兩測驗卷的答案、「問卷乙」的資料、各受試者第二次月考的數學成績及其性別。其中，兩測驗卷的答案先經編碼處理，而後鍵入電腦，同時併入其性別及數學成績之資料，最後以 SAS 予以處理分析，分別針對年齡、數學成績、邏輯推理能力等因素，包括得分、錯誤類型、平均以及標準差，同時亦進行回歸分析，用以尋找影響對數解題能力之因素，由於分析已有部份結果顯示，且此分析時間共歷經兩個月之久，故並沒有呈現「問卷乙」之成果，日後若有機會，將陸續呈現其結果。

第肆章　研究結果

本研究包含有三個子研究，根據施行時間之先後順序依次為研究一、研究二與研究三，這一連串的探索過程源自於研究一裡對四位國一數學資優生的觀察，而逐漸形成一初始假設，接著透過研究者所發展的兩類研究工具，針對不同受試者在邏輯推理能力、對數解題能力的表現並兩能力之間的關係做後續之探討研究，因此每個子研究可說是相互獨立但卻又有所關連，因為它們有其各自的待答問題與受試者，且上一個研究成果是下一個研究設計的改進基礎，因此，以下將以研究進行的時間進程為主軸，個別討論其研究結果，其節次如下：

第一節　假設形成

第二節　國一數學資優生的對數解題能力及其錯誤成因

第三節　國一數學資優生的邏輯推理能力

第四節　國一數學資優生的對數解題能力與邏輯推理能力間之相關性

第五節　一般中學生的對數錯誤類型

第六節　一般中學生對於對數符號及其公式的詮釋

第七節　一般國中生的邏輯推理能力

第八節　一般國中生的對數解題能力及其錯誤類型

第九節　影響一般國中生產生對數錯誤類型之因素

上述的第一節至第四節為研究一的研究結果，其中，第一節將略述本研究假設形成之源由，第二、三、四節則是對於國一數學資優生的對數解題能力、邏輯推理能力及此兩能力間的關係，透過對受試者在兩類工具的得分、錯誤類型和成因進行探討；第五節至第六節為研究二的結果，主要是針對一般中學生，包括一位未學過對數的國二生及一位已學過對數的高一生施測，探討他們的對數錯誤類型為何？是否與資優生的錯誤類型有所不同？並試圖探究對數錯誤的產生，是否與對數抽象公式和符號有關；第七節至第九節則為研究三之研究成果，主要將呈現 191 位一般國中生的對數解題能力、邏輯推理能力及此兩能力間的相關性，分述如下：

第一節　假設形成

在研究進行之初，原想針對四位經由篩選後的國中數學資優生對其所產生的數學錯誤類型作分析探討，但由於錯誤類型的研究領域相當廣泛，且不同領域有其不同的錯誤類型，因此在研究進行的過程中，乃嘗試將焦點鎖定於某特定數學領域的主題，另由於研究者有參與一針對此群資優生的課程設計小組，而在這一系列著重於數學思維的課程中，也包含有研究者所負責設計的邏輯推理單元，故觀察此四位資優生在邏輯推理單元中的推理表現及其平時的數學解題表現後發現，在其數學解題能力與邏輯推理能力間，似乎有所關連，故乃產生一個最初始的研究假設—「數學解題能力與邏輯推理能力是有相關的」。因此，以下將呈現受試者在邏輯前測問題及新 Wason’s four card 問題的表現，並說明假設形成之立論根據為何，其觀察分析之結果如下所述：

一、邏輯前測問題的得分表現

研究初期，乃透過一系列專為此群數學資優生所設計的數學思維課程，包

括其在邏輯推理單元與其他數學解題單元中的表現，而逐漸產生初始假設之雛形，因此以下將從受試者在兩邏輯推理單元中三個問題（邏輯前測問題）的得分表現開始，除了對四位受試者的推理能力能有一概闊性瞭解外，也簡略說明假設形成之因由，其得分情形如下表 4–1–1：

表 4–1–1　四位受試者在邏輯前測問題行為表現之得分表

	S2				S4				S6				S7			
	MP	AC	DA	MT	MP	AC	DA	MT	MP	AC	DA	MT	MP	AC	DA	MT
抽煙問題	1	0	0	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	0	1	0
新 Wason’s four card	1	1	1	0	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1
改良式 four card	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
總計	3	2	2	1	3	1	2	2	3	3	3	3	3	2	2	2
	8				8				12				9			

0：答錯　　1：答對

註：新 Wason’ s four card 的得分只含受試者的行為表現（只考慮是否需翻轉），不含推理表現（需說明翻或不翻的理由）。

由表 4–1–1 得知，四位受試者的得分表現以 S6 為最高，其次為 S7，接著 S2 與 S4 同為最低分，而根據在研究之初，篩選受試者的標準為包括選取兩位在此群數學資優生中屬於中高表現（S6 和 S7）與兩個屬於中低表現（S2 和 S4）的學生，另外依據他們平時參與此數學思維課程的表現後發現，S6 和 S7 的解題表現的確也優於 S2 與 S4，此現象似乎傳達出一個訊息—「數學解題能力高（低）↔ 邏輯推理能力強（弱）」，但若只從邏輯前測問題的總分來看，似乎略嫌簡略，因此研究者也從受試者在三問題中的新 Wason’s four card 問題之推理表現來看他們的推論品質，並以其推論品質的高低為參考標準，來看受試者此兩能力（數學解題能力、邏輯推理能力）間的相關性，以下是受試者在此問題中的表現。

二、新 Wason’s four card 的推理得分表現

邏輯前測問題中，三大題目的共同點是皆有要求受試者做出推論結果的判

準（選擇對、錯、資料不足，或者是選擇需不需要翻卡片），其中又以新 Wason' s four card 的問題較為不同，因為它還要求受試者寫出翻或不翻卡片的理由，此研究工具是參照 Adi, Karplus, & Lawson（1980）的實驗設計，將學生的表現分為行為表現（選擇翻或不翻）和推理表現（翻或不翻的理由），他們的假設是，受試者即使有正確的行為表現，但他們的推理表現有可能是錯誤的，根據此假設，他們將可能產生的推理表現分為九個等級（類別 0、類別 1、 ..、類別 8 等），為了說明方便，以下將 Adi, et al.的題目中出現的母音、子音、偶數、奇數分別對應到本題目中的注音符號、英文字母、偶數、奇數，其等級表如下：

表 4–1–2　新 Wason' s four card 的推理表現類別等級表

類別	推　　理　　表　　現
0	沒寫。
1	給多餘的回答。 （例：我想看另一邊是什麼；我想得到更多資訊）
2	描述已知的資訊。 （例：不，我不需要翻，因為 7 是奇數；我不需要翻，因為規則沒有提到奇數）
3	接受規則，並承認它是真，同時也運用它。 （例：我只需要翻有注音符號的卡片）
4	接受 AC、DA 的規則，並承認它是真，同時也運用它。 （例：沒有必要翻 4 的卡片，因為不會有英文字母在卡片另一邊）
5	嘗試檢驗 AC、DA。 （例：我想翻 4 的卡片，看看是否令一面是注音符號）
6	嘗試檢驗規則可能的含意，並顯示出規則為 AC、DA 的情形時，是沒有必要被檢驗的。（例：我沒有必要翻 4，因為規則沒有提到 DA 的情形）
7	嘗試檢驗規則，以尋求支持的證據 （例：我想翻注音符號的卡片，看看另一面是不是偶數）
8	嘗試檢驗規則，以尋求不支持的證據 （例：我想翻有注音符號的卡片，如果在背後找到奇數，那麼規則就是

類別	推　　理　　表　　現
	錯的）

（改寫自 Adi, et al., 1980）

根據上表 4–1–2，受試者的推理表現可以被歸類且賦予不同之等級，其中只有 5、6、7、8 四個等級的表現才有可能為正解，主要原因是此四個等級都有嘗試檢驗規則的行動包含在內，但隨著題目的不同，回答出此四等級的受試者不一定回答正確，例如當卡片上為「4」時，回答等級屬於 5 的受試者並不能算是回答正確，而回答出等級為 6、7 或 8 的受試者才算是正確。因此，若受試者的答案等級為正解，則記為得 1 分，若回答錯誤，則得 0 分，依此評定標準，四位受試者推理表現之得分如下：

表 4–1–3　四位受試者在新 Wason’s four card 的推理表現

受試者	卡片	翻卡	推　理　表　現	等級	得分	總分
S2	ㄅ卡	Y	因為要驗證	7	1	1
	F 卡	N	沒必要	3	0	
	4 卡	N	沒必要	3	0	
	7 卡	N	沒有關係	3	0	
S4	ㄅ卡	Y	看看是否是偶數	7	1	1
	F 卡	N	和注音符號無關	4	0	
	4 卡	Y	看是否是注音符號	5	0	
	7 卡	N	不是偶數	4	0	
S6	ㄅ卡	Y	看背面是否偶數	7	1	4
	F 卡	N	這不是注音	?[a]	1[a]	
	4 卡	N	因為題目中沒提到偶數一定是注音	6	1	
	7 卡	Y	看看是不是英文字母	8	1	
S7	ㄅ卡	Y	看背面是不是偶數	7	1	3
	F 卡	Y	看背面是否是注音	?[b]	0[b]	
	4 卡	N	因背面是什麼都沒關係	6	1	

	7卡	Y	因背面可能是注音	8	1	

註：1. 「翻卡」中的 Y 表有翻卡；N 表沒翻卡。

2. 「？[a]、？[b]」表示找不到適合的分類等級。

3. 「1[a]」表示給 1 分，但在「？[a]」中無法將之歸類到適當等級。

「0[b]」表示給 0 分，但在「？[a]」中無法將之歸類到適當等級。

在 Adi, et al.（1980）的分類標準下，的確可以發現受試者即使有正確的答案（翻或不翻），其推理表現卻可能是錯誤的情形，因此要瞭解受試者的推理歷程，不能只是分析其答案，而必須知道其所依持的原因。另外，從這四位受試者的回答與訪談也可發現，他們分別代表著四種不同類型的思考模式，特別是從那些有錯誤表現受試者（S2、S4、S7）的回答裡，也發現到一些值得繼續探究的現象。

從 S2 的整體表現中，發現他是一個直接接受規則敘述的人，意即他是屬於順向思考型的，當卡片不符合「若 p，則 q」的前件 p 時，便不會再繼續推論，同時他也不會以後件 q 為起點推論回前件。S4 則將單向條件式的「p→q」，自我解釋成雙向的「p q 」，並接受且應用這個規則，所以他能從 p 推論到 q，接著再從 q 推論到 p，但對於 ~p 和 ~q 的情形則不予以考慮，因為他認為其與題目並沒有什麼關係。而 S7 的錯誤並不是有關於推論的問題，而是了解題意與否，從他在「F 卡」中的表現，顯示他並沒有了解題目的限制是卡片的形式一定為「注音英文 –數字」的配對。至於 S6，由於他在這三個推理問題中並沒有產生錯誤，因此在此不詳加描述他的解題表現。

縱上所述，可歸納出三點受試者犯錯誤的原因：

1. 不清楚題目限制（S7）。
2. 順向地接受題目，對於不符合題目前件的描述，便不予以考慮（S2）。
3. 從題目中抽取 p、q，並加以解釋成「p↔q」（S4）。

其中，S2、S4 產生一些屬於推論方面的錯誤，而令人感到興趣的是，依此四位在每兩個禮拜一次的數學思維課程中，觀察其解題行為之表現後發現，另

兩位受試者 S6、S7 在與 S2、S4 相較下，前兩位之表現較佳，此現象似乎與四位在新 Wason's four card 問題的推理表現有相關，故根據此實際結果，研究者作了一個大膽的預設 —

『解題能力高（低）　推理能力強（弱）』

為檢驗上述假設之真實性，研究者開始積極著手於數學題與推理問題的設計，希望尋找出某類的數學題及推理問題，可分別代表受試者的數學解題能力與邏輯推理能力，並期透過再次的施測結果，能對上述假設有一建設性的改進。

第二節　國一數學資優生的對數解題能力及其錯誤成因

本結果屬於研究一的驗證假設階段，在本階段裡，將從受試者在兩個由研究者自行開發的研究工具 —「新對數題甲」與「推理問題甲」之表現，針對上述的預設加以驗證，其中「新對數題甲」可代表數學解題能力，「推理問題甲」則代表推理能力，透過觀察受試者在此兩工具之表現，將其所呈現的結果對先前研究者所做的假設 —『解題能力低（高）↔ 推理能力弱（強）』加以檢驗。

本節以呈現國中數學資優生的對數解題能力為主，觀察四位受試者在「新對數題甲」工具中的表現，包括他們的得分、產生的錯誤類型總數、錯誤類型及其成因等三方面來檢驗假設，其結果如下：

一、「新對數題甲」的得分

由於本研究的目的之一是探討對數解題能力與邏輯推理能力之間的相關性，因此，對於受試者的答題評分標準乃著重於他的推理是否正確，所以在給分的標準上，推理錯誤而計算正確所得的分數會比計算錯誤但推理正確的分數來的高。給分標準共分四級，分別為 0、1、2、3 分，其中，0 分代表未作答（空白）和推論錯誤；1 分表示有做出正確推論，但未將答案化簡到最簡單的型式；2 分則是有做出正確的推論，但在當中出現計算的錯誤;3 分則是完全推論正確，並能寫出正確的答案，其給分標準如下：

表 4–2–1　「新對數題甲」給分標準

答　案　型　式	得　　分
空白 推論錯誤	0
未化簡完全	1
計算錯誤	2
答對	3

由於「新對數題甲」工具包含有四種不同層級的題型，每個層級的難度不同，以Ⅰ為最容易，Ⅳ最為困難，因此根據上表的給分標準，各受試者在不同層級對數題之得分如下表 4–2–2：

表 4–2–2　四位受試者在「新對數題甲」之得分與對、錯題數對照表

層次	S2		S4		S6		S7	
(總題數)	對／錯	得分	對／錯	得分	對／錯	得分	對／錯	得分
Ⅰ(9)	9／0	27	8／1	26	8／1	26	9／0	27
Ⅱ(2)	0／2	0	2／0	6	2／0	6	2／0	6
Ⅲ(2)	0／2	0	0／2	0	4／0	6	2／0	6
Ⅳ(3)	0／3	0	0／3	0	0／3	2	2／1	8
總計	9／7	27	10／6	32	12／4	40	15／1	47

整體而言，四位受試者的表現不大相同，其中 S2、S4 兩人在新對數題目的表現，明顯地較其他兩位為差，此與他們在邏輯前測問題中的得分表現相比較後，其結果似乎可驗證研究者在先前邏輯前測問題所形成的預設—「數學解題能力高（低）　邏輯推理能力強（弱）」，故為了對此初始假設是否成立的可能性予以否證或證實，研究者除了對「新對數題甲」的部份題型加以修正，也更

積極地著手尋找各種邏輯推理問題來作為代表受試者推理能力的研究工具。

二、「新對數題甲」的錯誤類型總數

由於「新對數題甲」的題型有部份是取自於李芳樂（1997）的研究工具問題，因此，在本部份中的錯誤類型分析也將與他的研究結果作比較。

在李芳樂的研究中，他將學生的錯誤類型稱之為誤則（mal-rule，其中並不包括疏忽的錯誤），共有 114 個之多，其中經抽絲剝繭後得到的主要誤則有 13 個，而在這 13 種主要誤則的不同組成下，學生的各類錯誤乃因而產生，因此，根據此理念，針對研究一四位受試者在「新對數題甲」所產生的錯誤，將之歸為四大類型，包括有：

分配型錯誤：簡稱 D 型錯誤，為 **D**istributive error 的縮寫。
交換型錯誤：簡稱 C 型錯誤，為 **C**ommutative error 的縮寫。
放棄型錯誤：簡稱 G 型錯誤，為 **G**ive up error 的縮寫。
筆誤型錯誤：簡稱 L 型錯誤，為 **L**apses error 的縮寫

其中，D 型與 G 型錯誤各有兩個子型，所以共有 6 種錯誤產生。兩研究的錯誤類型數有如此大的差異，其主要原因有二，一是兩研究所編制的題型不大相同，二是受試的對象也不盡相同。李芳樂的研究旨在尋找出所有在對數運算中所可能出現的誤則，因此其所函括的題型相當多樣化，包括有解未知數的題型，而本研究一旨在瞭解推理能力與數學解題能力之間的相關性，因此題型較為基本，故所出現的錯誤類型也較少，不過雖然在數目上有極大不同，但學生所犯的錯誤類型，和李芳樂所歸類的錯誤類型還是有部份雷同。而為瞭解本研究中四位受試者所犯的錯誤類型為何，兼且比較他們解對數問題的表現，乃將四位受試者產生各類型錯誤的次數製成下表 4–2–3，以便觀察其解對數題的模式：

表 4–2–3　　四位受試者在「新對數題甲」的錯誤類型與次數一覽表

主 型	子 型	範　　　例	S2	S4	S6	S7
D	D12	log(A±B)＝(logA) ± (logB)	3	3	0	0
	D21	(logA) ± (logB)＝log(A±B)	2	0	0	0
C	Cim	AlogB＝log(A×B)	3	3	0	0
G	Gb	空白不作答	0	0	1	0
	Gs	未化簡完全	0	0	2	0
L	La	筆誤	0	1	1	1
總　　　計			8	7	4	1

上表 4–2–3 中顯示 S2 與 S4 相較於其它兩位受試者而言，所犯的錯誤個數較多，此現象和他們在邏輯前測問題的表現相比，似乎顯示其與先前的預設相符合（邏輯前測中，S2 與 S4 各錯 4 題，S6 沒有錯誤，S7 錯 1 題)。但若欲探討兩能力間的相關性，除了可以比較其得分或錯誤個數外，如能從受試者的思路歷程來分析討論，也許更能有所發現，除此之外，透過深入瞭解受試者的思路歷程，也能對其錯誤成因有更進一步的瞭解。因此，以下將以施測後所進行的立即訪談結果，針對研究一中四位受試者所產生的四大類型錯誤，分別詳加分析之。

三、「新對數題甲」的錯誤類型成因

不同之錯誤類型有其不同之成因，以下將以受試者的訪談結果，依序以分配律型、交換律型、放棄型及筆誤型等四種錯誤，分別呈現其錯誤成因，分析探討如下：

（一）分配律型錯誤

根據李芳樂（1997）的研究顯示，在面對 log(A±B) 的題型時，學生會將之視為 log × (A ± B)，而得到 logA ± logB 的答案。由此推論之，學生會運用『分配律』的觀念來解對數問題，而根據本研究中者的訪談結果，也果真得到證實，

因此，在研究一裡將此類型的錯誤稱為『分配律型錯誤』，並分成兩個子型。

第一子型錯誤記為「D12」（ D 表 Distributive ，12 表由一個 log 項轉成兩個 log 項，如：log(A＋B) ＝ logA ＋ logB ），第二子型錯誤則記為「D21」（ 21 表由兩個 log 項轉成一個 log 項，如 logA ＋ logB ＝ log(A＋B) ），此兩種錯誤在李教授的研究中分別是以 AA1、AA2 來編碼。以下將根據訪談結果，探討此類型錯誤產生之成因，是受過去知識與經驗影響，還是有其它更為重要的因素或機制影響著受試者的表現？受試者是有意的還是無意地使用此錯誤解題法則？分析討論之結果如下：

（1）過去知識、經驗的影響

在這四位受試者中，有兩人（S2、S4）產生 D 型的錯誤，因為在他們的計算過程中，皆有如下的算式產生：

$$p(20-4) = p20-p4$$
$$p(2+3) = p2+p3$$

另外，透過訪談結果，可進一步證實此類型的錯誤深受過去所學分配律概念的影響，訪談部份內容如下：（T 為訪談者，S4 為受試者）

T ：那為什麼你覺得它可以寫成 p20 – p4？
S4：大概以前在學校算那個吧！
T ：算那個？
S4：算數學課的那種數學習慣吧！
T ：習慣？
S4：因為以前，因為我們每次算數學的時候，老師都會 ..像比如說這樣好了，像數學老師以前就教習慣，老師一定會叫我們把它開成這個樣，類似這樣 …【受試者在紙上舉出一個分配律的算式】
T ：所以它就可以變成 p20 – p4？
S4：對啊！
T ：那你為什麼會想到？是純粹以前的經驗嗎？
S4：哪一個，是說把它分配？還是 ...?
T ：對，把它分配？
S4：分配是經驗啦！
T ：分配是經驗，然後之後對照規則就出來了！
S4：對啊
T ：所以很容易就把它算出來了？
S4：還好啦！ （88.2.13）

從上面的訪談結果，可以清楚地知道受試者的先備知識（指分配律而言）很容易地會影響他的解題過程，而此容易的程度亦有所差別，是如同 Fischbein, Deri, Nello, & Marino（1985）所提及的「內隱模式」一般，是由於先備知識不自覺地影響著解題者的解題歷程；還是如同 Ben-Zeev（1995）所提及的「合理的錯誤」一樣，意即受試者所面對的是一個新奇的題目，再加上其所必須解的問題形式與給定的新對數題公式有些微差異，因此對他們而言，可說是遭遇到一個阻礙（impasses），所以根據各受試者先前的知識背景促使他們作了一個過度推論，於是將以前所學過的分配律套用於新對數題中，最後形成一個「合理的錯誤」。至於上述兩者中，何者的解釋較為正確，將在下一段中有較為深入的探討。

（2）有意還是無意？！

上述所提及 Fischbein 等人（1985）及 Ben-Zeev（1995）的兩家說法，其共通點是皆認為錯誤的發生與受試者以往所學過的知識有關，不同的是，前者指稱受試者是在不自覺的情形中使用過去知識進行解題而產生錯誤，後者則認為受試者乃以過去知識與經驗為基礎，經由推論過程得出一個新規則後，加以採用。因此，以下將從 S2 與 S4 的訪談來探討受試者究竟是會在有意還是無意的情形之下使用此新解題規則，探討結果如下：

T ：所以，我如果要你幫我解釋一下這兩個式子啊，它有什麼特徵？你看完之後，有沒有歸納出什麼樣的結果？
S2：不是這個加上這個這個啊，這個 A 加上這個 B 就等於這個乘以這個啊，就是成了變加的，然後除的變減的
T ：那這兩個有沒有差別？
S2：沒有啊

.
.
.

T ：我歸納一下，你是不是就是減的地方就變成除？
S2：對
T ：看到然後能夠化簡就盡量化簡到這樣的形式
S2：對
T ：所以看到減就是把它變成除；看到除就變成…
S2：就把它變成減啊！
T ：然後看到加就變成
S2：乘
T ：看到乘就變成

S2：加
T ：大部份都用這樣的規則？
S2：對
T ：還有沒有用到其他的規則？
S2：還有前面有係數。（88.2.13）

在訪談過程中，當訪談者問及 S2 的解題規則時，他表示他皆採用「乘變加，除變減」的運算規則而產生答案，但從其在試題卷上的算式卻顯示出他還是會用「分配律」的規則進行解題，甚至在訪談過程中，當訪談者請他再一次描述其所會採用的解題步驟時，結果亦呈現 S2 乃使用分配律的觀念來解題。其訪談過程如下：

T ：這一題 peculiar(6×20)嘛！那你寫成 26 是怎麼來的？
S2：6 加 20 啊！
T ：那你為什麼是 6 加 20？為什麼想到？
S2：因為這裡啊！【手指著題目卷上的公式】
T ：因為 p 的第幾條規則？
S2：第 1 條
T ：第 1 條規則？！所以你是先把它看成，你是先把它看成什麼樣？你怎麼跳到這一步 的？就直接 p6 + p20 嗎？還是 ..等於 p6 × 20？
S2：一啊【手指著 p6 + p20 的算式】
T ：一喔！然後就之後變成 p26
S2：對（88.2.13）

因此 S2 的表現，較傾向於 Fischbein et al.,（1985）所提及的內隱模式，他是不自覺地、很自然地使用過去所學過的知識來進行解題。但這並不代表利用先備知識來解題的人，都是屬於不自覺的、無意的，從下面 S4 的訪談記錄表現即可得知。

T ：那這邊的話，我比較好奇的是像第 10 題啊 ...【手指著第 10 題：p(6 × 20)】
S4：ㄟ！那個是不是寫錯了？
T ：p(20 – 4)會等於 p20 – p4 嘛！那這邊 ...
S4：這個可能是寫錯了，應該是不是 26 寫錯了
T ：這邊應該是你 ...?
S4：喔！沒有，我是直接算的
T ：嗯！直接算的，那為什麼你會想到要直接算
S4：沒有啊！因為這個【p(6 × 20)】假如換成這個【p6 ＋ p20】的話，還是要再倒回來算啊！
.
.
.
T ：那這個的話，你會怎麼對照 p(20 – 4)，就直接先把它換成 p20 – p4
S4：對
T ：那為什麼你覺得他可以寫成 p20 – p4
S4：大概以前在學校算那個吧！
T ：算那個？
S4：算數學課的那種數學習慣吧！

T ：習慣？
S4：因為以前，因為我們每次算數學的時候，老師都會像比如說這樣好了，像數學老師以前就教習慣，老師一定會叫我們把它開成這個樣，類似這樣【在紙上列舉一個分配律的例子】 （88.2.13）

從上述 S4 的表現中，很明顯地可以感受到他與 S2 產生錯誤的理由不同，S4 會從題目的公式中，左右推算答案，此舉與 S2 只會從公式一邊推算到另一邊（無法左右推算）相比較下，會出現較少錯誤。另外當題目與給定公式的等號兩邊皆不相符合時，S4 判斷無法使用定公式，而採用過去學校老師所教的分配律來進行解題；S2 則是主觀地認為他是利用給定公式來進行解題，但卻不自覺地使用分配律。因此，S4 的表現應與 Ben-Zeev（1995）題及的「合理的錯誤」較為吻合。

綜上所述，受試者會使用過去的知識或經驗來進行解題的想法是可獲得證實的，但究竟是有意的使用還是無意的使用，從上述兩人的表現中發現，兩種說法都有可能。這樣的結果，有兩方面的意涵：一是「內隱模式」與「合理的錯誤」各有所不足，但卻可以互相補足；二是有沒有一個更能解釋錯誤發生的說法。針對第一點，已在上一段中稍有描述；至於第二點，有鑑於錯誤的發生若是用有意、無意來區分，是一種二分法，已將所有的情形窮盡，因此要尋求一個錯誤解釋的新說法，就必須要跳脫此分類模式，這也是本研究中要探討受試者邏輯推理能力的動機之一，但這並不意味著研究者認為邏輯推理是引發錯誤發生的一個因由，因為它們之間的相關性還有待證實，所以，本研究算是初探性質，期待透過對此兩種能力間的瞭解，能引發更多研究產生。

⑶）分配律型錯誤新解

表面上看來，D 型錯誤源自於過去所學的分配律觀念，但從另一角度來看，此錯誤也許與受試者之推理模式有關。

以 S2 為例，在可以查閱對數公式（$\log(A\times B) = \log A + \log B$）的情形之下，他仍然犯了 D21 型的錯誤（寫出 $\log 6 + \log 20 = \log 26$ 的算式），此與他在邏輯前測問題中的表現相比，似乎皆顯示出受試者乃習於單向思考，因此他無法寫出正解。

另外，如果將對數公式看做是一個條件句（也就是在滿足 $\log(A \times B)$ 的情形下，可以推論到 $\log A + \log B$；或者反過來說，在滿足 $\log A + \log B$ 的情形下，可以推論到 $\log(A \times B)$），那麼當受試者遇到一個對數題時，他可能使用此條件來進行解題，但也有可能不使用，此時他可能產生邏輯推理上的錯誤，所以若從此角度看待錯誤的產生，也許能對錯誤類型之成因，有其另類或者是更深一層的看法。

（二）交換律型錯誤

四位受試者在『交換律型錯誤』（C 型錯誤）中，只產生一子型錯誤（簡稱 Cim，i 表 input，m 表 multiplication）。產生錯誤的受試者有 S2 與 S4，兩人均是將 AlogB 轉換為 log A×B，其表現如下：

$$2(p14) = p28$$
$$2p3 = p6$$

為了尋找受試者產生此錯誤的因由，將部份訪談的結果列出如下：（T 為訪談者，S2、S4 為受試者）

S2 的訪談

T ：啊對，這邊本來就有刮號，2 括號個代表什麼意思？
S2：2 乘以這個啊！
T ：2 乘以這個啊，所以 2 乘以這個，然後之後就把他乘到 14 這邊去，ㄟ，可是這邊有沒有這個規則啊？
S2：沒有啊！
T ：那你怎麼會想到用這樣？
S2：我不知道！
T ：就是可以這樣做？
S2：應該可以吧！ （88.2.13）

S4 的訪談

T ：那第 15 題呢？ 3p(9 + 6)？162 怎麼來的？記不記得？
S4：54×3
T ：那 2 這個地方，2 為什麼可以乘進去？【手指著第 7 題中，2p14 = p28 的算式】

S4：什麼意思？
T ：你為什麼想到它可以乘進去？2p14 就等於 p28？
S4：就跟上面剛剛那個一樣啊！
T ：上面那個？
S4：應該是想成跟這種【手指著第 15 題】一樣吧！
T ：就是這個 3 也可以乘到 54
S4：對啊！因為我覺得那個跟這個就是等於，這個是沒有打開【意指 3p(9 + 6) 】，那個是把它打開【意指 2(p7 + p2)】、展開而已啊！
T ：打開是什麼意思？
S4：就是括號啊！就是把它這樣【寫出 2(p7 + p2) = 2p14】，我只是那時候的感覺，有時候會把它寫成這樣，我覺得這樣應該一樣啊！
T ：嗯哼，如果說寫成這樣，那接下來應該 ...
S4：我覺得這個跟這個【手指著第 14 題和 ..】應該是一樣的啊
T ：對啊，你剛剛是這樣推的啊！
S4：對啊
T ：那接下來呢？
S4：接下來再乘進去 ... (88.2.27)

上述的受試者 S4 在接下來的訪談過程中，並沒有說明他為何要將係數乘進去，只有說道當碰到有係數的題型時，就會有此作法，顯然兩位受試者都是很自然地使用此規則進解題，特別地 S2 提出 AlogB 即為 A×logB，因此內隱模式在此再次得到驗證，但是究竟是什麼樣的理由促使受試者如此「自然地」將 log 前的係數直接乘進去？從下段中的另一訪談記錄可得知。

（1）過去知識、經驗的影響

S2 的訪談

T ：那前面係數你為什麼會想到乘進去？像這邊啊？你為什麼可以推到？
S2：因為這是 2 乘以這個【指 2 ×p14】啊！
T ：嗯！2 乘以 p14，然後就可以乘進去嘛！
S2：嗯！
T ：那是不是有點像你在看 2(χ × 4)，一樣？
S2：對！就是「2 ×χ ×4」
T ：然後呢？
S2：然後 ..然後就 8χ
T ：所以你們現在就是簡寫成 8χ嘛！對不對？一元一次方程式？
S2：對 (88.2.27)

從上段訪談中可發現，受試者將此運算視為以前所學過的未知數運算，因

為在未知數 x 的運算過程中，x 與其它已知數字間若無任何運算符號存在，則可視其關係為相乘，因此，當受試者在看 2log14 時，很容易受 $2\times\chi\times14$ 想法的影響，此即為李芳樂（1997）所指稱的，學生會出現某類誤則是因為視 log 與其它數字間存有一乘號存在。但於上述訪談中，則更進一步地發現其錯誤成因是受過去學習「一元一次方程式運算」的先備知識與經驗之影響。但其與邏輯推理的關係又為何？還是此錯誤就如前面所述一般，只純粹地與受試者的先備知識有關？

(2) 交換律型錯誤新解

交換律型的錯誤主要產生於那些含有係數的題目中，也就是研究者將之歸類於第Ⅳ層級的題型。在此層級中的題目共有三題，其中受試者的表現以 S7 最佳（只出現一個疏忽型錯誤），因為其餘的受試者裡，有的採用過去所學的交換律觀念來進行解題（如 S2、S4），有的則表現出放棄的態度（如 S6，空白不作答或是未化簡完全），只有 S7 反覆查閱題目公式，並考慮其限制，最後終於有所領悟地將 2log3 視為『兩個 log3』，並將之拆成 log3 ＋ log3，接著利用給定公式，寫出正解『log9』，此舉相較於其它三人之表現實有極大差別。

因此針對此兩類表現之差別，促使研究者對於受試者是如何看待公式的問題產生興趣，受試者在運用公式時，是否有所困難？當然，對於一些沒有學過對數的人，要他們做出正確推論實有困難，因為若是對於對數符號的意義與作法不甚了解，那麼要產生此錯誤並非是一件難事，但事實上，即使對於那些已學過對數的學生，其對於對數符號的意義亦不甚了解，更明確來說，在某些情形下，即使是學過對數的學生，也會產生交換律型的錯誤，此由李芳樂（1997）的研究裡即可得知。

但若是從另一角度來看待此錯誤，也許會有另一番新解。換句話說，如果將受試者所看到的題目公式，皆視為條件式推理中的條件句，而其所映入眼簾的計算題目在表面形式不符合公式的情形下，受試者約略有兩種表現，一是進行解題，二是宣告放棄，但解題的品質則隨著推論正確與推論錯誤而有所差異，將之與條件式推理的文獻中各研究對答題設計的角度來看，例如，在一些經過

變形的 Wason's four card 問題中，受試者可選擇「翻」或「不翻」卡片（對應於正確推論或錯誤推論）及「資料不足，無法回答」的答案（對應於放棄型），因此從此角度觀之，或許對學生錯誤之成因，可提供另一方向之思考。

（三）放棄型錯誤

還有一型錯誤稱之為『放棄型錯誤』（簡稱 G，表 Give up），包含有兩個子型的錯誤，分別為 Gb（b 表 blank，屬於空白未作答的錯誤）和 Gs（s 表 simply，屬於未化簡完全的錯誤），四人之中只有一人（S6）產生此錯誤。基本上從他的解題過程可以發現，他能正確地運用他自己從題目條件中所習得的法則，但卻無法再作進一步的推論，因此最終答案是未化簡的型式（Gs），甚至他無法做出下一步，而以空白（Gb）的形式為其答案。訪談過程如下：

T ：那 2 可不可以乘以 14？
S6：可以啊！可是我不知道能不能套進去,
T ：為什麼？為什麼你覺得可以，然後覺得又不能套進去？
S6：因為前面加了一個東西
T ：那你覺得前面這個 2 代表什麼意思
S6：兩個這個
T ：兩個 P14
.
.
.
T ：有沒有辦法繼續化簡
S6：我不知道怎麼化
T ：你有沒有辦法從這邊推出來
S6：沒辦法啊！他又沒寫 2 叉，前面有 … （88.2.13）

由上述訪談結果可知，此類型的錯誤基本上無法稱得上是一種誤則，因為他並沒有自行推論出一個新法則，而是採取一種較為保守的態度解題，意即題目給予多少條件，就根據給定條件作答，此錯誤與 S2、S4 的錯誤迥異，也是四位受試者當中較特別的，因為其它三位受試者在每一題中都盡力解題，即使是不太有把握的算法，他們還是會寫出答案來，因此對於 G 型的錯誤，研究者初步認為其與推理能力的關係較不如與 D 型、C 型錯誤與推理能力的關係來的密切，只能說，此類受試者在遇到瓶頸時，易宣告放棄而不願意再繼續推想。

但是在設計邏輯相關題目時，研究者有另一番想法，受試者在採取放棄型

的解題行動與在推理問題中採取選擇「資料不足，無法回答」的兩類行為間是否有相關？若果如此，本研究的第三個主要目的，也就是探討邏輯推理能力與數學解題能力間是否有關係的問題，也許可以獲得初步答案，故此問題也將列為研究三的研究問題之一。

（四）筆誤型錯誤

受試者在這裡出現的筆誤（簡稱 L，是 Lapses 的縮寫），是指那些他們在受試時算錯，而卻能在訪談時一眼就看出錯誤的題目，也可說是一種疏失型的錯誤，此型錯誤共有三人產生，分別為 S4、S6 與 S7，且都是屬於計算錯誤。其部份訪談過程如下：

S6 的訪談

T ：那這一題呢？13 題，為什麼變成 Peculiar13/7？
S6：寫錯了！
T ：喔！是寫錯了，我以為你喜歡 13 號星期五！ （88.2.27）

S7 的訪談

T ：括號裡面加，所以 15？所以 3p15，那 3p15 等於什麼？
S7：p15 的乘方
T ：p15 的 ...?
S7：$p(15)^3$
T ：所以 2625 應該是$(15)^3$ ，只是你可能有計算錯而已？
S7：嗯？
T ：沒關係，你可以直接在上面算。
S7：【開始計算】嗯？【發現錯誤】
T ：所以應該是 3375
S7：嗯！ （88.2.27）

由上述兩段訪談結果可得知，受試者所產生的此型錯誤，應屬於文獻中所提及的隨機錯誤，因為當受試者再一次重新看題目時，可以很快地看出他們先前答案是錯誤的。從另一個角度來看，此錯誤也可屬於我們在前面所提及的疏忽（slips），疏忽的原因已在文獻中加以闡述，其最主要的想法是與工作記憶空間有關，因此當下一次看到同樣的題目時，受試者不會再犯相同的錯誤，甚至他可以指出過去的錯誤、做出正確的答案。

另外亦有研究指出，解題較能力高者，他們較其它人容易犯疏忽型的錯誤，最主要的原因是因為他們花了一些工作記憶空間在問題的推論工作裡，因此剩

下的可用工作記憶空間就較少，所以較易出現計算錯誤或不小心的疏忽。從四位受試者的 L 型錯誤個數比較發現，此效應並不十分明顯，但若從各受試者所犯錯誤中 L 型錯誤所佔的百分比來看，約略可發現此效應之存在，其百分比從低到高依次為 S2 的 0%、S4 的 14.3%、S6 的 25%以及 S2 的 100%。

故若從筆誤型錯誤應歸因為與工作記憶空間的角度來看，則此類型錯誤不應為一種推理上的錯誤，所以在探討邏輯推理能力與數學解題能力間之相關性時，並不將此類型錯誤列入考慮中，但這並不表示受試者不會犯推理上的疏失，只是基於研究的限制，研究者將焦點集中於那些具有推理成分的錯誤類型。

四、「新對數題甲」錯誤類型成因之理論解釋

針對受試者在「新對數題甲」中所產生的四大類型錯誤（D、C、G、L 型），在上段中已透過訪談所收集的資料呈現其分析結果，在此為說明方便，將各類錯誤及其成因列於下表 4–2–4。

表 4–2–4 「新對數題甲」錯誤類型及其成因對照表

錯誤類型	部份受試者的主要說明	成　　因
D	S2：我不知道，應該可以這樣算吧 S4：以前數學課的習慣、經驗	受先備知識及過去經驗的影響
C	S2：就是可以乘進去 S4：同上	受先備知識及過去經驗的影響
G	S6：沒辦法，公式沒寫	推論遇瓶頸，無法繼續推論
L	S7：喔！上次寫錯了！	工作記憶空間有限

上表 4–2–4 中，前兩類錯誤（D 型與 C 型）可視為一種「合理的錯誤」，因為它們符合經 Ben-Zeev（1995）修正過後的「歸納假設」說法—『受試者會從過去知識或經驗做出錯誤的歸納，並正確地遵循此經由錯誤歸納後所得的法則』，此成因解釋應是比李芳樂所稱『此類錯誤根源於視 logA 為 log ×A 及錯誤地使用分配律兩種主要誤則』的說法更為深入些，但是從 S2 的訪談中卻不禁令人產生疑惑—受試者真是經由推論後才進行解題？而 Fischbein 等人（1985）提出的內隱模式則認為，受試者是不自覺地使用一些模式（model）來進行解題，此模式源自於教師最初教學法或是因為人們有一種接受較具意義概念的傾向，由於在本研究中並不含教學的成分在內，因此與教師最初教學法之因素，應該

較無相關，但另一因素則有可能影響受試者的表現，因為對數運算與基本四則運算在相較下，四則運算就顯得較為有意義，如是說來，S2 與 S4 的錯誤表現應屬於一種內隱模式（包括分配律、交換律）影響下的產物。

綜上所述，若以「內隱模式」與「合理的錯誤」兩派說法分別對學生所產生的錯誤作成因解釋，那麼必定有所遺漏，換句話說，此兩者必須互為補足，才能發揮其最大效用。另外，內隱模式的解釋也引發研究者想進一步探討「對數符號的意義」是否也為一影響對數表現的重要因子？此問題也將留待於研究二回答。

至於 G 型錯誤，嚴格來說它並不符合 Ben-Zeev 所提出「合理的錯誤」之假設限制，但這並非意味此錯誤的產生不含有推論的成分在內，有可能是因為受試的推論遇到瓶頸，而無法有更進一步的解題行動，這也是 Ben-Zeev 的理論稍有不足的地方，因為按照他的說法，受試者在遭逢困境時，還是會繼續解題，同樣地「內隱模式」也無法解釋此類型錯誤，因為兩者皆是探討受試者在主動解題的情境中產生的錯誤，故此，是否有一錯誤成因理論能合理並較完整地解釋受試者的錯誤表現？或者，錯誤成因必需由各個不同的成因解釋相輔相成？若是如此，那麼，可以解釋 G 型錯誤的成因解釋為何？在邏輯推理的領域中，受試者在部份條件式推理的題目中易傾向於選擇類似於「資料不足，無法回答」的選項，因此研究者初步推論，也許從此角度來看，可以解釋一些錯誤類型的產生。但在本研究中，先將焦點著重於與推論較為有關的 D 型與 C 型錯誤，主要原因是，此類型錯誤也許與學生的學習風格與態度較為有關。

另外的 L 型錯誤，基本上也並不將之歸類於推理上的錯誤，因為其成因應為工作記憶空間不足，但研究者並不排除在工作記憶空間不足的情形下，會發生推理錯誤，而使人誤以為是疏忽，因此這也是本研究的限制之一，但在此研究中，研究者基本上還是相信 L 型錯誤所佔比例應不高。

總括來說，要尋找一個能同時解釋 D、C、G、L 型錯誤的理論並不容易，至少「合理的錯誤」與「內隱模式」就無法達到此目標，但是若能從另一角度觀察受試者解題的方法與歷程，也許會有一些新的、不同於以往的想法與發現

產生，這也是本研究欲從邏輯推理的層面來看錯誤類型的原因之一。

第三節　國一數學資優生的邏輯推理能力

「推理問題甲」的題型設計與邏輯前測問題有部份不同，此舉一方面是希望能夠盡量配合受試者在新對數題中的思路，另一方面是想嘗試看看不同題型的推理問題，是否也與其對數表現相關，因此在本題型中除了原有的 $P \to Q$ 題型外，亦增加了有關 $P \to \sim Q$、$\sim P \to \sim Q$、$\sim P \to Q$ 的題型。研究者的預設是受試者在面對給定公式時，同等於他們得到一個條件句（$P \to Q$），但受試者在遇到與公式形式相同的題目（P）時，可能運用公式（$P \to Q$）或不用公式（$P \to \sim Q$）；而在遇到與公式形式不相同的題目（~P）時，他也有可能運用公式（$\sim P \to Q$）或不用公式（$\sim P \to \sim Q$），基於此假設，我們將前測的邏輯問題的題型改變成「推理問題甲」。其中，四位受試者在各題的得分表現如下表 4–3–1 所示：

表 4–3–1　四位受試者在「推理問題甲」的各題得分表

	S2				S4				S6				S7			
形式	P, Q	P, ~Q	~P, ~Q	~P, Q	P, Q	P, ~Q	~P, ~Q	~P, Q	P, Q	P, ~Q	~P, ~Q	~P, Q	P, Q	P, ~Q	~P, ~Q	~P, Q
得分	1	1	1	0	0.5	1	0.5	0	1	1	1	1	1	1	1	1
	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
總計	2	2	2	1	1.5	2	0.5	0	2	2	2	2	2	2	2	2
	7				4				8				8			

註：0　分：答錯（FT）
0.5 分：認為兩種形式皆可（FT、TF）
1　分：答對（TF）
P, Q 表 $P \to Q$，以此類推，P, ~Q 表 $P \to \sim Q$，~P, ~Q 表 $\sim P \to \sim Q$，~P, Q 表 $\sim P \to Q$

從表 4–3–1 中得知，其中有兩位受試者得滿分（S6、S7），而他們正是在課堂中表現較為優秀的學生，另外兩位受試者（S2、S4）的表現則顯示出他們在「$\sim P \to Q$」中的表現較為差，此結果似乎與他們在新對數題的表現有所相關（有關新對數題的部份在下面會繼續討論），因此，也更引發研究者想繼續探討此兩能力之間的關係的興趣。

第四節　國一數學資優生的對數解題能力與邏輯推理能力間

之相關性

在上述驗證假設階段中，其結果對於研究者所提出的假設似乎約略呈現出「可證實之」的訊息，但為使此假設能有多方角度的驗證，以下將從較為深層的角度來看四位受試者在「新對數題甲」與邏輯前測問題表現之相關性，以及他們在「新對數題甲」與「推理問題甲」表現之相關性。其中，在「新對數題甲」的表現代表對數解題能力，而在邏輯前測問題與「推理問題甲」的表現則代表受試者的邏輯推理能力。

一、「新對數題甲」與邏輯前測問題表現

以下將先探討每位受試者在此「新對數題甲」與邏輯前測問題表現之特徵，比較其相同與不同之處，接著從邏輯推理的命題，以及受試者在新對數題中的表現，提出一個關於解新對數問題的思考模式（此思考模式是本研究中用來發展「推理問題乙」的一個重要依據)。分析討論如下：

（一)「新對數題甲」與邏輯前測問題表現之特徵

四位受試者在此兩類問題的表現上各有其特徵，有些相同，但仍有不同之處，以下將以表 4–4–1 中呈現他們各自的解題特徵，接著再提出兩個相同特徵，並分別就此兩相同處予以說明，結果如下：

表 4–4–1　四位受試者在「新對數題甲」與邏輯前測問題解題表現之特徵

	S2	S4	S6	S7
邏輯前測問題	1.接受並應用題目規則 2.順向思考型(由 P 到 Q) 3.對於不符合題目前件(P)的描述，便不予以考慮	1.從題目中抽取 P、Q，並加以解釋成「P　Q」 2.接受新規則「P　Q」，且不考慮出現~P 和~Q 的情形	沒有出現錯誤	1.沒有弄清題意(卡片的形式為「注音英文—數字」的配對)。
新對	1.只會從公式一邊推論到另一邊（不能左右互	1.從題目的公式中，左右推算答案	1.完全依照公式進行解題，也能利用公式左右	1.能從題目的公式中，左右推算答案

	S2	S4	S6	S7
數題甲	換)。 2.遇到解題困境時，會不自覺地使用過去知識	 2.題目與規則不相符時（不為 P、Q)，會以過去知識為基礎，自行推論出一個新規則，並以此規則作為解題的依據	推算答案 2.題目與規則不相符時，採用未化簡完全的答案或直接放棄(空白不作答)	 2.題目與規則不相符時，先將題目轉換成與公式相符的形式，再進行解題 3.易出現計算錯誤

以縱向角度來觀察表 4–4–1，可發現每位受試者在邏輯前測問題的表現與他們自己在新對數題甲的表現，有部份的雷同，此現象可能與受試者自我推論的規則有關；另外，以橫向角度來看表 4–4–1，也可發現四位受試者在遇到解題困境時，其反應不盡相同，而此反應也影響了受試者的解題表現。因此，以下將就受試者自我推論的規則以及遇到解題困境的反應這兩個向度予以探討。

1. 自我推論的規則

四位受試者在解這兩種問題時，可以清楚地看到他們產生錯誤的規則性，此規則性的產生，應可解釋為受試者在解題歷程中運用了某法則在進行解題。因此不禁讓人產生疑惑，此法則是如何形成的？各受試者所使用的法則又有什麼樣的差異性？

S2 在使用邏輯法則時是單方向（P→Q）的使用，此舉與他在新對數題的表現有雷同之處。在新對數題中，他雖能觀察等式的左右兩邊，並從左推至右，或者是由右推至左，但在面對一可能需要左右互換的題目（例：p(6×20)，可利用公式，先推至右邊，再推回左邊）時，便發生錯誤，因為他只會使用一次規則。表面上，S2 相當遵循題目的敘述，因為他完全按照題目條件來進行解題，其遵循的態度甚至顯得有些功能固著，不知變通，但其實對他而言，他還是會從題目中抽取部份資訊形成法則並進行解題，最明顯的地方就是他在訪談中曾提及他的解題法則是『乘變加，除變減；加變乘，減變除』。如是看來，S2 還是會自行推論出一條法則來進行解題，但其解題習慣（只使用一次）會影響到他的一些解題表現，而產生錯誤。

S4 的邏輯表現則明顯地顯示出他認為規則的左右兩邊是可以互通（新對數

題的等號、邏輯問題的 皆是）的，因此不論是邏輯問題的條件句亦或是新對數問題的公式，他都可以左右自如地互換，且不受一次互換的限制，最主要的原因是他視兩邊為等價，因此不論要換幾次都沒有問題。總體來說，他也是從題目條件中抽取部份資訊，並加以解釋成雙向的「P Q」。

S6 在邏輯問題中並沒有產生錯誤，但在對數題的表現卻顯示出他容易有放棄的傾向，因此，他的解題法則為何，實難預料，只能說他在遇到與題目有極大不同時，會宣告放棄。

S7 在兩類問題中產生的錯誤，都並非是屬於推理方面的，例如不瞭解題目限制、計算錯誤等。而其在對數題的表現也是四者當中最好的，他能充分利用題目公式來進行解題，此外，在遇到具有係數的對數題時，他也試圖將題目形式加以轉換，變成能套用公式的形式，此舉與 S2、S4 直接使用過去知識經驗解題的方法不同，因此，基本上來說，S7 能進行自我推論，但幸運的是，他會在題目所允許的範圍內進行推論，而不是將過去所學的知識經驗直接運用於解題歷程中。

2.遭逢解題困境的反應

四位受試者在遭逢困境時的表現略有不同，S2、S4、S7 三者會繼續解題，但 S6 會選擇中途放棄或空白不作答，因此 S6 在新對數題中會出現其他三位所沒有的 G 型錯誤。

雖然如此，S2、S4、S7 三人的表現仍有程度上的差異。S2、S4 會使用過去知識經驗解題，但一個是不自覺地使用（S2），一個是有意地使用（S4）；S7 則是反覆思考題目規則及其限制，最後推論出一個法則來進行解題。

（二）「新對數題甲」的邏輯思考模式

以下將就「新對數題甲」中，受試者有犯推理錯誤的題目，分別探討其思

考模式，此思考模式將以邏輯的條件推理形式來展現，藉以更明瞭對數題與邏輯推理問題間的相關性。

在「新對數題甲」的題目卷上，有關於對數的公式如下所示：

peculiar（A✕B）＝peculiarA＋peculiarB　　（規則 1）
peculiar（A÷B）＝peculiarA－peculiarB　　（規則 2）

（其中 A、B 皆為一常數）

而每一個對數題對於受試者而言，約略有三種情形發生，一是題目與公式左邊相同（層級 II 的題目），二是與公式右邊相同（層級 I 的題目），三是與公式兩邊皆不同（層級III、IV的題目），其中的最後一種，又有程度上的差別，包括有部份的雷同（如：p(6 ✕20)）或者是完全的不同（2p3＋p2），由於此四位受試者只有後兩種有推論上的錯誤，因此將只就此兩種題型探討其思考模式。

研究者的預設是，規則 1、2 對於受試者而言，是如同條件推理中的第一前提 P→Q，其中，P 是等式左邊，Q 則是等式右邊，受試者在看到上述第一種題型時，其思考模式可能為

模式一：　∵ P→Q　(peculiar(A ✕B) → peculiar A＋peculiar B)
　　P　(peculiar(A ✕B)　)

同樣地，在第二種題型中，其思考模式與上式相同，但 P、Q 各所代表的意義則恰相反（P 是等式右邊，Q 則是等式左邊），其模式如下：

模式二：　∵ P→Q　(peculiar A＋peculiar B → peculiar(A✕B))
　　P　(peculiar A＋peculiar B　)

另外，由於第三種題型與公式的左右邊並不相符合，因此其模式與上述兩種題型有所不同，其可能模式如下：

模式三：　∵ $P \rightarrow Q$　（peculiar(A ×B) → peculiar A＋peculiar B 或
peculiar A＋peculiar B → peculiar(A ×B)　）
$\underline{\sim P}$　（peculiar(A＋B)　或　C peculiarA　）

因此以下將以層級II、III、IV的題型為主，以上述所提及的思考模式分別探討之：

1. 層級II

層級II的題目有兩個，分別為 p(6×20) 和 p(30÷7)，根據推論其正確思考模式應為模式一，亦即看到與題目公示的左邊相同的題目。在此層級題目中，產生錯誤的有兩位受試者，分別是 S2 和 S4 兩位，其中，S2 推得最後的答案為 peculiar26，S4 則得到 peculiar(6 ×20)＝peculiar120 的結果，因此初步推論，此兩位受試者在模式一的邏輯思考方式上有困難。而關於此思考模式與邏輯推理的關係，根據前列模式一的形式，研究者推論其與邏輯推理中的肯定前件應有所相關，其邏輯命題形式如下：

肯定前件（MP）

$$\begin{array}{l} \because\ P \rightarrow Q \\ \quad \underline{P\qquad\quad} \\ \therefore\quad ? \end{array}$$

另外，此兩位受試者的思考模式其差別在於 S4 應用給定規則進行解題，但 S2 則用過去經驗與知識來進行解題。此結果引發兩個可供探討的方向，從邏輯推理的層面來說，S2 是否在某類型的推理問題中表現較弱；從數學解題的領域中看，S2 是否在數學公式的應用上有困難，此兩延伸問題，也成為下個子研究中所欲探索的問題之一。

2. 層級III

層級III的題型亦有兩個，分別為 p(2＋3) 和 p(20－4)，此題型的正確思考模式應為模式三，四位受試者的表現同樣是 S2 與 S4 產生錯誤，且兩人的解題歷程與最終答案皆相同，先將 peculiar(2＋3)轉換為 peculiar2＋peculiar3，接著運用公式再轉為 peculiar(2×3)。

此思考模式的錯誤是兩位受試者先採用過去所學的分配律觀念來進行解題，後發現經由轉換後的結果可再度運用給定公式，因而在運用公式後，即得一最終答案，此結果相較於另兩位受試者 S6 和 S7，是經由自己推論決定其解題法則的表現而言有其不同之處。從這個角度看，其解題能力似乎與推理有些微相關，因為前者乃是直接使用可用之規則（過去經驗、題目規則），後者是屬於仔細推敲後才採用一較為可信的解題法則，故由此結果也使本研究之假設範圍更為集中 —『對數解題能力強（弱） 某類推理問題能力強（弱）』。

另外，從上述解題思考模式觀之，其與邏輯推理問題中的否定前件類型之問題似乎有關，因為其推理模式如下：

否定前件（DA）

$$\because\ P \rightarrow Q$$
$$\underline{\sim P\qquad}$$
$$\therefore\quad ?$$

此推理模式符合上述解題思考模式三的最基本形式，因此初步推論，在最初假設所言之推理能力，其問題形式應為否定前件之形式，至於其相關性則有待更進一步的實徵研究加以證實之。

3. 層級IV

層級IV有 2(p7＋p2)、2p3＋p2、3p(9＋6)等三題，其特徵是皆屬於係數

型的題目。此類問題較前述兩種困難，主要原因是其題型較為複雜，所需用的觀念也較多，但其中受試者產生錯誤的地方，都是對於 peculiar 前的係數不知所措所致，因此在分析他們的解題思考模式時，也只提及有關於純粹遇到具有係數的對數，而將其它地方省略，思考模式如前述之模式三，故其與條件推理中的 DA 應是有關，但此推論尚需進一步證實之。而受試者在此題中有三種反應，一是推論正確而產生正確答案（S7）；二是推論錯誤產生錯誤答案（S2、S4）；三是放棄（S6），此些反應亦可以與他們在邏輯問題中的表現相互對照之。

4. 小結

在上述思考模式的討論中，研究者提及受試者的對數解題表現應與某類的推理問題有關，並將範圍縮小在「肯定前件」與「否定前件」兩類問題，但此結論還尚需進一步實徵研究加以證實，另外，在接下來的「推理問題甲」中，研究者嘗試用另類的推理問題，但其形式依舊包含 P 或~P，此舉乃因研究屬於初探性質，因此在研究之初，希望採用各種相關題型，避免有所遺漏，因此，以下將就受試者在「推理問題甲」中的表現詳加敘述之。

二、「新對數題甲」與「推理問題甲」

受試者在計算題所犯的錯誤有 D（分配律）、C（交換律）、G（放棄）、S（疏忽）等四種基本型，根據我們的初步推論，其中與條件推理有關的錯誤分別為 D 和 C 型。

以 D12 型錯誤為例，我們所給予受試者的題目條件為

peculiar（A×B）＝peculiarA＋peculiarB　　（規則 1）

peculiar（A÷B）＝peculiarA－peculiarB　　（規則 2）

（其中 A、B 皆為一常數）

因為上述條件是一個等式的形式，因此，若題目為 log(A×／÷B)，則可以

推演到 logA＋／－logB，相反地，我們也可以從等號左邊推演到等號右邊，而每一個計算題的題目，如果其型式符合條件的左邊或右邊，則為「若 P」，如果所得到的答案並不是採用條件的等式，則為「則~Q」，反之如果他採用的話就為「則 Q」。

因此，當受試者從 p(2+3)的新對數運算式推演到 p2 + p3，我們可以說他意同於犯了「若~P 則 Q」型的錯誤，也就是當受試者不應使用公式時，他卻用了公式；另外，若受試者寫出 p6 + p20 = p26，代表著他犯了「若 P 則~Q」型的錯誤，意即在他應該用公式時，他卻選擇不去使用。

根據上述想法，我們將四位受試者在新對數題中的錯誤，對應到邏輯推理的錯誤，並製成下表 4–4–2。

表 4–4–2　四位受試者在「新對數題甲」與邏輯問題之錯誤類型對應表

題目	犯錯類型		S2		S4		S6		S7	
	試題	邏輯	錯誤個數	百分比%	錯誤個數	百分比%	錯誤個數	百分比%	錯誤個數	百分比%
新對數題甲	D12	P → ~Q	3	37.5	3	42.9	0	0.0	0	0.0
	Cim		3	37.5	3	42.9	0	0.0	0	0.0
	D21	~P → Q	2	25.0	0	0.0	0	0.0	0	0.0
	G	無	0	0.0	0	0.0	3	75.0	0	0.0
	L	無	0	0.0	1	14.2	1	25.0	1	100.0
推理問題甲		P → ~Q	0	0.0	0	0.0	0	＊	0	＊
		~P → Q	1	100.0	2	50.0	0	＊	0	＊
		其他	0	0.0	2	50.0	0	＊	0	＊

註：＊表示沒有錯誤的百分比

表 4–4–2 顯示，在邏輯問題中表現較強的受試者（S6、S7），在試題中的表現，特別是那些可以對應到邏輯形式的題型，也多有較強的表現；反之，在邏輯問題中表現較為弱的受試者（S2、S4），在試題中的表現也較為弱。

另外 S2 與 S4 兩人在邏輯問題中的其錯誤類型多集中於「~P → Q」的形式，與他們在試題中錯誤類型的表現有些出入，其主要原因可能是因為我們所

發展的「推理問題甲」的架構，並不是完全符合他們在解試題時的思考模式，因為「~P → Q」是邏輯形式的架構，並不代表受試者的思路，而在上述假設之中，受試者從面對一個與條件不相合的題型（~P），到他決定採用公式（Q），初步推論應該是屬於「~P→ Q」的形式，但幸運的是，此研究結果提供了我們改進研究工具的基礎，同時也讓我們再度思考受試者的思考模式，是否真如我們原先的假設只是一個簡單的 if-then 的形式。

三、總結

研究一進行之初，原想針對四位經由篩選後的資優生作其錯誤類型之分析探討，但在針對此群資優生所特別設計的課程裡，觀察此四位資優生在邏輯推理單元中的推理表現及其平時的數學解題表現後發現其數學解題能力與邏輯推理能力間，似乎有所關連，因此產生一個最初始的研究假設 —「數學解題能力與邏輯推理能力是有相關的」。而在藉由一個能代表數學解題能力的「新對數問題甲」及另一個代表邏輯推理能力的「推理問題甲」兩工具的資料收集後發現，數學解題能力與邏輯推理能力確有關連。

為了避免研究者的過度推論，且在考量研究一的受試者為一群資優生後，研究者希望此成果能多所推廣，故開始籌畫後續研究的進行，包括希望尋找一群能代表一般台灣的普通學生的受試者。而從研究一的成果中也發現，學生在進行抽象對數運算時，產生幾個有趣的現象，包括在給定公式的情形下卻選擇不用公式、利用分配律概念來進行解題等，也使研究者更加積極地籌畫出研究二、三的進行，希望過這兩個後續研究，能使研究一的成果更為豐碩。

第五節　一般中學生的對數錯誤類型

從研究一中受試者在「新對數題甲」中的表現，研究者發現他們對於所給予的對數公式詮釋皆有不同，有的受試者從給定公式中，自行推論出另一套規則，也有受試者在使用公式上產生困難，故針對受試者的反應，研究者開始思考一些問題：新對數的符號在受試者眼中看來，具有什麼樣的意義？學生是如何看待公式？他們又是如何運用公式進行解題？當題目形式無法直接使用公式進行解題時，學生如何進行下一步驟？故為了回答上述經由研究一結果刺激下

所反應出來的問題，同時也為了收集一般學生在新對數題的錯誤類型，而不是侷限於特定族群學生之中，乃籌畫此研究二之進行。

因此，研究者選擇一位代表未學過對數的國二學生與一位學過對數的高一學生作為此階段的受試者，而選擇此兩位的原因除了因為他們各自代表不同的背景外，為了能有後續的深入訪談來回答研究一所產生的待答問題，研究者也以是否樂意合作為考慮因素，請兩位與研究者本身熟識之學生為研究二的對象，希望在對不同背景學生的研究下，除了能與研究一中四位受試者的表現相互引證並有更多層面的對比外，同時也能針對在台灣的一般普通學生，收集有代表性的錯誤類型，並透過訪談，能對部份研究一中的待答問題有所回應。

故本節首先將對所收集到的對樹錯誤類型予以分析討論外，分析討論如下：

一、「新對數題乙」的錯誤類型

為了收集一般學生在新對數題的錯誤類型，而不是侷限於特定族群學生之中，因此在本階段中針對兩位受試者予以施測，他們分別代表未學過對數的國二生（代號為 S9）及學過對數的高一生（代號為 S9），根據他們在「新對數題乙」的表現，發現共有四個主要的主型錯誤，分別為 D、T、C 及 P 型錯誤，有關其之錯誤類型次數列於下表 4–5–1 中。

表 4–5–1　「新對數題乙」錯誤類型次數一覽表

主　型	子 型	範　　例	S8(高)	S9(國)	總計
Distribution	**D**12	log(A±×÷B) → (logA)±×÷(logB)	0	0	19
	D21	(logA)±×÷(logB) →log(A±×÷B)	17	2	
Transform	**T**11 [a]	log(A+ –B) →log(A×÷B) log(A×÷B) → log(A+ –B)	2	20	29
	T12 [a]	log(A+ –B) → (logA)×÷(logB) log(A×÷B)= (logA) +– (logB)	3	0	
	T21 [a]	(logA)×÷(logB) → log(A+ –B)	0	2	
	T22 [a]	(logA) +– (logB) → (logA)×÷(logB) (logA)×÷(logB) → (logA) +– (logB)	2	0	

Communication	Cim	AlogB→log(A×B)	2	2	10
	Cia [a]	AlogB→log(A+B)	2	0	
	Ce [a]	logA→Alog	0	4	
其　他			1	0	1
總　計			29	30	59

註：「子型」一欄中出現「[a]」，表示其錯誤類型未在研究一中出現

上表 4–5–1 顯示出兩個主要現象，一是國中生與高中生所犯最高次數的錯誤並不相同，另一是兩位受試者在 T 型錯誤中的發生次數明顯地偏高。

由第一個現象可推論在經由正式的教導後，學生的 T 型錯誤會減少，但 D 型錯誤卻會不減反增，此現象似乎意味著學生的先備知識對於對數運算的影響的確相當大，因此，教師在對數教學時，應注意學生是否有此迷思概念。

至於第二個現象裡，兩位受試者在 T 型錯誤中的發生次數所犯錯誤總數的一半，此結果與研究一的結果確實有相當大的不同，因為研究一中並未出現此 T 型之錯誤類型，且研究一、二當中除了 D 型及 Cim 型錯誤有所重複外，其餘的皆有所不同，因此，以下首先論述有關 T 型錯誤的形式及其成因，接著討論 Cia 與 Ce 的錯誤類型，最後再略敘有關 P 型之錯誤。

1. T 型錯誤

T 型錯誤是一種「轉換型錯誤」，為 Transform 的簡寫，其意為受試者會將運算符號作轉換，也就是將「+」與「×」視為可互換的，「–」與「÷」也視為可互換，共有四種子型，分別為 T11、T12、T21、T22 等四種，其後面的數字（1、2）表示 1 個或是 2 個 log 符號，例如：T11 的「T」表示它是屬於轉換型的錯誤，「11」表示從 1 個 log 變成 1 個 log，綜合起來則為

$$\log(2+3)=\log(2\times3)$$

上式左邊的「+」在代換為「−」、「×」、「÷」的符號之後，等式右邊的符號也需依序變為「÷」、「+」、「−」的符號，此型錯誤對未學過對數的 S9 而言，是一個重要的解題法則，因為他所犯的 T 型錯誤，中發生很明顯地，在本階段研究的受試者之錯誤類型中以此類型發生的次數為最多，根據訪談得知，受試者是在看完題目所給定的公式後，即產生此新解題規則，部份訪談如下：

S8 的訪談

T ：看完公式後就有這樣的想法？
S8：嗯！
T ：還沒作題目時？
S8：嗯！
T ：那為什麼看完公式後就有這樣的想法？你可不可以舉出來？
S8：乘變加，除變減，加變成，減變除（手指著紙上的公式)。
T ：你有注意到這個？
S8：對！
T ：那你為什麼沒有注意到英文字？
S8：因為感覺上好像蠻相像的，所以那時候不會特別注意，但是後來作多了就會覺得好像有點矛盾，所以就覺得，就覺得有些是沒公式。 (88.4.8)

S9 的訪談

T ：為甚麼？
S9：因為它是加變乘，乘變加的，然後就好了！
T ：你是說加變乘，乘變加的，那他有沒有加變乘的概念？（手指著第 1 個公式）
S9：就倒過來變成加變乘。
T ：它可以這樣倒過來嗎？
S9：等號兩邊應該可以。 (88.4.8)

從上述的訪談結果可得知，兩位受試者對於公式都並不是很能掌握，其中，S8 從公式中擷取他所熟悉的加減乘除之運算符號，忽略其它相關的資訊，而錯誤地歸納推論出類似於「加變乘」的解題法則，同樣的，S9 也是如此。

因此受試者之所以會產生 T 型錯誤，主要是從所給定的公式中，自行擷取部份資訊，再加以過度推論之故，而並非如先前所提及的 D 型錯誤應為受過去知識經驗而得，而李芳樂的研究結果亦顯示，T 型錯誤也是一般高中生常出現的錯誤類型，故在兩相對照下，也帶出一個重要問題，如果不論在高中階段或

國中階段，皆會產生此類型錯誤，那麼這是一種天生無法避免的錯誤？還是一種利用有效教學法即可避免的錯誤？實需深慮之。如果這是無法避免的，那麼原因為何，是否學生有處理抽象對數公式的困難？還是天生對於此較不具意義的算式之接受程度較為差？如果是經由教師教學即可有效避免，那麼教師又應有哪些細節需注意？如果這些問題都有深切的瞭解，那麼對於對數教學應有所助益。

2. C 型錯誤

在此出現的 C 型錯誤包括有 Cim、Cia、Ce 等三型錯誤，其中「i」表 input，為進來的意思，包括有乘法及加法兩種（亦即乘進來或加進來），其中乘法為 2log3=log6，加法為 2log3=log5；「e」表 exchange，為前後互相換位置而言，例如： log3 = 3log。

Cim 的錯誤，在研究一已述及，雖然根據李芳樂的說法，將之歸為受試者視 logA 為 log×A 之因所致，但從研究一的訪談記錄中卻有一番新解，因為根據受試者的說法，他們是受了有關代數運算的影響，故在此，研究者並不打算對其再加以累述之。不過 Cia 的錯誤類型卻可稍加描述一番，因為它是兩種推論規則合成之下的產物，此說法可由下段訪談得知。

S9 的訪談

S9：這是乘的，所以乘的變加的，所以就會兩個。
T ：甚麼意思？
S9：這個意思就像要乘以 3。
T ：嗯！
S9：所以就是說乘的就用加的兩個，然後後面就照抄。
T ：嗯！
S9：然後加都是變成乘的啊，就乘一遍就好。
T ：嗯！
S9：然後又乘進去，這邊又乘進去。（88.4.8）

上述的受試者 S9 的重點在描述他的一段算式，其算式如下（p 表 peculiar）：

$$2p3 = p(2\times3) = p(2+3) = p5$$

該位受試者先把係數 2 從符號前乘進符號，根據研究一的發現，此錯誤應是受先前代數運算之先備知識的影響，但在下一步驟中則呈現受試者所自行推論出來的法則，因為他認為乘與加，除與減之間應是可互相轉變，因此根據上述兩個原因，受試者就產生了 Cia 型的錯誤。

另外，針對 Ce 型的錯誤，是指受試者會出現如下的算式 log3 = 3log，在此研究二中的受試者，只有 S9 有產生此錯誤，且在所有的 22 題中，只出現 4 次，而根據在研究一的結果顯示，有關 C 型的錯誤類型，應是與代數運算有關，意即受試者會將 logA 視為一代數運算，其中 log 與常數 A 中間的乘號雖然未寫，但卻是存在的，故學生會視 log 同等於學生所熟知的未知數χ，也因此$\chi\times A$ 與 $A\times\chi$ 會是等同的關係。

3. R 型錯誤與 P 型錯誤

R 型錯誤是一種在分數型題目中才會出現的錯誤，例如 log27/log3=9，受試者將 log 視為一個數，因而可以在分子分母的地方同時約分，初步推論，此錯誤也應是受先備知識的影響所致；另外 P 型錯誤是一種括號型錯誤，包括主動替題目添加括號，或忽略括號的存在，原因除了對於新對數符號的不熟悉外，也有可能是受試者為方便計算之故。

4. 小結

縱上所述，研究一與研究二中受試者的新對數表現，的確有所差異，此現象是否意味著能力是一個重要的影響因素？另由於在本階段研究中的受試者乃是代表一般學生，故所收集的錯誤類型，也可供研究者作為下一階段中，針對台灣一般學生所收集錯誤類型的一個重要比較基礎。

而對於上述所提及各式錯誤類型的成因，最主要有兩個，一個是受試者過去的先備知識與經驗，包括有分配律、代數運算等；另一個是受試者會利用題目的現有條件，擷取部份資訊，最後形成一個屬於受試者的解題法則，而在此研究中，受試者的法則是「加變乘，減變除；乘變加，除變減」，而對於此法則的形成，研究者從訪談中初步推論是因為受試者在面對一抽象公式，特別在他無法真正瞭解其意義之時，他會從中擷取他所熟悉的資訊，意即「加減乘除」的運算符號，而忽略掉其它重要資訊，在此兩因素影響下，受試者形成各式錯誤，包括最主要的「分配律型錯誤」、「轉換型錯誤」及「交換律型錯誤」等三種，因此教師在面對學生總是不斷地復演這些錯誤時，能否有實際的行動對學生產生有效的幫助？

第六節　一般中學生對於對數符號及其公式的詮釋

本節將就兩大部份予以討論，第一部份包含兩位中學生對於新對數符號的看法，包括學過對數的高一學生是否能從題目看出新對數符號「peculiar」即為對數符號「log」，另外，也提出兩位受試者對於對事物符號的一些建議，也許可作為數學教育工作者的參考依據；第二部份則是受試者對於對數公式的詮釋，

結果如下：

一、對「新對數」符號的詮釋

1. 學過對數的學生可以看得出來 peculiar 是 log?!

T ：那你看到公式的時候，有聯想到什麼嗎？第一眼看到的時候？
S8：第一眼看到的時候？就覺得好像沒學過。
T ：好像沒學過，還有呢？
S8：慢慢看，才覺得它跟 log 很像。
T ：哪一個跟它很像？
S8：每一個都很像。
T ：每一個都很像，四個嗎？
S8：嗯
T ：四個都很像，那你可以確定這四個都是嗎？
S8：還不是很確定
T ：還不是很確定，為什麼？都很像？
S8：因為，我們那時候正在學當中，感覺上好像跟學校教得完全差不多。 （88.4.8）

根據 S8 所提及，當他看到新對數符號「peculiar」的公式時，起初並無法將之與 log 的概念連接，後來則得知其應為對數運算。值得一提的是，S8 在接受測試時剛學完對數與指數的單元，而在知曉其為對數運算的情形下，卻仍然採用許多非對數運算的法則進行解題，包括分配律、交換律等先備概念，由於該生在學校中的表現為中等，因此一般台灣的普通學生是否真正會學會對數運算？究竟在學習與教學的過程中是哪一個環節出現了問題？

2. 對於新對數符號「peculiar」的看法

（1）要具有意義

S8 的訪談

T ：那你會不會覺得這些符號沒有意義？
S8：有一點啊！
T ：有一點沒意義？

S8：對啊，所以如果能夠簡化是最好的。
T ：嗯哼！譬如說怎樣簡化？
S8：取前面三個字母啊！
T ：嗯哼！那你會不會覺得符號很抽象？
S8：會啊！我還特別用翻譯機去查！
T ：那有沒有查到？
S8：有查到，但是忘了！
T ：忘記了，那你覺得用 log 會比較方便計算嗎？
S8：對啊！
T ：那如果簡化到一個字母呢？
S8：一個字母？一個字母，如果不會跟其他的東西重複的話，那最好！ (88.4.8)

S8 的訪談

T ：那你會不會覺得這些符號沒有意義？
S9：有一點。
T ：那你看到這四個公式的時候你第一個閃過的念頭是甚麼？
S9：跟平常不一樣。
T ：還有呢？
S9：覺得還好啦，不會像我們現在國中還要寫甚麼根號啊！
T ：會不會覺得它很沒有意義？
S9：………………..
T ：做起來或是看這個公式的時候會不會覺得它很沒有意義這樣子？
S9：沒有甚麼感覺。
T ：會不會覺得它很抽象？
S9：覺得他有一點怪。

.
.
.

T ：OK，那這些符號對你來說有沒有意義？
S9：我在寫的時候有在想再查字典看這是甚麼東西。
T ：那你有沒有查？
S9：沒有，後來現在就忘記了。 (88.4.8)

上述受試者對於新對數題的符號「peculiar」有他們自己的看法，其一認為沒有意義，其二認為符號過於長，表示不易，因此有一個好的符號應是一個影響對數表現的因素之一，但什麼樣的符號才是一個好的運算符號呢？具有意義的符號果真對解題有幫助嗎？

(2) 越短越好

根據上述 S8 的回答，他認為對數運算符號若能刪到只剩一個符號來進行運算時，也許情況不錯，至於 S9 的想法則詳列如下

T ：那妳覺得如果說這個符號啊，如果說有意義一點？
S9：嗯！

T ：能不能幫助妳解題？
S9：可以。
T ：那甚麼樣的符號才叫有意義？
S9：有意義啊？
T ：嗯，國字好不好？
S9：國字？
T ：簡單的國字？
S9：好像又沒有意義。
T ：為甚麼？
S9：有一些也是一個字起來也不能到達甚麼。
T ：譬如說分這個字，分 A 乘 B 等於分的 A 加分的 B，妳覺得這樣有沒有意義？
S9：沒有。
T ：我把 P 變成分，這些對妳來說沒有意義，為甚麼？
S9：因為分可以變很多東西啊，分鐘，分析 …
T ：還有呢？
S9：就是會想到很多東西反而比較亂 ………… （88.4.8）

研究者在設計訪談的題目時，即試圖透過訪談瞭解對數符號是否會帶給學生困擾，而根據此兩位受試者的回答發現，他們的共同看法是如果運算符號能越短越好，且一個符號若是能具有意義的話，對於解題將會有所幫助，但什麼是有意義的符號？為此，乃提出是否有以國字作為符號的可能性？但 S9 馬上對其表示否決，認為一個國字並不能代表任何意義，而在研究者提出以「分」為例子時外，S9 也是持不同意之看法，他認為，符號本身如果已具有多種意義，那麼反而會造成計算時的混亂。

綜上所述，學生希望一個好的運算符號必須要有意義，同時不能具備有太多其他含意在內，此與 Skemp 的想法相似，但是對於對數而言，什麼樣的符號，才算是一個好符號？

二、如何運用公式

S8 的訪談

T ：那以前有應用其它公式的經驗嗎？
S8：【停頓】
T ：我們這一題就是有應用公式嘛！那你剛剛有說，像什麼完全平方和啊！還有哪些公式？
S8：嗯 …
T ：記不記得？像三角形的面積？
S8：喔！那還好！

T ：還有什麼？距離公式
S8：那還好，那都小學在用的！
T ：小學學過？喔！我說的是平面座標的距離
S8：喔！那個，偶爾會忘！
T ：偶爾會忘？嗯！那你還學過什麼公式？喔！指數！國一上學期
S8：對！國中跟高中用的公式，好像比較會把它想把它忘掉啊！
T ：比較會把它想把它忘掉？選擇性要把它遺忘掉？
S8：嗯！
T ：為什麼你會想把它遺忘掉？
S8：因為，以後應該是不會用到啊！
T ：嗯！
S8：譬如說，像坐計程車不會說要用到「開根號」，所以…
T ：所以，像這些東西..為什麼你會想把他忘掉？除了沒有用？
S8：對啊！沒有用！
T ：可是當考試還是要記吧？
S8：嗯！
T ：當時你是怎麼把他記下來的？
S8：死記 （88.4.8）

從上述訪談得知，S8 認為一個公式是否需要記得，關鍵在於此公式是否有用，關於受試者有如此之想法代表著他認為「公式就是要記的」，且選擇「死記」的方法硬是將此公式置入腦中，其實像 S8 這樣的例子在一般台灣學生的身上經常發生，但教師真的有必要要求學生死記公式嗎？

另外，S8 也對於數學的實用性感到懷疑，因為在日常生活中，他覺得所曾學過的數學知識的確是用不著，對他而言，數學就是「考試會考的東西」，所以考過後就可以忘記了，表面上看來，他的爭論點是在於數學有沒有用，但其中一個隱藏的訊息是 —「數學是無意義的」，因此，教師教法及教材內容與編排應如何使學生感到有意義，也是一個重要的課題。

S9 的訪談

T ：OK 那以前，妳剛才有提到說妳看公式的時候你都是看左邊嗎，這是你的習慣？
S9：嗯！
T ：那意思就是說妳完全不會看右邊還是偶爾會看一下？。
S9：還是會看。
T ：甚麼時候會看？
S9：像剛才這個樣子的時候就會。

T ：那你以前在記公式的時候，老師是不是都會導出來給你們看過，還是告訴你這個公式就是這樣，然後把它記起來？
S9：嗯！
T ：沒有證明一下為甚麼是這個樣子？
S9：沒有！

T ：沒有，那妳覺得妳記的時候對妳困不困難，雖然妳後來會去驗證，但是妳開始記的時候會不會有困難？
S9：沒有！
T ：會不會有記不起來的感覺？
S9：就是不熟。
T ：那甚麼時候才會熟？
S9：多算幾次。 （88.4.8）

上段訪談結果顯示同樣的情形也發生在 S9 身上，對他而言，公式就是要記的，特別地在當中他曾經提到，記完公式後，還是會有不熟的感覺，其解決的方法是「多算幾次」，但多算幾次並不代表他就瞭解公式應如何的運用，充其量只是他似乎比較知曉公式該怎麼用？或者是他藉由多算幾次來記公式。但是，其與 S8 相同的疑惑是，其所能記得的公式能有多少個？又能記多久？

另外，從 S9 的另一段訪談記錄中，也許對於教學可以有所建議，訪談記錄如下：

T ：公式在使用的時候是有條件限制的嗎？
S9：嗯！對！
T ：那妳會考慮到這些條件限制嗎
S9：會吧！
T ：那譬如說妳用錯公式會讓妳有錯誤解題的經驗，那妳覺得如果在考試題目當中就給妳公式在旁邊，那妳作成功的機率大不大？
S9：如果不瞭解公式的話還是不大。
T ：譬如說我今天就給妳這個公式，就給妳作這些題目，妳覺得作的對的機率大不大
S9：還好
T ：是甚麼樣的還好，是帶有百分之多少的還好
S9：一半吧！
T ：一半是百分之五十喔？
S9：嗯！
T ：只有一半是不是？
S9：嗯！
T ：那另外一半為甚麼，不確定，公式給妳了啊？
S9：還不常算！ （88.4.8）

S9 提供了一個相當寶貴的資訊，如果不瞭解公式的話，那麼答題成功的機率並不大，因此教師若能在教導有關一些需要公式運算的單元時，宜注意學生是否真正瞭解公式的意義。

三、小結

總括來說，兩位受試者在新對數問題時，其所產生的錯誤類型大致雷同，

但其在每個錯誤類型中的發生頻率並不相同，顯見在經由正式的對數教導後，學生表現的確有改變。其中，國中生較易犯轉換型錯誤，而高中生較易犯分配型錯誤，此結果帶來幾個重要訊息：其一是學生在初始面對一抽象對數公式時，傾向於做出過度的推論，此過度推論是將此抽象公式做一簡化，將之變成一個對他而言較有意義的公式；其二是高中生在經由教導後，在有關自我推論而得的錯誤會有所減少；其三是即使是學過對數的高中生，也常會受先備知識影響而產生錯誤。因此，在教導對數時，教師實需留意此三現象，故在開始教學時，宜注意學生是如何對公式作詮釋，在教學的過程中，則需注意學生是否會不經意地使用分配律，也就是過去的先備知識來進行解題。

另外，兩位受試者對於抽象對數符號皆有一些建議，其共同點是皆希望運算符號越短越好，更進一步地，國中生的受試者提出符號要有意義才好，但是其本身不能含有太多意義，否則會使學生（他自己）容易搞混，根據此項由學習者本身所提出的建議，教學者在課堂中的確需注意其所使用的代號，是否會容易造成學生的混淆，另外，也許有些使用符號可以做部份修改，例如小刮號可以是代表平面座標，也可以代表兩數的最大公因數，諸如此類會引起學生誤解的符號也需考慮之。

而在公式的運用方面，兩位受試者皆採用「記憶」的方式將「會考的公式」硬記起來，至於記憶的效用為何，高中生指稱，不用的時候就會遺忘，國中生則說總是會有記不熟的感覺，但多算幾次就可以了，顯見學生並不覺得公式是友善的，因此，教師在教導有關公式的單元時，實需注意如何呈現公式？另外，也需自省對於學生的要求，也許教會學生如何查閱公式，如何活用公式，比要求學生記住公式用以計算來的實際且重要。

縱上所述，研究二所呈現的結果，不但對於研究一中所質疑的問題有所回應，且在對數的錯誤類型中也有新發現，此研究結果對於研究三的進行有相當的幫助，因為對於對數錯誤類型的瞭解，將有助於在研究三中對學生錯誤類型有一基礎的認識，另外其訪談的結果，也有助於問卷的設計，更重要的是，透過對學習者本身的訪談，對於教師的教學方式也多有啟發。

第七節　一般國中生的邏輯推理能力

本節將以受試者在「推理問題乙」中的表現，呈現他們的邏輯推理能力，而「推理問題乙」共包含有 9 大題，依其性質分成三部份，第一部份從第 1 題到第 4 題，第二部份從第 5 題到第 8 題，第二部份則包括第 9 題，其中每大題中除了第 9 題有 6 個小題外，其餘 8 題各有 4 個小題。而在研究條件式推理的

領域中，有許多研究皆針對某形式的題型，考慮不同的影響因素，進而對人類的推理能力表現加以研究，此形式的基本題型如下：

∵ P→Q　　（第一前提）
　 P　　　（第二前提）
∴ Q　　　（結　　論）

更明確地說，上述題型的施測方式為研究者給予受試者第一前提（P→Q）和第二前提（P），接著請受試者做出結論，而由於此形式的研究在條件式推理的領域中是相當基本且重要的，且「推理問題乙」中第一部份的題目形式恰屬於上述之基本題型，故在本節中將先針對受試者在第一部份問題的表現予以分析討論。

另由於有文獻指出，年齡及數學成就會影響受試者的邏輯推理表現，故在本研究中，也將考慮這兩個因素，探討其是否會影響受試者的邏輯推理表現。在年齡方面，將以受試者所就讀的年級（國一、國二及國三）來代替年齡因素，在數學成就方面，則以某次月考之成績為基準，先求出所有受試者的月考平均分數，高於此分數者屬於高數學成就組，反之，低於此分數者則歸屬於低數學成就組。

因此，以下將就受試者在第一部份的推理表現予以論述，接著考慮分別依年級與數學成就之因素來探討受試者在「推理問題乙」中的表現。

一、第一部份的推理表現

「推理問題乙」的第一部份是依照表 2–1–2 的分類，共分四大題合 16 小題。第一大題針對的是第一前提的前後件皆肯定之題型（P→Q，簡稱 AA），第二大題針對的是第一前提的前件為肯定而後件為否定之題型（P→~Q，簡稱 AN），第三大題針對的是第一前提的前件為否定而後件為肯定之題型（~P→Q，簡稱

NA)，第四大題針對的是第一前提的前後件皆否定之題型（~P→~Q，簡稱 NN)。

在演繹推理的研究中，第一前提為 P→Q（AA）的形式是最早受到研究的形式，且此形式是屬於最基本的題型，傳統研究的方式是在第一前提前後件皆肯定的情況之下，分別考慮第二前件的四種不同情形，包括：

1. MP：為肯定第一前提的前件，即 P
2. AC：為肯定第一前提的後件，即 Q
3. DA：為否定第一前提的前件，即~P
4. MT：為否定第一前提的後件，即~Q

本研究第一大題的 4 個小題即按照上述四種情形而設計，為方便本節的討論，以下分別簡稱這 4 小題為 MP、AC、DA、MT。

（一）在第一大題 P→Q（簡稱 AA）題型中的表現

在本研究的 AA 題型中，受試者的表現以 MP 為最佳，這個結果與文獻所提的十分一致（Roberge, 1970, 1972；Wildman & Fletcher, 1977；Evans, 1993a)，其餘的表現則依次序為 DA、AC、MT，這個結果卻與文獻所提的有所差異。其中有研究指出，受試者在 MT 的表現優於 DA、AC（Roberge, 1970, 1972；Wildman & Fletcher, 1977；)，但也有研究指出，不同年齡的受試者，在這三者表現的優劣並沒有一定順序（Wildman & Fletcher, 1977；Evans, 1993a)。這部份學生回答正確的百分比，可參照下表 4–7–1。

表 4–7–1 全體學生在第一大題的表現

第一前提：如果正面是 3，那麼反面一定是 8							
MP 已知正面是 3 那麼反面是？		AC 已知反面是 8 那麼正面是？		DA 已知正面是 8 那麼反面是？		MT 已知反面是 3 那麼正面是？	
回答	%	回答	%	回答	%	回答	%
8（對）	90.1	3	78.0	3	37.7	8	41.9
不足	3.1	不足（對）	9.9	不足（對）	30.4	不足	31.9

						≠3（對）	3.7

表 4–7–1 除了顯示出前述有關 MP、AC、DA、MT 小題答對率之優劣順序外，還有幾個值得留意的現象：一是答對 MT 小題的學生遠比文獻所提的為少，二是受試者在 4 小題的選項中，呈現出某種有趣的對稱性，明確地說，受試者在每小題的回答，其百分比為最高與次高者的選項不是「8」與「資料不足」的組合，就是「3」與「資料不足」的組合。

關於第一個現象，受試者在 MT 小題的正確回答率只有 3.7%，經由觀察受試者在其他選項中的表現結果發現，在另兩個選項中，受試者回答「8」與「資料不足」的比例高達 73.8%，因此若要解釋此現象，似乎必須要瞭解為何有極高比例的受試者回答「8」與「資料不足」，而此正是本大題中所出現的第二個值得留意的現象，藉由對於第二個現象的解釋，應能回答為何受試者在此小題中有如此低的正確回答率。

關於第二個現象，初步推論，應與受試者對本題中第一前提的詮釋有關，當受試者看到題目時，會將「→」解讀為「　」，意即視第一前提中的前後件為等價，因此他們不但能從前件推到後件（即由正面是 3，推論到反面是 8），也能從後件推到前件（即由反面是 8，推論到正面是 3），此即為受試者在 AC 小題中有極高比率選擇「正面是 3」的原因。

而至於受試者在 DA 小題中有 37.7%的受試者選「反面是 8」，有 30.4%的受試者選「資料不足」，其成因則稍有不同，針對選擇「反面是 8」的受試者，初步推論，是因為受試者對第一前提的詮釋為「3 8 」，意即認為卡片中一定要有一張為 3，一張為 8，而忽略正反面的限制，而在觀察受試者在此 4 小題的答題形式後發現，在這些選擇「反面是 8」的受試者中，有高達 93.1%的受試者符合此推論；另外，在 DA 小題中選擇「資料不足」的受試者，其推論規則是當遇到與第一前提的前後件皆不相符合時，則傾向於選則此選項，此推論可從在這些選擇「資料不足」的受試者，有 85.5 的人，在 DA 與 MT 小題中皆回答「資料不足」可得知。

（二）在第二大題 P →~Q（簡稱 AN）題型中的表現

在第二大題中，由於所牽涉到的第一前提的後件為否定，故此按照文獻的結果猜測，受試者在這一大題的表現將略遜於第一大題。關於此大題學生回答正確的百分比，可參照下表 4–7–2。

表 4–7–2　全體學生在第二大題的表現

<table>
<tr><td colspan="8">第一前提：如果正面是 5，那麼反面一定不是 10</td></tr>
<tr><td colspan="2">MP
已知正面是 5，
那麼反面是？</td><td colspan="2">AC
已知反面不是 10，
那麼正面是？</td><td colspan="2">DA
已知正面是 8，
那麼反面是？</td><td colspan="2">MT
已知反面是 10，
那麼正面是？</td></tr>
<tr><td>回答</td><td>%</td><td>回答</td><td>%</td><td>回答</td><td>%</td><td>回答</td><td>%</td></tr>
<tr><td>≠10(正確)</td><td>55.5</td><td>5</td><td>55.5</td><td>不足(正確)</td><td>60.2</td><td>≠5(正確)</td><td>38.7</td></tr>
<tr><td>不足</td><td>15.2</td><td>不足(正確)</td><td>26.7</td><td>5</td><td>6.3</td><td>不足</td><td>30.4</td></tr>
<tr><td rowspan="2">10</td><td rowspan="2">13.1</td><td>10</td><td rowspan="2">4.2</td><td>10</td><td rowspan="2">4.7</td><td rowspan="2">5</td><td rowspan="2">14.7</td></tr>
<tr><td>≠5</td><td>3</td></tr>
</table>

由表 4–7–2 中發現一個異常的現象：DA 的答對率較 MP 來的高。根據 Evans（1972b）指出，當第一前提中出現否定的前或後件時，受試者犯錯的機會增加，故此在此大題裡的 MP 小題中，受試者之表現遜於上一大題，是可以預期的結果。至於為何 DA 的表現卻異常地優於 MP？初步推想，可能是因為 DA 小題之敘述為「正面是 8」，其與第一前提的前件並不會有相關，因此，部份受試者會傾向於選擇「資料不足，無法判定」。

另外，此大題中 MT 小題的表現也較上一大題來的好，初步推想，其主要原因可能是因為在本題中，MT 之題目形式為：

如果正面是 5，那麼反面一定不是 10　　（第一前提）
已知反面是 10，所以正面是______　　（第二前提）

其中的第二前提恰是第一前提中其後件的相反句，意即「反面是 10」＝ ~「反面不是 10」，另由於有部份受試者視「→」為等號，因此若「反面是 10」是第一前提後件之相反句，那麼答案必須回答出前件之相反句，即~「正面是 5」。

但在上一大題的 MT 中的形式，並不符合前述之理由，因為它的第二前題「反面是 3」並不為第一前提後件「反面是 8」的相反句，故其答對百分比較為低。

（三）在第三大題 ~P →Q（簡稱 NA）題型中的表現

第三大題與第二大題相像的地方是，彼此都牽涉到在第一前提中有一個否定的前或後件，故此同樣地，本研究按照文獻的結果猜測，受試者在這一大題的表現將略遜於第一大題。這部份學生回答正確的百分比，可參照下表 4–7–3。

表 4–7–3 全體學生在第三大題的表現

第一前提：如果正面不是 7，那麼反面一定是 2							
MP 已知正面是 2， 那麼反面是？		AC 已知反面是 2， 那麼正面是？		DA 已知正面是 7， 那麼反面是？		MT 已知反面是 7， 那麼正面是？	
回答	%	回答	%	回答	%	回答	%
不足	35.1	≠7	60.2	≠2	48.7	不足	58.1
2（對）	21.5	7	15.7	不足（對）	22.5	2	16.2
≠7	19.9	不足（對）	12.0	2	16.8	≠2	13.1
7	16.8					7（對）	6.8

上表 4–7–3 中，有兩個異常現象，其一是在 AC、DA 與 MT 小題中，各有一錯誤選項的百分比異常地高，其百分比依次為 60.2%、48.7%、58.1%，其二是在 MP 小題中，有 35.1%的受試者選擇回答「資料不足」。

針對第一個異常現象，初步推論，受試者易將「→」詮釋為「 」，因此在 AC 小題中，有極大比例的受試者回答「正面不是 7」，在 MT 小題中，在受試者尋找不到與「 」兩邊相同敘述句的情形下，也極易回答「資料不足」，而在 DA 小題中，受試者除了將「→」詮釋為「 」外，與第二大題中 MT 小題的回答相仿，他們考慮到當「 」兩邊中的其中一邊為相反句時，另一邊也必須轉為相反句，更明確地說，因為「正面是 7」為第一前題前件「正面不是 7」的相反句，故受試者易回答出第一前題後件「反面是 2」之相反句，即「反面不是 2」的答案。至於第二個異常現象，也應與上述 MT 小題的理由有關，也因此造成此小題中，受試者的答對率較文獻中所提及的答對率為低。

（四）在第四大題 ~P →~Q（簡稱 NN）題型中的表現

從結構的層面來說，第四大題牽涉到第一前提的前後件皆為否定式，故此其邏輯內涵是四大題中最為複雜的構造，故此直覺的猜想是，學生在這一大題中的表現，應是四大題中答對率最低的。而且，在此大題的 MT **題型中，由於第一及第二前提都為否定的方式，按照常理猜想，受試者在這一小題的表現，很可能是所有** 16 **小題中最低者。這部份學生回答正確的百分比，可參照下表** 4–7–4。

表 4–7–4 **全體學生在第四大題的表現**

第一前提：如果正面不是3，那麼反面一定不是6							
MP 已知正面是6，那麼反面是？		AC 已知反面是3，那麼正面是？		DA 已知正面是3，那麼反面是？		MT 已知反面是6，那麼正面是？	
回答	%	回答	%	回答	%	回答	%
不足	33.5	不足（對）	33.7	6	49.2	3（對）	47.1
3	29.3	6	28.8	不足（對）	23.6	不足	24.6
≠6（對）	13.1	≠3	11.5	≠6	15.2	≠3	16.8
≠3	12.0	≠6	10.5				

從上表 4–7–4 **中，發現一有趣的現象，在** 4 **個小題的回答中，受試者所回答百分比中最高與次高者的選項不是「**3**」與「資料不足」的組合，就是「**6**」與「資料不足」的組合，此與受試者在第一大題中的表現似有相同之處，足見許多受試者會將「→」詮釋為「↔」，且易忽略正反面的限制，或者是在第二前提與第一前提的前或後件不相符時，選擇「資料不足」。**

二、影響推理表現的因素

以下將就受試者的年齡以及其數學成就表現兩個因素，探討其對推理表現的影響，其中，將以受試者所就讀的年級來替代年齡之因素。

（一）受試者年級

關於這部份的分析，本研究首先探討學生所犯的邏輯錯誤類型是否因學生的年級而有所差異，因而採用對應分析（Correspondence analysis）的方法來進行（Greenacre, 1984），其所依據的是表 4–7–5。

表 4–7–5 各年級學生在「推理問題乙」中正確答題次數一覽表

題型／年級	AA				AN				NA				NN			
	MP	AC	DA	MT	MP	AC	DA	MT	MP	AC	DA	MT	MP	AC	DA	MT
一 (N=62)	53	8	19	1	30	16	34	21	9	9	19	4	6	22	16	26
二 (N=56)	49	4	14	3	35	13	31	22	13	5	9	2	8	21	15	23
三 (N=73)	70	7	25	3	41	22	50	31	19	9	15	7	11	29	14	41

簡言之，對應分析是將表 4–7–5 的各行與列，按照一些統計法則，各算出其在多維空間的座標，並將各行與列以點的方式呈現於多維空間中。另由於表 4–3– 的對應分析顯示，已可解析該列聯表的所有變異數，故此只需以二維平面圖呈現即可，其對應分析圖如下所示：

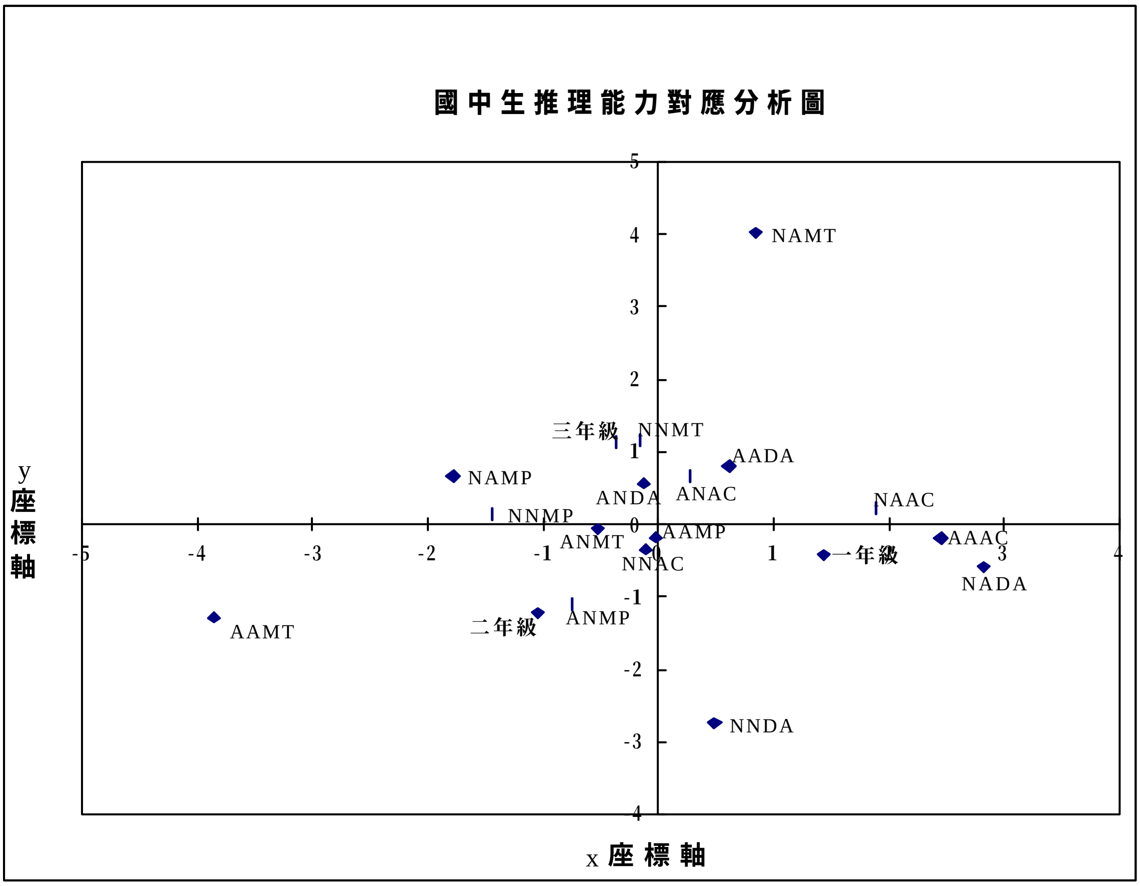

圖 4–7–1　國中生對應推理能力分析圖

由上圖 4–7–1 可看出，國一相對於國二及國三來說，國一所代表的那一點離 AAAC、NAAC、NADA、NNDA 等類型的題目較為接近，故此在相對的情況之下，國一的學生對於某類 AC 和 DA 的題目比較有所掌握；國二所代表的點則顯示出他們在 AAMT、ANMP 等題目較國一及國三生為掌握；至於國三生能掌握住的題型較其他兩個年級為多，包括 AAMP、AADA、ANAC、ANDA、ANMT、NAMP、NAMT、NNMP、NNAC、NNMT 等，似乎顯示出國三生在此推理新對數題中的表現，應較其他兩個低年級學生為佳。

綜上所述，國中一、二、三年級所專精的題目皆有所不同，此結果與 Wildman & Fletcher（1977）所提及的孩童邏輯（child logic）有關，他們認為年齡較低的學生在某些題目上的表現有時反倒比年齡稍長的學生來為佳，主要是因為他們用孩童邏輯來進行推理，和那些正在展數學邏輯（math logic）的學生相比，其邏輯推理能力因尚未成熟而介於孩童邏輯與數學邏輯之間，故較易出錯。

雖然從各年級所專精的題目數來看，似乎可比較出推理能力在年齡因素上的差別，另外，從受試者在推理問題中的總得分數也可看出各年級之間的差異，如下表 4–7–6。

表 4–7–6　各年級學生在「推理問題乙」之平均分數與標準差

年級	總人數	平均分數	標準差
一	62	12.24	5.41
二	56	13.50	4.81
三	73	14.32	5.52
合計	191	13.40	5.33

上表 4–7–6 顯示，各年級學生在「推理問題乙」的平均分數上，依年級的增加有些微升高的趨勢，但其差別並不大。另外，各年級的分數整體而言並不算高（總分為 38 分），故此是否意味著台灣國中生的推理能力值得加強之，實需注意之。

（二）數學成就

由於「推理問題乙」可分成三部份，每部份的性質皆有不同，故為了可以清楚看出高低數學成就學生在邏輯推理能力上的差異性，以下將就兩類學生在「推理問題乙」工具中，此這三部份的推理表現予以分析討論。

表 4–7–7　高低數學成就學生在「推理問題乙」之平均分數與標準差

數學成就 / 推理問題	低數學成就		高數學成就	
	平均	標準差	平均	標準差
第一部份	0.2474	0.1216	0.3505	0.1540
第二部份	0.5211	0.3347	0.8344	0.4288
第三部份	1.1479	0.7718	1.4417	0.8204
總分	1.9164	0.9314	2.6266	0.9028

從總分來看，高數學成就學生的邏輯推理能力確實優於低數學成就的學生，且在每一部份的平均分數皆較其為高，此即意味著數學成就高的學生其邏輯推理能力也較強，反之，數學成就低的學生其邏輯推理能力也較之為低，但此兩因素的因果關係並無法在此顯現，但如果說，兩者之間的確有正向之關係存在，那麼也許教師在教學中，不但可以針對學生的數學思維予以啟發，同時，也可以考慮對學生的邏輯推理能力予以訓練。

第八節　一般國中生的對數解題能力及其錯誤類型

本部份將會對國中的受試者在對數方面的錯誤類型加以分類，並與相關文獻中的對數錯誤類型相互比較。

一、錯誤類型的分類及發生頻率

由於國內在對數錯誤類型方面的研究實屬稀少，經由多方搜索，得知香港中文大學教育學院的李芳樂教授，過去有從事分析高一學生解對數題時所產生的錯誤類型之研究，故本研究將試圖引證並延伸李芳樂研究的結果，特以一批國中生為受試者，分析他們在還沒有學習對數的情況底下，其所犯的錯誤類型，是否與李芳樂的結果有所差異，希望從中找出一些影響錯誤發生的最原始因由，因此如下的分析討論乃以他的研究成果為對比。

李芳樂（1996）曾提出，學生產生錯誤的原因可能是因為有數條法則與誤則在彼此競爭著，學生最後使用的是最吸引他的法則或誤則。李芳樂（1997）進一步使用電腦對高一的受試者在解對數問題中的錯誤加以診斷，發現受試者所犯的錯誤類型相當多，但他指出在運算比較複雜的問題中，其所觀察到的錯誤不應只是由單一的法則所構成，而可能是由幾個主要的誤則（prime mal-rules）所組合而成。並進一步地將他歸納的主要誤則歸因為：視對數符號「log」與數字之間的關係為乘號、加（減）視為乘（除）、乘（除）視為加（減）、錯誤地使用指數律、錯誤的使用分配律等。

在研究三中，研究者對六班（國一、二、三各兩班）國中生進行解對數題的研究，為他們特別設計出一套抽象化的對數法則，之後讓學生自行詮釋該等法則以應用於解題活動之上，由於他們還沒有正式學過對數的概念，故此他們所詮釋的運算規則，將是以他們的背景數學知識做為依歸。這樣設計的目的，是想觀察他們的錯誤類型是否與李芳樂所整理的錯誤類型相仿，如果孰實，則可以說明高中生經教導後所犯的錯誤類型，其實是與他們數學的背景知識有關。

本階段所發展的相關工具總共有 20 **題新對數問題，其題型共分五類，分別屬於五個難度層次，在分析該工具施測後所得的結果，發現受試者所犯的錯誤可歸納為** 15 **種主型錯誤，在每個主型錯誤下各有其次型錯誤，茲整理這部份的結果並與李芳樂（**1997**）的研究結果相對照，但為方便做一對比，只參照李芳樂的研究中也有提及的三種最主要的錯誤類型並列報導於表** 4–8–1 **中。經這樣處理後，結果發現本研究總共出現的相關錯誤次數達** 4078 **次，主要的錯誤類型包括交換律、分配律與轉換型的錯誤，而李芳樂的研究的錯誤次數則達** 350 **次。由於李芳樂只報導發生超過** 5 **次的錯誤類型，而本節的目的是尋找出哪些先備知識會影響受試者解對數題之表現，故有必要列出較為詳細的錯誤類型，以供比較參考。**

表 4–8–1 **本研究與李芳樂研究之主要錯誤類型對照表**

本研究					李芳樂		
錯誤編碼		範例	錯誤與次數百分比		錯誤編碼	錯誤與次數百分比	
主型	次型		次數	%		次數	%
Commutative	**C**o	log(A×B)→AlogB	36	0.9	AA7	23	6.6
	Ce	logA→Alog	100	2.5	AA10	5	1.4
	Ci	AlogB→log(A×B)	494	12.1	AA8	15	4.3
Distributive	**D**12	log(A±×÷B) → (logA)±×÷(logB)	142	3.5	AA1,AC1	161	46.0
	D21	(logA)±×÷(logB) →log(A±×÷B)	1728	42.4	AA2	59	16.9
Transformative	**T**11	log(A+ –B) →log(A×÷B) log(A×÷B) → log(A+ –B)	510	12.5	AB3	7	2.0
	T12	log(A+ –B) → (logA)×÷(logB) log(A×÷B)= (logA) + – (logB)	253	6.2	AB4	19	5.4
	T21	(logA)×÷(logB) → log(A+ –B)	348	8.5	AB2	7	2.0
	T22	(logA) + – (logB) → (logA)×÷(logB) (logA)×÷(logB) → (logA) + – (logB)	467	11.5	AB5 AB6	54	15.4
總計			4078			350	

整體來說，本研究的國中生中犯最多的錯誤是分配律類型中的 **D**21 **次型，其錯誤次數佔所有錯誤總數的** 42.4%**，而李芳樂的高中生則只佔** 16.9%**。此外，高中生所犯最多錯誤是分配律中的** **D**12 **次型，其錯誤的百分比為** 46.1%**，而國中生則只犯** 3.5%**，形成一個強烈的對比。**

在表 4–8–1 中還發現一個有趣的現象：在每一個主型錯誤裡，高中生在其中某一次型所犯錯誤的百分比，遠超過國中生在該次型所犯錯誤的百分比；反之，國中生在另一次型錯誤中所犯錯誤的百分比卻遠超過高中生。更明確地說，在交換型錯誤中，本研究的國中生犯 Co 次型錯誤佔全部錯誤之百分比的 0.9%，高中生犯此錯誤的百分比為 6.6%；相反地，在 Ci 次型錯誤中，國中生犯錯的百分比是 12.1%，高中生犯錯的百分比是 4.3%。而在分配律型錯誤中，國中生犯 D12 次型錯誤的 3.5%遠低於高中生所犯的 46.1%；反之，在 D21 類型中，國中生犯錯的百分比 42.4%則遠高於高中生犯錯的百分比 16.9%。另外在轉換型錯誤的 T11 次型中，國中生犯錯的百分比 12.5%也明顯地比高中生犯錯的百分比 2.0%為高；而相較之下，在 T22 的錯誤次型裡，國中生犯錯的百分比 11.5%則較高中生犯錯的百分比 15.4%為低。

初步猜測，產生上述這些現象其背後原因可能有二，其一為在 Co、D12、T22 這三個次型錯誤中，高中生所犯錯誤的百分比皆高於國中生，這很可能是高中生在學習對數時所習得的錯誤， 其二為在 Ci、D21、T11 這三個次型錯誤中，國中生犯錯的百分比反而高於高中生，根據研究一、二的訪談結果猜測，當中的 Ci 與 D21 型錯誤很可能與學生過去的先備知識有關，國中生在沒有經過正式教導的情形之下，很容易地將對數符號視為一個「數」來處理，而 T11 則可能是學生在初見抽象對數公式時所主動詮釋建構而得。

對於 Ci、D21 這兩種學生在沒有經過正式教導的情形之下所犯的錯誤次型，高中生犯錯的百分比低於國中生，這意味著學生在經由教導後，其犯錯的機會會降低，雖然如此，高中生所犯 D21 次型錯誤之百分比卻仍稍嫌偏高，教師在教導對數的課題時，宜特別留意學生是否會按其背景知識而建構出此誤則。另外，對於那些由學生在學習對數時所習得的 Co、D12、T22 三種次型錯誤，則意味著教師在教導對數時，宜特別加強澄清學生在這方面的迷思概念，尤其是 D12 型的錯誤。此外，T22 型的錯誤對國中與高中生似乎都很容易發生，特別是對高中生而言，犯錯的比率非常高，故此教師在教導時，宜特別留意學生這種對公式的錯誤推論。

另外，若從國中與高中生在主型錯誤中的表現則可發現，國中生較高中生易犯 T 型的錯誤，高中生則較國中生易犯 D 型的錯誤，此表現與研究二中兩位分別代表國中生及高中生的受試者表現相彿，根據研究一與研究二的結果顯示，D 型錯誤主要是受先備知識的影響，T 型錯誤來自於受試者的自我詮釋，故此現象似乎意味著在經由教導後，高中生的確在屬於推論型的錯誤中，其犯錯比例會有所減少，但另一方面，卻也意味著學生的先備知識的確是一個教師值得注意的錯誤表現因素。

第九節　影響一般國中生產生對數錯誤類型之因素

本部份將分析受試者不同的背景因素是否會影響到國中生在「新對數題丙」工具中的表現，由於對數是隸屬於抽象函數的領域之內，其概念的理解有一定的困難度，本研究雖然已將其表面形式改變成與對數不太一樣的形式，且以一個故事情境來呈現，但受試者對其公式的理解，相信會受到受試者年齡的限制，因此這是值得考慮的影響因素。本研究進而以受試者就讀的年級代替年齡因素，理由是受試者在同一年級的學校及各方面的經驗會更為一致。此外，本研究考慮到受試者的教學背景知識亦會對他們在對數題的表現有所影響，故特別蒐集他們的月考成績作為數學成就的一個指標，這雖然有別於數學背景知識，但這已是實際許可的情況下所能蒐集到的資料。

此外本研究有興趣想知道的是受試者的邏輯思維能力是否會影響他們在新對數題中的表現，尤其是對國中生而言，他們在沒有對數的背景之下看到一些陌生的公式，他們對這些陌生公式的詮釋，似乎與他們的邏輯推理能力有關，推理能力越強者，其所可以從公式中領悟其使用法則的能力越強。

至於如何評估受試者的邏輯思維能力，本研究採取的評分方式是根據受試者在「推理問題乙」中的表現為依歸，由於該工具共分為三部份，第一部份共 16 小題，是三部份中困難度最低者，第二部份也有 16 小題，其困難度為中等，第三部份只有 6 小題，其推理成分至為複雜，從設計者的眼光來看，是三部份

中困難度最高的。在評分標準的設定方面，為了兼顧各部份的困難度及題數均不太一樣，故此本研究視此工具的三部份各形成一個次量表，在頭一個次量表先數算受試者答對幾題，再以每答對一題獲得一分的方式計算總分，之後再除以題數，其所得之平均值視作該受試者在此部份的平均表現分數。第二部份的的評分方式與第一部份大致雷同，先數算受試者答對幾題，但是以每答對一題獲得 2 分的方式計算總分，之後再除以題數，所得之平均值視作該受試者在此部份的平均表現分數。第三部份同樣先數算答對的題數，但每答對一題所得之分數為 3 分，經加總後再除以題數，而將所得之平均值視作該受試者在第三部份表現之得分。最後，將每位受試者在第一、第二及第三部份之表現分數再加總，而將其結果視作他們的邏輯推理能力。

至於國中生對抽象對數公式理解的能力，本研究以他們在新對數工具中的表現作為評估的依據，該工具共 20 題，以每題答對獲 1 分的標準進行評分，而以其總分做為他們在新對數中表現的分數。故本研究特別考慮上述年級、數學成就與邏輯推理能力等三個因素對受試者在新對數題中的表現，從而將此三者視為自變數，而以受試者在新對數題中的表現視為依變數，而資料分析方面則以 $2\times2\times2$ 的變異數分析來進行，其分析結果與各類型描述性的統計資料則報導如下。

本部份將從全體學生在「新對數題丙」各層級題目的平均得分表現予以描述分析，接著依年級、高低數學成就及高低邏輯推理能力等三個因素對各受試者在「新對數題丙」各層級題目表現之影響。

一、全體學生的對數解題表現

表 4–9–1 全體學生在「新對數題丙」各層級題目之平均與標準差

題目層級	平　　均	標　準　差
I	2.87980	2.3078
II	0.54640	1.1752
III	0.53010	0.9481
IV	0.02190	0.1466
V	0.00546	0.0739
總分	3.98366	0.8255

由表 4–9–1 顯示，所有受試者在「新對數題丙」的五個層級題目中，其表現有明顯差異，特別以在第 I 層級題目中的表現為最好，其次依序為 II、III、IV、 V 層級題目的表現，此結果意味著 I 層級題目其困難度最低，而第 V 層級的題目其困難度為最高，恰與先前工具設計時所設計的題目難度相符合。但在表中還是出現了一個奇特的現象：「第 II 層級題目的平均分數遠比第 I 層級來的低」，在設計工具時，第 I 、 II 層級的題目分表著抽象對數公式等號的左右邊，而其差別在於第 I 層級的題目直接利用一次公式即可得到答案，而第 II 層級的題目則可能需運用兩次公式（先從左推至右，再從右推回左）才可達到相同目的，因此學生在第 II 層級中得到較低的分數是可以預見的，但其平均分數卻顯示出兩層級之題型難度差異極大，此結果可能意味著學生在使用公式上確有其困難，教師宜對於生運用公式的方式多加注意。

另一值得注意的現象是，在 II、III、IV、 V 層級題目的平均分數略顯偏低，主要原因可能是本研究的受試者是一群未學過對數的國中生，而對數又隸屬於抽象函數的領域內，其概念的理解有一定的困難度，故這也是可預期的現象。

二、影響對數解題表現之因素

以下將從年齡、數學成就及邏輯推理能力等三個因素，分別探討其對於對數解題的表現的影響。

（一）年齡因素

表 4–9–2　各年級學生在「新對數題丙」各層級題目之平均與標準差

題目層級	一年級		二年級		三年級	
	平均	標準差	平均	標準差	平均	標準差
I	2.00000	2.22427	3.41818	2.29888	3.18571	2.20206
II	0.58621	1.17031	0.52727	1.18407	0.52857	1.18837
III	0.58621	0.97395	0.47273	0.95945	0.52857	0.92817
IV	0	0	0.01818	0.13484	0.04286	0.20400
V	0	0	0.01818	0.13484	0	0

總分	3.17242	2.54180	4.45454	2.89200	4.28571	2.89000

整體來說，一年級學生的表現，較遜於其他兩個年級的學生，特別是在第Ⅰ層級的題目中，其平均分數顯著地低於二、三年級。至於二、三年級的表現，其之間的差異並不大，在每個層級中的平均分數差並不高於 0.25 分，但二年級學生的表現卻略顯優於三年級學生，除了在第Ⅲ層級的題目中略低於三年級學生外，其他層級題目均高於三年級學生的表現，因此初步推斷，對於較高年齡學生，其在解抽象對數問題的能力應是勢均力敵，但對於剛進入國中的低年級學生而言，其處理抽象符號的能力還有待進一步教導。

（二）數學成就之因素

表 4–9–3 高低數學成就學生在「新對數題丙」各層級題目之平均與標準差

題目層級	低數學成就		高數學成就	
	平均	標準差	平均	標準差
Ⅰ	1.89855	2.05187	3.47868	2.55856
Ⅱ	0.50725	1.07953	0.57018	1.23352
Ⅲ	0.52174	0.96419	0.53509	0.94241
Ⅳ	0	0	0.03509	0.18481
Ⅴ	0	0	0.00877	0.09366

在表 4–9–3 中可以觀察到，高數學成就學生的表現約略優於低數學成就學生之表現，特別是屬於層級Ⅰ的題目更為明顯，因此，整體來說，數學成就的高低是一個影響國中學生解抽象對數運算的一個因素。另外，在困難度為最高的第Ⅳ與第Ⅴ層級的題目中，低數學成就的學生並沒有一人回答正確，此現象可能意味著高數學成就的學生，在對於抽象對數公式的詮釋能力較低數學成就學生為高。但兩類學生在Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ、Ⅴ等層級的題目中，其得分都略顯偏低，足見抽象對數運算對於尚未接受對數教導的國中生而言，仍屬困難。

（三）邏輯推理能力因素

表 4–9–4 高低邏輯推理能力學生在「新對數題丙」各層級題目之平均與標準差

題目層級	低邏輯推理能力		高邏輯推理能力	
	平　均	標　準　差	平　均	標　準　差
Ⅰ	2.29032	2.27740	3.48889	2.18907
Ⅱ	0.55914	1.16528	0.53333	1.19173
Ⅲ	0.50038	0.95124	0.55556	0.94941
Ⅳ	0.01075	0.10370	0.03333	0.18051
Ⅴ	0	0	0.01111	0.10541

整體來說，高邏輯推理能力的學生在新對數題的表現，有優於低邏輯推理能力的學生的現象，因此邏輯推理似乎是一個影響對數解題的一個因素。很可能是因為新對數的問題對國中生來說，有相當程度的困難，故此，上述的差異性並不是十分的明顯，

（四）年齡、數學成就及邏輯推理能力與對數解題能力之相關性

為了要進一步瞭解國中生的年級、邏輯推理能力以及他們在校內的數學成就間是否會影響到他們在解新對數題的表現，本研究即以年級、邏輯推理能力及數學成就作為自變數，而以新對數題的表現作為依變數，並進行迴歸分析，當中，年級這一個變數是先經過 dummy coding 的方式處理，因此得到兩個 dummy variable 年級Ⅰ與年級Ⅱ，而以年級Ⅰ=0 且年級Ⅱ=0 表示國一，年級Ⅰ=1 且年級Ⅱ=0 表示國二，年級Ⅰ=1 且年級Ⅱ=1 表示國三。結果發現，該組自變數對於預測受試者在「新對數題丙」中的表現有顯著的貢獻，該模式經 F 考驗為 $F(4, 178)=6.67$，$P< 0.0001$，惟該模式的 $R^2=0.1303$，adjusted $R^2=0.1108$，意即該組自變數可解釋新對數表現之變異數的 13%，故此受試者在新對數中表現的差異，有好一部份並無法被受試者的的年級、邏輯推理能力以及他們的數學成就所解釋。至於個別變異數在這個模式中的作用，可參看如下之回歸係數參數表。

表 4–9–5　「新對數題丙」的回歸係數參數表

變項	自由度	B	β	t	p
常數項	1	0.4720	0	0.648	0.5178
年級 I	1	0.7412	0.1206	1.434	0.1532
年級 II	1	1.0827	0.1867	2.183	0.0304
數學成就	1	0.0221	0.2050	2.549	0.0116
邏輯推理	1	0.5073	0.1753	2.257	0.0252

由於年級 II、數學成就及邏輯推理能力的迴歸係數經 t 考驗後皆顯著，故若果控制其他自變數不變的話，學校成就每多增 1 分，新對數表現將增加 0.022 分，而當邏輯推理能力增加 1 分的時候（控制其他自變數不變），新對數表現將增加 0.507 分，最後對於班級來說，當年級為三年級時，則預測新對數的表現會增加 1.083 分，而當年級為國一或國二年級時，則不增加分數，故此從迴歸分析得知，學生邏輯推理能力與新對數表現有關，同樣，學生的數學能力與是否是高年級的國中生，亦會影響其在「新對數題丙」工具上的表現。

綜上所述，從年級、邏輯推理能力及數學成就等三個因子來看受試者在新對數問題中的平均分數表現時，發現除年級外，從邏輯推理能力及數學成就皆可看出其表現略有差別，另外，在經由以年級、邏輯推理能力及數學成就作為自變數，並以新對數題的表現作為依變數，所進行的迴歸分析之結果也呈現，在邏輯推理能力與對數解題能力間應屬一弱相關，但並不表示為無相關，究其原因，可能是因為研究工具的設計其難度過於高，或者是與受試者的年齡有關，也許國中階段的推理能力未達一定之水準，故無法顯出其差異性。因此，上述結果的呈現並不表示研究一的假設必須予以推翻，但此假設也需有更多研究予以否證或證實之。

三、錯誤成因解釋

如同 Brown & Button（1978）所說，每一個「蟲」（錯誤）的產生，都有一個「蟲的故事」，此想法也是研究者所堅持的一個信念，所以正如前面所解釋過的原因，在本研究特別選擇採用一群未學過對數的國中生為研究對象，期待透過分析他們在抽象對數題中所犯的各式錯誤類型，以此與李芳樂（1997）研究中一群學過對數的高中生所犯的錯誤類型相比較，試圖尋找出其錯誤類型之原始成因。

研究結果顯示，此兩類數學背景知識不同之受試者在對數運算中，皆出現分配律型錯誤、交換律型錯誤及轉換型錯誤，且此三型錯誤皆是所有產生的錯誤類型中中，所犯比例高居前三名者，顯見這三種錯誤在對數的錯誤類型領域中，有其重要之地位，因此，若對此三種錯誤類型之成因能有一較為深層的瞭解，也許在對數教學中可有一番貢獻。故以下將就在研究一、二、三中，對此三型錯誤初步歸納而得的錯誤成因簡略述之，接著試圖根據各種錯誤成因理論，對此錯誤之形成有一廣泛地瞭解。

（一）C、D、與 T 型錯誤之原始成因

在研究三中，針對未學過對數的國中生與學過對數的高中生所做的錯誤百分比之對比發現，有一些錯誤類型在經由正式的對數教導後，其發生的百分比並無減少的趨勢，如：Co、D12、T22 三個子型錯誤；也有部份的錯誤類型在經由教導後，其產生的百分比雖有減少，但仍屬偏高，例如：D21 之子型錯誤。此外，關於分配律型錯誤（D 型）、交換律型錯誤（C 型）及轉換型錯誤（T 型），不論是對國中生亦或是高中生，其所犯比例在其所發生的所有錯誤中，皆高居前三名，因此，實有必要瞭解上述所提及的此些錯誤類型之原始成因。

根據在研究一與研究二的訪談結果顯示，C 型、D 型與 T 型錯誤之成因各有不同。C 型錯誤主要是受到代數運算的先備知識之影響，由於 log 符號對於國中生是一個新奇、未知的符號，且在代數運算中，未知數χ與常數間的乘號是可省略的，故學生很容易地視對數符號與常數間有一乘號存在，在此情形之下，任意常數與未知數χ間之順序是可互換的，也因此產生有 Cim、Co 與 Ce 等三種錯誤子型，但對於 Cia 型錯誤，根據對受試者的訪談發現，其不僅牽涉到代數運算的先備知識，同時，也包含了學生在主動的詮釋中，所建構出來的錯誤。

關於學生的自我詮釋建構，除了會影響 Cia 子型錯誤的出現外，也是產生 T 型錯誤的一個重要原因。因為對於未學過對數的國中生而言，抽象對數的運算是新奇的、不熟悉的、沒見過的，且相當不同於過去所學的四則運算法則，故若國中生有犯此 T 型錯誤，應是學生由抽象對數公式中，主動詮釋建構而成的。

至於 D 型錯誤，其原始成因就如同他的名字所宣稱的，是受到分配律之先備知識的影響，在研究三的結果顯示，此型錯誤在經由教導後，其所佔的百分比依舊偏高，熟見此先備知識對於對數運算的影響效力極大。根據研究一的訪談結果顯示，促使生使用分配律進行解題的主要原因有二，其一是學生當看到「小括號」時，便選擇使用分配律來進行解題（如 S4），但也有受試者是在不自覺的情況下便使用分配律來進行對數運算（如 S2）。

縱上所述，C、D 與 T 型等三種對數錯誤類型，源自於兩個主要原始成因，一為受試者所擁有的先備知識，另一為受試者的對於抽象對數公式所進行的主動詮釋與建構。