

第貳章 文獻探討

由於本研究其中一個目的是想探討數學錯誤類型的產生是否與邏輯推理的能力有關，而一般數學錯誤產生的理論都沒有考量邏輯作為影響錯誤產生的其中一個因素，兼且邏輯推理的實作研究幾乎都是由心理學或哲學方面的學者來進行，故此方面研究的成果並不為數學教育工作者所熟愔，所以有需要在本章中，對過去研究的部份重要成果稍加詳細的交代整理，由此而引導本研究實際施行的方向。因此，本章共分六個小節，分別為「演繹推理之問題形式」、「演繹推理之錯誤類型」、「影響演繹推理產生錯誤之因素」、「演繹推理錯誤之成因解釋」、「數學題的錯誤類型」以及「數學題錯誤理論解釋」。依次說明如下：

第一節 演繹推理之問題形式

有關於演繹推理的研究領域，大致上可分為條件式推理（conditional reasoning）、選擇任務（selection task）、關係推理（relational reasoning）、三段論證推理（syllogistic reasoning）、聯言及選言推理（conjunctive、disjunctive reasoning）（Evans, Newstead, & Byrne, 1993）。

「條件式推理」的基本形式為「如果..那麼」（if-then），其中包含兩個命題，並利用 if-then 將兩命題串起來（Evans, et al., 1993；Anderson, 1995），在此範圍的研究是相當大量且形式豐富的，因為它可以給予受試者一個標準的 if-then 敘述，之後再給他一個 if-then 中所出現的命題，請受試者判斷結論；再者，敘述句當中也還包括各種否定語氣「不是」（negation）的形式。此外，施測者也可以給受試者兩段 if-then 的敘述，請他們判斷結論或提出證明或否證的理由；而在判斷結論時，可以請受試者寫出真值表（truth table），或是勾選對、錯、甚至加上資料不足（not enough clue）的選項。由此可見條件式推理的形式是多樣

且複雜，雖然如此，仍舊可以從各個文獻中看出受試者產生的一些系統性錯誤。

「選擇任務」這方面最經典的研究，可算是 Wason 的四張卡片問題 (four card problem)，此問題與它所延伸出來的題目曾先後多次在不同的研究中被採用，且廣被一些訓練數學思維的通俗作品所介紹（例如：數學山海經）。該題的設計是先給予受試者四張卡片及一段 if-then 的敘述，接著請受試者判斷若要證明或否證此敘述，應該至少要翻開哪幾張卡片；此外，亦有些研究者會再進一步地要求受試者說出或寫出翻與不翻的原因，但其基本題型仍應可屬於條件式推理的範疇，但大部分的研究者通常會將此兩種分開，因為受試者在兩類不同題型的表現是有差異的，且他們所產生邏輯錯誤的成因解釋並不完全相同。

「關係推理」也可稱為序列推理 (series reasoning)，包括比較或列出三者或三者以上的大小、高低之關係。「三段式推論」則主要是以亞里斯多德的三段式論證為主，給予受試者兩個量詞為全部 (all)、一些 (some)、沒有 (none) 的前提，請受試者判斷結論的真偽或有效性。

由於本研究主要探討 if-then 的邏輯推理錯誤，因此，下列將提及有關條件式推理與選擇任務在文獻中所提及的題型予以說明整理。

一、 條件式推理

早期的部份演繹推理研究受到皮亞傑的影響，將焦點放在條件式推論、類 (class) 的推論 (Roberge, 1969 ; Roberge, 1970)。其中的條件式推論主要分成六大類，見表 2-1-1。

表 2-1-1 條件式推理在早期的研究題型

題型						
有效性	有效論證	無效論證	無效論證	有效論證	有效論證	有效論證

基本 型式	$If P, then Q$	$If P, then Q$	$If P, then Q$	$If P, then Q$	$If P, then Q$	$If P, then Q$
	$\frac{P}{\therefore Q}$	$\frac{Q}{\therefore P}$	$\frac{\sim P}{\therefore \sim Q}$	$\frac{\sim Q}{\therefore \sim P}$	$\frac{If P, then Q}{If Q, then R}$	$\frac{If P, then Q}{If \sim Q, then \sim P}$

Roberge (1969, 1970) 認為這六類的題型雖然焦點相當專注，但是也暴露出此研究主題過於侷限的缺點。因此後續研究者將研究重心繼續擴大，其中最重大的變革是探討「不是」(negation) 語句對於受試者表現的影響 (例如：Johnson-Laird & Tagart, 1969 ; Evans, 1972)，題型因此增為 16 種，施測方式是給予受試者兩個前提，請他們根據前提來做推論，如表 2-1-2。

表 2-1-2 條件式推理在後期的研究題型

第一前提 第二前提	$If P, then Q$	$If P, then \sim Q$	$If \sim P, then Q$	$If \sim P, then \sim Q$
Detachment	P (1)	P (5)	$\sim P$ (9)	$\sim P$ (13)
Conversion	Q (2)	$\sim Q$ (6)	Q (10)	$\sim Q$ (14)
Inversion	$\sim P$ (3)	$\sim P$ (7)	P (11)	P (15)
Contraposition	$\sim Q$ (4)	Q (8)	$\sim Q$ (12)	Q (16)

表 2-1-2 中包括兩個前提，分別為第一及第二前提，我們列舉上表 2-1-2 中標號為(1)的基本題型組合如下：

$$\begin{array}{l}
 \text{If } P, \text{ then } Q \quad (\text{第一前提}) \\
 \text{Given } P \quad \underline{\hspace{2cm}} \quad (\text{第二前提}) \\
 \hspace{10em} Q \quad (\text{結 論})
 \end{array}$$

通常受試者得到第一、二前提的資訊後，會被要求判斷結論的真偽，包括勾選對、錯或資料不足的選項 (Shapiro & O'Brine, 1970) 等；也有部份研究者要求受試者寫出整個題目或結論的真值表。而隨著研究者對答案有不同的要求時，受試者則會有不同的錯誤產生，例如：在真值表的格式要求下，受試者可能產生「配對偏誤」(matching bias) (Evans, et al., 1993 ; Evans, 1998)，而在含有資料不足選項的題目裡，則易引導受試者做出非他原意的選擇 (Shapiro & O'Brine, 1970)。

雖然研究者瞭解不同格式要求的題型，會有不同的錯誤產生，而且基本的

題型只包括表 2-1-2 出現的 16 種，但在這近 40 年的研究中，研究者對於人們為何出錯的解釋仍眾說紛紜 (Evans, et al., 1993)，最主要的因素是受試者對於題目的詮釋與認知層度各有不同，且這 16 種基本題型還可以作相當多的變化(例如：雙條件的題型)。但雖然如此，從文獻中還是可以有一些較為統整性的歸納結果，例如題目情境 (包括具體抽象、受試者熟識程度)、年齡、受試者對題目的自我解釋等等因素，這些因素在下一部份會有較詳細的說明。

在條件式推理中，除了上述基本的 16 種推論形式 (表 2-1-2) 外，也包含了所謂雙條件式的題目類型。雙條件式的基本邏輯形式如下：

$$\begin{array}{l} \text{If } P, \text{ then } Q \text{ (第一前提)} \\ \hline \text{If } Q, \text{ then } R \text{ (第二前提)} \\ \hline \text{If } P, \text{ then } R \text{ (結論)} \end{array}$$

此類型的推理形式，在早期的研究中其實已出現過 (Roberge, 1969, 1970)，但並未有深入討論其錯誤類型及成因。

二、選擇任務

Wason 於 1966 年首先提出四張卡片的問題，直到今日還受到許多研究者的採用與廣泛討論，甚至加以改編，但基本上仍然脫離不了「四張卡片」的形式 (Karplus, E. F. & Karplus, R., 1970 ; O'Brien, 1975 ; Adi, et al., 1980 ; Hardman, 1998)。

其中，有部份研究條件式推論的學者仍沿用 Wason 的施測方式，即先給予受試者一段敘述，接著要求受試者以選擇翻或不翻卡片的方式，來證明或否認施測者的敘述 (Wookey & Sterongman, 1972)。此外，也有部份研究者將此選擇任務的研究設計予以更改，包括要求受試者在判斷是否應翻卡片外，也必須說明其理由 (Adi, Karplus, & Lawson, 1980)，而此種設計的研究結果顯示受試者在選擇翻或不翻卡片的行為表現上若為正確，其說明理由的推理表現卻不一定正確，此新發現也成為後續研究者一個重要的參考依據。

第二節 演繹推理之錯誤類型

受試者依不同形式的條件推理題型，會產生不同的錯誤類型，因此，以下將從推理題型中的第二前提之四種形式，包括「肯定前件」、「肯定後件」、「否定前件」以及「否定後件」等四型來加以說明，分別探討文獻中受試者的可能表現與其錯誤類型，接著也將略述在第一前提（包括有 $P \rightarrow Q$ 、 $P \rightarrow \sim Q$ 、 $\sim P \rightarrow Q$ 、 $\sim P \rightarrow \sim Q$ 等四型）中，受試者產生的錯誤類型。

一、以第二前提為區分標準的表現及其錯誤類型

一般來說，以第二前提來區分題目邏輯型式時，會有四種不同類型的題目，包括有「肯定前件」(Modules Pollen，簡稱 MP)、「肯定後件」(Affirmed Consequence，簡稱 AC)、「否定前件」(Denied Antecedent，簡稱 DA) 以及「否定後件」(Modules Tollen，簡稱 MT) 等四種 (Anderson, 1995；Adi, Karplus, & Lawson, 1980)，由於上述的第 2 與第 3 種在邏輯學當中屬於無效論證，亦即無法推知其結論為何，因此在探討其表現時，將此兩種題型併在一起討論，整理說明如下：

(一) 肯定前件 (MP)

「肯定前件」的基本邏輯形式如下所示：

$P \rightarrow Q$	(第一前提)
P	(第二前提)
<hr/>	
?	(結論)

多數研究者發現，受試者在肯定前件的表現在四種題型當中是最好的，且答對的比率也相當高，大部分在 80%，甚至 90% 以上 (Wildman & Fletcher, 1977；

Evans, et al., 1993 ; Anderson, 1995), 此結果似乎顯示出此種類型的推理較易於掌握，其主要原因除了肯定前件的敘述乃為肯定句外，也可能是因為給予受試者前件時，其思考方式會較給予其後件容易。但在其他三種題型的推理表現，則隨著題目情境、結構及答題型式的不同而有所不同。

(二) 肯定後件 (AC) 與否定前件 (DA)

「肯定後件」的基本邏輯形式如下所示：

$$\begin{array}{r} P \quad Q \quad (\text{第一前提}) \\ \underline{Q} \quad (\text{第二前提}) \\ \hline ? \quad (\text{結 論}) \end{array}$$

「否定前件」的基本邏輯形式如下所示：

$$\begin{array}{r} P \quad Q \quad (\text{第一前提}) \\ \underline{\sim P} \quad (\text{第二前提}) \\ \hline ? \quad (\text{結 論}) \end{array}$$

學者曾經針對受試者在肯定後件、否定前件的表現加以研究，發現此兩類應較其它兩類困難，主要原因是它們在邏輯學當中是屬於無效論證 (Wildman, & Fletcher, 1977 ; Roberge, 1970), 此外也有學者指出，隨著第一前提形式的不同，受試者會有不同的表現 (Evans, 1972b)。

Wildman & Fletcher (1977) 的研究結果顯示，這兩類題型都相當困難，但是整體來說，不論第一前提的形式為何，否定前件的正確百分率較肯定後件高，且這兩類的困難度明顯的比否定後件來的困難。但 Evans (1972b) 則指出，在第一前題中的前件如果為肯定語氣，那麼受試者否定後件的題型中則較易回答正確，因為否定一個肯定語句較否定一個否定語句為困難 (例如：「好」的否定是「不好」，「不好」的否定是「不是不好」)；相反地，第一前題的前件如果為否定語氣，那麼受試者在肯定前件的題型中較否定後件容易回答正確。但上述兩研究的差別有可能是兩者採用不同的題目內容之故，前者是以幾何圖形、顏

色、動物名稱等等作為研究工具，後者則是以「字母—數字」的配對組合，作為施測工具。就如同有研究指出，施測的內容形式也是影響受試者推理表現的因素之一（Newstead, et al., 1997；Hardman, 1998；Anderson, 1995）。

（三）否定後件（MP）

「否定後件」的其基本邏輯形式如下所示：

$$\begin{array}{rcl}
 P \quad Q & & \text{(第一前提)} \\
 \sim Q & & \text{(第二前提)} \\
 \hline
 ? & & \text{(結 論)}
 \end{array}$$

有研究指出當受試者在碰到否定後件的題目時，多能回答正確，但正確的百分比並沒有比肯定前件的表現來的好。而受試者能有較高的回答比率之主要原因有三，其一是「雙向條件」(biconditional) 的影響(如 Ennis, 1976；Wildman, & Fletcher, 1977)，也有學者提出是因為受試者的「配對偏誤」(matching bias) 所致(如 Evans, 1972；Evans, et al., 1993；Evans, 1998)，另外「機率模型」也是一個解釋的原因(如 Anderson, 1995)。

所謂的「雙向條件」是指受試者將題目「 $P \rightarrow Q$ 」視「 $P \leftrightarrow Q$ 」，意即受試者視第一前提中前後件 P、Q 為等價，也因此當題目給予 $\sim Q$ 時，他很容易推到 $\sim P$ 的答案。Shapiro & O'Brine (1970) 提出受試者對此題型的反應是一種孩童邏輯 (child logic) 的表現，但隨著年紀的增長，他們會漸漸的表現出數學邏輯 (math logic)，而有其他研究者也用此原因來解釋為何受試者在否定後件的表現，其答對百分比是隨著年齡的增加而遞減 (Wildman, & Fletcher, 1977)。但令人疑惑的是，「雙向條件」可以用來解釋為何有些受試者在否定後件的表現反而較佳的原因，但對於一些在肯定前件表現好，卻在否定後件表現差的受是者卻無法提出合理解釋。

Evans (1972a) 則提出「配對偏誤」，用來解釋為何受試者在一些具否定語氣「不是」(negation) 之題型中產生錯誤的因由。他指出，受試者之所以會產

生此配對偏誤的最主要原因是注意力 (Evans, et al., 1993 ; Evans, 1998)。當受試者在開始接收題目訊息時，會注意到部份資訊，但同樣地可能忽略掉一些資訊，意即受試者可能會注意到題目中的主要名詞，卻忽略了「不是」，接著再用他所接收到的訊息加以配對，而形成正確或錯誤的答案。

另外，機率模型則是假設受試者對於命題中的 P、Q、~P、~Q 已有一先驗的機率，接著研究者透過條件式機率的運算，預測受試者在肯定前件的表現會最佳，接著是否定後件，最後是否定前件及肯定後件，而最後兩者的表現並沒有一定順序，而是互有先後 (Anderson, 1995)。

整體來說，受試者在此兩類問題形式中的表現，隨著第一前提形式的不同，或是題目的形式與內容的差異，其回答的正確率會互有先後之別 (Evans, 1972b ; Wildman, & Fletcher, 1977)。

二、以第一前提為區分標準的表現及其錯誤類型

第一前提的基本結構皆是由兩個敘述句組合而成，包括一個前件 (如果 ...) 和一個後件 (那麼 ...)，且由於前、後件之敘述語氣可能為肯定或否定，故包含四種基本型式，即 AA (P Q，前、後件皆肯定) AN (P ~Q，前件肯定、後件否定) NA (~P Q，前件否定、後件肯定) 及 NN (~P ~Q，前、後件皆否定) 等四種。早期的研究只針對 AA，亦即前、後件皆為肯定語氣的題型來進行各式研究 (Roberge, 1969, 1970)，及至後期才將「不是」語句放入第一前提的前後件中，故發展為現今的四種組合。

其中有學者指出，題目中若含有「不是」語氣，會是影響受試者產生困難的一個重要因素 (Evans, 1972b ; Roberge, 1969 , 1971 ; Evans, et al., 1993)，因此在此四種形式中，不具「不是」語氣的 AA 型是最易於回答的。但對於其他三個形式，學者並沒有加以比較之間的難易差異，只有針對前件為肯定還是否定語氣的結果稍作分析 (Evans, 1972b)，但基本上來說，受試者在 NN 的表現會較其他兩種形式 AN 與 NA 的表現來的好。

第三節 影響演繹推理產生錯誤之因素

影響受試者在推理問題表現的因素相當多，因此以下將只針對較為重要的因素，包括受試者年齡、題目的邏輯形式、題目情境及受試者的自我解釋等四種因素予以探討，依次說明如下：

一、受試者年齡

Inhelder & Piaget (1958) 曾說：「具體運思期的小孩（年齡為 7-8 歲到 11-12 歲）並無法掌握命題邏輯的發展」，同時 Piaget 也認為人類的推理能力是具有階段性的，13、14 歲的學童才具有形式推理的能力。但在一些有關於演繹推理能力的研究中卻顯示，在小學階段的孩童就具有形式推理的能力，而且他們在年齡分類下的表現並沒有顯著的差異。例如：Hill(1961)對 6、7、8 歲的受試者施測的結果發現，這時期的孩童已能處理類與條件式的推論問題，而且並沒有年齡上的顯著差異(Roberge, 1969, 1970)；Wildman & Fletcher (1977)則發現 8、10、12、14 年級的學童在若 P 則 Q 的題型中，如果第二前提為肯定前提的形式，那麼他們的表現都相當優秀，而且沒有年齡上的差異。

此外，也有學者指出 Piaget 的理論之所以遭受質疑，乃是因為他所指稱的命題運算只包含了類的推理、條件式推理(Ennis, 1976)。同樣地，學者也質疑 Hill 所發展的研究工具過於狹隘，因為他採用一些在邏輯上是屬於有效論證的題型來施測(Roberge, 1969, 1970；Shapiro, & O'Brine, 1970)。

而在其他後續的研究中發現，不同年齡層的受試者在面對相同的命題時，其答對百分比可能會隨年齡增加而有進步、退步或相似的情形產生(Wildman, & Fletcher, 1977；Roberge, 1969；Adi, Karplus, & Lawson, 1980)。因此，年齡並不是影響受試者演繹推理能力表現的唯一因素，題目所具有的邏輯形式對受試者的表現也有極大的影響(Evans, 1972；Evans, Newstead, & Byrne, 1993；Roberge, 1969, 1971)。

二、 題目的邏輯形式

一般來說，題目的邏輯型式約可分為肯定前件（MP）、肯定後件（AC）、否定前件（DA）以及否定後件（MT）等四種（Anderson, 1995；Adi, Karplus, & Lawson, 1980）。其中，受試者在 MP 的表現較其他三者來的好，而且都有相當高的答對百分比（Wildman, & Fletcher, 1977；Ennis, 1976）。但對於受試者在 MT 的表現則有不同的結果出現，一些研究指出受試者在此題型中，比 DA 與 AC 有較高的答對百分比（Adi, Karplus, & Lawson, 1980；Wildman, & Fletcher, 1977）。

面對上述受試者的表現，學者提出兩種不同的解釋，一是 Evans 於 1972 意外發現的「配對偏見」（matching bias），他指出受試者在施測時，受到注意力的影響，只對於題目中出現的部份名詞有反應，包括注意、提取、過度推論（Evans, Newstead, & Byrne, 1993；Evans, 1998）；另一是受試者對於條件式推論的形式「P → Q」解讀成「P ↔ Q」，也就是將之詮釋為雙向條件式（biconditional）的邏輯形式（Ennis, 1976；Wildman, & Fletcher, 1977）。上述這兩種解釋的共通點在於他們都是有關於受試者對題目的自我詮釋，因此，有學者指出，受試者對於 if-then 的解釋是影響他們推論正確與否的一個重要因素（Cummins, Lubart, Alksins, & Rist, 1991；Shapiro, & O'Brine, 1970；Wildman, & Fletcher, 1977）。

但受試者是根據什麼來作詮釋？Evans (1972b) 發現，如果第一前提的前件為肯定語氣，那麼受試者在 MT 中的表現較 AC 的表現佳；相反如果第一前提的前件是否定語氣，那麼表現結果會恰恰相反。因此，不僅上述四種邏輯形式（肯定前件、否定前件、肯定後件、否定後件）會影響受試者的表現，題目中的第一前提（if-then）對於受試者表現也有極大影響，特別是那些具有「不是」語句的題型，總是造成受試者產生困難的主要原因（Evans, 1972b；Roberge, 1969, 1971）。

而至於受試者在 DA 與 AC 中的表現，學者們並沒有特定的結論，除了前述所提及的「不是」語句會對受試者的表現影響外，另一個原因可能是因為此兩類問題在邏輯學的領域中乃是屬於無效論證（Roberge, 1969, 1970）。

三、 受試者的自我解釋

有研究顯示受試者在做有關演繹推理的題型時，總是會賦予題目一些新增、不同的解釋，包括將題目條件視為雙向條件式（如 Cummins, et al., 1991 ; Evans, et al., 1993 ）、配對偏誤（如 Evans, 1998 ; Evans, 1972 ）、信念偏誤（如 Evans, et al., 1993 ）、實用性基模（如 Cheng & Holyoak, 1985 ; Anderson, 1995 ）等等，都會使受試者在作推論時，產生不同的錯誤。由於雙向條件式與配對偏誤已於前面做概略闡述，因此這部份只針對信念偏誤與實用性基模分述之。

Cheng & Holyoak (1985) 提出實用性基模，認為受試者在遇到熟悉情境，特別是那些有關社會契約限制的題目情境時，會讓自己角色扮演，採用過去的經驗、知識來完成推論工作，這樣的作法可能成功，也可能失敗（Cummins, et al., 1991 ; Newstead, et al., 1997 ），而受試者這樣的表現是否為一合於邏輯的表現，業令人質疑，但不可否認的，實用性基模可以解釋部份受試者的表現。

四、 題目情境

受試者對於題目情境的熟識程度，往往會影響其推理問題表現（Newstead, et al., 1997 ; Hardman, 1998 ; Anderson, 1995 ），而熟識程度則包含兩個層面，一是分為抽象與具體、另一是對具體情境的熟悉與不熟悉。

有的學者認為在面對較抽象的情境時，受試者的表現會較具體情境來的差，因為他們會利用曾經擁有的經驗來完成推論（如 Cheng & Holyoak, 1985 ）。但也有部份研究顯示，受試者在面對一些他們較為熟悉情境時，反而容易出錯，原因是因為受試者會用過去已有的經驗，而產生出許多可能選擇（Newstead, et al., 1997 ; Cummins, 1991 ; Anderson, 1995 ）。

五、 其他因素

除了上述四種因素外，學者們也曾經用性別、IQ 分數以及數學成就等，來找尋受試者推論錯誤的影響因素，而研究結果發現，性別並不會影響他們的推

論表現(如 Wildman & Fletcher, 1977 ; Roberge, 1969) 另外, Zepp, Monin, & Lei (1987) 也提出, 不同的語言的邏輯推理形式, 會產生不同類型的錯誤, 且經由受試者在母語的表現, 可以預測他們在第二外國語上, 會產生什麼樣的錯誤類型。較特別的是, Johnson-Laird & Savary 於在 1996 年提出, 也許工作記憶空間的限制是導致錯誤經常發生的原因 (Hardman, 1998)。

第四節 演繹推理錯誤之成因解釋

關於受試者在推理過程中的錯誤, 學者們曾提出多種不同的解釋, 其中最主要的是受試者本身對於題目的自我詮釋, 因此, 許多研究者針對受試者的思考過程提出其看法, 並建立各種思考歷程的模型, 試圖說明受試者為何犯錯的原因, 其中有一解釋理論, 從開始提出時即受廣泛注意, 且有其他學者針對此一模型再予以後續的研究探討, 進一步地, 提出其可修正之處, 故以下將針對此理論模型的原始想法及後來的修正和期可爭議之處予以說明。

一、心智模型 (Mental Models) 的原始想法

Jonhson-Laird 和 Byrne 於 1991 年提出心智模型來解釋受試者在部份推理問題中錯誤的成因 (Evans, 1993a ; Evans, Newstead, & Byrne, 1993)。他們認為受試者在推理的過程中, 有一心智模型在運作 (doing), 且基本上包含三個層次: 維持 (maintain) 簡化 (simplify) 達成 (reach); 「維持」是指對於語意資訊 (semantic information) 的保留, 「簡化」是指結論可以簡單化, 「達成」則是得到一個新結論。根據此想法, Jonhson-Laird 和 Byrne 假設受試者在命題推理 (propositional reasoning) 的過程中需要三個推理階段: 模型建立 (model-constructing) 模型合成 (model-combining) 以及 模型修正 (model-revising)。

在「模型建立」階段中, 受試者從題目的第一前提、既有的背景知識當作輸入, 接著根據輸入的原料, 將產品也就是最原始的模型 (initial model) 輸出。而此模式可能包含兩個層次, 一個是外顯 (explicit) 的, 一個是內隱 (implicit) 的, 其中內隱及外顯模式的存在端賴第二前提的合成; 而在「模型合成」的階段裡, 受試者將原始模型及第二前提經由模型描述 (model-describing) 而將其

描述結果當成輸入，接著再製造（produce）出一個簡化後的、假定的模型；最後的「模型修正」階段中，受試者根據前提和假定的結論當作輸入，而將一個修正後的模式當成輸出當修正完成或不再修正時，也就是受試者已經得到一個結果。

二、 心智模型的爭議與問題

Jonhson-Laird 和 Byrne 認為上述心智模型可以用來解釋相當多的推理錯誤現象。例如：Evans (1972a) 提出受試者的「配對偏誤」，就是根據 Jonhson-Laird 和 Byrne 的解釋，受試者在模型建立的階段中，可能先產生一個不完全的原始模式，也就是他們會忽略「不是」語句的存在，之後在合成、修正的階段時，受試者所增加、減少或修正的模式也就會因之而產生錯誤。此外，對於在其他研究中所提出「受試者在肯定前件（MP）的表現比否定後件（MT）表現好」的研究成果，心智模型也提出了一個合理的解釋，因為肯定前件的推論結果，只需從原始模型裡直接製造出來，但若題目的第二前提為否定後件，那麼受試者必須要將原始模型予以增減其可能情形（在合成階段中，受試者依不同的前提，予以合成，所以可能增加或減少原始模型），因此所需處理的步驟增加，錯誤率也因之提高（Evans et al., 1993）。

雖然 Jonhson-Laird 和 Byrne 認為心智模型可以運用的範圍相當大，甚至 Jonhson-Laird (1994) 更進一步的將之運用到其他領域，然這也是學者認為此模型的弱點之一，亦即，其太有彈性以至於很難去加以驗證（Evans et al., 1993）。此外，心智模型的提出雖然可以解釋一些錯誤發生的現象，但是它並未對於受試者是如何決定選用哪些模型以及為何選用此模型的緣由予以交代，這也是 Jonhson-Laird 和 Byrne 認為目前心智模型理論未臻完全而有待修正的原因之一（Evans et al., 1993）。有鑑於此，Evans (1993a) 針對心智模型的弱點提出質疑，並予以三點修正，但是 Evans 也認為修正過後的心智模型還是需要再加以發展與澄清，特別是它目前的理論架構還沒有辦法解釋否定結論偏誤（negative conclusion bias）的起源。

第五節 數學題的錯誤類型

有關數學錯誤類型的研究的形式是相當多量且廣泛的，早期學者們從各個不同的角度及領域來對錯誤加以歸類，近期的研究者則更進一步地從錯誤表現中找出其產生錯誤的原因，而這些學者的共通想法都是希望透過對學生錯誤的瞭解，能夠對於教師教學以及學生的學習有所貢獻（張景媛，民 83；何縉琪、林清山，民 83；李芳樂，民 84；梁淑坤，民 85；李虎雄，民 88；Brown & Burton, 1978；Brumfield & Moore, 1985；Ben-Zeev, 1995）。雖然如此，在實際的數學課堂上，學生的錯誤還是不斷地複演，除了研究和教學無法完全合一的原因之外，也許還有其他相關因素是這些研究錯誤的研究者所忽略的，本研究希望透過對於學生產生錯誤相關因素的瞭解，能從一個更為廣義且積極的角度來面對學生的錯誤。

不同領域數學題有不同的錯誤類型產生，但為了使錯誤理論能有一個更為寬廣的發展，錯誤的分類必須更有彈性，意即它必須能在各個範疇中被運用，但同時它也必須詳盡列出學生所有可能發生的錯誤。因此，以下將就文獻中所提及的錯誤分類法將之分成三大部份：一是以解題程序、解題必要條件為分類的依據；二是以錯誤穩定性為分類標準，分別為系統性錯誤、非系統性錯誤；三是其它另類的錯誤研究，也就是那些針對某種錯誤而深入探討的學者所提及的錯誤，包括蟲、誤則、合理的錯誤及疏忽等。說明整理如下：

一、以解題程序、解題必要條件分類的錯誤類型

關於學生在數學題中所犯的錯誤類型，學者們各就不同的角度、範疇加以分類。例如：

Roberts (1968) 以小學三年級學生為受試者，將錯誤分為三類：

1. 基本事實錯誤 (basic fact error)。
2. 隨機錯誤 (random error)。
3. 程序的錯誤 (procedural error)。

而 Movshovitz-Hadar, Zaslavsky, & Inbar (1987) 是以運算過程為主軸，將在此運算過程中可能出現的錯誤分成六類：

1. 誤用資料 (misused data)
2. 誤釋語文 (misinterpreted language)
3. 不合邏輯的推論 (logically invalid inference)
4. 曲解定理或定義 (distorted theorem or definition)
5. 未驗算的答案 (unverified solution)
6. 技術錯誤 (technical error)

另外 Reason 於 1990 在 Human Error 一書中將錯誤分成三大類 (Byrne & Bovair, 1997)：

1. 技巧 (skill)
2. 法則 (rule)
3. 知識 (knowledge)

上述這幾種錯誤分類法，大多也曾在其他研究中被採用，例如：Brumfield & Moore (1985) 利用 Roberts 的分類法來反駁一些認為學生在計算題中的主要錯誤是因為不知道基本事實的教育者的看法，並提出大多數的錯誤應是程序性錯誤與隨機錯誤。梁淑坤 (民 85) 及李虎雄 (民 88) 也曾利用 Movshovitz-Hadar, Zaslavsky, & Inbar 所提出的分類法，分別研究學生在一元一次方程式及微積分的錯誤。Byrne & Bovair (1997) 則利用 Reason 的分類，來說明其他錯誤可做何種歸因。此外，張景媛 (民 83) 也曾利用 Mayer (1987) 所提及的四種知識，針對國二學生在數學文字題的錯誤表現加以分類，分別為語言知識錯誤、基模知識錯誤、策略知識的錯誤以及程序性知識的錯誤。而何縉琪和林清山 (民 83) 則從探討小學四年級學生在解題時所產生的錯誤，將之分成逆轉型錯誤、目標監控錯誤、計算錯誤、分數概念錯誤、書寫監控錯誤以及空白 未完成等六類。

綜上所述及的幾種分類法，大體是從解題程序 (例如：何縉琪和林清山，民 83 ; Movshovitz-Hadar, Zaslavsky, & Inbar, 1987) 以及解題過程所需具備的必

要條件（例如：張景媛，民 83；Roberts, 1968；Reason, 1990）來加以區分錯誤，而這些分類法也都在不同的數學範疇中被實際運用。但是從這些分類中我們只知道學生會犯錯、是什麼樣的錯誤，而對於學生產生錯誤的原因卻仍無法有更深一層的瞭解，也因此對於教學上的實際運用有所限制。

二、以錯誤發生穩定性分類的錯誤類型

另外有一些學者則用較為廣泛的角度，將錯誤區分為系統性錯誤（systematic error）與非系統性錯誤（non-systematic error，或稱為隨機錯誤 random error）（李芳樂，民 84）兩種，而系統性錯誤和隨機錯誤最大的分別在於它們發生的穩定性不同，前者是指學生遇到類似題型時依舊會犯相同的錯誤，後者是指學生的錯誤是不小心、一時疏失所引起的，下一次碰到同樣題型時他不會再產生相同錯誤。因此以下將就這兩類錯誤，從文獻中整理有關學者所提出的看法及研究成果稍加詳述之。

（一）系統性錯誤（Systematic error）

其實系統性錯誤，遠在 40 年代開始就已有雛形。但當時尚未與教學結合，因此並沒有受到極大的關注與發展，包括 Grossnickle 於 1939 年提出的「固定錯誤」（constant error），認為同一類的錯誤會多次出現，及至後期 West 在 1971 年所提出的「錯誤規律性」指出，學生產生的規律性錯誤，可能在經過一段時間後會自然消失，但之後有可能再出現另一種規律性錯誤（梁淑坤，民 85）。另外，Burton（1982）則說明「一致性錯誤」（consistent error）是一種完全單單決定於問題本身而產生的錯誤，意即學生對於相同問題總是會回答出相同的答案。

上述的「固定錯誤」、「錯誤規律性」以及「一致性錯誤」的想法，都具有系統性錯誤的概念的意涵，他們說出系統性錯誤的特性是固定的（會多次出現）

是有規律性的（會出現於一段時間）以及是一致性的（相同問題有相同錯誤）。但這些說明並未使我們對於此錯誤有更深切的瞭解，因此，部份學者乃透過實際探討學生錯誤的研究，對此錯誤本身及學生是如何產生系統性錯誤能有更為深入的瞭解。

此外，Brown & Burton (1978) 及 Reason 認為系統性錯誤包括蟲 (bugs)，關於這方面的論述，將會在「另類的錯誤研究」部份中，有關的「蟲」的部份再加以闡述。

（二）非系統性錯誤 (Non-systematic error)

早期的心理學家認為疏忽 (slips) 是一種隨機的，因為不小心或不注意才產生的 (李芳樂，民 84)；而 Brown & VanLehn (1980) 則認為疏忽是一種隨機的、非系統的錯誤，而且是學生在一種無意行動的情形下，卻執行此活動；Reason (1990) 則認為疏忽是一種屬於技巧上的錯誤，它的特徵是缺乏檢查或注意。

綜上所述，疏忽應是一種非有意的、隨機出現的錯誤，所謂隨機 (random) 意即它的出現並不固定，是令人料想不到、似乎沒有既定模式可遵循，而且是許多學者認為無法預測的一種錯誤。換句話說，我們無法像上述其它的錯誤一樣，可以追溯疏失的原因為何，最多只能說明就是因為學生的不小心、不注意所引發的。因此，它通常被歸類於非系統性錯誤或隨機錯誤之下，與那些有模式可循的、可預測的錯誤是分屬於截然不同的兩種錯誤。

三、 另類的錯誤研究

以下將針對近期研究者所提及的四種錯誤，包括蟲 (Bug) 誤則 (Mal-rules) 合理的錯誤 (Rational Error) 以及疏忽 (slips) 等加以闡述，希望透過對這四種錯誤的瞭解，及其之間關係的認識，能對人類所犯的錯誤會有更深層的認識。

（一）蟲 (Bug)

Brown & Burton (1978) 認為學生的計算錯誤是因為在計算的程序中，缺少了部份程序或是某個程序出錯而引致，因此他們設計了一個電腦程式 (Buggy) 來模仿學生在減法的表現。此電腦程式是一個網路的架構，當中包含了許多程序 (母程序、子程序)，當減法的計算分成數個部份後，每個部份底下有其子程序，而各子程序間也可能互相聯結，最後形成一個網路結構，當電腦中的某一程式有錯誤 (增加、減少、寫錯) 時，答案也會出錯。Brown & Burton 透過實徵研究後發現，電腦模擬的錯誤和學生的錯誤是相符合的，因此，他們把這個發生錯誤的部份稱之為「蟲」(bug)。而「蟲」是可以預測的，因為在類似題中，「蟲」會一再發生，但只要將蟲去除掉，那麼錯誤就不會發生。他們形容「蟲」是一種具有一致性的錯誤行為表現，而此表現是源自於誤解 (misunderstanding)。

Brown & VanLehn (1980) 則在進一步地對蟲的發生做探討時，更深入地說明蟲是一種複雜 (complex) 有意 (intentional) 的行動，它反映出有關技巧 (skill) 方面的錯誤信念 (mistaken belief)，所以此錯誤和一些隨機的、非系統性的錯誤並不同，透過蟲可以解釋一些系統性錯誤的發生；另外 Stevens, Collins, & Goldin (1982) 也認為蟲會形成模式 (pattern)。

綜上所述，不難發現學者們認為「蟲」是一種出現於計算程序中的技巧性錯誤，它在學生是有意的情形下才會發生，而其產生會使得最終答案呈現出一種有系統的、可預測的模式。所謂有系統的、可預測的，意即是它應該具有某種程度穩定性，因為如果不具有穩定性，那麼它將不具有可預測的特性。

(二) 誤則 (mal-rules)

Sleeman & Smith 於 1981 年研究學生在解代數方程式時所犯的錯誤，發現受試者不僅會使用一些指定的計算法則，同時也會使用錯誤的法則來解題，此錯誤的法則稱之為「誤則」(mal-rules) 之後 Matz 於 1982 年對 Sleeman 和 Smith 所發現的誤則予以補充，並增加了三條誤則，且說明許多誤則的產生是因為學生對正確的規則做出錯誤類化 (misgeneralization) 或過度類化 (overgeneralization) (李芳樂, 1996) 所致。同時，李芳樂 (1997) 也在對數

的領域中，將學生的錯誤歸類成各種誤則，並從一百多條誤則中，抽絲剝繭地形成 7 條原始誤則 (primitive mal-rules)。

李芳樂 (1996) 認為誤則與蟲一樣，屬於系統性錯誤，其發生是因為學生缺乏某種知識或是因為他們擁有一些錯誤知識。但 Payne & Squibb (1990) 在研究代數錯誤時則提出，從發生次數來對誤則分類時，發現有許多罕見的誤則 (infrequent mal-rule)，另外只有少數才是屬於頻繁的誤則 (frequent mal-rule)，所以他們的推論是，誤則應該是非常不穩定的 (unstable)，學生們總是不規則地使用誤則。

上述兩人的差別在於對誤則的穩定性看法不一，李芳樂是從誤則形成的角度來看，以 Brown & VanLehn (1980) 的修補理論 (Repair Theory) 和 Matz (1982) 的類化理論 (misgeneralization、overgeneralization) 為基礎，認為在學生缺乏某種知識或擁有錯誤知識的情形下，其在解題過程中會遇到困境，而在解決困境時，他們會做出過度推論，誤則就因此而產生，從這個角度觀之，誤則是一種經過學生自行推論後才產生的產品，所以它不會是不規則的。而 Payne & Squibb (1990) 則是從實徵研究結果的角度來看，他們將學生在實際代數問題中的錯誤分成許多誤則，在這些眾多的誤則之中，少部份幾個是學生常出現的，而那些出現次數極少的誤則卻相當多，以 Grossnickle (1939) 的「固定錯誤」及 West (1971) 的「錯誤規律性」觀之，那些 Payne & Squibb 所認為的頻繁誤則才具有固定性、規律性，而那些罕見的誤則的出現是不具規律性的。

因此，這些 Payne & Squibb (1990) 所提出來的罕見誤則，似乎不能歸屬於系統性錯誤，而依照李芳樂 (1996) 的看法，它應該分屬於非系統性錯誤，意即是那些由於學生不注意而形成的疏忽 (slips)。然李芳樂 (1996) 也同時提到，疏忽與系統性錯誤在某個層面是沒有什麼分別的，不過前提是我們必須假設在解題的過程中，人類有一個控制系統、反應機制在背後選擇解題法則，而在選擇的過程中，注意力是一個重要的影響要素。

(三) 合理的錯誤 (rational error)

Ben-Zeev (1995) 認為蟲的作用只是描述錯誤的發生，但卻無法解釋錯誤發生的緣由，因此他提出學生在計算題所發生的錯誤是一種「合理的錯誤」(rational error) 的想法。他的假設是學生在計算的過程中產生的錯誤是正確地遵循著錯誤的規則，而非錯誤地遵循正確規則，而學生錯誤規則的形成是因為他們會從過去所學的例題或先備知識中將之過度推論所致。因此，在解題的過程中，學生會以他們所擁有的法則庫 (rule-based) 為基礎來進行解題活動，而法則庫中包含有正確及不正確的法則，當學生運用正確法則解題時，他有可能得到正確答案，當學生運用錯誤法則時則可能得到合理的錯誤。

Ben-Zeev (1995) 並進一步地說明，「合理的錯誤」不需要提及錯誤的穩定性，因為它重點是在於描述一個人的法則庫源頭 (rule-based origin) 為何。因此，「合理的錯誤」似乎可以很合理地解釋上述罕見誤則、頻繁誤則間的模糊性。因為知道誤則的產生頻率固然重要，但是瞭解錯誤發生的源頭更是眾多研究者與教師最終的目的，因為透過瞭解錯誤的源頭，我們才能對症下藥，我們的錯誤診斷也才顯得有意義。而不論是罕見誤則還是頻繁誤則，誤則的形成可說是因為學生的自我推論 (Sleeman & Smith, 1981 ; Payne & Squibb, 1990)。

所以如果從 Ben-Zeev 的觀點來看，誤則的罕見亦或頻繁並不重要，因為知道錯誤的穩定性並沒有辦法給我們更進一步的資訊，唯有當我們瞭解錯誤是從那裡來的？是如何形成的？錯誤研究才因此顯出它的意義。至於合理錯誤的成因，根據 Ben-Zeev 的假設，是源自於 VanLehn 的歸納假設 (Induction Hypothesis)，我們在錯誤成因的部份會有較深入的探討。

其實「合理的錯誤」的概念，在其他研究有關錯誤理論的學者之文章中多有出現過，例如：Brown & Burton (1978) 就說，有時候學生會有邏輯地去思考 (think logically)，並不像一般教師認為錯誤是一種不小心 (carelessly)。張景媛 (民 83) 也認為學生在學習時會主動建構所學習的材料，也會在建構的過程中產生錯誤。古明峰 (民 87) 也曾提及，從學生的觀點來看，他們只不過是根據自己所持有的概念和技能，作了自己認為合理而適當的處理。

雖然「合理的錯誤」可以跨越錯誤穩定性的角度來解釋誤則、蟲的發生，但它並無法函括所有的錯誤，因為 Ben-Zeev 認為學生是一個富創造力 (creative)

而且主動 (active) 的解題者，也因此會創造 (invent) 出一些具有瑕疵的法則，而正確地遵循它最後導致錯誤。但在一些實徵研究中，學生可能並沒有回答，或者是未嘗試作答 (何縉琪和林清山，民 83 ; Babbitt, 1990)。此外，有一些因為不小心而產生疏忽 (slips、lapses) 似乎也無法歸類於合理的錯誤之中，因此，以下將繼續就這兩種錯誤繼續探討。

(四) 疏忽 (Slips)

許多早期的心理學家認為疏忽是隨機的，因為不小心或不注意才產生的 (李芳樂，1996 ; Brown & VanLehn, 1980)。Babbitt (1990) 給予一個例子來對「隨機」下一個註解，他說：「就像在解一個除法問題時，你選擇加減乘除四種運算法則的機率是常態分佈的，意即它的出現並不固定，是令人料想不到、似乎沒有既定模式可遵循的。」既然它的出現並不固定，使人無法預測，那麼其原因更是令人無法理解，也因此，許多學者將之歸因為學生的不注意所產生的錯誤。

但近期研究者則提出不同看法，他們認為，也許疏忽並不是一個無法讓人瞭解的錯誤，我們還是可以瞭解學生為何會犯疏失的錯誤 (Fayol, Abdi, & Gombert, 1987 ; Cumming & Elkins, 1994 ; Byrne & Bovair, 1997 ; 李芳樂, 1996)。例如李芳樂 (1996) 就認為其實疏失和系統性錯誤並沒有什麼分別，他提出人類在解題過程中，有各種的法則在競賽，強度越高的法則被選用的機會越大，但當解題者的注意力不夠集中時，原本屬於強的法則有可能變成弱的法則，如此一來別的法則就因此而被選用，造成研究者及教學者認為此錯誤是一種隨機、莫名的錯誤。

Cumming & Elkins (1994) 有鑑於一些有關學生錯誤的研究，認為在一個複雜的文字題中，如果學生並不瞭解基本加法事實，而此基本加法事實又是解此文字題所需的一個極重要條件，那麼學生會因此而得到一個無效的答案的說法產生質疑，並進而提出他們的假設。Cumming & Elkins (1994) 認為從訊息

處理理論 (Information Processing Theory, 簡稱 IPT) 的觀點來說, 在運用基本加法事實時對於解題者本身會有一些認知需求, 當此認知需求過高時, 便產生一些錯誤, 此錯誤在以前的研究中, 被稱為不小心 (careless), 但其實它可能是源自於一些系統性的原因, 例如是因為學生犯了策略誘導錯誤 (strategy-induced), 也就是說他們會產生一些因為在記憶提取時, 使用錯誤的策略, 而引發錯誤的回憶 (incorrect recall), 最後產生錯誤。

李芳樂 (1996) 和 Cumming & Elkins (1994) 挑戰了先前那些認為系統性錯誤和疏忽是不同的學者的想法。他們的共通點是都從人類處理問題的機制來看待疏忽; 不同的是, 前者認為有一個控制系統、反應機制在選用解題法則, 後者認為是因為認知需求量過高, 使得在選用策略時, 會呈現出具有模式的錯誤, 意即系統性的錯誤。

此外, 有一些學者則從訊息處理歷程 (Information Processing) 的角度來看, 發現疏失的發生是有原因的, 而且主要是與一個人的工作記憶 (working memory) 有關 (Byrne & Bovair, 1997; Fayol, Abdi, & Gombert, 1987)。Byrne & Bovair (1997) 就進一步指出部份錯誤的發生是因為工作記憶的負荷量過重, 而且學生在此原因影響下所犯的錯誤, 次數是頻繁的, 但這類型的錯誤並不是每次都會發生, 因為工作記憶的負荷量並不是每次都相同。他們給予這類型的錯誤一個名稱, 叫做「後完成的錯誤」(postcompletion error), 例如, 當你投錢到自動販賣機後, 你會記得將飲料拿出, 但在一些時候你會忘記拿出機器所應找你的零錢, 換句話說, 當你的主要目的已經達到後, 那些屬於次要的目的可能會因為工作記憶空間不足以繼續處理, 最後就產生「後完成的錯誤」。因此, 這類型錯誤也是屬於系統性錯誤的一種。

所以, 從 Byrne & Bovair (1997) 的角度看「疏忽」, 似乎其是否為隨機性並不是那麼的重要, 重要的是我們對於疏忽的發生, 有了更進一步的瞭解, 這點與 Ben-Zeev (1995) 提出「合理性錯誤」的想法類似, 因為他認為沒有必要提及錯誤的穩定性, 重點是必須描述一個人的錯誤源頭, 研究錯誤才因此而顯得有意義。

綜上所述，「疏忽」從早期被認為是隨機、不具可預測的模式且不知其發生原因的錯誤，到近期的部份學者認為它的發生其實是具有模式的，而且與人類的工作記憶空間有關，這之間實為一大轉變。

（五）其他錯誤

上述所列舉的錯誤，前提都是必須透過學生先寫出來，研究者才能再加以根據他們的回答繼續探討錯誤成因，但若是學生沒有寫出答案呢？算不算是一種錯誤？如果是，他的錯誤成因又是什麼？何縉琪和林清山（民 83）針對小學四年級學生的解題時所產生的錯誤進行研究，並將學生的錯誤歸成六類，其中就是一項「空白 未完成」的錯誤；Babbit（1990）也根據他的實徵研究，提出學生也會犯一種「未嘗試的錯誤」（No-attempt errors），並且透過訪談，瞭解其成因。

因此，兩位學者都是將此行為表現（空白、未嘗試）歸屬於一種錯誤，Babbit（1990）並更進一步地說明，這種錯誤產生可以歸因為學生在閱讀問題時的能力、學生為了要避免複雜計算或不確定運算式的發生、缺乏時間進行解題等等原因。

第六節 數學題錯誤理論解釋

本節希望透過對錯誤成因的更深一層瞭解，能更掌握學生的想法，進而找出可能影響學生產生錯誤的因素。

一、生產系統模型（Production System Model）

（一）原始想法

Young & O'Shea（1981）提出產品系統模型來模擬學生在減法上的錯誤，

他們的假設是，每一個動作的產生都必須要通過一個條件限制，所以他們寫了一個電腦程式，是由許多的條件句所構成（if-then），滿足了條件（if）後，動作（then）才會產生，而學生錯誤的產生是因為他們在當中增加或減少一些規則（條件句）。意即，學生的答案是一個產品，產品的過程中若有瑕疵（增加或減少原料），那麼所得出來的產品，也會是一個瑕疵品。

（二）爭議與問題

Young & O'Shea(1981) 依據他們的研究假設設計了一個程式，研究結果顯示，證實了他們原先的假設。因此接下來的問題就是，此模型能夠解釋多少錯誤？Young & O'Shea(1981)的假設中，學生的錯誤是因為增加或減少一些規則而產生的，意即在解題程序中出錯時，會產生出錯誤答案。從 Brown & Burton (1978) 最先對「蟲」的闡釋，也就是學生的錯誤是因為在計算的程序中，缺少了部份程序或是某個程序出錯而引致，從這個角度來看，似乎 Young & O'Shea 的產品系統模型能夠與 Brown & Burton 的蟲相吻合，但能否解釋「蟲」的發生則令人質疑，因為，當他們在電腦程式中增或減某程序時是相當容易的，但他們還是沒有提出當一個解題者在解題過程中，他是依據什麼基礎來增減程序？

Young & O'Shea 也承認在他們的研究中存有弱點，而 Ben-Zeev (1995) 則提出他們研究上的弱點，來加以說明為何採用 Brown & VanLehn (1980) 的修補理論作為他研究架構的理論基礎，他認為 Young & O'Shea 是根據學生已經製造出來的答案，再找出一個最能符合 (match maximally) 他們答案的生產模型，來說明解釋學生所犯的錯誤，所以 Ben-Zeev 質疑在選取一個能解釋學生的生產模型時，其過程似乎有些本末倒置；另外，Young & O'Shea 並沒有提出一個理論動機來解釋學生增或減某程序的原因，所以，從這個角度看，似乎「產品系統理論」不能回答我們有關於錯誤成因的問題。

二、 修補理論 (Repair Theory)

（一）原始想法

Brown & VanLehn (1980) 對蟲的發生提出一套解釋理論，稱之為「修補理論」。他們認為學生在解題過程中遭遇瓶頸 (impasse) 時，會嘗試著去修補 (repair)，修補不成功，蟲就因此而生，同樣地，學生也可能在修補的過程中，形成一條錯誤的法則。至於學生為何會遇到瓶頸，Brown & VanLehn (1980) 提出兩個原因，分別為不完整的學習 (incomplete learning) 與遺忘 (forgetting)。

Ben-Zeev (1995) 則更進一步地說明不完整的學習，可能來自於教師的漸進式教學法 (prefix instruction)。

(二) 爭議與問題

因此，修復理論似乎能說明為何會產生蟲和誤則，而他們也提出了幾種修復的形式與原則，雖然如此，這些形式與原則並沒有有效地列出修復的過程，所以我們還是無法完整的解釋學生為何會犯錯 (李芳樂，1996)。

三、內隱模式 (Implicit Model)

(一) 原始想法

Fischbein, Deri, Nello, & Marino (1985) 認為，每一個基本的運算都和一個內隱的 (implicit) 不自覺的 (unconscious) 以及最具原始直覺想法 (primitive intuitive) 的模型有關，亦即學生所犯的錯誤應該和他最初所學的方式、或他所能接受的數學意義有關。例如：學生在學習乘法時，總是從整數乘法開始，為了使數學是富有數學意義，教師會用連加法來解釋乘法，因此有些學生會自行產生出「乘法一定越乘越大」的錯誤概念，進而影響他的解題表現。

(二) 爭議與問題

學者曾對 Fischbein 等人的內隱模式予以 IRT 驗證，結果證實內隱模式的存
在。但此模式在解釋錯誤的效用如何，則需要再進一步探討。根據 Fischbein 等
人（1985）所推測學生犯某些錯誤的理由有二：一是人為的，是有關於學生最
初的學習；另一是自然的，是有關學生對於數學的意義化。前者人為的因素，
其實與 Ben-Zeev（1995）所指稱的，教師的漸進式教學法有異曲同工之妙。
Fischbein 等人（1985）也認為如果教師的教法會引致學生犯錯，那麼這樣的教學
法是否有待商榷，但是若從 Piaget 的角度來看，從具體物的教學開始確是一個
不可爭辯的事實，那麼教師實陷入兩難，因此根據他們的建議認為，也許教師
上課時可以提出各式的問題以拓展他們的經驗，如此，也許可以彌補漸進式教
學所帶來的不足。

另外，在 Fischbein 等人（1985）所指稱的內隱模式下，似乎無法解釋由
Ben-Zeev（1995）所提及的「合理的錯誤」，因為 Ben-Zeev 認為合理錯誤的發
生是因為學生想要解決困境，而後經由過度推論所得到的錯誤，而 Fischbein 等
人的想法是內隱模式會不自覺地影響學生的計算，前者強調過度推論、後者強
調不自覺地影響。但當我們再回到兩研究中所提及的影響學生錯誤發生的始因
時，不難發現兩人的共通點在於都認為學生在漸進式教學法中得到一些中心程
序（core procedure），只是一個強調的是學生的使用應是經由推論而得，另一個
注重的是不自覺的使用，乍看之下，似乎並不相關，不過從另一角度看，也許
Fischbein 等人所認為的不自覺的使用，是學生很自然地覺得那是合理的，也就
因之很自然的使用，因此也許他們的想法可以作某方面的結合，使得錯誤理論
能更臻完美。

四、類化理論（Generalization Theory）

（一）原始想法

類化理論由 Matz 在 1982 提出，他認為誤則的產生是因為學生對正確的法
則做出錯誤類化（misgeneralization）或過分類化（overgeneralize）所致。錯誤
類化的原因是當學生面對一個較不熟悉的計算題，他可能因為能力不足，也就

是當產生知識重擔 (cognitive load) 時，他會沿用舊的方法來解決新的問題。可以說他採用了過去的知識背景，即使是當題目的條件並不符合舊方法的條件限制，他仍然會做出過度的推論，運用誤則而產生錯誤的答案。

(二) 爭議與問題

但學生在做出錯誤類化時，是否會依循著某種特定的方式做出推論？錯誤類化似乎可以解釋誤則發生的因由，但這樣的能力來自於那裡？是不是它背後有一個更強大的法則或力量在支配著它？

五、 小結

影響錯誤發生的原因很多，除了上面所各理論所指稱的與教師的教學、學生的自我推論、工作記憶量有關外，可能還有一些屬於個別差異的原因。例如：性別、智商、文化等，也多所出現在各個文獻當中，有待更有系統地探討。

此外，上述的錯誤解釋理論皆有其不足的地方，因為研究者皆是以某數學領域中的學生所犯的錯誤出發，透過各種假設、驗證而提出最後一個解釋理論，因此，其所探討的發生成因，不外乎是學生在面對此數學領域問題中的可能反應，包括先備知識的影響、教師的教學法、而造成學生的過度推論，甚或是在一種不自覺的情形之下所產生的錯誤，但若從另一角度來看，在錯誤發生之時，最重要的是學生如何看待題目以及其思考歷程，故在此情形下，也引發本研究所欲探討的問題，是否能從學生在推理上的錯誤與其數學錯誤類型有所相關更進一步地推想，是否在邏輯推理能力與數學解題能力間有其一定程度的相關性。