

高中生對於任意兩向量 可否作內積之概念心像

洪志瑋 數學教師
謝豐瑞 副教授
◎ 國立泰山高中
國立臺灣師範大學數學系

摘要

本研究探討高中生對於內積概念中的基礎概念：「相同維度的任意兩向量皆可作內積」之概念心像。研究採問卷調查法，收集質與量的資料。研究抽樣採立意取樣，包括高數學程度、中數學程度學校之理組與文組四個班級，共149位高中三年級學生。研究結果發現高達四成的學生對於起點不同的兩向量不具備皆可作內積的概念心像，僅有約四成的學生其任意兩向量皆可作內積的心像穩固，不會隨著題目所給的刺激而有所改變；同時學生的概念心像受到向量、角度、內積定義等相關概念心像的影響。

關鍵詞：內積、概念心像、概念定義、向量平移

Senior High School Students' Concept Images regarding the Possibility of the Inner Product of Any Two Vectors

Chi-Wei Hung Mathematics Teacher

Feng-Jui Hsieh Associate Professor

© National Taishan Senior High School

Department of Mathematics, National Taiwan Normal University

Abstract

This study investigates the concept images of “any two vectors with same dimensions have an inner product” for senior high school students. A questionnaire survey was utilized to collect qualitative and quantitative data. A purposive sampling was used to sample 149 12th graders in four classes from a high or a middle level school with either science or liberal-arts oriented approach. The findings included that more than 40% students did not possess the concept images of having an inner product for vectors with different starting points; only about 40% students' concept images were stable that did not switch over different vector relations; and students' concept images in question were influenced by the related concept images of vectors, angles, and definition of inner products.

Keywords: inner product, concept image, concept definition, translation of vectors

壹、研究背景與目的

在數學教學中，教師往往發現，許多概念自己講解清楚且重複多次，但學生在解題時，卻不斷重複使用相同的迷思概念。顯然學生在解題時，腦中的數學概念或思考與教師所教的有所差異。學生究竟是如何思考的，連結與應用的數學概念與教師所教的差異何在等等，都是數學教育界亟需瞭解的問題。

對於這樣的問題，Tall和Vinner (1981)提出之概念定義 (concept definition) 與概念心像 (concept image) 提供了一個解釋的方向。Tall和Vinner認為，多數學生在解題時，連結的是與題目相關、學生自我具有的概念心像，他們使用連結到的概念心像來思考題目，而非使用課堂上所教的概念定義進行思考。

向量是高中數學中一個重要的單元，相較於三角函數、對數等單元，學生對於向量似乎不那麼的恐懼，但在向量內積概念出現之後，學生的學習狀態出現急遽的變化，困難因應而生。國內許多研究因而致力於探討學生在向量內積的錯誤類型 (e.g., 李永貞, 2008; 林進發, 2001)，研究結果顯示向量內積對於學生來說不是一個簡單易懂的概念。有經驗的教師都知道學生在背出「長度 \times 長度 $\times \cos \theta$ 」這樣的內積定義上並沒有很大的困難，部分學生也知道內積與「投影量」相關，但學生在面臨題目中需要作內積時，

卻出現感知不到題目中有兩向量即可應用內積定義求算內積的現象。

上述現象顯示，學生所具有之向量內積概念心像為何乃數學教育界亟需探討的課題。其中一個最根本的問題是學生是否在面對各式各樣相同維度的向量時，能應用任意兩向量皆可作內積的概念心像。因此，本研究主要的研究目的在於探討高中生對於下列各種相對關係的向量其是否具備「相同維度的任意兩向量皆可作內積」之概念心像。具體研究問題如下：

- 一、當兩向量起點相同或不相同時，學生具備「相同維度的任意兩向量皆可作內積」之概念心像的情形為何？
- 二、當兩向量相交或不相交時，學生具備「相同維度的任意兩向量皆可作內積」之概念心像的情形為何？
- 三、當兩向量平行、垂直、非平行且非垂直時，學生具備「相同維度的任意兩向量皆可作內積」之概念心像的情形為何？

貳、理論依據與文獻探討

學生解題失敗需要協助時，教師能提供什麼樣的幫忙？再解一遍給他看？再詳細講解一次教師自我的解題思路？還是把需用到的概念再講清楚？該如何做的答案，根基於知道學生在解題歷程中到底出了什麼問題。

解題本身是一件非常複雜的事情，Polya (1945) 將解題分成4個階段：理解

問題 (understanding the problem)、擬定策略 (devising a plan)、執行策略 (carrying out the plan)、回顧解題 (looking back)。Polya 的解題步驟可視為外顯具體的步驟，然而在他的說明中，隱含這些步驟與主體（如：學生S）內在認知的關聯，他認為解題時要從現有知識中找出與問題有關之處，回想過去解類似問題時，什麼策略或內容曾有助順利解題。在所考慮的內容中，設法找出熟悉的東西，再於熟悉的東西中，努力找出有用的東西。這個觀點顯示出在解題時，解題者需要連結其腦內既有且對解題有用的東西。然而這些東西不是孤立散布於腦中，而是透過一個網絡連結，這個連結並非一直在長期記憶區，它可能是在解題當下，透過主體喚起概念，進行連結，產生所謂的概念地圖（concept maps；Bledsoe & Flick，2012）。

上面解題觀點中所提到的概念，學者並未明確表明究竟泛指客觀存在的概念或主觀意識的概念，客觀存在的概念往往可以用概念定義加以界定，Wilson（1990）表示，教學常發現，有些能合理敘述出概念定義的學生，不見得能正確指出合於該概念的例子，而能指出合於概念例子的學生，也不一定說說出正確的定義。

所以在教學中，有必要釐清何謂「概念」，並且更進一步地釐清，教師所欲傳達的「概念定義」與學生對於某概念的解釋、說明甚至定義（學生自有的）之間的異同，

以此做為解讀學生解題行為的基礎。

一、概念 (concept)

張春興（2006）闡述了其對概念的界定，他認為可將概念視為對一類具有相關共同屬性之事物獲得的概括性認識，這種超越對具體事物的單一概括性認知經驗即為概念；雖然在他這樣的界定中並未明確說明其所指概念為存在於客體（例如，書本）中的概念，或存在於主體（例如，學生）中的概念，但其使用之「概括性認識」顯示出其所指稱的為存在於主體中的概念。他另提出了一個對概念較為狹義的界定，他認為當以單一概括性的名稱或符號來代表具有共同屬性的一類事物之全體時，此名稱或符號所代表者即為概念。他並以數字8代表某一類量的概念以及X代表變數的概念來解釋符號如何用以表示概念；此狹義的界定，似乎顯示出概念存在於客體的想法，然而張春興在這個界定下強調，並非所有的概念都可形諸文字或符號，舉例來說，幼兒不識字但照樣有概念，這樣的說明又將概念視為存在於主體之中。由此可見，概念指稱主體認識或客體存在混沌不清。

在數學概念方面，Skemp（1987）對其詮釋偏向於主體的認識，他表示，要形成數學概念，必須先有實際經驗且這些經驗須有某些相似性或共通性。他認為數學是一種抽象概念，這種概念的形，是需要經過學習的，而且必須透過「經驗」抽象而得。為了

闡述他這樣的觀點，Skemp拋出一個問題：如果我們直接將一個概念以文字型式定義好，那麼是否一定能縮短形成概念的時間與程序呢？對於有經驗的數學教師來說，這個問題的答案明顯為「否」，因為通常教師所要教的數學概念都有其定義，並且教材中往往由定義出發進行概念的鋪陳，而這樣的安排卻反而使學生學習更加困難，無法形成概念。這個狀況正反映出Skemp的論點，即超過一個人已有概念階級的高級概念不能用定義方式來溝通，只能蒐集有關的例子供其經驗，使其自我透過抽象來形成概念。

二、概念定義與概念心像 (concept definition和 concept image)

由概念的界定可以看出概念有主體認識與客體存在的不同，課堂中教授的概念，可能是存在於教材中的客體，也可能是教師這個主體所具備的概念，這樣的概念其最形式化或根本的形式即是概念定義。針對這個議題，最直接且著名的相關理論乃Tall和Vinner（1981）提出之概念定義（concept definition）與概念心像（concept image）之差異。Tall（1988）認為概念定義是由文字構成，是用來界定某個概念的敘述。Vinner（1983）強調：「概念定義是以一種不會循環的方式精確解釋概念的文字定義。」這樣的說法被廣泛的接受。

相較於教師具有或課本上呈現的概念

定義，從學生這個主體來看，當學生看到或聽到某個概念的名稱時，它會刺激學生的記憶，在學生記憶中的某些東西會被它喚醒，被喚起的不一定是課本或教師要傳授概念定義，而這個被喚起的東西，Vinner（1991）稱之為「概念心像」。什麼是概念心像呢？Tall和Vinner（1981）認為概念心像就是描述那些跟某個概念關連到的所有認知結構，包含所有的心靈影像(mental picture)及相關的性質與過程。Vinner（1983）強調：「在此使用的影像（picture）是十分廣義的，它包含這個概念的任何視覺表徵（甚至符號）。……除了一個概念的心靈影像，也包含與這個概念相關的性質。……這些性質連同心靈影像的集合就稱為概念心像。」根據Vinner與Dreyfus（1989）的說法，概念心像乃指學生心中關於某個特定的概念所產生的圖像所成的集合，以及表現它們特性的全部性質。（而我們指的心靈影像是任何型式的表徵，如圖像[picture]、符號形式[symbolic form]、圖表[diagram]、圖形[graph]等等）簡言之，本研究中所指的概念心像即是學生面對外在刺激而浮現的任何型式的表徵。

概念心像的重要性在於其乃學生在解題時的依據，Vinner（1983）及Vinner與Dreyfus（1989）都認為學生在解題時常用概念心像來思考而非概念定義。這樣的論點突顯出概念心像與概念定義的相對性，這是否表示學生的概念心像與概念定義是不一致

的？學者專家認為其是否一致取決於概念心像形成的歷程；學生的概念心像往往是由該概念的例子與非例子的經驗所成的結果（Vinner & Dreyfus, 1989），例子接觸的多寡就會影響其概念心像與概念定義的一致性，除此，概念心像的發展並非一夕可成，是經年累月透過各種經驗建構而來，並隨著個體受到新的刺激或新的經驗越趨成熟而產生變化（Tall & Vinner, 1981）。

Tall（1988）的研究發現，學生透過舊經驗與新經驗的結合建立屬於他們自己的概念心像，這些概念心像不一定與概念定義一致，更甚者，也不一定是本身前後一致、脈絡相連的，這個結果呼應了Tall與Vinner（1981）的觀點，他們認為：「在特定的時間，只有某部分的概念心像會被喚起（evoked）。不同的時間，被喚起的概念心像可能是會彼此衝突的」，學生未必能意識到其概念心像彼此衝突，「只有當這些相互衝突的概念心像被同時喚起，個體才會感覺到它們之間的衝突。」這正說明了對任何概念而言，學生概念心像的一致性頗為重要，學生須在不同的情境與刺激下，都能喚起相同且正確（與概念定義一致）的概念心像，方能順利解題。

Bingolbali與 Monaghan（2008）在概念心像的研究結果中提到，不同學習背景的學生展現出來的概念心像是不同的，因此我們不應該忽視學生的學習背景。這也呼應了

Tall（1988）的觀點，學生透過舊經驗與新經驗的結合，建立屬於他們自己的概念心像。每個學生的經驗勢必會因人而異，所以每個人的概念心像也因此而有所異同。

因而，探討學生在不同的情境與刺激下，是否喚起正確及一致的概念心像顯得格外重要。本文底下使用之「概念定義」乃教科書或教師欲傳達給學生的定義，而學生自我對概念產生之定義，則仍為其概念心像中之元素，不以概念定義稱之。

參、研究方法

一、研究設計

本研究的研究目的乃探討高中生在面對各種不同向量關係下，是否都具備「相同維度的任兩向量皆可作內積」之概念心像。本研究定位為基礎性研究(basic research)，因本研究同時可使教師更加瞭解學生學習後形成之概念心像，據以改善教學，故也具有應用性。本研究利用問卷調查，蒐集質與量的資料，針對所蒐集到的資料，進行歸納分析(inductive analysis)。在歸納分析時，不做任何預設的限制、假設，所有的發現均來自於學生的反應。

根據研究目的，本研究設計不同的向量關係，透過問卷調查法，調查學生是否具備「相同維度的任兩向量皆可作內積」之概念心像，並透過質的資料之收集，進一步瞭解

其概念心像的樣貌。研究過程包括：問卷編制、施測、回收、質與量的資料分析，其中資料分析以質的分析為主，量的分析為輔。問卷測驗時間並未限制，只要學生願意填答都會給予足夠的時間完成作答。

本研究的研究對象為高三學生，選擇這個階段學生之主要原因為高三學生已至複習概念階段，相較於剛學完向量內積概念的學生來說，高三學生的概念發展時間較長、接觸概念的經驗較多，概念心像發展趨於尾聲，較為固定，探討這個階段學生的概念心像，較能顯示出高中階段概念學習完成後的概念心像狀況，可供高中教師參考，進行概念教學前後連貫的整體思考。施測時間為高三第二次模擬考後一至兩週，因班級不同有些許差異，而向量內積為此次模擬考所包含的範圍。

二、研究樣本

本研究採立意取樣，為了能收集到豐富的質性資料，研究樣本的數學程度以高程度及中程度為主（相對於高中生）。研究樣本來自於四個大台北地區高三班級的學生，其中兩個班級來自於一所學生程度較高的高中，該校高一學生入學時之國中基本能力測驗PR值約為97，另兩個班級來自於一所學生程度中等的高中，學生入學PR值約為70。兩

校樣本都包含一個高三文組班級，一個高三理組班級。本研究中，3A代表高程度學校的高三文組班級、3B代表高程度學校的高三理組班級、3甲代表中程度學校的高三文組班級、3乙代表中程度學校的高三理組班級，扣除無效樣本後，3A有37人、3B有35人、3甲有42人、3乙有35人，合計149人。

三、研究工具

本研究的研究工具為「向量內積概念心像探測問卷」中關於「相同維度的任兩向量皆可作內積」概念之兩部分。第一部分探討二維向量，包含八個問題，第二部分探討三維空間及任意向量，包含三個問題。第二部分包含較少問題的原因是因為許多向量關係，在二維與三維是共同的，例如向量相交或向量起點相同等等，故未免重複性過高，造成學生不耐煩，降低答題意願，故僅在第一部分探討，而第二部分主要加入三維空間特有的向量歪斜關係，並以平行關係對應比較。

本研究的問卷編制由三位數學教育學者專家、十數位資深數學教師及碩博士班學生組成小組，進行八次焦點團體討論與修正而成，其間並進行一次問卷預測，檢驗题目的可行性與正確性，根據預測結果，進行修正完成問卷。

第一部分：

如圖，下列哪些向量可以作內積，把可以的打✓，不可以的打✗，並在下面空白處說明你的理由或看法。

(1) \vec{a}, \vec{b}

(2) \vec{a}, \vec{e}

(3) \vec{b}, \vec{c}

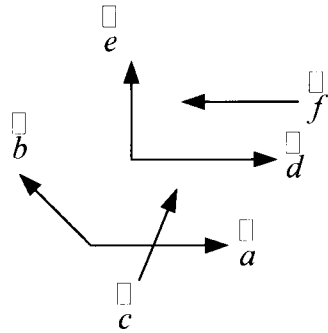
(4) \vec{b}, \vec{d}

(5) \vec{a}, \vec{d}

(6) \vec{a}, \vec{c}

(7) \vec{d}, \vec{e}

(8) \vec{f}, \vec{d}



說明：

圖1 平面向量是否可作內積之概念心像探測題

第一部分為是非題，題目如圖1所示；第二部分為單選題，題目如圖2所示。兩部分都另要求學生寫出答題的理由或看法，以取得質與量的資料。其中第一部分因題數過多，僅要求學生針對整體的情形而未要求針

對每一題提供理由或看法，此作法的優點是避免學生因失去耐心放棄某些順序較後面题目的回答，而且學生在整體回答可提供多項理由時，會選擇性提供，此時所展現出的往往是其最核心的概念心像。

第二部分：

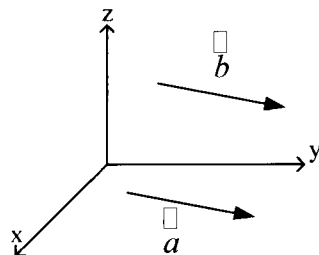
假設 \vec{a} 與 \vec{b} 為空間中兩向量，將下列正確的打✓，並在下面空白處說明你的理由或看法：

(1) 若 a 與 b 分別為兩平行線(在同一平面，且永不相交)上的方向向量，則

a 與 b

- 一定可以作內積
- 有時可以作內積
- 一定不可以作內積

說明：

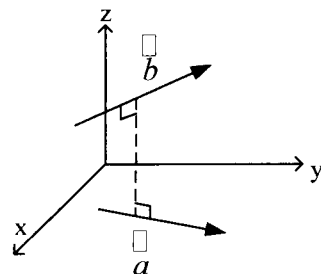


(2) 若 a 與 b 分別為兩歪斜線(不在同一平面，且永不相交)上的方向向量，則

a 與 b

- 一定可以作內積
- 有時可以作內積
- 一定不可以作內積

說明：



(3) 若 a 與 b 為任意兩向量，則

a 與 b

- 一定可以作內積
- 有時可以作內積
- 一定不可以作內積

說明：

圖2 三維向量是否可作內積之概念心像探測題

第一部分中向量的關係主要有兩個考慮因素：(一)向量的起點相同與否；(二)夾角的大小 ($<90^\circ$ 、 $=90^\circ$ 、 $>90^\circ$)，此因素的探測題主要著重在起點不同時，當起點不同時，夾角乃指向量本身或向量平移後相交之夾角；另起點不同時也多增加了平行向量夾角為 0° 與 180° 之狀況。施測題目的結構如下表1、表2所示：

表1 向量起點相同與否搭配夾角大小的題目分布情形

	$<90^\circ$	$= 90^\circ$	$>90^\circ$
起點相同	典型圖形	(7)	(1)
起點不同	(3), (6)	(2)	(4)

表2 向量平行時方向相同與否的題目分布情形

	同向(0°)	反向(180°)
平行	(5)	(8)

其中起點相同且夾角小於 90° 為一般典型範例中的典型圖形，為基礎題，根據實務經驗，學生多數知道可以求作內積，概念心像變化度不大，故並未在此部分施測，若學生認為典型圖形的情況不能作內積會在其他題目顯示出來。當兩向量起點不同時，可分為兩向量本身有相交，或兩向量平移後有相交，本研究選擇兩向量平移後有相交的情形探討，對於兩向量本身有相交的情形，則以第(6)題典型的夾角 (<90) 做為代表，與第(3)題比較，可探討向量本身相交與平移後相交的概念心像差異。表2中第(5)題與第(8)題皆為平行狀況，可視為單一概念進行探討，

其中第(5)題為兩向量平行且方向相同，第(8)題為兩向量平行且方向相反。

第二部分中三維空間向量與平面向量最大的不同處在於「歪斜」的狀況，故設計第(1)題為兩向量平行的情形，搭配第一部分的第(5)題，可探究空間對於學生的概念心像影響情形；這個部分的第(2)小題為兩向量歪斜的情形，為空間中的特殊狀況，為避免學生因不瞭解或忘記什麼是「歪斜」致使無法作答，題目中提供「歪斜線（不在同一平面，且永不相交）」的敘述，並且附上圖形；第(3)小題是兩任意向量的情形，用以取得學生整體概念的心像狀況。

肆、研究結果

本研究依照題目設計以及發現結果分三個部分報導，分別為：

一、平面上兩向量是否可作內積的概念心像

下面表3為第一部分「平面上任意兩向量皆可作內積」的概念心像題之施測結果。

表3 第一部分平面向量可作內積各題勾選百分比

班級 \ 題號	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
高程度文組	100%	81%	84%	86%	70%	89%	95%	70%
高程度理組	97%	89%	91%	91%	89%	94%	91%	91%
中程度文組	93%	69%	74%	67%	48%	76%	95%	43%
中程度理組	97%	80%	83%	83%	51%	83%	91%	60%
合計	97%	79%	83%	81%	64%	85%	93%	65%

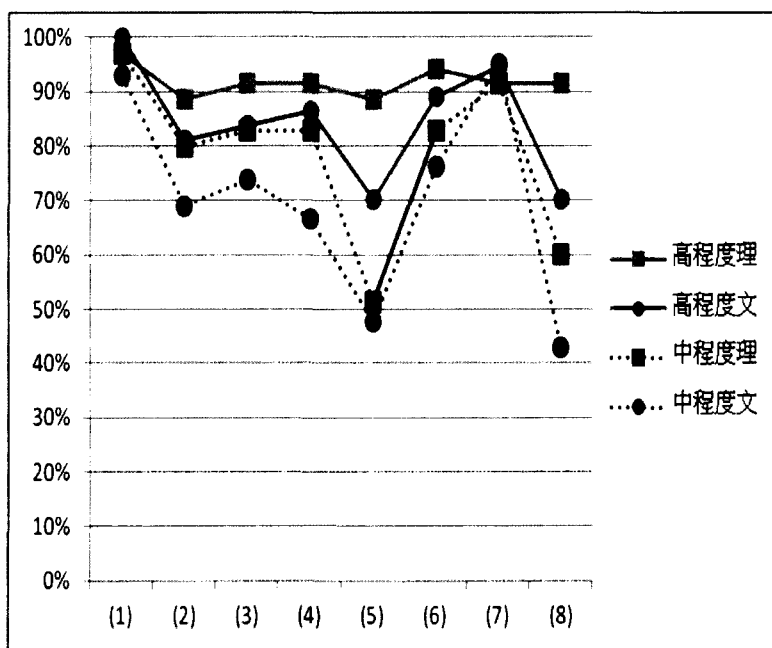


圖3 第一部分平面向量可作內積各題勾選百分比折線圖

由表3與圖3可看出，整體而言，最被學生認為可以作向量內積的是兩向量起點相同的第(1)及第(7)題，都分別有九成以上的勾選率。最被他們認為不能作內積的是兩向量平行的第(5)及第(8)題，都只有約六成五的勾選率。

高程度學校理組同學的「平面上任意兩向量皆可作內積」之概念心像較為完整，各不同向量關係都有約九成以上的同學具備，反觀文組同學，不同向量關係是否可作內積的心像就有較大的差異，較為典型的起點相同向量可高達九成至十成的勾選率，但起點不同的平行或垂直題勾選率就降至七成或八

成，且由圖3可看出，此程度學校文組同學受到不同向量關係刺激的概念心像模式與中程度學校的學生較為接近。中程度學校不論是理組或文組同學，不同向量關係下所具備的可作內積概念心像差異都頗大，而文組同學，在起點不同的向量關係上，顯然比理組同學不具備可作內積的概念心像。

除此，由起點相同與否及夾角大小關係兩因素來看，本研究有下列幾項發現：

(一)平面上兩向量可否作內積的影響主要來自起點相同與否而非夾角大小。將答題的勾選狀況搭配施測結構表1可以得到表4。

表4 向量起點相同與否搭配夾角大小題目之勾選百分比

	$<90^\circ$	$= 90^\circ$	$>90^\circ$	平均
起點相同	典型圖形	93%	97%	95%
起點不同	84%	79%	81%	81%

表4數據顯示在不同的向量關係上，九成以上學生具備「兩起點相同的向量可作內積」之概念心像，因為教師教學時常使用起點相同這類例子，故學生透過例子經驗發展出其概念心像。而在非平行狀況下，約有八成學生具備「起點不相同的兩向量可作內積」的概念心像，與起點相同的狀況相比約有15%的落差。而夾角大小的影響並不大，

只有2%~5%的差異。

(二)85%的學生認為「起點不相同且本身相交的兩向量可作內積」，83%的學生認為「起點不相同且平移後才相交的兩向量可作內積」，其差異並不大，這顯示兩向量當起點不同時，不論本身相交或平移後才相交，學生對其是否可作內積的概念心像類似。

(三)當兩向量起點相同或者兩向量起點不同但非平行時，多數學生之概念心像為此兩向量可作內積。

(四)表5是兩向量平行時的勾選狀況，表中數據顯示，學生對於兩向量平行時可作內積的概念心像較為薄弱。

表5 兩向量平行題目之勾選百分比

	同向(0°)	反向(180°)	平均
平行	64%	65%	64%

從表4可看出，當兩向量非平行時，夾角的角度大小對於是否可作內積的影響不大，而表5顯示，學生對於「兩平行向量可作內積」的概念心像最弱，只有64%的學生認為平行向量可作內積，與起點相同時95%學生認為向量可作內積相比，有高達三成的差距。

(五)整體而言，對於兩向量是否可作內積，多數學生的概念心像為「起點相同時可作內積」、「起點不同時，向量本身相交或平移後相交可作內積」，有高達四成的學生認為「向量需起點相同或者相交」方可作內積，以下是幾位學生實際敘述之摘錄：

a. 有角度，才有內積
b. 向量跟向量要相連
c. 有辦法形成夾角才能算
d. 內積要從同一點出發，有兩者的夾角才能算出內積
e. 由公式所知，只差在2向量所夾之角度
f. 兩向量需同一起點，才能內積

二、三維空間及任意向量是否可作內積的概念心像

以下表6為第二部分三維空間中兩平行、歪斜及為指定維度之任意向量可作內積的勾選比例：

表6 第二部分三維空間及任意向量可作內積各題勾選百分比

關係 班級	三維平行			三維歪斜			兩任意向量		
	一定可以	有時可以	一定不可	一定可以	有時可以	一定不可	一定可以	有時可以	一定不可
高程度文組	68%	5%	22%	73%	3%	22%	59%	38%	0%
高程度理組	89%	3%	3%	91%	0%	6%	89%	9%	0%
中程度文組	40%	2%	57%	48%	17%	36%	19%	81%	0%
中程度理組	46%	3%	51%	63%	9%	29%	37%	63%	0%
合計	60%	3%	34%	68%	7%	23%	50%	49%	0%

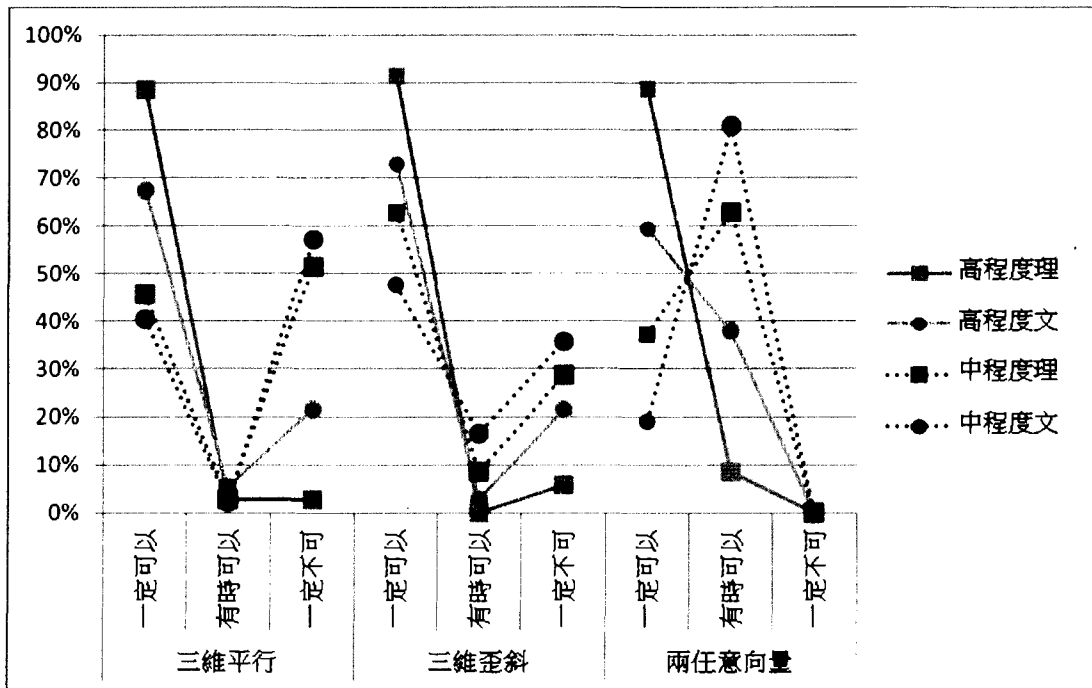


圖4 第二部分三維空間及任意兩向量是否可作內積各題勾選百分比折線圖

由表6與圖4可看出，就平行與歪斜而言，較多學生具備平行向量不可或不一定可作內積的概念心像，且比例高達四成。對於給定明確關係的向量而言，較多學生具有絕對的「一定可以」或「一定不可以」作內積的概念心像，而對於未明確指定關係的任意兩向量而言，高達一半的學生認為其有時可以，有時不可作內積。

高程度理組學生不論有沒有給定向量關係或所給定關係為何，都有高達九成比例的學生具有兩向量可作內積的概念心像，反觀此程度文組學生（參見圖4），未給定明確關係向量時，其一定可以作內積的概念心像大幅滑落，約高達四成的學生轉為有時可以作內積的心像。至於中程度學校的學生，不論理組還是文組，學生的主要概念心像反而是有時可以作內積而非一定可以作內積，文組學生比例甚至超過八成。

三、任意兩向量是否可作內積的概念心像

針對平面與空間向量是否可作內積的概念心像，本研究有下列幾項發現：

(一)三維空間中與平面中之平行向量，學生認為可以作內積的比例差距不大，皆為約六成（參見表3第(5)題與表6三維平行題數據），向量是否可作內積的心像並未明顯受到空間維度的影響。

(二)兩向量在歪斜時比在平行時有較多學生

具有可以作內積的心像，學生的自述顯示他們認為「兩歪斜向量平移後會有夾角，所以可以作內積」的概念心像，此心像與平面向量時一致，認為「要有角度」才能作內積。

(三)對於第二部分各題中所提任意兩向量，50%的學生勾選一定可以作內積，然而與第一部分交叉比對後，發現這些學生未必全具備任意兩向量皆可作內積的概念心像，他們在第一部分提供的不同情境中引動不同的可作內積概念心像。表7顯示學生針對未指定的任意兩向量一定可作、有時可作內積之比例與其在本部分給定向量關係下是否全部勾選可作內積的分布表。

表7 任意向量可作內積與第一部分各題可作內積勾選一致性百分比

班級 \ 任意向量 勾選	一定可作 全部勾選 (一致)	有時可作 全部勾選 (可能不一致)	一定可作 部分勾選 (不一致)
高程度文組	51%	11%	8%
高程度理組	83%	3%	6%
中程度文組	14%	14%	5%
中程度理組	26%	11%	11%
合計	42%	10%	7%

註：百分比為占該班級全體之百分比。

由表7可看出，僅有42%的學生其「任意兩向量一定可以作內積」的心像是穩固的，不會隨著題目所給刺激而有所改變。10%的學生面對平面上各種給定兩向量關係，都具有可作內積的心像，但對於未指定關係的任意兩向量，概念心像轉為有時可以作內積，其概念心像在不同情境中可能並不一致。較為特別的是，有7%的學生對於未指定關係的任意兩向量具有一定可作內積的心像，但面臨給定的各種向量關係時，卻未必皆引動可作內積的心像。

四、向量、角度與內積定義等相關概念心像與主概念心像的關係

針對學生的勾選狀況，搭配學生自我表述的理由或看法，本研究發現至少有三類不同層面的相關概念心像，導致學生在兩向量是否可作內積的主概念心像上產生與教師所要傳授的概念定義不一致的情形，此三類相關概念心像分別針對向量、角度與內積定義概念。

(一)向量概念：部分學生在「向量可平移」的概念心像不符概念定義，進而影響任意兩向量皆可作內積之心像。下面為兩位這類型學生的答題情形：

學生	題目	勾選狀況	說明
甲	第一部分	勾選可以： 1, 7	內積要從同一點出發，有兩者的夾角才能算出內積
	第二部分	平行	一定不可以 \therefore 兩向量平行 \therefore 兩向量無交點
		歪斜	一定不可以 無交點
		任意	有時可以 有交點可以，無交點不可

這一位甲同學，在第一部分只勾選了向量時，並沒有或無法引動向量可平移使得兩向量起點相交的(1)與(7)，第二部分的平行與歪斜都認為一定不可以作內積，並且說明其勾選理由為「有兩者的夾角才能算出內積」、「兩向量無交點」等，顯然他在面對任兩向量都可以相交的概念心像，導致視向量如線段般有絕對位置，影響可否作內積的心像。

學生	題目	勾選狀況	說明
乙	第一部分	勾選可以： 1, 7	有角度，才有內積
	第二部分	平行	一定不可以 沒有角度，怎能作內積~
		歪斜	一定不可以 [空白]
		任意	有時可以 [空白]

從上表乙同學的回答可以看到該生認為有角度才有內積，他認為「沒有角度，怎能作內積」，而他在第一部分並沒有勾選本身相交的兩向量，在面對向量時與甲同學相同，並沒有或無法引動向量可平移使得任兩向量都可以以起點重合的方式相交，找到角度作內積的概念心像。

(二)角度概念：這類型的學生，具有「向量可平移」的概念，但他們具有「平行沒有角度」的心像，搭配其「有角度方可作內積」的心像，導致他們任何向量皆可作內積的心像不完備。底下是兩個學生的例子：

學生	題目	勾選狀況	說明
丙	第一部分	勾選可以： 1, 2, 3, 4, 6, 7	兩向量除平行和重合外，其他都有內積
	第二部分	平行	一定不可以 $a \cdot b = a b \cos\theta$ ，兩者無 θ
		歪斜	一定可以
	分	任意	有時可以

這位同學，在第一部分只有第(5)與(8)題平行的狀況沒有勾選，其餘都認為可以作內積，在第二部分的文字說明中可看出，他認為平行是沒有夾角 θ ，在他的角度概念心像中， 0° 與 180° 是不算「有夾角」的，即使他已經知道內積的求公式用到 $\cos \theta$ ，且在三

角函數學習歷程中他必定多次求算過 $\cos 0^\circ$ 這類函數值，然而，「有夾角方可作內積」且 0° 與 180° 不算有夾角的心像仍使他放棄以公式來判斷，而以「有夾角」這個抽象的概念心像來控制兩向量可否作內積的心像。

學生	題目	勾選狀況	說明	
丁	第一部分	勾選可以： 1, 2, 3, 4, 6, 7	可以形成角度的應該都可以吧！	
	第二部分	平行	一定不可以	兩向量平行無法內積
		歪斜	一定可以	可以內積，內積為0
		任意	有時可以	平行好像無法內積

上表顯示丁同學與上一位丙同學一樣，在第一部分只有第(5)與(8)兩題平行的狀況認為不可以作內積，而他的說明是「可以形成角度的應該都可以吧！」，所以他認為平行是沒辦法形成角度的。

(三)內積定義概念：這類型的學生，具有「向量可平移」的概念心像，他們知道兩向量是可以平移，是會有夾角的。但

他們在某些角度下認定兩向量是無法作內積的，他們認為不可作內積的狀態主要有平行與垂直，而他們認為這些狀態不可作內積的可能原因是他們受到定義內積時投影概念或公式概念，搭配上無定義的「沒有」之感知影響。底下是兩位學生的例子：

學生	題目	勾選狀況	說明	
戊	第一部分	勾選可以： 1, 2, 3, 4, 6, 7	\square \square \square \square a 和 d 角度為 180° , f 和 d 角度為 0°	
	第二部分	平行	一定不可以	\square \square $\therefore a$ 與 b 平行, 疊合後角度為 0°
		歪斜	一定可以	\square \square $\therefore a$ 與 b 疊合後角度 $\neq 0^\circ$ 也 $\neq 180^\circ$
		任意	有時可以	看角度為多少

戊同學在第一部分也是只有第(5)與(8)平行的狀況認為不可作內積，由他的說明可看出，他與丙、丁兩位同學不同，他的心像中，兩向量平行是有角度的，但他依舊認為平行不能作內積，因為其夾角為 0° 或 180° ，至於為何這樣的夾角不可作內積，則可能是

受到內積定義中的投影圖像影響，兩向量夾角為 0° 與 180° 時，感知中「沒有」投影（ 0° 投影雖為本身，但圖像中會畫不出從投影向量終點到被投影向量的垂線，故看不到投影）。

學生	題目	勾選狀況	說明	
己	第一部分	勾選可以： 1, 3, 4, 5, 6, 8	[空白]	
	第二部分	平行	一定可以	[空白]
		歪斜	一定可以	[空白]
		任意	有時可以	$\theta=90^\circ$ 不行

己同學雖然寫的理由不多，但由他在第一部分只有第(2)與(7)垂直狀況沒有勾選且在第二部分以「 $\theta=90^\circ$ 不行」說明，可看出他具有向量可平移、任何向量皆有夾角之概念心像，並且在其他夾角度數都具有兩向量可以作內積之心像，唯獨在夾角為 90° 時認為不可以作內積，可能受到內積公式定義中 $\cos 90^\circ$ 為0，感覺是「沒有」，故不可作內積之影響。

概念心像是個體學習概念所形成的心理產物，而學習概念必須經由許多的經驗以建構出自己的概念心像，理所當然地每個學生的概念心像都不完全一樣，為展現整體性，本研究強調以全體樣本為單位進行報導。

研究結果發現只有42%的學生在任何題目刺激下皆具備「任意兩向量皆可作內積」的概念心像。在平面上兩向量可否作內積，主要受到「起點是否相同」的影響，而當非平行向量時，「夾角大小（是否大於、等於、小於 90° ）」的影響不大，這樣的狀況顯示典型範例中的「向量起點相同」影響學

伍、結論與建議

生概念心像的建立。值得數學教育界反思的是，我們似乎應在教學時除了提供一般典型範例外，盡可能提供各種不同向量位置的例子，讓學生累積各種經驗，以便發展更完整的概念心像。

學生對於兩向量可否作內積的心像在平面上或空間中差異不大，許多學生的概念心像中，兩平行向量是不可作內積的。而空間中「歪斜」的狀況雖然比平行略好，但也受到「歪斜不相交」這樣的原有概念心像影響，使部分學生認為沒有夾角，無法作內積。

本研究發現學生在面對不同的向量關係刺激下，會有不一致或互相矛盾的概念心像浮現，尤其是在概括性的任意兩向量可否作內積及給定特定兩向量關係時，可否作內積上展現出不一致的現象。一般而言，教師並不會特別探討哪些向量關係可作內積，但教師本身往往可以由與概念定義一致的概念心像，輕易感知任兩維度相同的向量皆可作內積，反而使其忽略學生無法像自己這樣以概念定義作判斷而在教學時加強此概念。

本研究發現學生在向量可否作內積的心像上，受到至少三類不同層面的相關概念心像影響，這三類心像分別是「向量概念-向量可不可以平移」、「角度概念-兩平行或歪斜向量有無夾角」以及「內積定義概念-特定向量夾角在投影或公式定義時部分物件『消

失』」。而這些相關概念往往都是教師在內積教學時不會特別多加強調的內容，然而它們都是學生在建立任何向量皆可作內積時的先備基礎概念，本研究發現許多學生在這些先備概念上概念心像與概念定義不一致，導致其對於任意兩同維度向量皆可作內積的概念心像與概念定義不一致。更多研究應該致力於探討學生關於內積先備概念心像的狀態，找出學生概念心像與定義不一致之處，提供教師在教學上的參考。

參考文獻

- Skemp, R. R. (1995)。數學學習心理學 (陳澤民譯)。臺北：九章出版社。
- 張春興(2006)。張氏心理學辭典。臺北：東華書局。
- 李永貞(2008)。高二學生在向量概念學習上的主要錯誤類型及其補救教學之研究。國立臺灣師範大學。(未出版之碩士論文)
- 林進發。(2001)。桃園地區高中學生向量內積之運算及應用錯誤類型之研究。國立高雄師範大學。(未出版之碩士論文)
- Bingolbali, E. & Monaghan, J. (2008). Concept Image Revisited, *Educational Studies in Mathematics*, 68(1), 19-35.

- Bledsoe, K. E. & Flick, L. (2012). Concept development and meaningful learning among electrical engineering students engaged in a problem-based laboratory experience, *Journal of Science Education and Technology*, 21(2), 226-245.
- Polya, G (1945) . *How to solve it?* Princeton University Press.
- Tall, D & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity, *Educational Studies in Mathematics*, 12, 151-169.
- Tall, D. (1988). Concept image and concept definition. In J. D. Lange & M. Doorman (Eds.), *Senior Secondary Mathematics Education*, OW&OC, Utrecht, 37-41.
- Vinner, S. (1983). Concept definition, Concept image and the Notion of Function. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 14(3),239-305.
- Vinner, S. (1991) The role of definitions in the teaching and learning of mathematics, in D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking*, Mathematics Education Library, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 65-81.
- Vinner, S., & Dreyfus, T. (1989). Images and definitions for the concept of function. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20, 355-356.
- Wilson, P. S. (1990). Inconsistent ideas related to definitions and examples, *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 12(3-4), 31-47.