第二章 文獻探討

第一節 平方根的源起與發展

一、無理數的發現

數是人類創造出來計算東西的概念，在數的發展歷程中，正整數、分數很自然地融入人類的日常生活中，然而無理數[註1]（不能表示成$\frac{p}{q}$的數，p、q 為整數）的發展在人類生活經驗中是難以接受的概念。張景中（1985）在其著作「從$\sqrt{2}$談起」中指出：「在$\sqrt{2}$被發現之後，經過兩千四百多年的數學實踐，反覆的探索與爭論，嚴密的實數系統理論終於建立起來了。這個$\sqrt{2}$，才正式被接納為實數大家族的一員。」

在希臘的數學中，畢達哥拉斯學派認為只有自然數才是存在於宇宙的數，因而對於分數，他們都將之表為兩個自然數的比，並發展出可度量(commensurable)的想法：兩個量若存有另一個較小的量可以同時量盡這兩個量，則此兩個量為可公度量。Kline(1972)指出畢氏學派相信:「所有的東西都含有數的成份，數是形成宇宙的要素。」當然這裡的數指的是自然數。楊淑芬(民 81)指出:究竟是誰最先發現不可公度量，其詳情已不可考，較被認同的看法是 Pythagras 應用畢氏定求理求得等腰三角形的斜邊長，發現了$\sqrt{2}$，並發覺找不到任何一個量可以同時整數倍地量盡此斜邊長與股長(Heath,1956,Vol.1)；也有人認為是畢氏學派在大約西元 410 年之前所發現的(Boyer,1968)。畢氏以假設$\sqrt{2}$為一有理數而得到矛

盾結果的方法來證明$\sqrt{2}$為一不可公度量之量[註2]，對$\sqrt{2}$的發現與確認它是一個不可公度量的數，成為畢氏學派的致命傷，因為並非”所有的東西都含有數”，這個$\sqrt{2}$之量無法寫成兩個自然數的比，Kline(1972)指出 hippasus(公元前五世紀)因洩漏此一祕密而被投入海中，可見此數所造成的震撼，它沉重地打擊了畢達哥拉斯學派的信條。

楊淑芬(民 81)曾提及因為不可公度量的出現，導致隨後大多數的希臘數學家，極度偏重幾何學的研究，並逃避有關以數字表現的理論。Kline(1972)指出：在希臘幾何逐漸式微沒落後，代之而起的是印度及阿拉伯，對於無理數，印度數學家不像希臘人因無理數概念在邏輯上的困難，他們對計算的興趣導致印度數學家儘管未能對無理數的運算結果作詳細證明，並可忽略相關的邏輯問題，他們仍正確的使用了無理數的運算規則，如：$\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{a\times b},\sqrt{a}/\sqrt{b}=\sqrt{a/b}$ ，印度人因而可得心應手的將有理數的運算推廣到無理數上。阿拉伯人也繼承了印度數學的處理方式，這也影響了十六世紀的歐洲數學發展。在中國古代也有無理數的想法，在「九章算術」開方術中有云：「若開之不盡者，為不可開，當以面命之。」按劉徽注的說明，開之不盡而命”面”；所謂”以面命之”，是說在開之不盡時，便將這個無法用分數來表示的數定義為”面”。張景中（1985）也指出：隨著農業生產的發展，人們為了掌握季節變化的規律，要有天文知識，要測量日月星辰的位置，三角學發展起來了，被發現之後四百多年，人們已會計算許多角度的三角函數值，這些值大多數是無理數。到了 1500 年前後，人們不但會解二次方程式，而且開始會解一些特殊的三次方程式了。這些方程式的根，很多是無理數。又過了不到 100 年，納皮爾(Napier,1550-1617)發現對數，而有理數的對數大多都是無理數。

由上文可知，無理數的發展是基於實用的需要，然而一旦開始應用無理數，無可避免地會促使數學家討論無理數的實質：無理數是什麼樣的數？運算的邏輯基礎如何建立？Kline(1972，摘自林炎全、洪萬生譯本)的書中指出了歷史上由無理數產生的紛爭與困擾：

1.Stevin(1548~1602)在 1634 年出版的書「Treatise on Incommensurable Mangnitudes」中，Stevin 以“奇異的數（bizarre numbers）”稱呼無理數，並批評當時的某些作者：「有一些算術作者在處理如 $\sqrt{8}$ 這類的數時，將之稱為無稽、荒誕的數等等，這真是一件庸俗的事。」Stevin 認為無理數是真正的數，並可用有理數表示其近似值。

2. Stifel(1487~1567)堅持真正的數只有整數和分數，並曾經考慮以近似值來表示無理數；在其著作「Arithmetica Integra」中曾說：「由於證明幾何圖形，有理數有其不足之處而無理數正好可以彌補‧‧‧我們被迫認定它們是真正的數‧‧‧假如我們將它當作小數來看，我們發現它是難以捉摸‧‧‧」。

3. Pascal(1623~1662)和 Barrow(1630~1677)等認為形如 $\sqrt{2}$ 這種數只是幾何上的度量，它們只是一種符號，不能脫離幾何度量而單獨存在。

4. Descartes(1596~1650)提出數與幾何度量可以建立一一對應關係的概念，承認無理數是抽象的數，可以表達連續量。

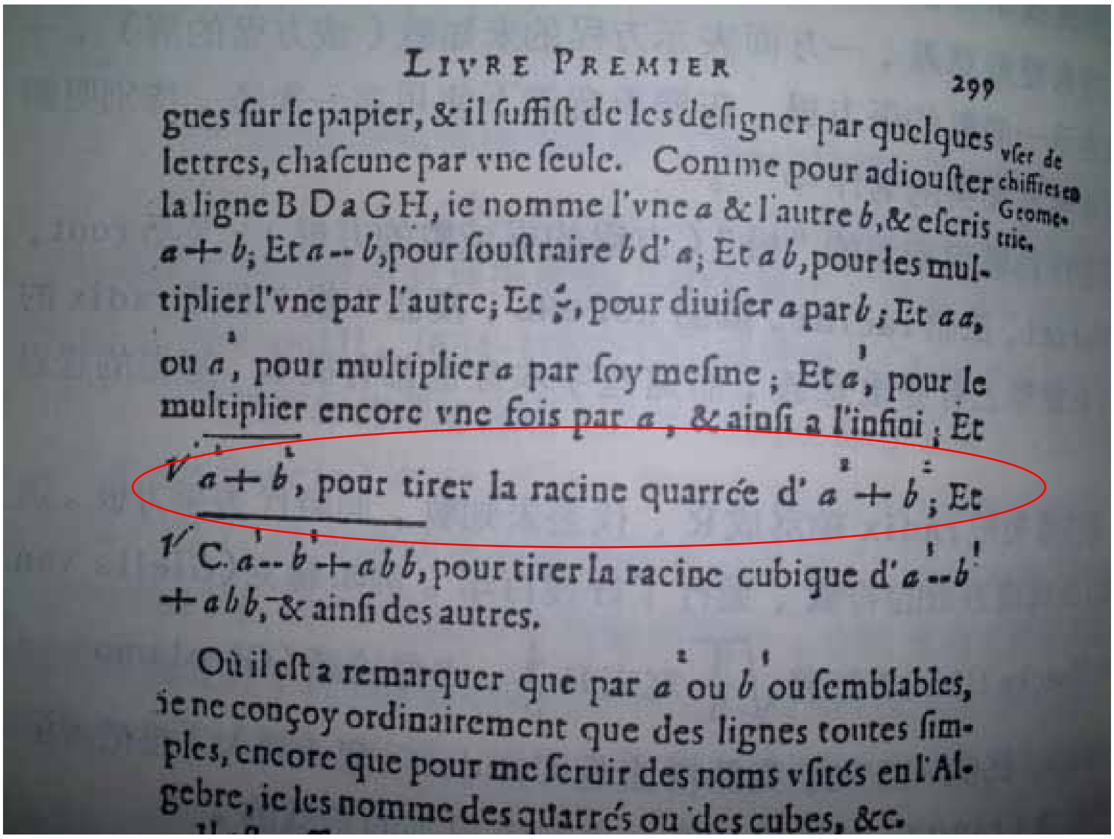
從數學家們多年來的爭論中，可以看出從無理「量」到無理「數」的過程中有許多的困惑。由此數學脈絡，可以預見學生在初學平方根時，產生的種種學習困境是可以理解的，如對方根數感到不可捉摸，覺得它只存在數學課本中。又或者熟練方根的計算，卻無法解釋其概念；又或者認為 1.414 就是 $\sqrt{2}$ ，將近似值當作無理數的量等等學習困惑；可見數學史是數學概念發展的嚮導。有了數學史

的素養，將有助於教師明確清楚地呈現數學概念（洪萬生，1989)。

二、方根符號的演進

在無理數的發展史上，人們為了能互相溝通，方根符號因應產生。Skemp(1989)指出：符號是心智物體，有了它，我們可以進行思考，符號也是實在物件，它是記號活躍於紙上使人能夠看見，每個記號又有其讀音使人能聽見。

我們現在使用的平方根號”$\sqrt{\ }$”，首次的文獻記載，是在 1637 年笛卡兒(Descartes，1596~1650)所著的<幾何學>這本書中，他在原書第一版的 299 頁上寫著:如果我想求a^2+b^2的平方根，就寫作$\sqrt{a^2+b^2}$（見圖 2-1-1）（梁宗巨，1995)。


LIVRE PREMIER 299

gues ſur le papier, & il ſuffiſt de les deſigner par quelques lettres, chaſcune par vne ſeule. Comme pour adiouſter la ligne B D a G H, ie nomme l'vne a & l'autre b, & eſcris $a+b$; Et $a--b$, pour ſouſtraire b d'a; Et ab, pour les multiplier l'vne par l'autre; Et $\frac{a}{b}$, pour diuiſer a par b; Et aa, ou a^2, pour multiplier a par ſoy meſme; Et a^3, pour le multiplier encore vne fois par a, & ainſi a l'infini; Et $\sqrt{a^2+b^2}$, pour tirer la racine quarrée d'a^2+b^2; Et $\sqrt{C.\,a^3--b^3+abb}$, pour tirer la racine cubique d'a^3--b^3+abb, & ainſi des autres.

Vſer de chiffres en Geometrie.

Où il eſt a remarquer que par a^2 ou b^3 ou ſemblables, ie ne conçoy ordinairement que des lignes toutes ſimples, encore que pour me ſeruir des noms vſités en l'Algebre, ie les nomme des quarrés ou des cubes, &c.

圖 2-1-1 $\sqrt{\ }$ 的出現文獻

然而，在”√”被廣泛使用之前，數學家們用什麼樣的符號代表平方根呢？

古埃及人以“╔”表示平方根;九世紀時,花粒子米(al-khwarizm,783~850)的<代數書>比較完整地討論二次方程的解法，他將一次項(x)視為二次項(x^2，阿拉伯語 mal)的平方根，稱為 jidhr；jidhr 的原來意義是樹根、基礎或根本。12 世紀初,大量的阿拉伯語書籍翻譯成拉丁語,他們用拉丁語 radix 來譯 jidhr,radix 也是樹根或事物根本的意思。Radix 和 jidhr 在數學上具有相同的意義，一方面表示方程的未知數(或方程式的解)，一方面又表示一個數的平方根(梁宗巨，1995)。

最早，在拉丁文的手稿中，在數字或字母前用一個點“•”表示求平方根，兩個點“..”表示求 4 次方根，三個點“…”表示求立方根，四個點“….”表示求 9 次方根。很明顯的這並非是個好設計，容易造成使用上的困擾(因為，若兩個點“..”表示平方根的平方根,那麼三個點“…”就該是平方根的平方根的平方根，即 8 次方)。

邱靜如(民 90)整理出方根符號的發展:1537 年赫克(Gielis vander Hoecke)將$\frac{4}{5}$的平方根寫成 R$\frac{4}{5}$；1539 年卡兒達諾(Girolamo Cardano，1501~1576，意大利人)將 9 的平方根寫成 R9。到了 17 世紀，“R“漸漸不被使用，雖然在義大利與西班牙仍有立足之地，但在英國則漸漸沒落。在德國 Andreas Alexander 的手稿中，以$\int$表示，$\int$z 表示平方根；$\int c^{\cdot}$表示立方根；$\int cc^{\cdot}$表示 9 次方根。“√”是在 1525 年發行的魯道夫(c。rudolff)的<代數>中所看到的。

註1希臘人稱整數之為”ratio-nal number”,意思是成比(ratio)的數。但”rarional”這個詞本來有”有理”或”合理”的意思,所以”rational number”這個詞在我國被譯為”有理數”。

而像$\sqrt{2}$這種不能用整數和整數之比的數,按希臘人的稱呼是”ir-ratio-nal number”,意思是不能成比的數。但”irrarional”這個詞本來有”無理”或”不合理”的意思,所以”irrational number”這個詞被譯為”無理數”。

註2若所有線段的長度,都能用整數或者整數之比來表示,設邊長為1的正方形對角線長為$\frac{p}{q}$,並且p和q之間沒有公因數。

根據勾股定理

: $(\frac{p}{q})^2 = 1^2 + 1^2 \quad \Rightarrow p^2 = 2q^2$

$\because 2p^2$是偶數,即p^2是偶數,所以p應是偶數。

又$\because$ p和q沒有公因數, $\therefore$ q必是奇數。----------------------------<1>

P既是偶數,則可設p=2œ $\Rightarrow \quad p^2 = 4\alpha^2 = 2q^2 \Rightarrow q^2 = 2\alpha^2$

這說明了p^2是偶數,q也是偶數,與<1>矛盾。

第二節 數學概念的認知與發展

一、認知發展理論

Piaget 將認知發展看成一個不斷同化(assimilation)與調適(accommodation)的歷程;同化會使個體的基模擴充,調適發生於個體的舊知識對新知識產生認知衝突後,進而整合的過程,指已存在的心智基模無法像同化把外界的刺激或資訊容納到現存的基模中,它必須針對外界環境的新資訊,加以修正而產生新基模。根據 Piaget 的解釋,個體能對環境適應,表示他的認知結構或基模的功能,能夠在同化與調適之間維持一種波動的心理狀態,此種心理狀態稱為平衡(equilibration)和失衡(disequilibrium)。當個體能將既有基模同化

於環境中新知識經驗時，在心理上會感到平衡;反之，心理上會感到失衡，此時個體會形成一股內在驅力，驅使個體調適原先的基模，使自己能容納新的知識經驗。

因而教師要善用認知衝突，讓學生有機會進行同化與調適。例如，在方根教學時，請學生思考是否存在面積為 18 的正方形？學生在嘗試的過程中會發現現存基模的不足，心智因而產生不平衡的混亂，在這此刻，教師要避免直接提供口語指導，應給學生討論對話的時間，當學生的解題策略不符合題意或不適當時，教師可提出問題來協助學生重新的思考。在教學活動中，教師和學生的互動，學生之間的互動，學生的自我對話，影響了學生的認知發展。Vygotsky（1962）認為個體的認知發展是在社會學習歷程中進行，強調語言發展與認知發展的關係，並提出了可能發展區(zone of proximal development)的理念，即兒童實際的智力年齡與他在幫助的情況下解決問題所達到水準之間的差異，揭示了他的可能發展區。

可能發展區的理念就是超越已知基礎的層次，將學生置於“由不全知”而“求全知”的境界，在教師輔助下，從事新知識的學習。因此教師是否能適時給予學生必要的輔導協助，是教學的一個重大關鍵，Vygotsky 在所著的<思想與語言>一書中說道:「兒童在協作的情形能做的東西，明天他就能自己去做。因此，一種合理的教學，就是使它走在發展的前頭，並引導發展;…」(Vygotsky,1962,摘自李維譯本,p170)。

Vygotsky 倡議可能發展區的本意，也是把輔助學生視為必要條件，教師是適時給予學生必要的輔導協助，即所謂的鷹架（scaffolding）作用；方根教學中，研究者以課程中引入數學史和建構一多重表徵的教學環境，來作為學生的鷹

架；數學史提供情境脈絡幫助學生可以充分的了解他人對方根的看法，從中得到適當的解釋支持自己的判斷，或反思自己的認知。而多重表徵的教學環境可以幫助學生能順利連結轉換方根的多重表徵，使學生對方根有完整、清晰的概念。

二、 概念表徵

表徵（representation）為認知心理學研究重點之一，在認知心裡學上，表徵是指將外在現實世界的事物以另外一種較為抽象或符號化的形式來代表的歷程；而在認知心裡學的訊息處理（information processing）取向上，則是指訊息處理過程中，將訊息譯碼（coding）而轉換成另一種形式，以便儲存或表達的歷程（張春興，1989）。

Lesh, Post & Behr （1987）由溝通的觀點重新描述表徵的類別，將數學解題區分為五個表徵系統。利用不同表徵系統來作題目時，會影響題目的難度與學生的思考，其彼此之間的轉換為平面網狀式的互動發展，如圖 2-2-1：

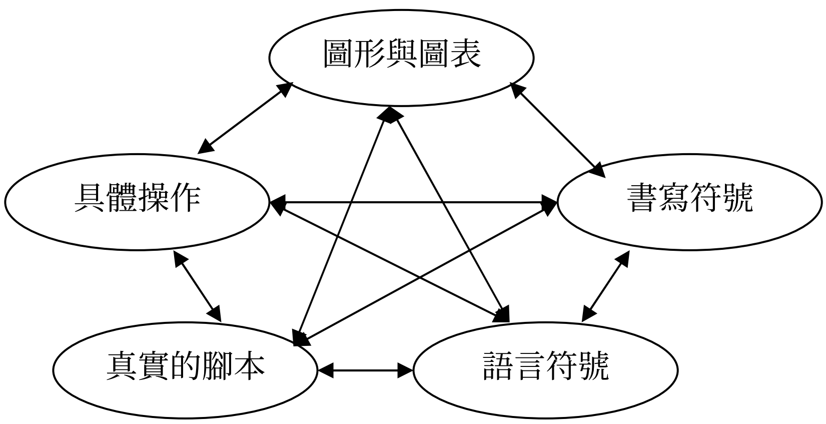


圖 2-2-1　表徵系統的交互作用模式

1.真實的腳本（real scripts）：由真實世界的情境或知識來解釋與解決類似問題的情境。如：請學生思考是否存在面積為 18 的正方形？

2.具體操作（manipulative models）：使用具體物，以顯示數學情境的內在關係與操作。如：在方格紙上畫出或使用褶紙的方式做出面積為 18 的正方形面積。

3.圖形與圖表（static pictures）：一種靜態的模式，如：面積為 2 的正方形邊長、數線上的點…等。

4.語言符號(spoken language)：日常生活中常用的口語符號。如：2 的平方根、根號 2…等。

5.書寫符號（written symbols）：常用的數學算式或數學符號。如：$\sqrt{2}$ 、$\sqrt{2}+\sqrt{3}$ 、$\sqrt{2}\times\sqrt{3}=\sqrt{6}$ 、$\sqrt{10}\div\sqrt{2}=\sqrt{5}$ …等。

在這五種表徵中，並非強調如何區別這五個不同的表徵，而是在於表徵系統之間的轉換。

林福來(1997)即曾指出對一個數學概念，能用不同的現象與表徵說明意義，表示對此概念有感覺。左台益、蔡志仁（2001）也曾表示數學學習的理想方法是能在同一個物件上運用數個表徵，使學生能對該概念有清晰的多重表徵。

多重表徵在人類推理及學習時的媒介角色，尤其是在科技應用發達的現代，各科學領域中多重表徵運用的研究，就顯得相對重要。既然不同表徵之間的聯結和多重表徵的使用都有助於概念的學習，因此教師在教學時應該使學生明白各表徵之間的連結，幫助學生發展更完善的概念架構。

研究者參考 Lesh, Post & Behr 的表徵系統的交互作用模式，將真實腳本、具體操作、語意、圖形、書寫符號這五種表徵，運用於方根的教學策略中，在教學時幫助學生了解這些表徵的意涵及其連結。在這些數學概念表徵的學習與表達

中，有一不可缺的工具媒介，那就是數學符號，惟有掌握了這工作媒介，方能將多重表徵整合應用。

三、符號的作用

符號可以幫助我們充份理解數學概念。符號可以做什麼？應如何將符號同化到適當的機制？Skemp(1989,摘自許國輝譯本)提出了上述問題的解答：

1.符號可以做什麼？符號可以溝通、紀錄知識、簡化分類、自動化日常的操作活動・・・。符號是一種心智事物，可藉之思考；同時也是實體事物，它可以看的到也聽的到，是代表概念的標誌和把手，也是內在心靈和外在世界的接觸介面。

2.應如何將符號同化到適當的機制？概念結構形成了數學的深層結構(D)，而符號形成了表層結構(S)，表層結構和深層結構要能互相對應，才不會發生錯誤的理解。因為概念溝通是通過符號發表的，所有溝通，首先需經過符號系統S；若需有數學理解，便經過一個適當的概念結構D，使接受到的訊息可以按照概念結構來解釋，而不是按符號系統被解釋。

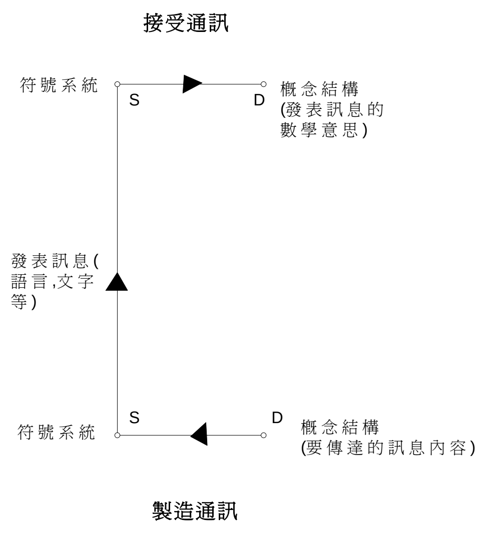


圖 2-2-2 概念性理解通訊必須經過的路線

Skemp(1989)所謂表層結構是指：文句表面上的辭意傳達，說或寫出符號等表面操作。而深層結構是指文辭的意涵。例如：做分數除法運算時，會將 $\frac{2}{5}\div\frac{3}{7}$ 寫成 $\frac{2}{5}\times\frac{7}{3}$ 以進行運算，是表層結構；了解為何可以將除法改寫成乘以該數的倒數，是深層結構。要使表層結構和深層結構能互相對應而達到理解，要有兩個先決條件：1. 深層結構的捕捉力要強於表層結構（不要只是死背符號)。2. 表層結構和深層結構之間要聯結強固，訊息才能透過此聯結橋樑和適當的概念對應。

Gray 和 David Tall(1994)對於符號與數學概念的關係有以下的見解：將**程序性知識**（process）和**概念性知識**(concept)這兩者的結合稱為程序概念 procept，這結合是靠符號(symbol)達成；符號化是一個介於程序性知識和概念性知識的心靈樞軸。數學成績好的學生，能夠同時看見**程序性知識**和**概念性知識** David Tall(2001)。

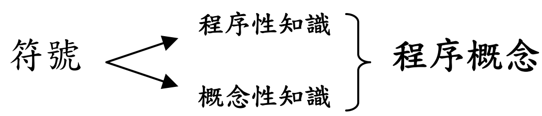


圖 2-2-3 符號、程序、概念的關係
資料來源:David Tall 等，2001

由上圖可知，相同的符號可以表示為程序性知識、概念性知識兩種不同的意思，例如：

表 2-2-1 符號、程序性知識、概念性知識之間的關係

符號(symbol)	程序性知識（process）	概念性知識(concept)
4	數(counting)	數(number)
3+2	加法	和
-3	減 3	負 3

資料來源：David Tall，2001

參考 David Tall 和 Gray 等人分析數學符號的方式，研究者嘗試解析平方根的符號包含的**程序性知識**（process）和**概念性知識**(concept)，如下表:

表 2-2-2 平方根的符號、程序性知識、概念性知識之間關係

符號(symbol)	程序性知識（process）	概念性知識(concept)
$\sqrt{2}$	平方後為 2	數(number)
$-\sqrt{2}$	減 $\sqrt{2}$（運算符號）	負 $\sqrt{2}$（性質符號）
$\sqrt{2}\times\sqrt{3}$	相乘（動作）	積（狀態）

因此設計方根教學內容時，目標放在能教會學生透過符號同時看到程序性知識和概念性知識，方式為引導學生建立“概念性理解通訊必須經過的路線”，使得表層結構（如：$\sqrt{2}$）和深層結構（如：是 2 的正平方根、面積為 2 的正方形邊長、是 $x^2=2$ 的其中一解、在數線上為介於 1 和 2 的點、其近似值約為 1.414）能互相對應，學生的認知因能順利地發展。

四、數學概念的發展層次分類

由上文了解數學概念的本質與結構，而能幫助學生建立一個新概念，對學習者學習數學有所幫助，但如何得知學生是否理解了？數學概念的發展層次為何？研究者依照 David Tall 對數學概念的見解，將平方根概念分為概念性知識和程序性知識兩大題型。Hiebert & Lefvre(1986)認為數學知識可以概分為「概念性知識」和「程序性知識」, 分述如下:

1. 概念性知識:它的特徵是知識的相關性，相關性遍及個別的事實與命題，使得每一筆訊息接連成一個網絡。事實上概念性知識無法區分出單元(unit)，只有在知識擁有者承認這筆訊息與原「知識網絡」有關時，才可說是概念的部分。

2. 程序性知識:包含兩部份，一部份是由數學的正式語言，或者是數學的符號表徵系統所組成；另一部份包括在數學時的算則(algorithms)與規則(rules)。

學生建立平方根概念的認知架構的過程中，教師除了將概念及程序間的內部聯結關係呈現出來，並需強調平方根和其它數學概念和日常間的各種聯結，如此方能增進學生的解題能力。以心理學的觀點來說明解題的意義:是個體將自己從問題的情境中解救出來的歷程，是一個從不清楚的情境到完全清楚和理解的另一個情境的連續過程。Gagne(1985)指出解題是以學習者的先備知識為組合基礎的創造性活動，也就是將學習者先前習得的原理、原則加以組合歸納，培養出解題能力，完成問題解決。美國數學教師協會（National Council of Teacher's of Mathematics ,NCTM , 2000）建議「解題活動」應被視為學校數學教育的主

要課題，並希望數學教師能創造適合於培養學生「解題能力」的教學情境，由此也可看出解題在數學課程中佔著重要的地位。於本研究中，測驗學生解題能力的題目是用生活中的情境來佈題，以便學生使用舊經驗來建構知識。

學生學習平方根概念後，正式課程並不強調方根符號系統的擴充性，對無理量也無特別在圖形上(例如$\sqrt{5}$立方公方的正方體)作延伸介紹，對於這些課程中未有正式介紹的無理數相關概念，於本研究將對學生進行測驗，也就是測驗學生的「學習遷移」能力，「學習遷移」目的在於了解學生概念理解的加深、加廣。遷移是人類思考和學習的現象,當人們在一個情境中學得知識、策略、習性、或其他東西,然後應用到另一個情境,遷移的現象就出現了。田万海(1992)從心理學的角度來看，將所學過的知識技能，應用、實踐到新的學習情境，這就是學習遷移。蔡仲彬(民 89)指出從認知遷移理論的觀點來說，Royer(1979)認為遷移的可能性取決於在記憶搜尋過程中遇到相關信息或技能的可能性,由於提取的可能性與信息交互聯結的數量有關，因此，任何增加交互聯結網路「豐富性」的教育方法，都會有助於增加遷移可能性。因此，提供學生在不同情境中學習的機會能幫助學生的「學習遷移」能力。

從概念分析到數學概念的認知要素探討,我們知道學習數學概念有多面向值得重視，本研究為了解教學設計對學習成效的影響，將數學概念的發展層次分為概念性知識、程序性知識、解題能力、學習遷移四個面向於第四章中加以討論分析。

第三節 數位教材的建構

資訊融入教學是一項融合現代化科技與教學理論的結晶，以資訊科技作為教與學的工具，整合於教學策略中，直接運用電腦互動模式來引介教材，藉此發展個別教育環境的教學課程。傳統教學系統因此科技因素的介入，帶動了教學活動設計的改革，此一改革趨勢自 1950 年代中期萌芽於美國，近四十年來世界各國教育學者和電腦科技專家，分別從教育媒體工學與實用的觀點，進行電腦輔助教學課程軟體的實驗發展及評估等研究工作。左台益、蔡志仁(民 90)指出此一改革趨勢明顯地反映在國內外的課程綱要，如美國數學教育協會(NCTM，1998)在 2000 年的「學校數學的原則與標準」中，將科技列為其六個原則之一，強調數學課程應該要使用科技來幫助所有的學生瞭解數學，並使學生能在日益發展的科技世界中使用數學。又如國內進行的九年一貫課程大綱中將「運用科技與資訊」列入十大基本能力之一，強調資訊科技融入學習領域，以培養學生資訊科技的知識與技能。因此，如何融合現代科技以設計數學教學活動是值得探討的主題。

隨著電腦科技和認知發展研究的進步，使用資訊科技在教學上提供許多優點，如：數位學習融入教學的教材可以提升學習專注力、有效引起學習動機、連結生活經驗、教材內容不易遺漏，電腦視窗提供的多種顏色的呈現、動畫的展現…等，有助於說明一些重要概念，可將視為一種學生學習的輔助教材；電腦輔助教學讓學生可依自己的程度控制學習的進度，從嘗試錯誤中，學習如何在不同情況下，選擇不同的答案，同時電腦尚可保存學習的紀錄，沒有時間和空間的限制。正如左台益、蔡志仁(民 90)曾提出：「電腦教學環境配合認知理

論，使電腦教學環境進入了一個更利於思考與提昇學習的境界。因此，電腦環境可以達到下列功能:(一)引起學生注意的功能;(二)激發學生學習動機;(三)發揮個別教學的功能；(四）具有前導組體的功能；(五）降低認知的負擔。」許瑛玿(民 88)的研究指出設計的電腦模擬，其擬真情境、多重表徵及「回顧先前學行為功能」有助於具有解題技能的學生獨自學習科學概念。

教師在課程中使用資訊科技的相關研究中呈現不少的優點，但同時也有一些障礙存在，其中最大的障礙是適用的數位課程教材編寫困難及編寫數位教材需要較多的時間，「時間」與「設備資源」是影響教師運用資訊設施教學意願的全面性問題。此外，數位教材的一大弊病在於呈現過多的動畫而不具教學成效，學生雖被生動活潑的畫面吸引，卻無法從中學習到應有的概念。電腦輔助學習教材呈現訊息，固然必須利用多樣化的處理以吸引注意，但如果提供之設計無法配合呈現的技巧與其它教學策略的運用，則所設計的圖形或動畫，便無法達成幫助學習與激勵之效果(林麗娟，民 89)。

綜合上述中提出的優點，以「教具及學具」觀點的資訊融入教學，是以電腦當作工具，而不只是題目及教材內容的展示，因此根據課程及教材內容的特質，設計出能幫助教學或學生能操作的電腦界面，希望引導學生在認知過程中能主動和建構出個別化的完整知識體系。研究者選用電腦軟體 flash 5 編製教材內容，其原因在於 flash 5 能提供幾個功能：

1. 能設計圖像、動畫、聲音，並配合文字呈現訊息，作為提供興趣、激勵學習動機之設計策略。利用視窗中的文字、圖形、圖案、靜態畫面、動畫、影像、語音等，可將數學概念用這些表徵方式來呈現，再利用電腦軟體功能，將數學概念中的基本關係外顯出來在視窗中展現多重表徵間的連結(左台益、蔡志仁，民 90)。

2.所有的圖案可以輕易的作出旋轉、縮放、扭曲、鏡射等變化，甚至可以將數個幾何圖案做結合、消去、挖空等動作，填色可以有透明度、明亮度、陰影、浮雕等變化。

3.可配合 action script 指令設計出互動畫面，如:可設計「立即回饋」的按鈕，以告知學生答題是否正確；畫面分層呈現的轉接，設計按鈕的輸入方式，提供學生自學時可自由運用和安排學習進度，不受強制性的引導。視窗介面的引進，使我們可以藉由操控滑鼠的方式來主動操控圖像(icon)，因此學習者可以來回的操控所發生的現象，在變動中把不變的性質抽取(abstract)，符合主動建構精神(曾振家、謝哲仁，2002)。

4.是一向量式繪圖軟體，圖案不會因放大而失真或鋸齒狀的情況發生。

5. 可直接轉檔成 html 格式，存放在網路上。許瑛玿(民 88)指出電腦教學軟體可透過程式設計及整合網路科技，來紀錄學習者的學習過程，然後提供學習者回顧先前學習歷程的機會，使其可利用這些資料來不斷地修正學習策略。如此的學習過程，可強化學習者認知的發展，並且幫助學習者建構出以個人學習經驗為基礎的知識，對未來學習遷移的發生有相當大的助益。

應如何編寫適用的數位課程教材呢？學科本質、學習理論與科技特色是佈置電腦視窗教學環境重要考量的因素(左台益、蔡志仁，民 90)。教學者可先構思教材內容包含哪些概念，學習者對知識的理解是透過一連串的活動而獲得，如何經由特別設計的教學活動讓學習者對學習材料內容建立意義，乃是電腦教學系統設計發展上的一項挑戰。正如 Skemp(1989)所言：「新概念是不能直接溝通的，每位學習者必須在自己的腦海中建構出新的概念，作為教師的我們可幫助推動這個過程。教師教一個新觀念時，必須將它化整為零-條分縷析，以幫助學生吸收

了解新的概念。因此概念分析是數學教學的前奏:概念圖(具有方向性，是有用的診斷工具，學習某一概念出現困難時，可以按圖找出原因，看是哪一些先前概念尚待掌握。)」因此，研究者先擬定好平方根的概念圖(見附錄一)，將學生所需的預備知識依序條列，經過細心分析平方根的數學概念，依序教授學習材料，使學生遇到新教材能順利地將它同化到適當的機制中。

將教材內容分析完成後，研究者採用左台益(民 90)所提出的數學教學模組作為數位教材編製的架構，如圖 2-3-1；

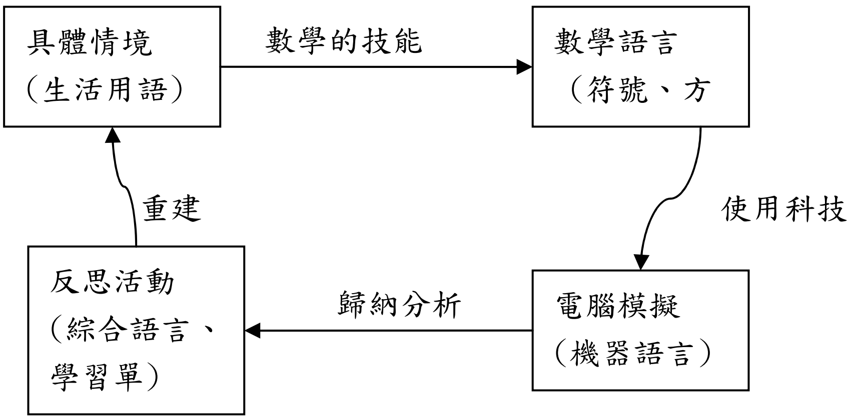


圖 2-3-1 Mathematical modeling

具體情境的營造與設計目的在使學生從中獲得對將來學習有所幫助的經驗，因而教授平方根概念時，以學生已具備的概念作為引子，使用生活用語切入數學概念（正方形的邊長和面積的關係)，進而引出數學語言（正方形的邊長是該面積的平方根，$\sqrt{面積}=邊長$)，研究者再以電腦軟體 flash5 呈現此教學模組，並加入動畫、聲音、色彩等元素，建構出多重表徵的教學環境，鼓勵學生在此環境中對所觀察到的現象做出反應，並學習以不同層面與角度觀察問題，進而能以

多樣的表徵呈現數學知識。左台益、蔡志仁(民 90)：由於資訊科技的發展，促使應用電腦設計多重表徵學習環境成為教學活動的新趨勢(de Jong et al.,1998)。電腦視窗化的結果，在使用上增加了切換適當工具的方便性，可以在相同或不同的視窗中，表現不同的表徵形式及表徵的特性，達到多重表徵及其及間連結的目的。Vosniadou(1996)以天文學為題材，使用視窗設計一個視覺化的電腦學習環境，幫助學習者創造出一個對於複雜科學問題有意義的學習環境，其研究結果發現，可以促進認知的靈活度和強化表徵結構。

除了教學內容的呈現之外，在數位教材中的每個單元課程結束後，有一互動式的學習測驗，學生可直接透過電腦輸入答案，並可立即得到回饋，當學生作答正確或表現出教學目標所預期的行為時，電腦可給予正面的肯定，即所謂的正增強。這正符合 Godfery and Sterling (1982)所認為的正增強具有鼓勵學習者朝著教學目標前進，並且告知學習者他已達到的教學目標。學生和電腦界面之間產生互動作用，可營造激勵學生的互動環境，在「平方根近似值」單元中，學生可操作電腦並配合學習單(見附錄五)演練，提供學生自己掌握控制學習進度的學習經驗，不是只看著教師的教學演示被動地吸收知識，如此可以增加學生主動探索學習的意願。胡瑞明(2001):認知心理學者也極力肯定學習者控制的重要性，就學習者控制及程式控制之電腦輔助教學軟體之行為效應來說，許多研究結果支持學習者控制較能增進學習成效(如 Park & Tennysun，1980；Shyu & Brown，1992，1995 等等)。學習者在活動的進行中，運用知識解決問題，同時學習如何整合知識，自發的領悟學科知識中概念間所可能存在的關係，自情境中詮釋知識的結構(Brown,Collins & Duguid,1989)。