

# 第一章 緒論

## 第一節 研究動機與背景

平方根對國中生而言，是全新的單元，它是無理數的一種型態，擴充數系的新概念；同時它也引進數值符號表徵以及演算的程序規則以解決二次方程的問題。學生在小學的數學學習中，並無方根數的具體經驗。因此，學生在無舊經驗連結的情況下學習方根數，自然倍覺棘手，也容易產生困惑。在數學史的發展過程中，古希臘時期的畢達哥拉斯學派初始也難以接受方根數的概念。從學生的學習脈絡及數學史的發展，均顯現方根數對初學者而言，是個不易被了解且難以接受的概念。因為它不僅是新概念的引入，且牽涉新符號表徵及演算規則的新程序性知識。因此，在平方根的學習單元中，大多數學生認為根號只是數學問題中所產生的符號，學生往往著重平方根的機械計算(乘除、化簡)，卻不知其緣由，無法深入地掌握平方根的意涵，甚至因而望方根而卻步。

雖然初學方根的國中生缺乏舊經驗的連結，然而，我們在日常生活中曾使用方根數的概念，描述具體世界的現象。例如：古希臘人以黃金比例

$\frac{1+\sqrt{5}}{2} \doteq 1.618034$ ，作為美的比值，應用於建築藝術上。畫家達文西也運用這比

值創造了不朽畫作。此外，A4 紙張到 A3 紙張的縮放比例也是方根數的應用，在影印機中設定 A4 到 A3 的放大比例為 141%，這是因為 A4、A3 的長度比為

$1:\sqrt{2}$ ，其比值大約為 1.414。方根為國中生在國中階段必學的一個新概念，也

是學生接觸無理數的開始，對於學生往後的學習也佔重要的關鍵地位。國二到高

中階段，方根以不同的形態出現於眾多數學單元。例如：國中的「一元二次方程式的公式解」、「商高定理」，在高中階段的「三角函數」、「指數與對數」，計算更是少不了它，認識方根是無可避免的數學內容，也具有其延續性，因而有其必要去尋求解決學生平方根學習迷思及困難的教學策略。

如同一般教學策略的設計，在探索平方根的教學設計過程中，首先得了解學生在學習過程中，可能發生的迷失概念及學習困難。以研究者本人任教國中多年的教學經驗，所觀察到的學生學習困難的現象，可概分為概念性知識和程序性知識的困難：

概念性知識：1. 對平方根和平方這兩種詞意表徵，會有概念混淆的情況發生，如『4的平方根是多少?』學生會出現16的答案。

2. 對平方根概念有『平分』的一個數的想法，如 $\sqrt{8}=4$ 。

3. 符號表徵“ $\sqrt{\quad}$ ”和語意表徵“平方根”，聯結為同一種概念，如學生會認為『 $\sqrt{4}=\pm 2$ 』。

4. 認為平方根（例如： $\sqrt{2}$ ）不是一個固定大小的數，是因為

$\sqrt{2}=1.414\dots$ ，小數點後的數字是無窮止盡，數字不斷地變動，因而不會是固定的數。

程序性知識：根號的運算法則，知其然未知其所以然。常見錯誤類型：認為數個根號的加法可以根號內的數字直接相加 $\sqrt{2}+\sqrt{3}=\sqrt{5}$ 。

綜合以上所討論的內容，學生處理平方根會出現種種疑惑，可以歸納為二大因素：一、缺乏學習脈絡，對平方根沒有現實感，與舊經驗（有理數的學習經驗）有所隔閡；二、是對方根的各種表徵無法順利整合。為解決以上這兩大因素所造成的學生學習困擾，在教學設計上，就需要考量在教學時能呈現平方根的多重表

徵，及提供學生平方根的學習脈絡。這激發研究者本人的興趣，如何設計一個學習環境可以符合上述教學需求，以及在此環境下是否能增進平方根的學習成效？

## 第二節 研究目的

英國的哲學家培根(Francis Bacon, 1561~1626)曾說過：『歷史使人明智，詩歌使人靈秀，數學使人周密，科學使人深刻，…』(Histories make men wise;poets, witty;the mathematics, subtile philosophy, deep;…)。數學史兼具歷史和數學二者之特點，將數學史融入於數學教學內容之中，能為學生開啓不同的視野，給予多元的感受，並讓學生了解到數學不只是計算推理，數學同時也具有許多文化方面的特徵，而且是人類文化的重要組成部分。洪萬生(民90)認為學生充分暴露在數學的人文趣味之前，為數學教育的價值打開了一個嶄新的面向。另一方面，也由於他(她)們深入探索這些文本中的『數學知識』之『在脈絡意義』，因此，也有機會見證人類『認知』與歷史文化之不可須臾離之。在設計方根教學內容時，將方根的發現歷史和方根符號的演變史引入於教學中，可讓學生了解根號(無理數)的初始發展也不是容易地被世人所接受，鼓勵學生在剛開始的方根學習時，對方根的困惑、不理解是正常的現象，以減少他們的挫折感。又藉由告知學生方根的符號是如何演變成如今的” $\sqrt{\quad}$ ”，幫助學生更能掌握操弄符號，消除學生對” $\sqrt{\quad}$ ”的陌生、排斥的感覺。

電腦視窗環境可使用多重表徵的方式來組合數學教材，使學生能藉由電腦應用軟體之操作，了解連結數學概念的多重表徵。(蔡志仁，2000)。每種電腦軟體都有本身的功用和特性，要將其應用於教學時，必須根據教學目標，教學目的與

教學策略來決定該選擇哪一種最適當的軟體。Flash 動畫軟體其圖形、聲音、按鈕等特效易學易用，再配合 action script 指令，可做出動態、互動的畫面，建構出多重表徵的教學環境，又可直接轉檔成 html 格式，存放在網路上，分享給學生或其他有興趣的老師使用。本研究將使用 Flash 動畫軟體設計平方根的數位教材，建構出可呈現多重表徵的學習環境。

本研究目的在嘗試使用電腦視窗環境及 Flash 動畫軟體來呈現多重表徵的數學教材，並在教學內容中引入數學史，讓學生了解平方根的思想發展過程，以增進理解。

在引入資訊和數學史的教學模式之下，期望有助於學生平方根的學習，並探討學生對此教學方式的態度和反應，除此之外，希望能提供國中教師未來在數學教學上的參考。

根據本研究目的，本研究待答的問題有：

1. 使用 flash 軟體設計教學活動時，應該如何設計製作數位教材？
2. 進行 flash 軟體設計的教學活動後，對學生學習平方根是否有較好的學習成效？
3. 進行資訊融入教學後，分析學生對此教學方式的回饋。
4. 使用引入數學史的教學後，分析學生對此教學方式的回饋。

### 第三節 名詞界定

#### 一、 資訊融入教學

係指研究者根據國中數學課本仁林版第四冊、國立編譯館、教師手冊及平方

根的歷史典故，運用由Macromedia公司所發展出來的Flash5軟體，設計一個“有聲有色”的數位教材，形成一個呈現動態圖像的界面，及可在電腦上操作及建構的教學環境。學生可藉由自行操作，來回答學習單五(見附錄五)上的問題。在電腦教室進行大約四堂電腦輔助教學，於原教室進行一堂平方根化簡的教學活動。

在電腦教室內，一名學生一台電腦，教師用電腦備有廣播系統；教學時，教師使用電腦廣播教學，呈現研究者自行設計的平方根數位教材，內容包含了讓學生自行操作電腦的教學活動，同時搭配數學網站—昌爸工作坊內與平方根有關的教學內容。

## 二、概念心象(concept image)

個體對一概念所擁有心靈影象(mental images)的集合體。

## 三、平方根的概念表徵

表徵(representation)是指將外在現實世界的事物以另外一種較為抽象或符號化的形式來代表的歷程，是呈現數學想法的方式，是協助學生了解數學概念和關係，及溝通數學想法的重要元素；平方根的概念表徵有，符號、語意、代數、圖形等表徵。

## 四、多重表徵的教材設計

係指在設計教材時所採用之多重表徵理論 (multiple representations)，在FLASH的環境下，可以有下列四種模式：

1. 圖形模式 (graphical mode) --圖形形狀、大小、旋轉、移動變化。

2. 數值模式 (numerical mode) --可進行數字的四則運算。
3. 文字模式 (text mode) --問題的呈現或說明。
4. 聲音模式 --可搭配不同的音效。