

第五章 結論與建議

本研究以國小三年級學生為對象，採用紙筆測驗與訪談方式，探討學生對學習角概念的瞭解情形，以及他們的學習困難。本章將依據本研究的待答問題與筆試及訪談的資料分析結果，說明本研究的結論與限制，並根據研究結果對未來教學、課程設計和研究提出一些建議。

第一節 研究發現與結論

從第四章學童在角概念問卷的答題反應以及實際訪談的回答情形，研究者有下列幾點主要發現：

一、國小三年級學童在學習角概念課程後對於角概念的認知情形

(一) 在「角的辨識-角的基本定義與判別」方面的認知情形

1. 正確答題學生想法

正確答題的學生在進行角的判別時會根據下列條件：(1)邊要直直的不能彎；(2)兩個邊要連在一起；(3)相交處不能是圓滑的；(4)邊的長短沒有影響；(5)角度大小沒有影響。因此學生定義角要有兩條直直的線，而且要連在一起，相交的地方不能是圓滑的，此外邊的長短、角度的大小和是角或非角沒有關係。在本研究中，約有 87% 的學生能正確判別出是角、非角。

2. 容易產生的困難

在判別是角或非角時，依照容易發生困難的順序將其分成五種類型。(1)判別是否為角時會受角度的大小影響；(2)角可以有曲線邊；(3)認為角要有對稱性；(4)認為相交處圓滑的是角；(5)以邊的長短判別是不是角。

(1) 判別是否為角時受角度的大小影響

角度太大接近平角或角度太小接近零角時，會辨認不出是角，或者是將角度侷限於 30° 、 45° 、 60° 、 90° 等特殊角，認為角只包含這些角度。在本研究中，約有 51% 的學生認為角度太大接近平角的不是角；23% 的學生認為角度太小接近零角的不是角。

(2) 認為角可以有曲線邊

一直線、一曲線交會在一起的圖形，或兩條曲線交會在一起的圖形，只要看起來尖尖的，或是像三角形的一部份，就會認為是角。在本研究中，約有 17% 的學生認為包含曲線邊看起來尖尖的圖形是角，但是包含曲線邊，張開角度接近平角時，幾乎所有的學生都認為是非角。

(3) 認為角要有對稱性

角的兩邊如果不一樣長，邊長相差太多時，會辨認不出是角，認為角應該要有等長的兩邊；或者是認為角的兩邊應該同樣都是直線、同樣都是曲線，這樣才會對稱。在本研究中，約有 17% 的學生認為兩邊長度相差太大的角不是角。

(4) 認為相交處圓滑的是角

兩直線相交處圓滑的圖形，問卷中出現了兩題，一題是類似銳角的圖形、一題是類似直角的圖形，也許是受課本上「桌面有角」的影響，比較多學生認為類似直角相交處圓滑的圖形是角，約有 11% 的學生認為類似直角相交處圓滑的圖形是角。

(5) 以邊的長短判別是不是角

角的邊長如果太短，會辨認不出是角，認為太短的邊無法測量出角度，若是測量不出角度，就不能算是角。在本研究中，約有 8% 的學生認為邊長太短的角不是角。

(二) 在「角的辨識-數角」方面的認知情形

1. 正確答題學生想法

在數角方面，學生的答對率約為 23%，此題型對學生而言較困難。數角題型正確答題學生的想法有：(1)將每個角標上號碼；(2) 畫弧線標示角。

(1) 將每個角標上號碼

進行數角活動時，有學生將每個角標上編號，把數過的角編號寫下來，較大角的數法是以小角合成的方式來數，此方式能非常清楚看出自己數過哪些角。

(2) 畫弧線標示角

數角活動正確答題的學生中，有學生在數過的角標示弧線，這種方法和一般老師在課堂上教的方法是一樣的。

2. 容易產生的困難

(1) 只看到個別的小角

在進行數角活動時，只會數出明顯看得出來、個別分開的小角，看不到有重疊部分的大角，本研究中，約有 54% 的學生會出現這種困難。

(2) 多條線相交於一個頂點的數角策略為個別的小角數完再加上一個大角

對於多條線相交於一個頂點的數角策略，就是將每個小角全部數過一遍，最後再加上一個包含全部的大角，本研究中，約有 24% 的學生會出現這種困難。

(3) 只數多邊形的內角

數角時只看到多邊形的內角，無法注意到被對角線分割的小角，本研究中，約有 13% 的學生會出現這種困難。

(4)把弧線當成角來數

以為弧線就是角，把數角時畫的弧線當成是角來數，因此會重複算同一個角，不明白畫弧線是要標示數過的角。本研究中，約有 2-5%的學生會出現這種困難。

(三) 在「角的辨識-直角的判別」方面的認知情形

1.正確答題學生想法

直角的判別的題型中，除了第一小題基本題答對率較高，其他題目答對率約為 33%。正確答題的學生共同的特色有：(1)知道直角是 90° 的角；(2)會利用工具輔助判斷是否為直角。

2.容易產生的困難

(1)直角要有水平邊

認為直角要有一條水平的邊和一條鉛直的邊，認為傾斜的就不是直角，或是辨認不出沒有水平邊的直角。本研究中，約有 30%的學生會出現這種困難。

(2)認為所有的角都可稱為直角

把「直角」和「角」的觀念混淆了，認為每一個角都是直角，有的學童不知道直角是 90° 的角，有的學童即使能說出直角是 90° 的角，也沒有辦法辨認出直角。本研究中，約有 20%的學生會出現這種困難。

(3)直接用視覺判斷是否為直角

在判斷是不是直角的時候，不會想到使用工具來輔助，直觀的用視覺判斷是不是直角。本研究中，約有 13%以上的學生會出現這種困難。

(4)會把標示的直角記號當成直角來數

會把自己畫的直角記號，又當成是直角來數，重複算同一個角，不明

白所畫的直角記號只是在標示直角。本研究中，約有 2-5% 的學生會出現這種困難。

(5) 直角記號可以畫成弧線

會把直角記號畫成弧線，認為弧線也可以表示直角，此類學生通常不知道直角的定義。

(四) 在「角的辨識-圖形中角的判別」方面的認知情形

1. 正確答題學生想法

圖形中的判別的題型中，答對率約為 58%。正確答題的學生都認為角的邊要直直的，不能有曲線邊，和第一大題角形的判別標準一致。

2. 容易產生的困難

(1) 認為角可以有曲線邊

一直線、一曲線交會在一起的圖形，或兩條曲線交會在一起的圖形，只要看起來尖尖的，或是像三角形的一部份，就會認為是角。此狀況在圖形中比單獨判別一個角形時嚴重許多。

(2) 認為包含曲線的部分是角但曲線不能是角的邊

雖然知道曲線不能是角的邊，但還是認為包含曲線邊的圖形，看起來尖尖的話就是角。因此會在圖形中畫出角的頂點，卻不描出曲線邊。本研究中，約有 10% 的學生會出現這種困難。

(3) 不會依據角的定義和條件來辨別圖形中的角

在單獨一個角形時，能正確辨認出是角或非角，但是當這些角形出現在圖形中，就不會依據角的定義和條件來辨別圖形角。

(五) 在「角的大小比較」方面的認知情形

1. 正確答題學生想法

在比較角的大小的題型中，學生選答的答對率約為 53%，可是能寫出正確理由的只有 13%，可知此類型的題目對國小三年級學童而言偏難。在本題型正確答題的學生除了具有角的保留概念，而且不會受圖形干擾以直覺法則判斷角的大小。

2. 容易產生的困難

(1) 受直覺法則 more A-more B 的影響

在比較角的大小時，受直覺法則 more A-more B 的影響，會認為弧線較大，角會比較大；邊長較長，角會比較大；開口較大，角會比較大；包含區域較大，角會比較大。其中又以弧線大小最容易誘發學生使用直覺法則。本研究中，約有 22% 的學生會受直覺法則 more A-more B 的影響。

(2) 受直覺法則 same A-same B 的影響

在比較角的大小時，受直覺法則 same A-same B 的影響，會認為弧線一樣大，角就一樣大；邊長一樣大，角就一樣大；開口一樣大，角就一樣大；包含區域一樣大，角就一樣大。其中又以弧線大小最容易誘發學生使用直覺法則。本研究中，約有 26% 的學生會受直覺法則 same A-same B 的影響。

(3) 尚未具有角的保留概念

認為用一個角描下來的兩的角形，角的大小可能不一樣。

二、國小三年級學童在使用工具測量角度時的表現。

(一) 在使用量角器進行「角的測量」的測量方法

1. 正確答題學生想法

在比較角的測量題型中，學生答對率約為 86%，可知國小三年級學童在使用量角器測量角度的能力有很好的表現。在本題型正確答題的學生會用以下兩種方法來測量角度。

(1) 從對標齊 0 的邊開始數

量角的時候，先把量角器的中心點對齊角的頂點，再把量角器標 0 的邊對齊角的一邊，判讀角度會從 0 開始數起。

(2) 以 90° 為標準判斷角的大小

以 90° 當作區隔的標準，先判斷角度比 90° 大還是比 90° 小，若是比 90° 大，就選擇量角器上較大的角度，比 90° 小，就選擇量角器上較小的角度。

2. 容易產生的困難

(1) 直觀判斷角的大小

量角的時候，如果覺得角是大的，就讀量角器較大的度數；如果覺得角是小的，就讀量角器較小的度數。

(2) 依角的邊長長短選擇看量角器內圈或外圈的度數

量角的時候，如果角的邊長比量角器短，會判讀量角器內圈的度數；如果角的邊長比量角器長，會判讀量角器外圈的度數。本研究中，約有 10% 的學生會出現這種困難。

(3) 沒有先對準就開始量角

沒有先把量角器的中心點和角的頂點對齊，或是沒有把量角器上標 0

的線對齊角的一邊，就開始量角。

(二) 測量角度的時角的邊長之影響

1. 測量邊長較長的角答對率比較高

在測量角度的 8 個題目當中，邊長較長的角有 6 題答對率高於邊長較短的角，特別是在鈍角以及判讀外圈刻度的情況下，邊長較長的題目答對率都較高。

2. 邊長較長的角比較好量

認為邊長較短的角會被量角器的線遮住看不清楚，邊長較長的角可以突出量角器，看得比較清楚。

由以上研究發現，研究者將角的辨識、角的大小、角的測量三個主要面向應具備的能力，以及學童的學習困難歸納如表5-1-1。

表5-1-1 國小三年級學童角概念應具備能力和學習困難

| | 應具備能力 | 學習困難 |
|------|--|---|
| | 能知道角是由兩直線(兩個邊), 相交於一點(一個頂點)形成的。 | 1. 判別是否為角時受角度的大小影響。 2. 認為角可以有曲線邊。 3. 認為角要有對稱性。 4. 認為相交處圓滑的是角。 5. 以邊的長短判別是不是角。 |
| | 能找出圖形中的角。 | 1. 只看到個別的小角。 2. 多條邊交於同一頂點的數角策略為個別的小角數完再加上一個大角。 3. 只數多邊形的內角。 4. 把弧線當成角來數。 |
| 角的辨識 | 能知道直角是 90° 的角。 能找出圖形中的直角。 | 1. 認為直角要有水平邊。 2. 認為所有的角都可稱為直角。 3. 直接用視覺判斷是否為直角。 4. 會把標示的直角記號當成直角來數。 5. 認為直角記號和標示角的弧線沒有差別。 |
| | 能找出各種圖形中的角, 並標示出角的頂點和角的邊。 | 1. 認為角可以有曲線邊。 2. 認為包含曲線部分的圖形是角, 但曲線不能是角的邊。 3. 不會依據角的定義和條件來辨別圖形角。 |
| 角的大小 | 能具有角的保留概念。 能知道邊的長短不影響角的大小。 能知道弧線的大小不影響角的大小。 能知道邊的粗細不影響角的大小。 | 1. 受直覺法則 more A-more B 的影響。 2. 受直覺法則 same A-same B 的影響。 3. 尚未具有角的保留概念。 |
| 角的測量 | 能使用量角器從不同方位測量角。 | 1. 直覺判斷角的大小, 再選擇報讀量角器較大或較小的度數。 2. 依角的邊長長短, 選擇看量角器內圈或外圈的度數。 3. 沒有先對準就開始量角。 |

三、整體問卷測驗之平均答對率與標準差

本研究全體學生及不同班級在角的辨識、角的大小、角的測量三個面向之平均與標準差, 詳如表 5-1-2。

表 5-1-2 角概念問卷三個面向之平均答對率與標準差

| | 人數 | 平均答對率 | 標準差 |
|------|-----|-------|------|
| 角的辨識 | 159 | 0.63 | 0.18 |
| 角的大小 | 159 | 0.33 | 0.28 |
| 角的測量 | 159 | 0.86 | 0.20 |

由上表可知，學生在角的辨識方面，平均答對率為 63%；在角的大小比較方面平均答對率為 33%；在角的測量方面，平均答對率為 86%。可知本研究之國小三年級學童對角的概念較薄弱，但是在操弄使用工具測量的能力較強。

研究者將本研究的發現歸納出下列結論：

- (一) 約有 87% 的國小三年級學童都能夠辨識單獨出現的角形是角或非角，只有在角度接近於平角時，學生在辨識上會產生較大的困難。
- (二) 多個邊在同一頂點上的數角問題，對國小三年級學童而言相當不容易，約有 54% 的學童只能看到個別的小角，學童無法明白數角時標示的弧線有何意義。
- (三) 國小三年級學童的直角概念是模糊不清的，約有 24% 的學童認為直角要有水平邊，約有 20% 的學童認為所有的角都可稱為直角，也有學童認為直角記號和標示角的弧線沒有差別。
- (四) 約有 42% 的國小三年級學童在辨識圖形中的角時，不會依據角的定義和條件來辨別圖形中的角，與單獨出現角形時的判別標準相互矛盾。
- (五) 國小三年級學童在進行角的大小比較時，即使具有角的保留概念，還是容易受直覺法則 more A - more B 以及 same A - same B 的影響，尤其以弧線的大小影響最鉅。

- (六) 約有 86% 的國小三年級學童能夠正確測量給定的張開角。
- (七) 約有 10% 的國小三年級學童在使用量角器測量角度時，邊長較短的角會判讀內圈刻度，邊長較長的角會判讀外圈刻度。
- (八) 測量角度時，邊長較長的張開角較有利於學童測量，但是對擅長使用量角器的學童而言則沒有影響。

整體而言，本研究之國小三年級學童對角的概念薄弱，但是在操弄使用工具測量的能力強。

第二節 建議

依據本研究之研究發現與結論，針對教師教學、課程設計以及未來研究三方面提出以下建議，僅供日後角概念之相關研究及教學參考。

一、教師教學方面

(一) 在課堂中應提供多樣的圖形角

教師在課堂中，可以提供多樣化的角形及多次的辨認練習，加深學童對圖形角的正確印象。例如：呈現不同角度的角、呈現沒有水平邊的角或直角、呈現不等邊的角、提供更多是角或非角的例子，如此學生才不會侷限於「典型角」心像。

(二) 弧線的標示要謹慎

本研究發現學童對於標示在角上的弧線有很多讓人出乎意料的想法，例如：把弧線當成是角，以為弧線的大小就是角的大小、弧線大小易使學生以直覺法則判斷角的大小……。因此教師在課堂上，在提到角或角的大小時，若是要在角上面畫弧線標示，應該同時把整個角的外形比出

來，才不會讓學生誤以為角就是弧線標示的範圍。

(三) 教學時要用三角板或直尺畫角

本研究發現部分學童會認為包含曲線邊的圖形是角，因此教師在教學時，應該盡量用尺作圖，將角的邊畫直，避免學童認為彎曲的線也可以是角的邊。

(四) 採用克服直覺法則的教學法

本研究發現學童在判斷角的大小時，容易受直覺法則影響，因此教師在教學時應幫助學生克服直覺法則的副作用。除了文獻中以色列學者們提出的類比教學法和衝突教學法，謝展文（2000）的研究中也提供了額外資訊介入的處理方式、類似的題目、介入額外情境等三種方式教學。

(五) 指導學生選擇適當的量角器

工欲善其事，必先利其器，選擇適當的量角器對於學好角度的測量是非常重要的。研究者在研究過程中，發現學生使用的量角器種類繁多，若是選擇不恰當的量角器，會影響學生的學習。建議初學者宜選擇簡單、內圈刻度 10° 的量角器；不要選擇量角器上有卡通圖案或是中空的量角器，以免中間看不到刻度，無法測量出角度。

(六) 量角器量角度的指導

教師指導學生用量角器量角度時，要將每一個步驟說明清楚，首先要對齊量角器的中心點和角的頂點，再來要把量角器上標 0 的線對齊角的一邊，並強調要從 0 開始數。由於翰林版教科書在角度測量方面的教學，將每個步驟說明得非常清楚，因此本研究之學童在角的測量面向有很高的答對率。

二、課程設計方面

(一) 加強概念的教學

現行的教科書，對於角沒有一個明確的定義，讓教師與學生均無所適從。以翰林版教科書而言，三下角概念相關單元有一連串的活動、操弄，在活動結束後，並沒有下一個清楚的結論，因此學生習得的角概念較薄弱。

(二) 在課程中應提供多樣的圖形角

在教科書中及課程設計上，可以施以多樣化的圖形及多次的辨認練習，加深學童對圖形角的正確印象。

(三) 過於複雜抽象的數角問題應延後出現

多條直線交於同一頂點的數角問題，對於國小三年級學童而言太過複雜抽象，不容易理解，因此無論在課程設計或評量上，應該避免在三年級出現。

(四) 在角的測量方面教科書應提供邊長較長的張開角

現行教科書中，無論是課本或是習作，測量角的題目所給的邊長大約都小於3公分，對於初次接觸量角器量角的國小三年級學童而言，太小的邊容易被量角器的線遮住，不易測量，應提供較長的張開角讓兒童練習測量。

(五) 角概念相關課程應在中年級以後開始

以往角概念相關課程都是從三年級開始，但是在92年版九年一貫課程綱要的分年細目中，提早於二年級出現角概念內容：2-s-01 能認識周遭物體上的角、直線與平面（含簡單立體形體）。部分國小三年級學童的認知發展，尚不足以理解抽象的角概念，因此提早從二年級開始是否恰當，值得深思。

三、未來研究方面

(一) 較多的研究樣本

由於人力與時間的限制，本研究的樣本僅限於高雄市某國小三年級 5 個班級的 159 位學生。建議未來的研究可擴大到其他地區，將研究發現作較大樣本的探討。

(二) 觀察教師教學過程

學童在解題思考時概念的形成功，有一部分是來自於教學過程中，所以單憑紙筆測驗與訪談不能完全瞭解概念形成的過程。因此建議未來類似的研究，除了利用紙筆測驗與訪談來探討學童的解題思考外，也應配合角的概念教學過程的觀察，並輔以錄影的方式，以進一步瞭解學童的解題策略及錯誤概念形成的原因。

(三) 針對研究發現設計教學

後續的研究可就本研究的結果，學童所呈現的學習困難，設計適當的教學法，長期且深入的探討這些困難形成的原因，以供教師未來改進教學及學者專家課程編製時的參考依據。

(四) 針對不同版本教科書做比較

本研究的研究對象所使用的教科書是翰林版的，學童在角的測量面向有很好的表現，但研究者曾經使用其他版本教學，發現學生在角的測量方面存在許多困難。因此，未來研究可深入分析各版本教科書，並比較不同版本學生對角概念的認知情形，提供教材設計的方向。