

## 等量公理前置教學活動之實踐與探究

王志銘<sup>1</sup>

康淑娟<sup>2</sup>

雲林縣文安國小

國立嘉義大學數學教育研究所

### 摘要

本研究主要目的為探討等量公理前置教學活動之實踐歷程，期望在教師教導等量公理前，透過研究者所設計三個教學活動，對教師在教導學生等式概念與等量公理間的銜接能有所幫助。本研究的教學活動設計以等式概念的教學活動出發，逐漸加入文字符號(未知數)於其中，讓學生有了基本的等式概念後，再利用等式的概念來求簡單的符號未知數。

而研究結果顯示：透過半具體的鑽石圖，多數學生可正確使用算式表現固定的數值(鑽石數量)，且能理解數值相等等式成立的概念；透過由具體轉成半具體的代數天秤，學生經由運算判斷天秤是否平衡，且以嘗試錯誤的方式解題，了解只要符合等價關係，便可為符號的解答；學生在解兩等式同時成立的問題時，傾向使用較熟悉之乘除法互逆的解法，此外本研究也發現，部分學生對於以分數的方式呈現等式關係(如： $4 = \frac{\triangle}{3}$ )較難理解，而以除式的表示方式呈現時(以 $\triangle \div 3 = 4$ 來取代 $4 = \frac{\triangle}{3}$ )，則會有較好的表現。在活動實踐後，本研究有以下建議：一、加強學生對於算式中「括號」的認識，例如：括號內的數值可解釋為是「同一群」或「同一類」，學生較易體會；二、強調相同符號代表相同數值，部份學生易誤解相同符號所代表的意義不相同，教學時應要特別提醒學生「同一題中，相同符號代表相同的數值」。

關鍵詞：等量公理、教學活動、等式概念、符號未知數

## 壹、研究背景與目的

民國九十二年公佈之九年一貫數學能力指標中，六年級學童應能理解等量公理，了解等式左右同加、減、乘、除一數時，等式仍然成立的概念(教育部，2003)。而各家版本之教科書，為能配合自九十四學年度起，自一年級及七年級逐年實施的數學課程正式綱要，於是在課本單元之後加入補充教材，以康軒版為例，即有「等量公理與解題」的單元活動。對於國中教師而言，等量公理是個熟悉的名詞，但就國小教師來說，是個全新的嘗試，在九十二年十一月教育部公佈九年一貫數學課程綱要之前，運用「等量公理」來解未知數的教學活動是到國一才開始教授，因此，等量公理對國小教師教學上是個新考驗。

而等量公理與等式概念有著密不可分的關係，根據廖瓊菁(2001)的研究發現，在國小六年級代數教學教材中，「等式」代表等號左右兩邊的值相等的想法，是學生由算術轉換為代數的關鍵概念，亦是學生學習等量公理的基礎。無庸置疑的，等量公理是學習代數的重要轉折點，而「等式」概念又是等量公理的重要基礎概念，如果能提昇學生對等號概念及符號未知數(代數)的理解層次，將能改善現行國小代數教材及教學設計上的缺失，並與等量公理作較佳的銜接，這對代數概念的教學將會是有助益的。

「等式」概念乍看之下非常容易，但卻也常是學生疑惑之所在。例如，學生在面對等式時，會誤認為等號右邊應該是等式左邊運算出來的結果，而未經運算的數字應該擺放在等式左邊(邱志賢和毛國楠，2002)，簡單來說，學生可能了解 $3+5=8$ ，但不一定認同 $8=3+5$ 。而廖學專(2002)發現學生並未真正了解等式是一種「等價概念」，右邊等於左邊，右邊也會等於左邊。在學習代數時，學生常認為等號是掌控一個算術運算的執行命令，而不是認為等號是比較兩個量的關係的符號，這是造成學生在代數運算上學習困難的原因之一(廖瓊菁，2001)。而等量公理的學習不但是等式兩邊等量的關係，並含有對文字符號概念的理解。因此，本研究目的是想藉由研究者所設計的三個教學活動來作為學生學習等式概

念到等量公理之間的橋樑，讓教師在教導等量公理前，以等式概念教學為出發點，然後慢慢加入文字符號(未知數)於教學活動中，待學生有了基本的等式概念後，再利用等式概念來求簡單的符號未知數，最後教師再進入課程中等量公量的教學活動。

## 貳、教學活動設計

### 一、活動設計理念

數學本身是抽象的符號，不易讓學生產生興趣，而故事情境可以使數學變得更有趣、生動，讓學生在面對數學能不再懼怕，並在好奇心的驅使下，樂於挑戰與學習。情境學習理論強調知識是學習者與情境互動下的產物，是在教學活動中透過主動地探究與摸索的過程中獲得 (Brown, Collins, & Duquid, 1989)。因此，本研究一開始的教學活動即以學生所喜愛的偵探故事來引導，期望學生能在挑戰偵探謎題的故事情境下，提高學習興趣，達到有效的數學學習。例如：以福爾摩斯的解碼及柯南救小蘭的偵探卡通故事為教學活動的開端，引起學生的學習興趣。

在數學教育中，提供學生適當的具體學習經驗、半具體學習經驗、及抽象的學習經驗，有助於學生學習 (劉秋木, 1977)。以等式  $5 \times \square = 2 \times \triangle$  的教學為例，就可先讓學生實際操作塑膠教具天秤，當右邊放 1、2、3.....10 個積木時，左邊要放幾個才能使得天秤平衡，藉由反覆的具體操作形成心像，成為運思的圖像，之後漸漸轉變至半具體的圖像表徵 (如以「 $\square$ 、 $\triangle$ 」代替積木)，再提升至抽象的符號(如 X、Y)，幫助學生將運思活動對應到符號中，在屢次的活動經驗瞭解並內化  $5 \times \square = 2 \times \triangle$  的概念。因此，研究者在教學活動一中使用具體的天秤操作情境及半具體的鑽石圖表與代數天秤的圖像表徵方式，讓學童對於純符號的等式為兩邊等價的概念有更具體的體會。同時於教學活動二中加入抽象的符號未知數於等式之內，將等式概念與符號未知數結合，讓學生利用天秤平衡即兩邊相等的概念，求出符合條件的值。研究者於活動三希望學童運用活動一與活動二所學習到

的等式概念與求符號未知數的解的經驗，配合等式成立的條件，能解出符號未知數所代表的值。

根據研究發現，等量公理的代數教學在以多元化的符號表徵未知數，以及利用「天平圖」提昇學生的「等號概念」層次等方面有其教學成效(廖瓊菁，2001)。研究者即以此概念為出發點，參考美國數學教師協會(National Council of Teachers of Mathematics，以下簡稱 NCTM)出版的「3-5 年級代數導航(Navigating through Algebra in Grades 3-5)」，設計三個等式概念教學活動並進行實際教學，透過實際教學活動經驗、學生學習單及學生訪談，對這些教學活動進行探究。

## 二、 教學活動程序介紹

教學活動一主要是要給予學生基本的等式概念，讓學童可以理解算式與算式之間的等式是成立的，如  $9+4\times 4=7+2\times 9$  是對的，研究者透過半具體表徵的鑽石圖，讓學生先了解「25(鑽石圖的鑽石數量)」可以由不同的算式來表示，而這些算式也因為它的值都相等(都等於 25)，所以算式與算式是相等的，它們之間的等式是成立的。在此研究者著重於基本的算式間的等價關係，讓學生了解不同算式間，只要值相等，等式即立；等式成立，那麼兩邊算式所表示的量就是一樣的。

經過教學活動一讓學生經驗算式間的等式關係後，教學活動二裡研究者利用學生已經於「教學活動一」經驗的算式等式關係，進行「代數天秤」是否平衡的判斷，由於代數天秤兩邊所放的不再是具體的積木，而是「數字」所組成的算式，因此學生需經由計算算式的數值，來判斷天秤是否平衡，兩邊是否相等。接著研究者將等式概念與符號未知數結合，在代數天秤的兩邊加入符號未知數

( $5\times \square=2\times \triangle$ )，設定代數天秤在平衡條件下，要學生利用天秤平衡即兩邊相等的概念，求出符合條件的值，在此，符合條件的符號未知數的值會有很多可能。

教學活動三中，研究者想讓學童運用活動一與活動二所學習到的等式概念與求符號未知數的解的經驗，使用邏輯思考的方式，配合等式成立的條件，求出符號未知數。經過教學活動三後，學生能依等式成立的條件，求出符號未知數的值，然後教師即可導入等量公理的教學活動。另外，在教學活動中，研究者提出三種

解法讓教師講授，學生可以依自身的理解喜好選擇所要採取的策略，主要目的是希望學生能體驗到只要等式條件成立，不管從何處著手，皆能求出未知數，代數的解法是多樣化的，不用拘泥於某種方法。

### 三、 教學活動設計

下面為本研究之三個等式概念教學活動，活動設計如下：

#### (一) 教學活動一

活動主題	解碼大偵探
教學對象	國小五年級
教學時間	40 分鐘
教學目標	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. 了解同樣數值可以用不同算式表示</li> <li>2. 不同算式所得的值有可能相同</li> <li>3. 了解兩邊算式的數值相等，則等式成立</li> </ol>
活動流程	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. 教師引導：偵探福爾摩斯到一個神秘的房間，發現牆壁上有一幅鑽石排成的圖案，其中竟然隱藏著「數字密碼」，你能幫忙他找出密碼的可能的組成樣式嗎？</li> <li>2. 教師於黑板揭示圖 1 之兩鑽石排列圖，並說明數字密碼是一算式，其值等於圖上鑽石的個數，請同學想想可能的答案。</li> <li>3. 教師圈出圖 1 之結果，如圖 2，再寫出各自所代表的算式。</li> <li>4. 教師提問：兩圖的鑽石個數相等嗎？那底下那個算式相等嗎？(揭示兩算式所代表的值相同，兩算式相等，完成如圖 3。)請問學生是否加上兩算式後如圖 4，等式也成立嗎？</li> <li>5. 請學生完成學習單（附件一），並想一想，你所寫出來的算式都相等嗎？</li> </ol>

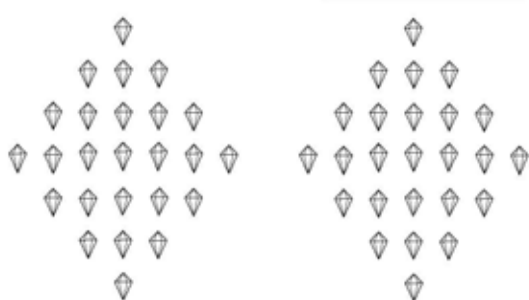


圖 1 鑽石排列圖

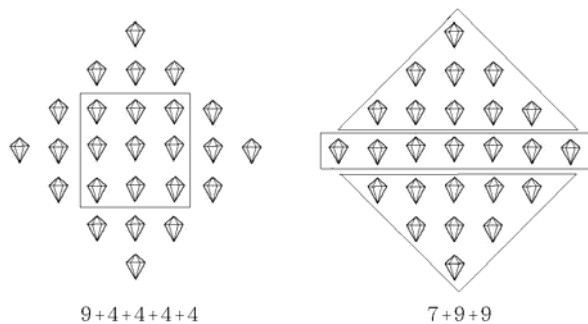


圖 2 圈出數字的可能組合，與寫出可能的式子

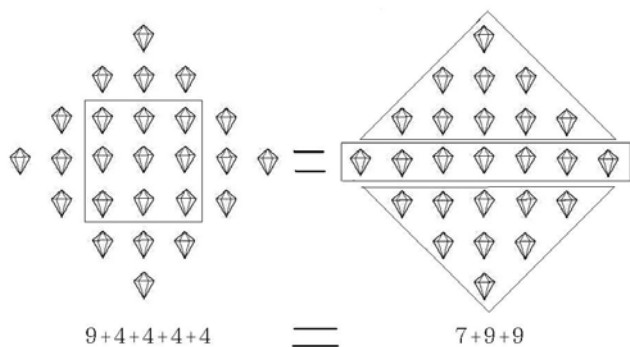


圖 3 鑽石個數相等，故算式相等

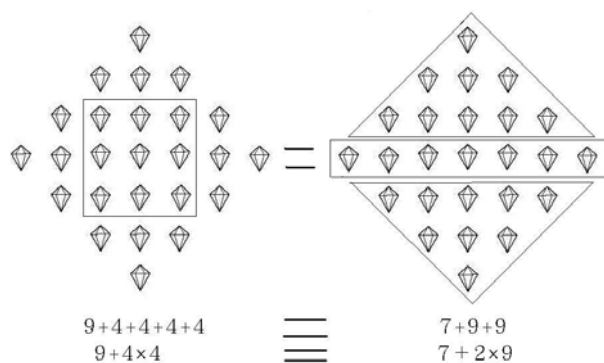


圖 4 算式數值相等，等式成立

(二) 教學活動二

活動主題	代數天秤
教學對象	國小五年級
教學時間	40 分鐘
教學目標	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. 能判斷兩個算式是等式或不等式</li> <li>2. 了解等式的兩邊的數值必須相等</li> <li>3. 能利用等式的性質找出算式中符號所代表的未知數</li> </ol>
活動流程	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. 各組分發塑膠教具天秤一組及積木，請學童實際使用天秤來秤積木，觀察平秤在怎樣的情況下才會平衡？右邊放 1、2、3...10 個積木時，左邊要放幾個呢？</li> <li>2. 教師於黑板揭示圖 5，天秤上放上數字，這個天秤會平衡嗎？如果會為什麼呢？如果不會，它應該會是什麼樣子？教師揭示圖</li> </ol>

- 6, 說明天秤上算式值較大的一邊會下沉。
3. 教師使用圖 7 的代數天秤, 當天秤平衡時, 符號所表的數可以是多少? 教師舉例說明, 並畫出表一, 讓學生共同完成。
4. 請學生完成學習單(附件二)

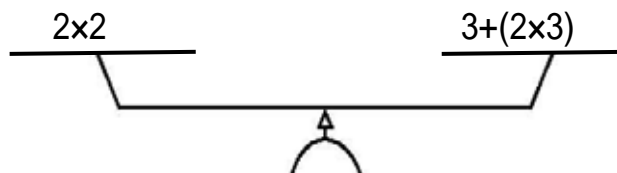


圖 5 數字天秤

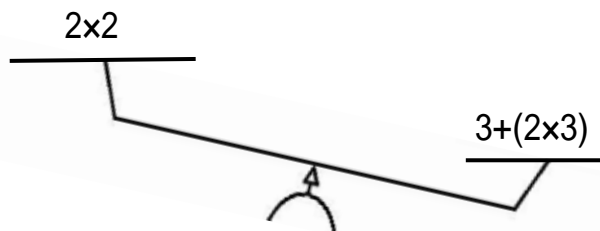


圖 6 天秤兩邊數值不相等時, 會往值大的一邊下沉

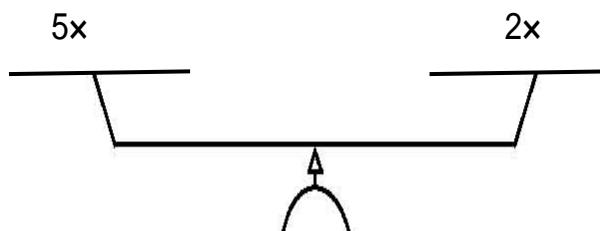


圖 7 代數天秤是平衡的狀態, 符號所代表的數的多少

表一 天秤平衡數值表

□	△
2	5
4	
6	

(三) 教學活動三

活動主題	我是大「判」官
教學對象	國小五年級
教學時間	40 分鐘
教學目標	1. 能使用邏輯思考兩步驟找出符合兩等式中符號所代表的未知數
活動流程	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. 教師引導：以名偵探柯南為故事主角，說明柯南必需解題壞人所佈下的迷題，才能救出小蘭。</li> <li>2. 教師說明圖 8 兩個天秤均為平衡狀態，柯南需求出兩天秤中的 <math>\square</math>、<math>\triangle</math> 所代表的未知數，請學生發表自己的方法。</li> <li>3. 教師引導學生思考下列三種解法。</li> <li>4. 學生依照自己所學習的方法，運用來解學習單（附件三）。</li> </ol>

解法一

如果  $\frac{\triangle}{2} = \square$ ，  
 那麼  $\triangle = \square\square$ ，  
 而且  $\triangle\triangle = \square\square\square\square$ 。  
 因為  $\triangle\triangle$  和 8 平衡，  
 所以  $\triangle\triangle = 8$ ，  
 $\square\square\square\square = 8$ ，  
 因此  $\triangle = 4$ ，  
 $\square = 2$ 。

解法二

因為  $\triangle\triangle = 8$ ，  
 所以  $\triangle = 4$ ，  
 又  $\frac{\triangle}{2}$  和  $\square$  平衡  
 所以  $\frac{\triangle}{2} = \square$   
 代入  $\triangle = 4$   
 $\frac{4}{2} = \square$   
 $2 = \square$   
 $\square = 2$

解法三

因為  $\triangle\triangle = 8$ ，  
 可以記成  $\triangle \times 2 = 8$  或  
 $2 \times \triangle = 8$   
 $\triangle = 8 \div 2 = 4$ ，  
 $\triangle = 4$ 。  
 又  $\frac{\triangle}{2}$  和  $\square$  平衡  
 所以  $\frac{\triangle}{2} = \square$   
 代入  $\triangle = 4$   
 $\frac{4}{2} = \square$   
 $\square = 2$

解法一：此解法是參考 NCTM 教學導引所寫，從圖 8 上方天秤的平衡狀態，  
 先求出  $\triangle$  與  $\square$  兩符號間「整數個」符號的等量關係，再由下方天秤



的相等關係，各別求出 $\triangle$ 與 $\square$ 的值，其中含中遞移的等量關係，如因為 $\triangle\triangle=\square\square\square$ ，又 $\triangle\triangle=8$ ，所以 $\square\square\square=8$ 。

解法二：從圖 8 下方天秤的平衡狀態，直接求出 $\triangle=4$ ，再由上方天秤的平衡狀態，代入下方天秤所得的結果 $\triangle=4$ ，求出 $\square=2$ 。

解法三：與解法二雷同，只是在於 $\triangle\triangle$ 改成以 $2\times\triangle$ 來表示，此處研究者想藉此讓學生了解純符號( $\triangle\triangle\triangle\triangle$ )也可以用更簡單的方式來表示( $4\times\triangle$ )，更方便計算。

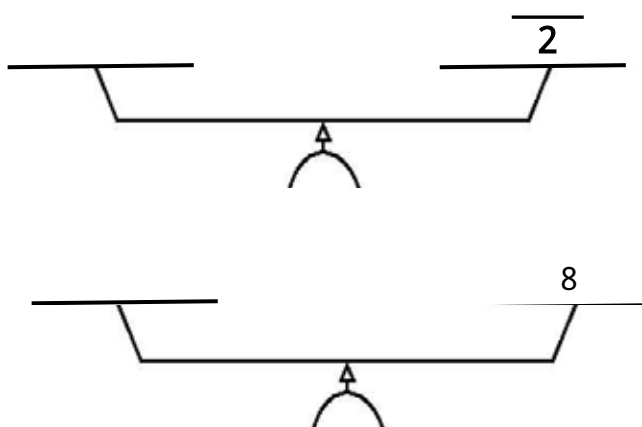


圖 8 兩代數天秤是平衡狀態，求出天秤中的符號未知數。

### 參、教學實踐

本研究教學實施對象為五下學生，共 21 人(11 男，10 女)，屬於小班教學。在經由研究者課室中從旁觀察、教學後根據學習單與學生訪談，並和合作教師進行教學討論，其教學實踐結果分析如下：

#### (一) 多數學生可正確使用算式表現固定的數值：

在教學活動一當中，教師是以鑽石圖(25 顆鑽石)來讓學生自由的寫出算式，雖然程度較低的學生對於數值的算式表達，最常以加法來表現，如：

$1+3+5+7+5+3+1$ ，但也發現該班有近 $\frac{2}{3}$ 的學生能同時運用加法及乘法，多樣且

正確的表現出數值為 25 的算式。在學生的學習單中(如圖 9、圖 10)，我們可以發現小甫和小清在創造算式時，能夠靈活運用加法和乘法，尤其是小清部分，其

清楚地知道要先運算所圈出的上下兩部分(1+3+5)，因此賦予括號。但這個部份同時也是許多小朋友在列出算式時，時常會忘記的部分，因為學生通常很直觀的將自己所畫分的區塊轉換成數字，因而發生列式的錯誤（如圖 11），研究者訪談中也發現學生照著所圈的圖，寫出錯誤的算式而不自覺。此與邱志賢與毛國楠（2002）的研究結果有同樣的發現，學生雖有四則運算的概念，但在列式時卻時常會忽略括號，或是不當使用括號，而導致於列式或是解題的結果錯誤。

T：這個式子你是怎麼寫出來的(指著學習單的算式)？

S：就照著圖寫下來的。

T：那你可以告訴老師為什麼照圖是寫  $1+3+5\times 2+7=25$  呢？

S：嗯...就上面這個圈的有 1 個、3 個、再來 5 個...然後有上面和上面都一樣，所以  $\times 2$ ，中間還有...7 個再加上去。

T：那這個算式會等於 25 嗎？

S：會啊！

T：那你算一下這個式子的答案是不是 25？

S：...嗯.....好像不是...

T：那要怎麼寫才對？

S：...再上加括號

(訪 950623-S 小曄)

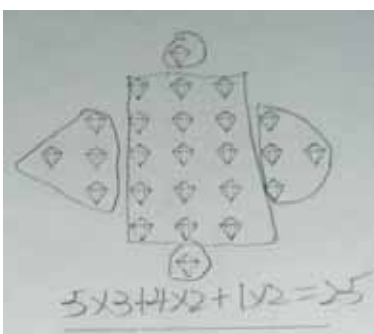


圖 9 小甫運用加法和乘法列式

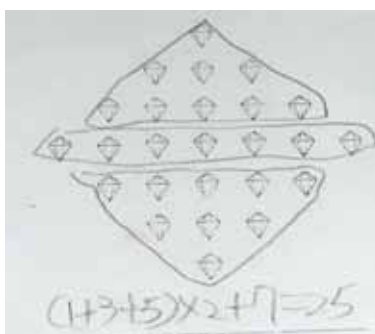


圖 10 小清運用括號列式

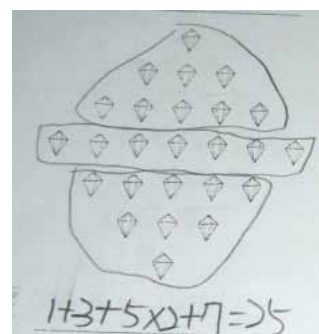


圖 11 小曄直觀的錯誤列

## (二) 學生能理解數值相等等式成立

教師透過鑽石圖的引導，讓學生先了解 圖 1 鑽石排列圖兩邊的鑽石數量是

一樣的，然後分別在鑽石圖上圈分出來，經由兩個圖與算式的對照，學生知道相同的數值可以用不同算式來代表，而不同算式與算式之間的值若相等，可以用等號來連接，而成為等式。研究者與林老師的課後討論中，林老師興奮的表示學生上課反應很好，對於班上較低程度的學生，也知道老師所講的：

「這個鑽石圖的效果很棒，這樣一步一步的讓學生來看，學生很容易就懂不同的算式間會相等，連我們班的小佑(班上程度較低者，平常反應很慢)他也有反應。」(訪 950622-林師)

林老師：來，那小佑，你告訴大家下面的這兩算式會不會相等(指  $9+4+4+4+4$  與  $7+9+9$ )？

小佑：……會吧(反應不是很快)

林老師：為什麼會相等呢？

小佑：...因為圖都一樣多。

林老師：圖的什麼一樣多？

小佑：鑽石。 (觀 950622)

而從研究者的訪談中，也得到學生經過體驗半具體的圖象表徵而連結到算式，體會不同的算式，也可能因為值的相等而相等：

T：你所寫的  $9 \times 2 + 7$  和  $9 + 4 \times 4$ (指出該生學習單所寫)我可以寫成

$9 \times 2 + 7 = 9 + 4 \times 4$ (寫在旁邊)嗎？

S：可以啊！

T：為什麼可以？

S：因為都是 25 啊！

T：你怎麼知道都是 25？

S：就它們都是等於上面的鑽石啊！ (訪 950623-S 小儒)

### (三) 學生能接受具體物轉換成數字與符號，並經由運算判斷天秤是否平衡。

教學活動二中，研究者先讓學生從操作真實的天秤，然後再將真實天秤轉為用圖像天秤表示，天秤上原本為「具體的積木」，也改成「數字算式」，學生在經

歷教學「活動一」後，很自然的能接受天秤上放置數字與運算符號的算式，並且能判斷兩邊是否相等(平衡)。如圖 12 中，學生小靜能先計算天秤兩邊是否為等值，然後再進一步判斷兩邊是否會是平衡狀態。雖然在判斷天秤是否平衡的過程中，學生會因為整數四則運算的錯誤，而導致判斷失誤，但學童已經具有天秤兩邊必需等量才會平衡的概念，從圖 13 中可驗證研究者的說法，學生小萍對於右邊算式「 $(5 \times 1) + (57 - 17)$ 」運算失誤為「200(正確應為 45)」而導致天秤狀態的判斷錯誤，但以另一方面來看，學童已經知道天秤在什麼條件下才會平衡了。

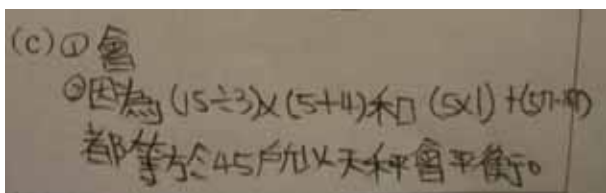


圖 12 小靜先計算再判斷天秤是否平衡

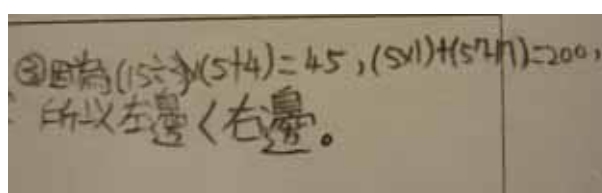


圖 13 小萍因計算錯誤而導致判斷失誤

(四) 學生以嘗試錯誤的方式解題，了解只要符合等價關係，便可為符號的解答。

在解決代數天秤兩邊符號數值的問題時，學生採用的方式，與教師教學時的方法相同，均以代入數字，嘗試錯誤的方式來進行。以下是學生學習單中的解題(如圖 14)：

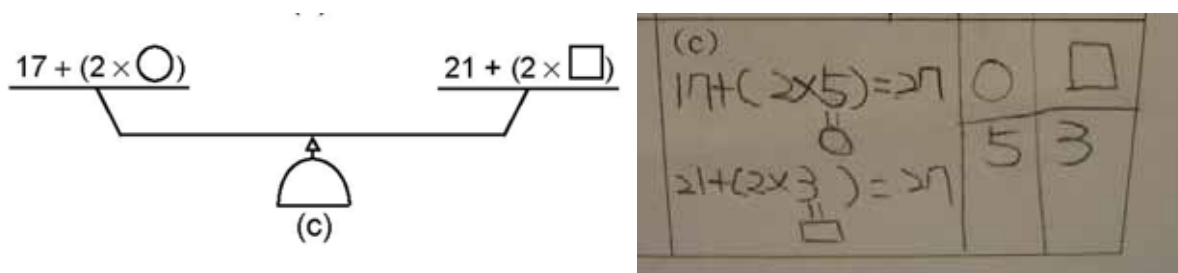


圖 14 小靜以嘗試錯誤的方法解題

解題時，學生試驗發現，在天秤平衡兩邊相等的條件下，當 $\bigcirc$ 代入 5， $\square$ 代 3 時，符合平衡關係，故為其解答。而在運用天秤兩邊相等的關係求未知數時，有部份學生跳脫教師的教法，已可自行運用乘除互逆來解題(如圖 15)。

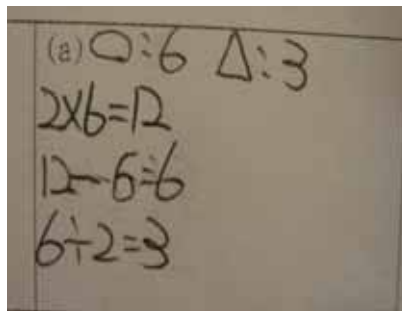
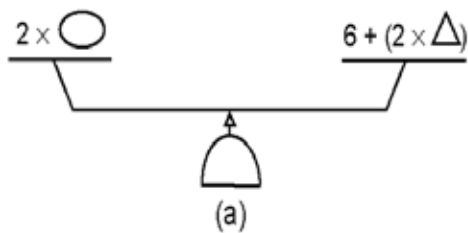


圖 15 小綉運用乘除互逆解題

(五) 部份學生誤解相同符號所代表的意義

學生對於學習單中天秤上的符號未知數，雖能了解符號均代表一個未知數，但忽略了「相同符號」，在同一題目中應代表「同樣的數值」。下面的學習單及訪談可以驗證研究者的說法：

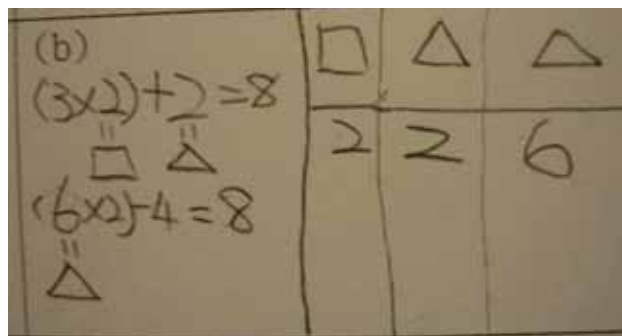
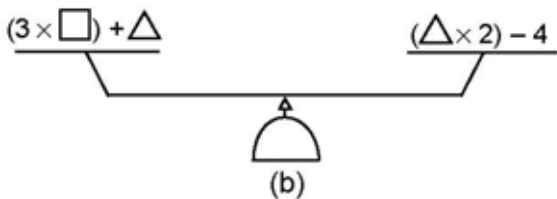


圖 16 小靜不知相同△代表相同的值

T：那你這裡的三角形(Δ)兩個算出來的答案怎麼不一樣？

S：它們都是符號啊！不是代進去相等就可以嗎？

T：不是…同一題的天秤，相同符號代表的是相同的數。(訪 950628-S 小靜)

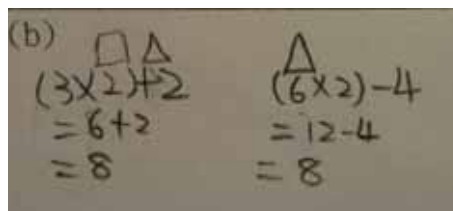
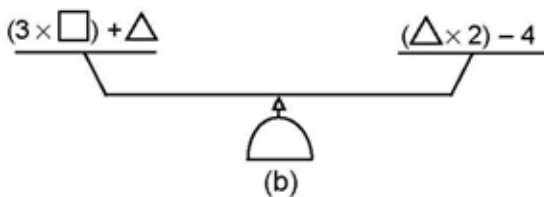


圖 17 小萍不知相同△代表相同

T：小萍，你這一題兩個三角形（圖 17）為什麼代表不一樣的數呢？

S: ...

T: 那你覺得這兩個三角形代表一樣的東西嗎?

S: 是吧?

T: 那答案怎麼會不相同呢?

S: ...想錯了, 所以...兩個三角形應該要一樣吧?

T: 沒錯! (訪 950628-S 小萍)

### (六) 學生較傾向於使用「解法三」來解題

在教學活動三中, 根據學生上課的反應及學習單的解法, 發現「解法一」(源自 NCTM 教學導引)較不為學生所採用, 學生較能接受「解法二」及「解法三」, 而其中以「解法三」為大部份學童所使用的解題方式, 經過教學者與研究者討論, 認為其與學生的先備知識有關, 學生因有乘、除法逆運算的能力, 而「解法三」為三種解法中最直接又簡化之解題方式, 因此, 學生大多採用此方法解題。底下為研究者上課觀察:

小甫:「老師, 為什麼不直接就用第三種就好了?」

老師:「為什麼呢?」

小甫:「比較簡單啊!」(多數人應和: 對啊!)

老師:「那第一種不好用嗎?」

小甫:「不好用, 太多了。」

小維:「有點複雜。」(插入對話) (觀 950629)

### (七) 部份學生對於「分數符號未知數」的等式關係較難理解

雖然部份學生對於「分數符號未知數」的等式, 可以很清楚的以天秤兩邊等量關係來解題(如圖 18), 但總括來說, 學生對於天秤兩邊為倍數關係的等式關係(如:  $6=2\times\square$ )較能了解, 能運用乘除逆運算來求值( $\square=6\div 2=3$ ), 但對於天秤兩邊有「分數符

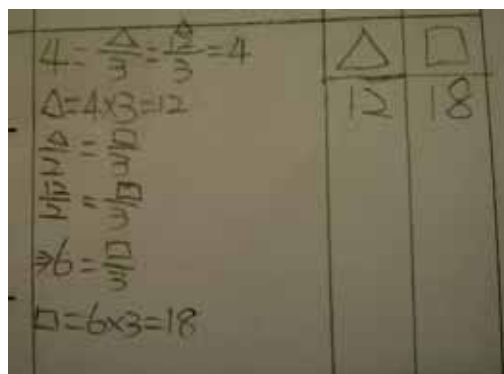


圖 18 小汶以等量關係來解題

號未知數」的等式關係，則解題錯誤較多，雖然國小五年級學童已學習過分數，但對於具分數型式的符號未知數之等式，仍有困難。多數學童對於「 $4 = \frac{\triangle}{3}$ 」的想法，雖認為是表示 $\frac{1}{3}$ 個 $\triangle$ 和4相等，但對於接著要求一個 $\triangle$ 為多少則有困難，有趣的是，當研究者訪談時，提醒學童「 $\frac{\triangle}{3}$ 」就是「 $\triangle \div 3$ 」，「 $4 = \frac{\triangle}{3}$ 」也就是「 $\triangle \div 3 = 4$ 」，則大多數的原本求不出 $\triangle$ 之值為多少的學童，都能以「 $\triangle = 4 \times 3$ 」求出 $\triangle = 12$ ，可見乘除法逆運算對學童而言還是較熟悉的概念。因此，在研究者與教學者討論後，認為教學活動三應以「除式」來取代用「分數」表示「分的符號未知數」，例如：以 $\triangle \div 3 = 4$ 來取代 $4 = \frac{\triangle}{3}$ ，或將「除式的符號未知數」放置於「分數符號未知數」之前，且提醒學童兩者之關係（例如： $\frac{\triangle}{3}$ 也就是 $\triangle \div 3$ ）。

**(八) 部分學生仍會以「嘗試錯誤」方式解題，非用邏輯推理的方法。**

雖然於教學活動三時，教師以邏輯推理的方式講述解題，但部分學生受「活動二」的影響，將題目中應同時成立的兩天秤「分開解題」，以「嘗試錯誤」的方式解題，一一代入數字於天秤符號中(如圖 19)。若各別來看兩天秤，其答案均符合兩邊相等的平衡關係，但在此兩天秤的平衡關係不但是要同時成立，而且所代表的符號的值是相同的，雖然老師課前再次強調，但仍有部份學生發生活動二中的錯誤，未將同題中的符號視為相同的值。

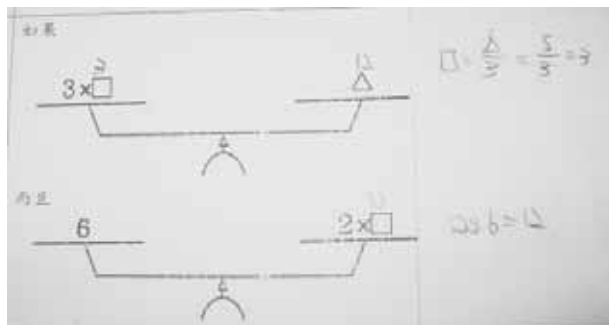


圖 19 小錯誤將兩天秤分開處理

## 肆、結論

本研究旨在探討學童於等式概念教學活動中之學習表現，從教學活動設計出發到實際教學活動進行，由現場觀察、學生訪談及與教學者之討論，探究教學活動中學生發生之點滴。以下為實施完以述三個教學活動後，所提出的三點建議：

### (一)加強學生活括號的認識

學生實際教學中，學生經由教學活動一中半具體的鑽石圖，多數學生可正確使用算式表現固定的數值(鑽石數量)，且能理解數值相等等式成立的概念，但於教學時，應加強學生對於算式中「括號」的認識，例如：括號內的數值是代表鑽石圖中的「同一群」或「同一類」，所以要把它們一起放在括號內，跟「圈起來」是同樣的意思，如此，學生較易體會。

### (二)相同符號代表相同的數值

教學活動二以具體天秤轉為半具體的代數天秤，學生能接受具體物轉換成數字與符號，並經由運算判斷天秤是否平衡，且學生以嘗試錯誤的方式解題，了解只要符合等價關係，便可為符號的解答，但部份學生易誤解相同符號所代表的意義，因此，進行教學活二時，要特別提醒學生「同一題中，相同符號代表相同的數值」。

### (三)用「除式」的表示方法來取代「分數」

經由教學活動三，研究者發現學生由於較熟悉乘除法互逆的運算，於解兩等式同時成立的問題時，較傾向於使用乘除法互逆的解法來解等式問題，另外研究者也發現，部份學生對於「分數符號未知數」的等式關係(如： $4 = \frac{\triangle}{3}$ 或 $\frac{\triangle}{2} = \frac{\square}{3}$ )較難理解，但若用「除式」的表示方法來取代「分數」的表示方法，例如：以 $\triangle \div 3 = 4$ 來取代 $4 = \frac{\triangle}{3}$ ，則有較好的表現。

以上的教學活動實踐，研究者藉由學生表現與研究發現的呈現，提供教師進行「等式概念」教學活動之參考，期待未來國小教師所教學的不止於「等量公理」，



而可以於等量公理教學前，更能加深學生對於等式概念的了解。

### 參考文獻

- 吳宛儒、蔡鳳秋、楊德清(2005)。故事情境融入國小數學科教學之研究～以面積單元為例。 *科學教育研究與發展季刊* 41 期，74-94 頁。
- 邱志賢、毛國楠(2002)。國小六年級學童解未知數文字題之另類概念分析。 *台東師院學報* 第十三期 (下)，40-55 頁
- 教育部(2003)。 *國民中小學九年一貫課程綱要：數學學習領域*。台北：教育部。
- 陳霈頡、楊德清(2005)。數學表徵應用在教學上的探究。 *科學教育研究與發展季刊* 40 期，48-61 頁。
- 楊瑞智主編(2004)。 *國民小學數學第十二冊*。康軒。
- 廖學專(2002)。初探國中生等號概念之心像。台北：國立台灣師範大學數學系教學碩士班碩士論文(未出版)。
- 廖瓊菁(2001)。國小六年級代數教學之研究。屏東：國立屏東師範學院國民教育研究所碩士論文(未出版)。
- 劉秋木 (1977)。 *數學教學的決定因素和專業素任*。見台北市立師專研習中心主編。 *國民小學數學研習教師手冊*。
- Brown, J. S., Collins, A. & Duguid, P. (1989). Situated cognition and the culture of learning. *Educational Researcher*, 46(1), 32-43.
- Navigating Through Algebra in Grades 3-5. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics Navigations Series*. Reston, VA:NCTM.

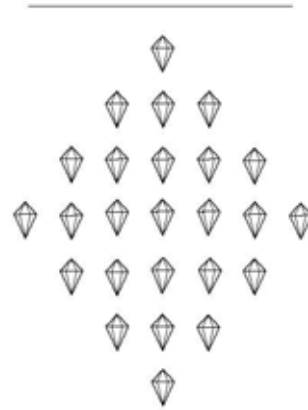
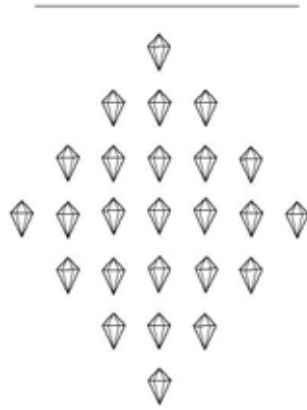
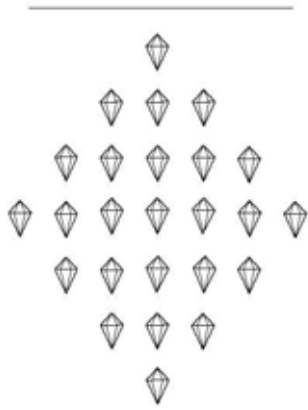
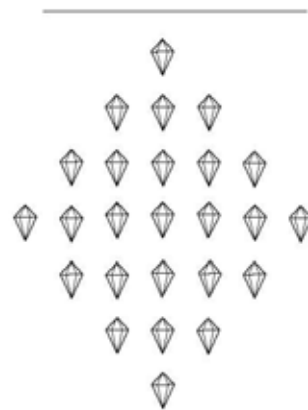
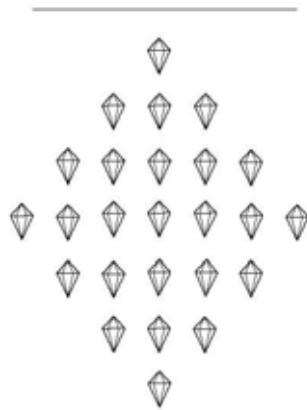
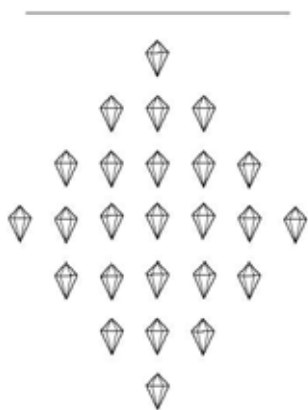
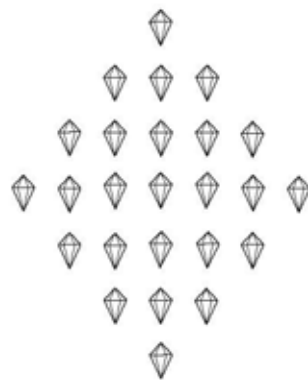
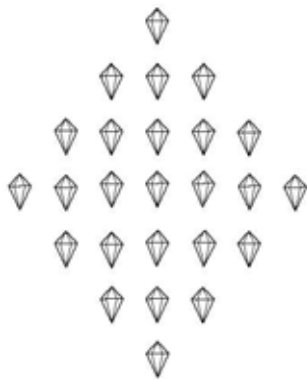
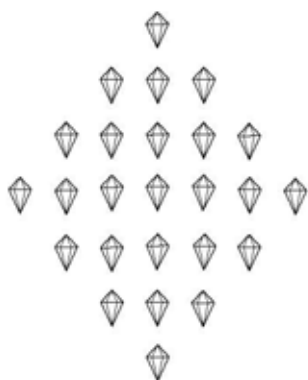
附件一：

解碼大偵探

姓名：

大偵探福爾摩斯來到一個神秘的房間，發現牆壁上有一幅鑽石排成的圖案，其中竟然隱藏著「數字密碼」，你能幫忙他找出密碼可能的組成樣式嗎？

牆上提示：鑽石的個數與數字密碼相等。(請先圈出鑽石的組合，再寫出數字算式。)



附件二： 「代數天秤」學習單 姓名： \_\_\_\_\_

一、請判斷底下的天秤是不是會平衡呢？如果不會，它會斜向那一邊，並寫出你的理由。

	(a)
	(b)
	(c)

二、如果底下的天秤兩邊要相等，圖形內的數字是多少呢？請寫下來。

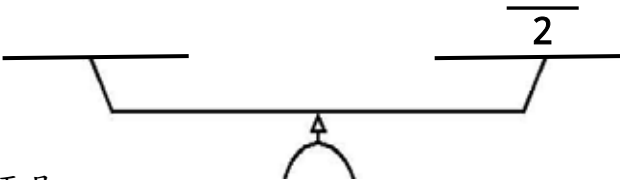
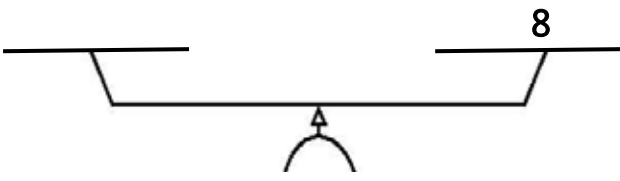
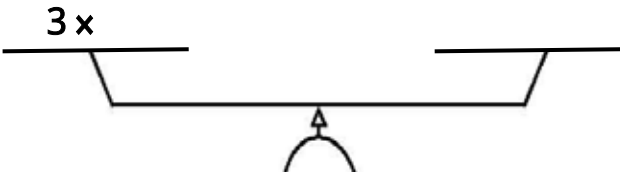
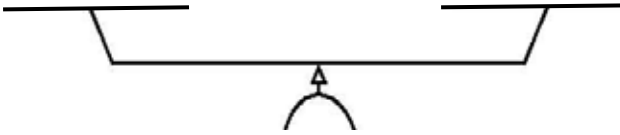
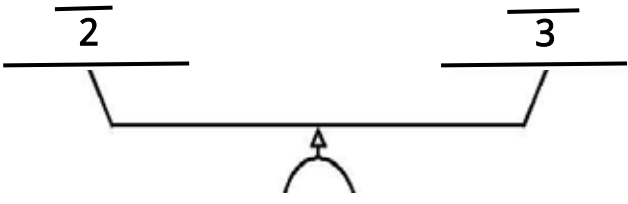
	(a)
	(b)
	(c)

附件三：

我是大判官

姓名：

底下各題的天秤都是平衡的，請根據所給的兩個天秤，找出□和△中的所代表的數字各是多少？你是怎麼知道的？

<p>第 1 題</p>	<p>如果</p>  <p>而且</p> 	
<p>第 2 題</p>	<p>如果</p>  <p>而且</p> 	
<p>第 3 題</p>	<p>如果</p>  <p>而且</p> 