到，如鮑建生等（2003）認爲變式教學在中國內地由來已久，被廣大教師自覺或不自覺的運用，也如聶必凱（2004）變式的實施是中國內地數學教學普遍的教學現象，但變式練習，多以例題—習題的鞏固模式。變式練習，在一定程度的泛化，加上限制於“練習”的怪圈，“不自覺”的怪圈，不太容易爲課堂設計提供可行的方向。青浦變式教學，恰如其分發揮了教學作爲學生學習腳手架的特質，同時在中國內地大班課堂的環境下，兼顧知識系統建構，和兒童

發展，突破變式只是用於練習課的課堂教學，系統地把變式引入到新授課的課堂教學，青浦課堂實錄是較為自覺和系統地、靈活地綜合應用變式的代表性案例。

青浦變式教學中的概念理解教學：以新歸舊的例子。

這裏首先呈現青浦變式課堂教學實錄（青浦教學實錄的9個例子）中，概念還原的例子。我們以幾節“原汁原味”的最“真實”青浦變式課堂教學的“即時”實錄──《學會教學》課堂實錄（青浦教改實驗小組， 327頁-363頁)，呈現變式教學“活著”的青浦變式教學的模式。

青浦變式教學設計，除了循序漸進，從已知到未知因素以外，還包括大量概念還原，從未知到已知因素，即雙方向建構路綫。例如：

課堂實錄1：

一般有理數的加法法則，是小學自然數擴充到有理數後的學習算法法則，大部分教學都會強調「以舊引新」，即小學自然數“加法法則”，注意有理數加數的符號與自然數的區別，注意1、和的符號，2、和的絕對值，引入有理數加法法則。但青浦變式課堂教學特別強調「以新歸舊」，把新知識有理數加法“加法法則”和原來算術裏數的加法法則比較，還原新知識“加法法則”學習為原來舊知識（自然數算法法則）的理解。例如：

課堂實錄1：“當兩個加數都是正有理數或零時，有理數運算與算術裏的加法運算是一致的。而有理數除了正有理數或零即算術裏的數以外，還有負的有理數，數的範圍已經擴充了，所以，有理數的加法法則實際上是算術裏，數的加法法則的推廣”。

----（課堂實錄1：333頁)。

分析：在思維方向方面，和原來思維由算術中數的加法法則，到有理數的加法法則思維方向相反，把有理數的加法法則看爲算術裏數的加法法則的推廣，思維方向爲：從有理數的加法法則到算術裏數的加法法則，強調注意了“加

法法則”學習**<u>還原為</u>**原來算法法則的理解。

和一般教學不同的是，有理數的加法法則中，“異號有理數加法法則”是難點，青浦變式課堂教學採用的“抵消”概念更充分體現了概念還原思想，(例如，（+5）+（-5）=0 並附坐標圖，見圖1，看爲正與負的全部“抵消”（+1）+（-1）=0。例如：

“…（+5）+（-5）=0，(+5）和（-5）正好全部抵消了，而（+5）+（-6）是抵消了一部分，實際上我們可以把-6看成-5和-1兩個部分，，(+5）和（-5）正好全部抵消了，-1就是結果。”

----（課堂實錄1：332頁）。

分析：和原來思維由有理數的加法到合幷，把“部分抵消”看為一個數拆成同號數的和（例如，(-6）拆成（-5）+（-1)，那麼（+5）+（-6）=（+5）+（-5）+（-1）= -1，其中（+5）+（-5）=0，先合幷，餘下（-1)，看做“部分抵消”運算)，其中，(-5）表徵為數軸左移5個單位，(+5）表徵為數軸右移5個單位，（+5）+（-5）表徵為合併未移動。思維方向爲：合幷到從有理數的加法，注意認知建構的“概念還原（雙向建構）”。因為“異號有理數加法法則”是難點，而理解該難點建立“抵消”的概念，教師出的問題直觀地建立了“全部抵消”的概念。(+5）+（-5）=0，直觀地建立了“部分抵消”的概念, (+5）+（-6）=（+5）+（-5）+（-1）= -1 並附坐標圖，即（+5）+（-5）已全部“抵消”，還餘（-1）未“抵消”。促使學生加深對異號相加的技巧和理解深入，培養了把一個數拆成同號數的和，又形成從直觀到抽象的過渡。

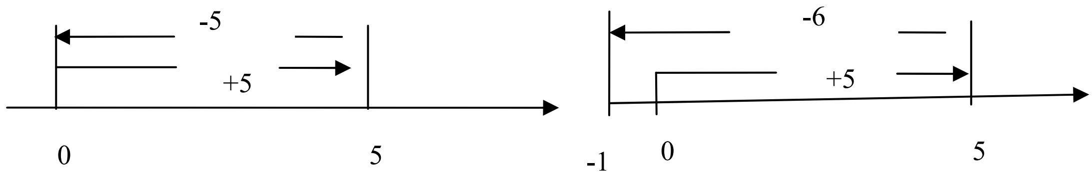

圖 1 全部“抵消”與部分“抵消”示意圖

課堂實錄 2：

在同底數的冪的乘法教學中，青浦變式教學和一般教學不同的是特別強調，還原冪運算的算理。例如：

生：$a^3.a^7=a^{10}$

師：你是怎樣算出來的？

生：a^3.是3個a 相乘，a^7.是7個a 相乘，一共是10個a 相乘，所以$a^3.a^7=a^{10}$

（課堂實錄2：335頁）。

分析：和原來思維由$a^3.a^7=.a^{10}$單項式乘法到冪運算，把a^3.是3個a 相乘，a^7.是7個a 相乘，思維方向爲：冪運算到分解為單項式乘法，注意還原了冪運算的算理，注意了數學認知建構的“概念還原”。可能有些老師也會先下意識提醒把a^3.是3個a 相乘，a^7.是7個a 相乘，避免死記公式，但是有意識地，常常注意“概念還原” 教師，並不多。

課堂實錄3：

用拆添項法分解因式教學，青浦變式教學和一般教學不同的是特別強調，還原因式分解的思想，即多項式乘法的逆運算。即：

生：$(x^2 -x+1)(x^2 +x+1)= \{(x^2 +1)-x\}\{(x^2 +1)+x\} =(x^2 +1)^2-x^2 = x^4+2x^2+1-x^2= x^4+x^2+1$

師：上面的演算可知，x^4+x^2+1確實可以分解為$(x^2 -x+1)(x^2 +x+1)$，到底如何分解呢？請同學試試看，誰能最快發現新的分解方法？（課堂實錄3：342頁）。

分析：和原來思維由$(x^2 -x+1)(x^2 +x+1) = x^4+x^2+1$多項式乘法變為，$x^4+x^2+1$到底如何分解呢？思維方向爲：因式分解到多項式乘法，注意了把因式分解思想還原為多項式乘法，最初因式分解思想，從而實現認知建構的“概念還原”，以及因式分解與多項式乘法的雙向連接。可能有些老師也會先下意識注意了把因式分解思想還原為多項式乘法，但針對任何新知識有意識地，常常注意“概念

還原”教師，並不多。

課堂實錄7：

一般三角形的內角平分綫性質的教學，教學往往把利用輔助綫和平行線分線段成比例定理，來證明。但青浦變式教學和一般教學不同的是，把三角形的內角平分綫性質看為平行線分線段成比例定理特例，還原為平行線分線段成比例定理思路。

課堂實錄7：三角形的內角平分綫性質

角平分線性質定理：三角形的內角平分綫分對邊所得的兩條綫段和這個角的兩邊對應成比例。

如下圖，在三角形⊿ABC中，AD平分∠A，求證：AB：AC=BD：DC

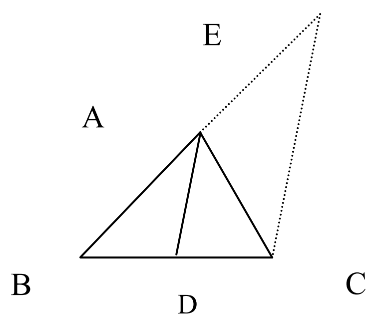

圖 2 角平分線性質定理圖示

證明：做輔助綫ＡＥ。過C作AD的平行綫交BA的延長綫於E，如圖2，

因爲AD平分角∠A，所以∠BAD=∠DAC

AD || EC，所以∠BAD=∠E， ∠DAC= ∠ACE

所以∠E =∠ACE ,得出AC=AE

根據平行綫定理AD || EC，得出AB：AE=BD：DC

所以：AB：AC=BD：DC

從圖上看，右邊AC是角平分線分對邊，證明的時候我們把角平分線AC轉到

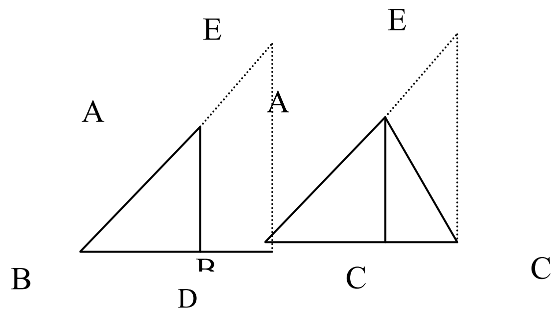

圖 3「角平分線性質定理」還原爲平行線分線段成比例定理示意圖

AE的位置，AD平行EC，得到的圖形與左邊相同。所以角平分綫性質定理，可以直接從這條平行綫分綫段成比例定理推導出來，如圖3（課堂實錄7：383頁）。

分析：和開頭引入的思維，由平行線分線段成比例定理到角平分線性質定理，轉變為角平分綫性質定理，可以看作直接從這條平行綫分綫段成比例定理推導出來，即思維方向爲：角平分線性質定理到平行綫分綫段成比例定理，注意認知建構的"概念還原（雙向建構），把角平分線性質定理還原為平行線分線段成比例定理"，而不是強調一個新"角平分線性質定理"定理，雖然這裡僅僅解釋變了一點點，但重要的是，對初學者而言，培養了一個把新舊知識連接起來，而形成一個整體，而知識前後一致，至關重要。

課堂實錄 8：

課堂實錄 8：弦切角。一般弦切角的教學，教學往往從圓周角引入弦切角，但青浦變式教學和一般教學不同的是，把弦切角看為圓周角的特例，還原為舊知識。

師：……弦切角與圓周角是不同概念的兩種角，但卻有著密切聯繫，它們的頂點都在圓上，當圓周角的一邊轉到切綫位置時，圓周角就變爲弦切角，所對的弧變爲所夾的弧，而它（指圓周角）的度數都等於該弧度數的一半。（注：

教師期望進一步引出弦切角的度數是否等於所夾弧度數的一半，這一新的課題。)（課堂實錄8：391-392頁）

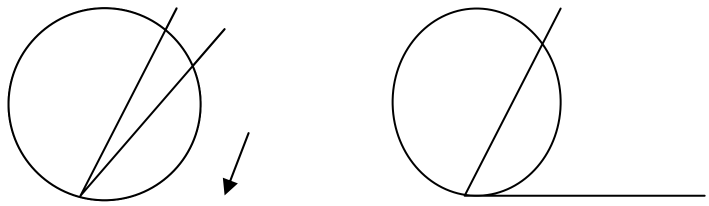

圖 4 圓周角就變爲弦切角示意圖　　弦切角圖

分析：和教學開頭引入的思維方向，由弦切角到圓周角，轉變為弦切角可以看作直接圓周角的一邊轉到切綫位置時，即圓周角特例，即思維方向爲：圓周角到弦切角，注意認知建構的“概念還原（雙向建構）”，把弦切角還原爲舊的圓周角概念，而不是介紹一個新的概念。雖然這裡僅僅解釋弦切角概念變了一點點，但重要的是，初學者而言，培養了一個把弦切角和圓周角連接起來，而形成一個整體，這樣有助於理解弦切角和圓周角深層關係結構。

概念還原（雙向建構）因素的理論解釋。

皮亞傑建構主義[5]強調，可逆(inverse)是心理運算特徵。皮亞傑(Piaget, 1971)綜合地研究了社會學、數學、經濟學、生物學、物理、邏輯之後，指出“所有的知識建構都具有群結構的三個要素：整體性、具有轉換規律或法則、自身調整性；結構就是由具有整體性的若干轉換規律組成的一個有自身調整性質的圖式體系（Piaget，1971，P.6 ）”。

一個數群，如正負整數群，是一個諸元素（這裏是正負整數）的集合或整體（wholeness）。在這個整體裏，元素由組織規律連接起來（這裏是加法），用這個轉換規律加在任何元素上，得到的總是正負整數，這樣一個正向的運算，可以用一個對等的反向(inverse)運算來還原（這裏是減法），回到出發點，即

[5]皮亚杰一生出版的 91 本书，其中《结构主义》再版了 7 次。

「單位元」(這裏是零)。任何元素和它結合起來所得的仍舊是那個元素，而且在這個結構或群裏的幾個元素結合起來，還服從加法結合律，表明可以經由不同路徑達到同一目的或結果，使新知識不受路徑的制約，回到中心知識點（neuter identity），所有的知識點必須回到出發點，也就是所有的認知結構的元素必須逆回到原來的知識點，建立可逆程式的結構。如果運算的結果還不能逆回去，只是一種半邏輯，缺乏邏輯的另一半（Piaget，1971，P.16 ），其中，在轉換關係的可逆性中，體現了普通邏輯原理的不矛盾原理，而中性元素的恒定性保證了普通邏輯的同一性原理，轉換關係的結合性保證了普通邏輯的排中性原理，而三條邏輯規律：不矛盾原理、同一性原理、排中性原理，保證了邏輯思維的確定性。這裡我們看到，概念還原（雙向建構）因素，實質上，符合所有的知識建構的基本規律，有着邏輯建構的合理元素。

小結

這裏我們看到青浦教學設計結構“以新歸舊”的設計，表面來看呈“序進”結構，即教學設計地按照理解的容易程度，形成循序漸進直線性“概念”序列，但所有的新概念，都圍繞原概念“螺旋式”前進，又“還原”到了舊的概念體系之中，青浦教學設計結構不僅是序進結構，而且是一種螺旋式的序進結構。因此，青浦教學設計更應準確地概括為“螺旋結構的變式模型”（限於篇幅，恕不展開，螺旋結構的變式模型論述，詳見（孫旭花， 2007b）。

縱觀國內外的課程設計，均強調“以舊引新”，即由舊知識引出新知識，而“以新歸舊”強調相對不夠，強調把新知識還原為舊知識，是“螺旋結構的變式模型”課程設計的精華部分。無論由舊知識引出新知識，把新知識還原為舊知識，這些可看為數學教學的小策略， 然而這個問題變式卻有普遍意義。即，

任何新概念還原

整體數學概念的新舊連接

大而言之，任何數學內容都可以借助“螺旋結構的設計”,使得新舊的數學知

識連接，推廣到全部數學內容教學，則是一種數學教學的大智慧。

本文以青浦變式教學中“以新歸舊”概念理解教學實踐為例，解釋螺旋變式數學課程之還原理念。任何實踐，要得以長遠發展，需要形成相應的理論，由實踐提升爲理論，再由理論指導實踐，進一步，由實踐補充理論，然而多年來，中國內地的數學教學，以實踐為重，理論相對空白，形成發展的缺環，大家只知變式教學有一定教學效果，並不知背後的原因，前研究大多缺少實證支持，缺少說服力。多少年來，中國內地的數學教學，摸著石頭過河，我們嘗試邁出一小步，建構基於實踐的理論解釋，至少是一次有益的嘗試。任何發展需要起點，任何理論都需要不斷完善，但千里之行，總是始於足下。

參考文獻

Anderson, J.R. (1989). The Analogical Origins of Errors in Problem solving. In D. Klahr & K. Kotovsky (Eds.), *21st Carnegie Symposium on Cognition,* 343-371.

Copper, G. & Sweller ,J.(1987). Effect of Schema Acquisition and Rule automation on Mathematics Problem-solving Transfer , *Journal of education psychology*.79(4),347-362

Hiebert, J., & Carpenter, T. P. (1992). Learning and Teaching With Understanding. In D. A. Grouws (Ed.), *A Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 65-100). New York: Macmillan Library Reference Simon &Schuster Macmillan.

Huang, R. J. (2002). *Mathematics teaching in Hong Kong and Shanghai: A classroom analysis from the perspective of variation.* Unpublished phD thesis. HongKong: The University of Hong Kong.

Lo, M. L., Pong, W. Y., & Chik, P. P. M. (2005). *For each and everyone: Catering for individual differences through learning studies.* Hong Kong :The Hong Kong University Press.

Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics: teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States.* Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Marton, F., & Booth, S. (1997). Learning and awareness. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Piaget, J. (1971). Structuralism. New York: Harper & Row. 倪連生、王琳譯《結構主義》北京：人民教育出版社。

Runesson, U. (1999). Variationens pedagogik: Skilda sätt att behandla ett matematiskt innehall (the pedagogy of variation: Different ways of handling a mathematical topic). Goteborg: *Acta Univertsitatis Gothoburgensis.*

Wong, N. Y. (2007). Confucian Heritage Cultural learner’s phenomenon: From “exploring the middle zone” to “constructing a bridge”. Regular lecture, the Fourth ICMI-East Asia Regional Conference on Mathematical Education, Penang, Malaysia, 18th to 22nd, June.

Wong, N. Y., Lam, C. C., & Sun, X. (2006). The basic principles of designing bianshi mathematics teaching: A possible alternative to mathematics curriculum reform in Hong Kong [in Chinese]. Hong Kong: Faculty of Education and Hong Kong Institute of Educational Research, The Chinese University of Hong Kong.

司馬賀 （1986）。《人類的認知—思維的信息加工理論》。北京：科學出版社。

孫旭花（2007b）。《螺旋變式數學課程設計：理論與實踐》香港：香港中文大學未發表的博士論文。

孫旭花、黃毅英、林智中（2007a）。變式的角度，數學的眼光。《數學教學》，第 10 期。

孫旭花、黃毅英、林智中、張奠宙（ 2006 ）。問題變式結構與功能的統一。《課程・教材・教法》，第五期。

張奠宙（2007）。《中國數學雙基教學》。上海：上海教育出版社。

朱新明，李亦菲，朱丹（1997）。*《人的自適應學習示例學習的理論與實踐》*。北京： 中央人民廣播大學出版社。

聶必凱（2004）。《數學變式教學的探索性研究》。上海：華東師大博士論文。

鄭毓信（2006）。變式理論的必要發展。《中學數學月刊》，1 期，頁 1-3。

青浦縣數學教改實驗小組（1991）。《學會教學》。 北京：人民教育出版社。

顧泠沅、黃榮金、馬頓 （2005）。變式教學促進有效的數學學習的中國方式。載範良火，黃毅英，蔡金法，李士錡（編），《華人如何學習數學》。(頁 247-273)。南京：江蘇教育出版社。

顧泠沅（1994）。《教學實驗論——青浦實驗的方法與教學原理研究》。北京：教育科學出版社。

鮑建生、黃榮金、易凌峰、顧泠沅（2003）。變式教學研究。《數學教學》，第一期，頁 6-12。第二期，頁 11-12。第三期, 頁 6-10。