

中學生通訊解題第二十六期題目

臺北市立建國高級中學 數學科

問題編號

912601

- 1) 試判斷 $2003 \times 2004 \times 2005 \times 2006 + 1$ 是否為完全平方數？請詳述。
- 2) 若一個數如上題形式 (例： $4 \times 5 \times 6 \times 7 + 1$ ， $98 \times 99 \times 100 \times 101 + 1$)，試證明此數是否為完全平方數。

問題編號

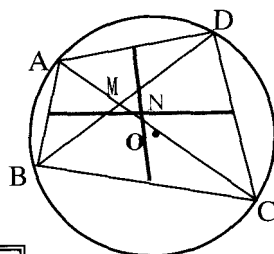
912602

在數線上取出 2003 個相異點，使這些點皆落在 0 到 1 之間，為了方便起見，小武將第 1 個點編號為 a_1 ，第 2 個點編號為 a_2 ， \dots ，第 2003 個點編號為 a_{2003} (這些點是隨機取出的，所以此編號沒有按照大小順序)，小雄想了想又將這 2003 個點從小排到大再編號，形成一組新的點列： $b_1, b_2, \dots, b_{2003}$ ，且滿足 $0 < b_1 < b_2 < \dots < b_{2003} < 1$ 。這時一旁的小民說：「你們知道嗎？這兩組的數列所包含的數是一樣的。」大家都點點頭，小民接著又說：「而且一定可以找到一個 a_n 及 b_k 使得 $(1-b_k) \times a_n \leq \frac{1}{4}$ 唷！」哇！大家都愣住了，過一會兒大家都露出恍然大悟的表情。請問：他們的理由是什麼呢？試證明之。
(提示：此題可用鴿籠原理)

問題編號

912603

四邊形 $ABCD$ 內接於一圓， O 為此圓圓心， M 為對角線 \overline{AC} 與 \overline{BD} 之交點， N 為對邊中點連線的交點，如圖一。試證明 $\overline{OM} \geq \overline{ON}$ 。



圖一


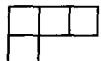
問題編號

912604

若 n 為一正整數， a_1, a_2, \dots, a_n 為 n 個不同的數。若將 a_1, a_2, \dots, a_n 重新排列成 b_1, b_2, \dots, b_n ，試問：應如何排列才能使 $|b_1 - b_2| + |b_2 - b_3| + |b_3 - b_4| + \dots + |b_{n-1} - b_n| + |b_n - b_1|$ 之值為最大？

問題編號

912605

- (1) 將 8×8 棋盤的一角剪去一個 1×1 正方形，試問：剩下的 63 個方格能否剪成 21 個  ？
- (2) 將 8×8 棋盤的一角剪去一個 2×2 正方形，試問：剩下的 60 個方格能否剪成 15 個  ？