

第貳章 理論背景

本研究分成對中學生平行線的認知結構以及促進推理層次發展兩大部份，這兩部份都是以平行線概念為主，所以我們要探討平行線相關研究資料

在認知結構部份，我們以 Dubinsky 所提出的教學策略做為理論架構，首先我們需要去瞭解概念心像與概念定義的部份。接下來我們探討幾何圖形的操作模式，所參考的是 Duval 的幾何認知理解模式。推理結構的部份，我們引進 Piaget 對數學的三種抽象思考模式。最後利用 Dubinsky 的起源分解概念，可以讓我們對學生的推理思維及概念認知結構做更細部的剖析。

再來是幾何推理部份，我們的研究目的是希望學生從實驗幾何跨越到演繹幾何，因此我們必須要去觀察學生對操弄幾何單元時，所展現的推理思維。由於本研究要探討學生的推理層次發展，所以我們以 van Hiele 幾何思考層次理論作為推理思維層次分類的指標，給予幾何推理形式一個分類及分層的依據。最後，我們將引進一些電腦科技的輔助以進行教學。

第一節 平行線的相關研究

一、平行線的數學結構

在幾何領域中的重要著作歐幾里得 (Euclid) 的幾何原本由 13 卷組成。在歐幾里得幾何原本中，第一卷共有 23 個定義，包含基本幾何名辭解釋，譬如點、線、圓等等，而第 23 個定義即為平行線的定義，敘述如下：

Definition 23

Parallel straight lines are straight lines which, being in the same plane and being produced indefinitely in both directions, do not meet one another in either direction.

也就是說，歐幾里得對於平行線的定義是兩直線永不相交。關於平行線的定理，在第一卷定理 27 提到如果一條線段與兩條直線相交，如果內錯角相等則兩直線平行，所使用的方法是利用外角定理(第一卷定理 16)所得證，其他也可推得同位角相等及同側內角互補。

不過，一些平行線相關性質(譬如截角性質：平行線截一線則同位角相等...)光是定義和既有公理是不夠的，因此有了第五公設。第五公設的敘述是：

Postulate 5.

That, if a straight line falling on two straight lines makes the interior angles on the same side less than two right angles, the two straight lines, if produced indefinitely, meet on that side on which are the angles less than the two right angles.

如果一條線段與兩條直線相交，在某一側的內角和小於兩直角，那麼這兩條直線在不斷延伸後，會在內角和小於兩直角的一側相交。

第五公設一直到第一卷定理 29 才派上用場：

Proposition 29.

A straight line falling on parallel straight lines makes the alternate angles equal to one another, the exterior angle equal to the interior and opposite angle, and the sum of the interior angles on the same side equal to two right angles.

一條直線與兩條平行直線相交，則所成的內錯角相等，同位角相等，且同側內角的和等於二直角。

它是利用反證法，如果同側內角的和不等於二直角，根據第五公設，就會在內角和小於兩直角的一側相交，而造成矛盾。

我們可以從幾何原本的編排看到歐幾里得對於平行線的推導過程。不過現今教材設計和幾何原本證明方式有些出入，為了清楚說明這個差異，接下來我們對於平行線的證明做個探討。

首先我們對於幾個敘述做一個編碼：

A：兩直線不相交。

B：兩直線截一線，則內錯角相等(同位角相等、同側內角互補)。

C：兩直線共垂直一直線。

D：三角形內角和為 180 度。

E：兩直線之間距離處處等距。

A 為歐幾里得對平行線的定義。B 為平行線的三個截角性質，分別是同位角相等、內錯角相等和同側內角互補，這三個性質是共價關係，可以從其中一個推導到另外兩個，所以列在一起。C 為現今教材對平行線的定義。D 在教材中證明平行線性質時有使用到此條件，但是特別的是 D 的證明在幾何原本中會用到平行性質，因此我們等下對這點特別注意。E 是除了 A 和 C 之外，第三個常拿來定義平行線的敘述。

以歐幾里得的幾何原本的編排和教材的設計，這五個敘述關聯如圖

2-1-1：

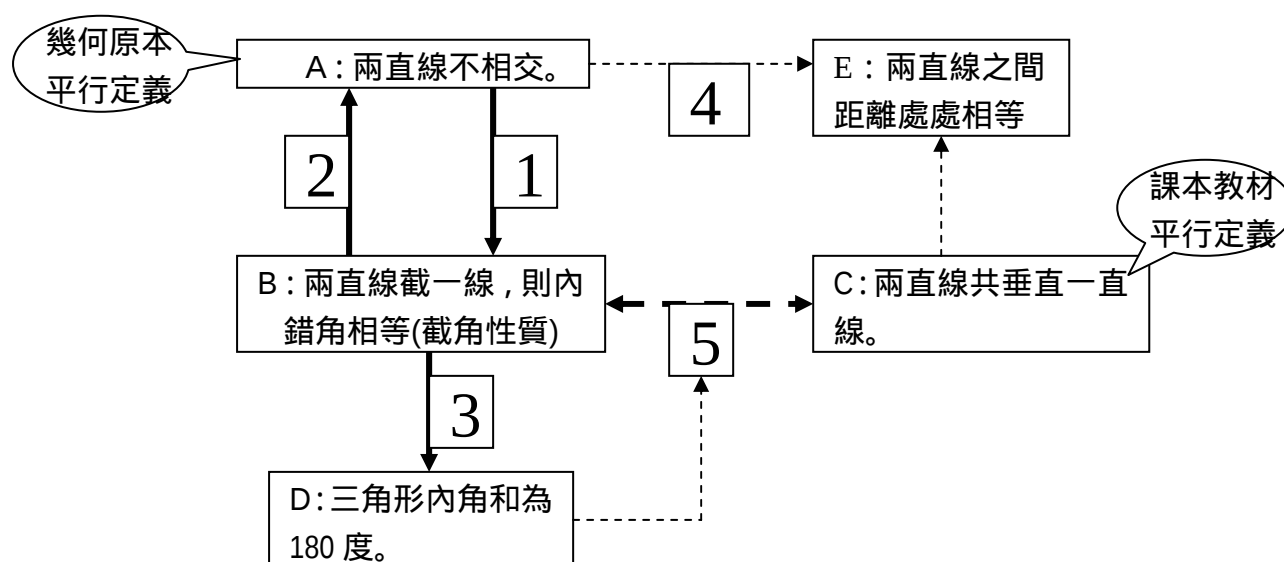


圖 2-1-1 平行線相關定義描述及證明歷程

歷程說明：

1. 幾何原本 I.29，這是利用第五公設去證明出來的，一直以來很多學者想要用其他證明去取代第五公設。
2. 幾何原本 I.27、I.28，所使用的方法是利用外角定理(I.16)，在這裡並未使用第五公設和三角形內角和 180 度之性質
3. 幾何原本 I.32，證明三角形一外角等於兩內對角的和，間接證明三角形內角和 180 度。
4. 兩直線之間距離處處相等可以用其他性質去證明，但是可能要牽涉到何謂直線距離等等。
5. 現今教材設計都是用三角形內角和 180 度來證明平行線和截角性質的關係。

研究者認為，幾何原本和現今教材對於平行線定義的不同，在於幾何原

本的定義雖然清楚易瞭,但是要推導到平行線判別性質等確需要用到第五公設以及反證法等技巧。而一方面中學生對於公設的瞭解度不夠,再來就是否逆命題不是中學生學過的領域,所以反證法不容易使用。所以才使用 C 的定義,實際上要從 A 和 C 有若且為若的關係的話,需要用到歷程 1 和 2。

利用 C 做為中學生對平行線的定義其實是很適合的,因為可以直接利用定義來進行平行線判斷、平行線構圖及性質的證明,但是卻會發生一個問題。因為在現今教材在截角性質的證明中,需要用到三角形內角和為 180 度,但是在幾何原本中,三角形內角和為 180 度是利用到平行線的截角性質來證明,如此一來就會陷循環論證當中,所以要證明三角形內角和為 180 度勢必要找尋另一條路線(圖 2-1-2),也就是幾何原本原來的推導軸線,不過定義上也需要用到兩直線不相交這個陳述。所以不同的定義就會造成推理出發點的不同,以本研究針對學生的推理行為來說,從概念定義去看學生的推理行為,或許是一個很有意思的研究方向。

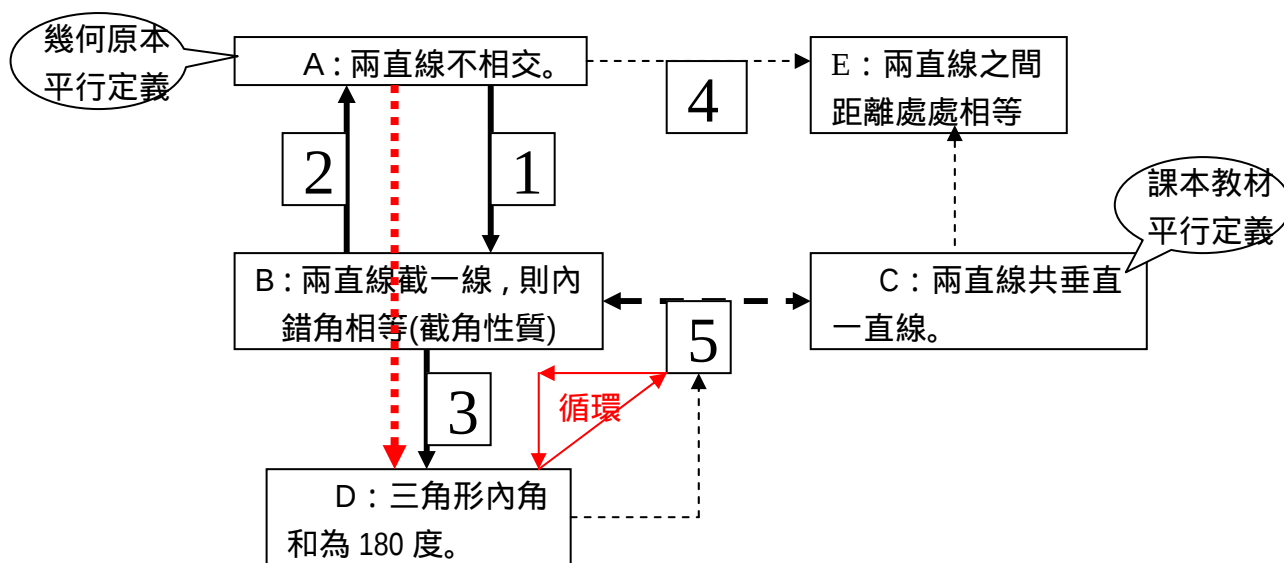


圖 2-1-2 平行線相關定義描述及證明歷程(補充)

二、平行線的課程結構

為了要瞭解學生的平行線的學習歷程以及設計平行線的教學活動,研究者一方面去查九年一貫課程綱要,另一方面根據中小學各版本的數學教材(翰林、南一、部編版)關於平行線的相關內容做為參考。

在九年一貫課程綱要中，數學領域將九年國民教育區分為四個階段：階段一為一至三年級，階段二為四、五年級，階段三為六、七年級，階段四為八、九年級。我們以各階層學生主要學習的方式和思考型態的特徵(鄭勝鴻 2005)，以平行線單元為例做個分類(表 2-1-1)：

表 2-1-1 九年一貫課程綱要數學領域階段指標表及平行相關指標

階段	學習特徵	說明	平行相關指標(2004)
一 (1~3)	具體操作； 視覺化	1. 主要透過具體操弄來進行學習 2. 思考特徵主要為眼見為憑	S-1-1 能由物體的外觀，辨認、描述與分類簡單幾何形體 S-1-7 能認識生活周遭中水平、鉛直、平行與垂直的現象
二 (4~5)	具體表徵； 察覺樣式	1. 主要是透過具體表徵(相對於實物，以另一種表徵呈現)來學習 2. 思考特徵主要是能察覺具體表徵中的樣式	S-2-2 能理解垂直與平行的意義 S-2-3 能透過操作，認識簡單平面圖形的性質 S-2-1 能運用簡單幾何形體的組成要素，作不同形體的分類
三 (6~7)	類化具體表徵； 辨識樣式之間的關係	1. 能在不同的脈絡中，使用所學的具體表徵進行學習 2. 思考特徵是能夠辨識出樣式和樣式之間的關係	S-3-1 能利用幾何形體的性質解決簡單的幾何問題
四 (8~9)	符號表徵； 非形式化演繹	1. 主要透過符號的表徵來進行學習 2. 思考特徵主要是能夠邏輯地關聯關係，並做出非形式化的推論，但是尚不能系統演繹	S-4-1 能利用形體的幾何性質來定義某一類形體 S-4-4 能利用形體的性質解決幾何問題 S-4-6 能理解平面上兩直線互相平行、垂直的概念 S-4-7 能根據直尺、圓規操作過程的敘述，完成尺規作圖 S-4-11 能理解平行線的定義與相關性質

從上表中可以發現階段一和階段二的學生由實體的操作和知覺辨識來學習幾何圖形的形狀和構成要素；階段三利用之前學到的性質和具體表徵來進行學習，不僅嘗試去解決問題，並且利用性質之異同來思考辨識圖形；階段四將操作以符號抽象化，並用邏輯推理出非形式化的推論。

研究者參考各版本的教師手冊中，關於平行線單元的教材地位分析表，

已習教材	平行單元教材	未習教材
	日常生活中的平行線 ↓ 平行線定義 ↓ 平行線定義之等價性質 ↓ 截線和截角之概念和名稱 ↓ 平行線的判別性質 ↓ 過線外一點畫出已知直線的平行線 ↓ 平行四邊形的性質 ↓ 梯形的性質 平行線的截角度數 ↓ 過線外一點畫出已知直線的平行線	
平行(國小)	↓ ↓	
		幾何論證(九年級)
平行四邊形及其面積(國小)	↓	相似形(九年級)
梯形及其面積(國小)		

→

縱向發展

--->

橫向發展

研究者大致將教學流程整理成以下模式(圖 2-1-3)

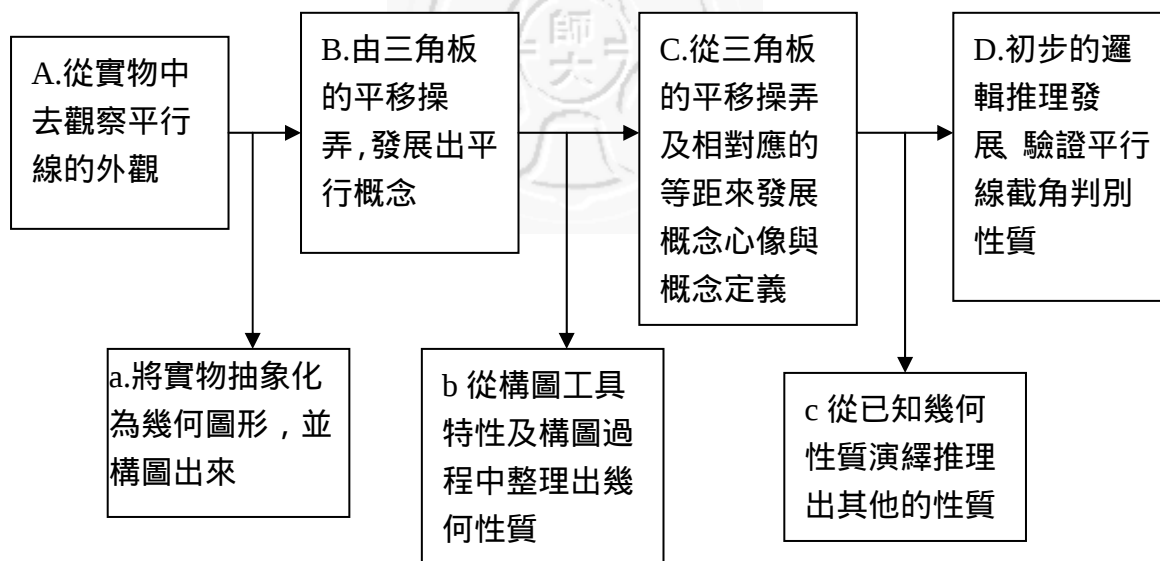


圖 2-1-3 中小學對平行與平行四邊形的教學流程

三、平行線的相關研究文獻

李昆達、葉啟村(民 94)在「從 van Hiele 發展層次分析國小六年級學童平行概念之研究」主要目的在探討國小六年級學童的平行線概念和平行線迷思概念。研究者將平行線概念利用 van Hiele 發展層次架構分成層次一(視覺期)、層次二(分析期)、層次三(非形式演繹期)。以台南市抽取總共 123 名六年級學童作為施測對象,施予平行線層次問卷的測驗,收集測驗資料進行卡方檢定、T 檢定。

本研究的結果如下：

1. 六年級學童在 van Hiele 發展層次二的人數占 (43.1 %) > 層次一的人數占(23.6 %) > 層次三的人數占(18.7 %)。以層次二的人數最多。
2. 經卡方檢定, 男生、女生在平行線層次人數分佈沒有差異。以層次二的人數最多。
3. 經卡方檢定, 城市、鄉鎮在平行線層次人數分佈有明顯差異。城市的學童的層次分佈偏向高層次, 鄉鎮的學童的層次分佈偏向低層次。
4. 六年級學童在平行線概念產生的迷思概念有下：兩線不等長就不是平行線、兩線只有水平方向的線才是平行線、兩線沒對上就不是平行線(投影概念)。

沈佩芳（民 91）發現高年級學生對於幾何圖示題，仍不能準確的判斷平行線。Mansfield 和 Happs (1992) 針對 8 年級學童做施測，提出學童的平行線迷思概念有二，第一：學童利用兩線距離相等或兩線不相交來判別圖形，而沒有考慮到平行線是建立在兩直線的基礎上，所以將曲線也看成平行線；第二：學童只有直覺到圖形局部的現象，只從沒有相交來判斷是否平行，而沒有發現直線延伸後可以相交，導致判斷錯誤。

第二節 幾何認知結構

一、概念心像與概念定義

Vinner(1983)對於抽象概念的認知結構，主要有兩種元素，即概念心像(concept images)與概念定義(concept definition)。Vinner 假定每個概念的認知結構中可能會存在這兩種組成元素，它們獨自形成，卻可能會有交互作用。而概念心像又分成心智圖像(Mental pictures)和概念屬性這兩部份。所謂圖像(picture)指的是任何可能的表徵，譬如圖形、符號、文字敘述或其他表示法。對於某些概念，我們有其定義，譬如定義何謂「平行線」？這些定義可能有兩種來源，一種就是經由被教學所得到的資訊，另一種就是當我們要對某人解釋這個概念的時候被我們自己建構起來的。這些建構起來的定義是利用我們對於這個概念的固有經驗所產生的結果，也就是利用概念心像去描述概念定義，而教育方面教給我們的定義，是這套知識系統的一部份，而我們卻不一定熟悉這系統。一般初學者解題時所應用的是概念心像而非概念定義(Vinner & Hershkowitz, 1980)。Vinner、Dreyfus(1989)發現，雖然大學生經由抽象定義來介紹函數，但是他們不依賴抽象定義來決定是否以圖解或利用公式來定義函數。Vinner(1981, 引自陳天宏, 民 91)使用圖 2-2-4 表示解決問題之認知歷程：

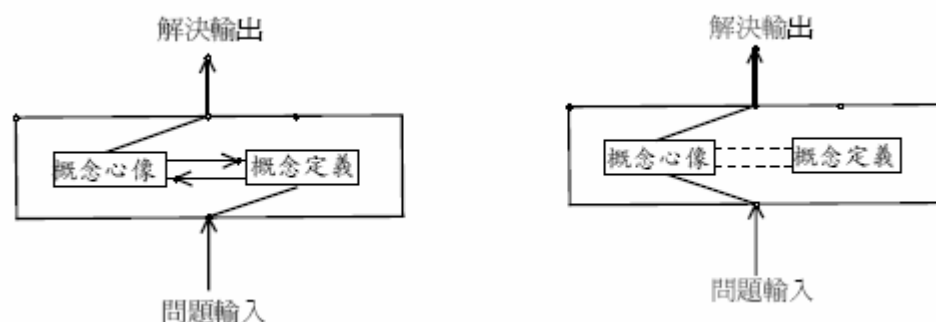


圖 2-2-4 概念心像與解決問題之認知歷程

圖 2-2-5 表示個體在接受到問題時，為了要理解所輸入的問題，會將此資訊連結到概念心像或是概念定義。概念心像和概念定義之間也可能會有交互作用，不過也有一些個體的概念定義一開始尚未建構起來，因此在認知上會以概念心像為主，或是利用概念心像來描述概念定義。而之前也提到個體解題時，尤其是初學者，所應用的是概念心像而非概念定義。

Vinner 和 Hershkowitz(1983)發現學習者的概念心像通常會包含典範現象 (prototypes)。典範是建構此概念所產生最強烈的例子，縱使教師一開始就以操作型的定義介紹概念，典範現象還是會迅速地浮現在學生的心中。而典範現象是否會影響到學習，則需要瞭解這些現象是否具有排他性，如果一個概念的典範現象具有排他性，代表這個概念有一個相當活躍的特殊例子，而學習者以這個特殊例子來判斷所有的狀況，且此概念之認知結構中的概念定義元素並不完整。另一方面，如果概念之典範現象沒有排他性，表示這個典範例的使用是一種習慣，學習者將此典範例當成是一個參考點，或者這個典範例只是眾多例子中最活躍的一個。而在使用概念時，還加了一些判斷或推理或是屬性的提取，因此 Hershkowitz(1999)以「概念上判斷的工作」來評估概念心像，並且提出組成概念心像的三種元素：典範現象、部份--全體推理以及屬性的瞭解。

二、幾何認知理解模式

(一)幾何圖形之認知理解

Duval(1995，引自黃哲男，民 91)的研究中指出，每位學生在學習幾何概念的理解方式因人而異，如果我們只用直觀的方式引領學生去學習幾何概念，對某些學生會無法幫助他們從一些問題的解答中獲得一些關鍵性的啟發，因此 Duval 提出了四種認知理解模式：

1. 知覺性理解(perceptual apprehension)

知覺性理解是從個體認知到圖形的組織法則，並將這些訊息組織成一個整體性的辨識，知覺性理解所產生的心像因為保留了被整合過的法則和個人知覺，所以其心像可能和圖形外表和性質有些不同，也可能會有一些錯誤。

2. 構圖性理解(sequential apprehension)

構圖性理解是個體構造一個圖形或描述其結構的一種認知歷程，對圖形基本組織的理解並不只是依賴視覺的部份，而是構圖工具的影響和數學性質的理解，所以如果個體不瞭解相關的數學性質或是沒有構圖的工具，便無法理解其概念，因此數學知識與經驗是構圖性理解的關鍵。

3. 論述性理解(discursive apprehension)

論述性理解透過語言或文字描述一圖形具有的性質，利用陳述來進行推理的認知歷程，每個人對圖形的說明不盡相同，從中能顯示出個體對圖形的理解程度。

4. 操作性理解(operative apprehension)

操作性理解是個體將實體圖像轉換成心像或是將心像轉成實體圖像的一種認知歷程，個體將圖像轉換後，知覺的辨識和原形不同者，稱為操作性理解。

(二)幾何解題之認知模型

Duval(1998)認為個體在進行幾何解題活動時，要引入的認知歷程有三種，其類型及說明如下：

1. 視覺化(visualization)：著重於以空間圖形表徵之型態與結構來陳述說明的歷程，在嘗試探索一個複雜的情況時，以大略的視察方式或是主觀的確認。
2. 構圖(construction)：利用工具的歷程，建構或修正，就像是做一個模型，藉由操作的呈現和觀察結果去關聯到數學物件的表徵。
3. 推理(reasoning)：從證明或解釋的推理歷程中，去關聯到延伸的數學知識。

在幾何認知的過程中，這三個歷程可以分開來執行，也有可能是兩個或全部的歷程結合起來，成為認知的歷程；其中視覺化代表觀察的歷程，推理則是演繹證明的歷程，至於構圖則是利用工具去幫忙建構知識。

這三種歷程的交互作用圖如圖 2-2-5：

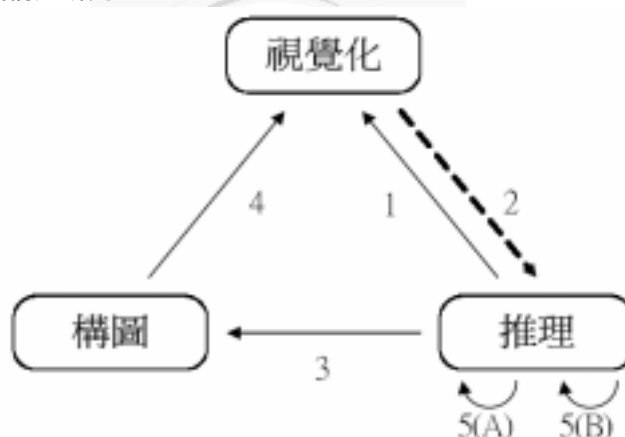


圖 2-2-5 Duval 的幾何認知模型

上圖的箭頭是代表某個歷程可以輔助另外一個歷程的運作，2 號虛線箭頭代表視覺化雖然可以輔助推理歷程的產生或運作，但是確不總是有效，甚至反而會造成誤導。5(A)和 5(B)代表推理形式有兩種，5(A) 代表個體用自然的語言來進行命名及討論；5(B)代表以定義與定理來進行論述的演繹及組織。這兩種形式可獨立運作。

根據上圖可知，構圖和推理皆可幫助視覺化歷程的產生和運作，推理也可以幫助構圖，但是圖形的構造無法輔助推理歷程。研究者認為要端看學習者是否有注意到構圖工具的一些性質，而且有些情境是學習者必須要先將圖形建構出來，學習者才能從圖形去做出觀察和推理。因此構圖也是輔助學習者推理的其中一環，也許是直接(從構圖工具的性質)或是間接(構圖完後利用視覺化來輔助)，都是有所幫助的。此外，是否有其他工具和歷程可以幫助推理的歷程，也是本研究可以探討的地方。

三、抽象思維模式

物理學家 Garcia 曾對 Piaget 的研究進行評論：「在現在數學中，代數幾何學、量子力學等，雖然抽象層次較高，但在他們行動中都可以找出相同的機制——知識發展的過程，或是依循相同的演進法則而營造出的認知系統。我個人認為這是 Piaget 最主要的貢獻。」(Jean-Claude Bringuier, 1991)

Piaget(1985)對人類心理學做了長期且深入的研究，他提出三種抽象形式：

(1) Empirical abstraction 經驗抽象：著重於物件本身。從觀察及操作實

物中去建立觀念，以外在物件轉化為內在的認知，不同的物件或情境可能會造成不同的認知。譬如學生看到桌上有一堆杯子，可以邊看杯子邊數出杯子的個數。

(2) Pseudo-empirical abstraction 擬經驗抽象：著重於物件的操弄。利用一對一的對應關係，可將實物和抽象問題牽上關係。譬如學生在數數字時，著重在於數的過程，有沒有杯子之類的實物並不重要，可以在腦中浮現杯子的樣子再數。

(3) Reflective abstraction 反思抽象：將物件抽象化成概念。把已發現的結構中抽象出來的東西思或反思到一個新的層面上，並對此進行重新建構，譬如學生在數數字時，完全不用借助任何實物，這時候學生已經把數數字完全抽象化了。

經驗抽象和擬經驗抽象著重物件的操弄，反思抽象內化為操弄，並可以產生新的動作或物件。這三種不同的抽象方式並非完全獨立，譬如擬經驗抽象和反思抽象需要執行的物件只能從經驗抽象所得知，經驗抽象也要藉由反思抽象來吸收記憶知識概要輪廓 (Dubinsky, 1991)。

Piaget(1985)曾表示，認知的發展取決於反思抽象，他設計了一些實驗，觀察孩子從反思抽象的角度來學習，以 Piaget 的心理學觀點來看，一個新的數學概念建構的過程需要反思抽象，反思抽象描繪出心智圖像，將物理動作提升至高層次的思維至認知和知覺動作(將此抽象知識投射至高層次的思維)。

四、起源分解

Dubinsky(1991) 在 認 知 發 展 理 論 中 提 出 起 源 分 解 (genetic decomposition) 的概念。一個概念的起源分解目的在對特別數學概念的分析與描述。起源分解的功能描述學生如何學習特定概念，而且是對於產生該概念發展中的基模，所有可能建構方法的外在描述。從訊息處理模式觀點看，此起源分解的想法是對某特定數學概念整體學習及反應歷程的描述。這些數學概念包含一些理論，和以舊經驗為基礎，一個主題如何被建構而讓我們瞭解。例如，Vidakovic (1996) 即以起源分解的方法分析學生反函數概念的建構歷程，並運用電腦設計教學活動以刺激學生去經歷及發展反函數基模的認知建構步驟。數學概念的一個起源分解，在於用來描述發展該概念基模的

可能心智建構方法。由於起源分解並不是唯一的，甚至在同一個主題下也有可能發生不同的起源分解。蔡志仁(民 89)在多重表徵探討學生橢圓學習時，指出對於一數學概念之起源分解的認知特性，有助於瞭解學生概念建構歷程，因而提供教學活動設計的參考。

Dubinsky(1991)提出「基模」的觀點，以整合一般理論並將這複雜的結構分割成小部份，並給予明確的描述基模之間可能的關聯。當我們用這方式處理特殊概念時，稱之為對這概念「起源分解」。Dubinsky 不認為一個概念只有唯一的起源分解，或是每一個主題都要遵循的方法，我們只要求觀察學習的進展構成重要的起源分解原料，然後提供學習者一個指標設計教學的可能方式，在我們可以建構的範圍之內去做描述。

起源分解是來自於對學生的觀察、學習理論和數學知識的本身結構的綜合體。所以我們需要從觀察學生獲得的資料(訪談、文書工作、電腦操作等等)去做分析。

五、媒介工具

上面在介紹 Duval 的幾何認知歷程時有提到一個問題，就是是否有其他的媒介工具可以幫助推理的發展。本研究設定三種媒介工具：具體工具、心像工具和符號工具(圖 2-2-6)。具體工具是觀察和操作，來進行解題和推理。心像工具則是在個體的心智中，關於圖形的操弄或是提取既有的概念基模，都是從人的內部去完成。符號工具則是在進行推理時，將推理歷程用式子或符號去推導出來。

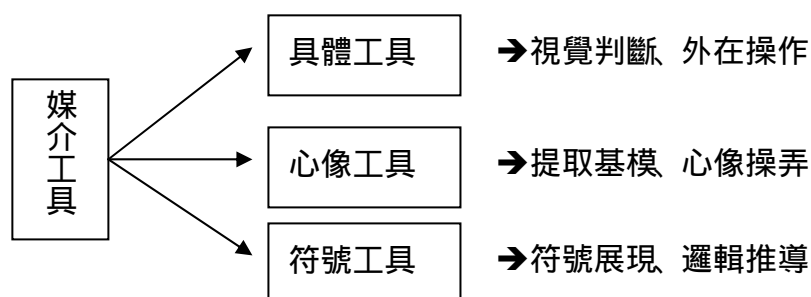


圖 2-2-6 媒介工具的种类

我們將媒介工具和 Piaget 的三種抽象類型做個比較 (表 2-2-3)。具體工具是學習者面對問題時，觀察圖形的外觀，並且利用手邊的可操作工具進行實驗操作。學習者在進行經驗抽象或擬經驗抽象時傾向於使用到具體工具。心像工具則是在心中操弄的物件，可能是動態的圖形平移或旋轉等等，或是

基模的提取。學習者在進行擬經驗抽象或反思抽象時比較會使用到心像工具。符號工具是推導新知識時，所利用的完全抽象化的符號和式子。符號工具是進行反思抽象時的重要工具。

表 2-2-3 媒介工具和抽象思考方式的比較

媒介工具類型	具體工具		心像工具	符號工具
操弄方式	外在操弄		內在操弄	抽象化操弄
抽象類型	經驗抽象	擬經驗抽象	反思抽象	
形式	視覺化	物件的操弄	概念的定義和幾何性質	

第三節 幾何推理思維

一、van Hiele 幾何思考層次

在 van Hiele 幾何思考層次理論中，將學生的幾何思維發展能力分成五個層次，學童的幾何能力會依這五個層次依序發展。本研究要去觀察學生對於平行線推理方式，因此研究者希望藉由 van Hiele 幾何層次發展來衡量學生對平行線概念的推理方式的層次，之後針對學生平行線推理的展現來分層次，以作為平行線概念層次的依據，並且在教學過後，能夠判斷學生對平行線推理層次是否有提升。

以下為 van Hiele 的五個幾何思維發展層次(表 2-3-4)：

表 2-3-4 van Hiele 的五個幾何發展層次

層次	層次特性	層次差異
層次一： 視覺辨識	整體形狀。他們可依照圖形形狀之間的不同來分類，但是學生並不能確認這些圖形有哪些性質要素。	單純以視覺辨別，不曉得圖形的組成要素
層次二： 描述分析	學生開始分析圖形的性質和套用適當的專門術語去描述這些圖形性質，但是學生並不瞭解相異圖形之間的差異以及圖形性質之間的關聯。	瞭解圖形的組成要素，由圖形的基本性質來進行一個明確的比較，但還不曉得組成要素之間的關聯，不能在兩個不同的分類中發現不同類別的包容關係，例如正方形和長方形是被認為不同。

層次三： 非形式推理	學生依據自身的邏輯思考來分類圖形的結構，並比較各類圖形之間的關係(相異關係、包含關係)，並可針對圖形的性質去做分類比較。在這個層次中學生的思維還是在非形式的階段。	瞭解組成要素之間的關聯，並可以用繪圖或口語等方式將其關聯具體描述出來，並有系統的做出分類，但是不確定且缺乏對於公理、定義、證明的瞭解。
層次四： 形式演繹	學生的思考模式已從非形式的推理進步到形式上的演繹，他們開始瞭解到推論的重要性，還有公理、定理及證明所扮演的角色，並可以經由邏輯推理去證明幾何性質和定理	除了知曉組成要素及其關聯之外，並可以用符號表徵將圖形關聯轉化成數學式子
層次五： 嚴謹系統	學生對幾何系統的形式推理已相當熟悉，並可以分析操作公理和定義的結果。	將圖形概念完全抽象化，可以不用圖形便可討論其性質

左台益(民 91)以 van Hiele 模式為參考，對國中幾何教材設計學習單元，依照學習層次將學習歷程區分為三大塊(圖 2-3-7)，從生活中的具體情境，到下一階段的行動反思，最後是分析推理做形式演繹，由此可知從具體情境到形式演繹之間必須要經過行動反思，進而做出推理行為。

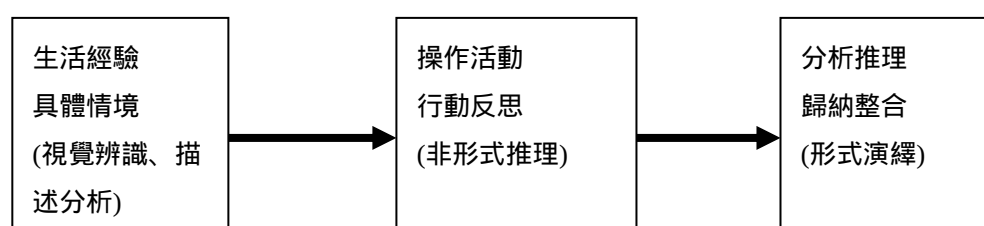


圖 2-3-7 中小學對幾何教材的教學流程

二、推理層次類型

鄭勝鴻(民 94)曾針對國中生證明概念及技能發展進行研究，基本上先將學生的證明類型分成實驗操作的證明、實驗操作與演繹推理之過渡的證明和演繹推理的證明類型。然後再將這三大類細分成五種證明類型。並依據學生的證明類型去做編碼，編碼層次的依據是將學生的 van Hiele 幾何思維層次

和證明類型做相關係數，取相關性最高的一組，分類及編碼方式如表 2-3-5：

表 2-3-5 鄭勝鴻的證明類型編碼

證明類型層次	證明類型	編碼
實驗操作的證明	特例的操作驗證	1
	實驗歸納證明	2
實驗操作與演繹推理之過渡的證明	不完備的推理證明	3
演繹推理的證明	描述型證明	4
	正確的形式證明	5

特例的操作驗證是指學生由實驗操作來驗證數學命題是否正確；實驗歸納證明則是操作多個例子來歸納驗證數學命題是否正確；不完備的推理證明是利用數學語言或是非符號式的論述做出不完備、不完整或是沒有符合邏輯的辯證；描述型證明是利用邏輯論證，但是大部份是用文字陳述而少用抽象符號形式；正確的形式證明則是用正式的數學語言做形式化的演繹推理。這五種證明恰好包含了從實驗推理驗證到形式推理證明，所以可以將每一位學生的證明方式歸類到這五種證明類型的其中一種，因此鄭勝鴻將這五種證明類型編碼後，將實驗前後的學生證明表現以編碼來歸類並分析。

由於本研究要探討推理層次的發展，而證明正是推理行為的表現之一，所以可參考這種編碼方式及 van Hiele 幾何思維層次去做推理層次的分類。

Duval 的幾何認知歷程中，視覺化即對應知覺辨識這種推理方式，構圖則是對應實驗操作，而推理在這邊主要是對應到邏輯演繹，基本上，知覺辨識和實驗操作都蘊含推理的成份，因為學生利用這些方法去解決「為什麼」有這樣的幾何性質和現象，所以我們將這些放入推理層次中，之後的編碼也會置入這些因素做為考量。詳細內容見資料分析的部份。

本研究將推理層次分成知覺辨識、實驗操作和邏輯推理這三大部份，我們將幾何操作推理類型及編碼順序分述如表 2-3-6：

表 2-3-6 幾何操作推理類型編碼

推理形式	幾何推理類型	補充描述	編碼
	未填寫	未寫或用其他填寫方式	0
知覺辨識	知覺推理	感官或直覺判斷	1
實驗操作	特例的操弄推理	利用操作推得圖形特性	2
	實驗歸納推理	利用實驗資料歸納所得	3
邏輯演繹	不完備的推理證明	嘗試做邏輯推理，但是邏輯有誤或不完整	4
	描述型推理	用口語方式將邏輯推理過程描述出來	5
	正確的形式推理	可用數學語言將邏輯推理過程列出來	6

研究者採用這樣的編碼方式，和鄭勝鴻的編碼方式差不多，只是為了推理類型的內容和問卷分析上的需要，所以又加上了前兩個編碼，這樣的編碼順序也符合 van Hiele 的幾何層次。

第四節 動態幾何環境相關研究

科技之進步，引領數位學習的潮流，利用現今的軟硬體設備，設計了許多教學程式、學習網站、互動軟體等等，提供教師及學生來使用，這些資訊科技建構出來的學習環境對於教師的教學以及學生的學習提供了多元化的選擇，從生活的觀點來看，電腦已融入大部分人的生活之中，例如 E-mail、msn、Blog...等等，電腦可以提供一個豐富的影音視覺效果，所以教師需要瞭解電腦扮演的角色、功用...等等。在本研究中，研究者嘗試引入動態幾何軟體來輔助教學，因此對於這部份的領域要有充份的瞭解。

一、電腦科技與數學教育的關係

許多數學家利用電腦去模擬或尋找某些模式（patterns）以及其間的關係（relations），或是利用電腦求解或證明一些計算繁瑣或困難的問題（如求圓周率的近似值），至於電腦對於數學教育的影響，在這裡提出三點：

1. 電腦能將數學概念、數學定義用圖像、影音方式呈現出來，可用靜態或動態的方式展現。
2. 電腦可將數學概念與關係具像化 (reification)，並鏈結與轉換不同的表徵(蔡志仁，民 89)，使得個體可以直接地操弄數學物件與關係(Balacheff & Kaput，1996，引自蔡志仁，民 89)。
3. 提供強大的計算能力與繪圖能力。

不過在使用這些電腦輔助引入教學要特別注意的是，由於這些科技產物在設計上沒有一個明確的學習理論給予支撐，對使用者來說，也會質疑使用這些數位學習教材，是否對於學生的學習成效有正向的成長。對於傳統模式下的學生學習時可能產生的障礙，能否在電腦輔助環境下輔助學生突破學習障礙，或是因為對教材和軟體上的不熟悉或是不當使用，而對學習產生反效果。

二、動態幾何軟體(GSP)

動態幾何軟體 (Dynamic Geometry Software) 是一種可以讓使用者製作並且操作一些幾何物件的軟體。可供實驗者進行幾何圖形作圖或是實驗探索，這裡的幾何構圖工具都是在歐氏幾何中的物件(直尺、圓規、角度、...)。動態幾何軟體是一個可以在電腦上做尺規作圖的軟體，還可以和使用者進行一些互動，以及一些動態的展示。動態幾何軟體當中最著名的就是 Geometer's Sketchpad (GSP)。

GSP 的特色與功用為(黃哲男，民 91)：

- 一、在電腦上提供工作平臺來做尺規作圖，作圖快速、精確。

傳統的紙筆尺規作圖的主要缺點在於耗時、作圖會有誤差，而且做出來的圖形為單一的靜態圖形，GSP 作圖快速、精確，而且能展現容易與清楚的特性，以呈現幾何性質的關係 (Clements & Battista，1992)。GSP 本身就是依尺規作圖的原則所設計的，因此可以說是尺規作圖的電腦版本。

- 二、可以進行動態操弄，保持幾何物件結構。

傳統的紙筆尺規作圖產生之幾何圖形為單一靜態圖形，一旦構圖完成，僅能說是符合某條件的特例圖形，這種作圖法容易因為個體知覺理解而不易

察覺某關係的不變性，或擅自加入原來情境所沒提供的條件，不論何者皆對個體進行推理與解題造成影響。GSP 便是一個提供可以直接操弄幾何物件的環境，使得使用者可以藉由簡單的構圖、物件在平臺上的拖曳功能讓圖形可以有動態變化，還有各種幾何量的測量與計算，可以幫助學生探究幾何圖形結構的關係。

三、可建立巨集模組物件

GSP 具有巨集的功能，使用者可以將作圖步驟便製成一個模組，將作圖流程記錄下來，因此除了可以更快速地、更有彈性地構圖之外，使用上有更大的自主性和便利性。

四、提供動態模擬

透過將圖形動態地呈現，可以讓使用者從不同方向和時間點之下進行觀察，以達到操作性的理解，甚至由於「動態」的引入，可以產生一個附加維度（appended dimension），使得使用者透過維度的變換達到知覺的理解，譬如將一個三維空間中的正二十面體繪製於二維平面上，但由於二維平面無法完整的呈現三維物件，因此易造成知覺理解的錯誤與障礙。透過動態的呈現，可以使得原本失去的維度利用一個虛擬維度去補強，讓圖形可能做出空間旋轉和翻轉的功能。另外，GSP 的引入，使用者可以透過軟體的幫助，達到更深層的操作與知覺的理解。

由於電腦構圖比紙筆構圖容易與精確，且程式性的構圖交給電腦，教師可將重點著眼於概念的發展上，因此利用電腦構圖輔助教學，有助於學生的幾何學習（Clements & Battista，1992）。

電腦的互動式的螢幕可呈現動態、可記憶及可修改的操作特性，其動態影像可以幫助心像的形成，甚至在個體的短期工作記憶區無法承載時，作為外部輔助體，形成外部心像。蔡志仁(民 91)認為動態幾何軟體可以讓學生自由的探索，因為當使用者按動滑鼠、鍵盤上的按鈕或是拖曳某物件時，電腦便相應產生特定動作，由於事件的發生順序並非是先規劃固定，因此系統是開放的，依使用者意願以各種可能的程式產生互動活動。

現今學者利用 GSP 來進行教學的例子很多，黃哲男(民 91)利用 GSP 的引入，使學生產生動態視覺化，與一般之視覺化並不相同，使得學生進行構

圖的程式與推理方式產生變化；除了動態視覺化之外，GSP 亦使學生因構圖的不同程式而產生不同的推理方式。

鄭勝鴻(民 94)指出在 GSP 環境的功能有：引導學生發展論證能力、幫助學生將外在監控系統(即利用 GSP 中的拉動功能來檢驗其作圖是否正確)內化為內在監控系統(作圖必須賦予圖形結構)，GSP 的巨集功能為：提供性質來幫助學生解決問題與做辯證的工作、扮演輔導監控的角色、促進學生的概念結構。

第五節 認知負荷理論

中學生從實驗幾何跨越到演繹幾何具有基本的困難性，其間的鴻溝在於推理的過程中，需要處理大量的文字元號和邏輯判斷。這些將造成學生在認知上的負荷，超過學生可負擔的認知負荷而影響學習成效，本研究採用認知負荷理論作為教學方法設計的基礎，嘗試輔助學習者跨越實驗幾何與演繹幾何的鴻溝。

「認知負荷」(Cognitive Load)的理論，來自歐美的人體工學(Ergonomics)與人因科學(Human Factor)等領域，從心理、生理與認知層面，來討工作與任務對執行者的影響及適合性。

原先發展這些理論，是用在軍事與企業上，稱為「心智工作負荷」(mental workload)。他們以此為一種指標，做為任務、工作或操作系統設計上之參考，儘量減少任務與工作對執行者的心智負荷，以增加執行時之績效。

「心智工作負荷」包含了兩種心理狀態，一為對「任務」所知覺到需付出的「心智努力」(mental effort)，二為任務對「自己」的困難度。澳洲新南威爾斯大學教育學院的 Sweller(1988、1994、1995、1998)把此觀念引進教育界時稱為「認知負荷」。在他多年的研究中，發現學生要由初學者變成熟練者，最重要的是在學習的過程中，要能獲得學習的概念，形成學習概念的基模，從而建立自己的解題策略與模式。

一、認知負荷的意義與特性

Jex (1988) 指出認知負荷是學習者面對學習內容時，置身於一個相關脈絡中，表現符合適當任務的行為時，自我意識到「任務要求」與「自身認知能力」之間，心智負荷之界限的評估。Paas (1992) 指出認知負荷是一種多向度的概念，它包含兩種成份：一是心智負荷 (mental load)，二是心智努力 (mental effort)。若個體對於學習內容所知覺的困難度越大，或者個體在心智上越需要努力，則認知負荷就會越大。因此，工作任務太過艱難，或者工作需要投入極大心力，都容易造成認知上的負荷過重。Sweller、Merriënboer 和 Paas (1998) 表示認知負荷是將一特定工作加諸於學習者的認知系統時所產生的負荷。

在國內的研究中，宋曜廷 (民 89) 指出認知負荷乃指在執行某種作業的過程中，因作業特性所需的認知能量或認知資源而造成認知系統(特別是運作記憶)的負載狀態。黃克文 (民 85) 認為學習者在接收訊息、處理與運用訊息的過程中，因為訊息之內容(數量、質量、脈絡等)學習環境、傳輸環境與互動方式等因素，超越了學習者所知覺的認知能力，在當時的「心理」或「生理」上引起了負擔、重擔、苦惱與憂慮，甚至失敗、挫折的後設概念。黃柏勳 (民 93) 說明認知負荷是個體在工作情境(學習情境)中處理訊息時，所感受到心智負荷與心智努力的負荷總量。倘若此負荷總量超出個體所能接受的範圍，將導致個體的認知系統無法負載，進而在心理上或生理上引起焦慮、壓力與苦惱等負面感受，並影響工作(學習)的表現。

依據認知負荷理論的相關研究，一般認為認知負荷具有下列特性(黃克文，民 85)：

一、互動性：認知負荷非憑空出現，它是在個體認知的過程中，與認知對象有所接觸之後才產生。個體本其內在條件(如記憶、概念、策略)去面對外在條件，在此互動過程中，才產生認知負荷。

二、波動性：認知負荷會隨影響學習成就之因素或時間上有所波動而變化，因此，認知負荷基本上是動態性。學習者的內在因素，如情意、智慧改變、成熟度變化、練習時間、學習策略等；或是外在因素，如壓力、期望、增強、懲罰、以及學習氣氛、學習環境等，都會影響認知負荷。

三、個別性：不同的個體，有不同的認知負荷。個體的情緒、動機、成

熟度、經驗、先前的學習等，都會使學習者對同一作業產生不同的認知負荷。

四、感知性：學習者有能力去內省本身的認知過程，並且去感受到對學習的認知負荷。

五、多層面性：認知負荷的來源是多重的，結果也是多重的，因此，多層面與綜合體是認知負荷的特性。

六、有限性：個體的認知負荷的負載量是有一定的限度，而並非無所限制。一旦接收的訊息超過個體認知的能力，則形成「過度」的認知負荷，使個體無法辨識訊息的意涵，將導致訊息處理失敗。

七、可操控性：藉由對工作任務、學習材料以及個體本身等認知負荷來源的操控或改善，可降低個體的認知負荷。

二、認知負荷的生成

在訊息處理理論中，學習者在學習過程中，將所接收的資訊放入短期記憶區中，再經由自我的反思、理解以及統整，還有跟學習者既有的知識做比照和連結，最後膠囊化成基模，再置入長期記憶區中。所以短期記憶區可說是學習者在內部的知識處理區。

Mousavi 和 Sweller 指出認知負荷理論對人類認知架構（cognitive architecture）的基本假定為以下幾點（Mousavi et al. 1995、Sweller et al. 1998）：

一、人類在運作概念的記憶區容量是有限的，若待處理的訊息或材料本身的內部成份（elements）互動性很強，要互相參照才能瞭解，則更耗費短期記憶容量，因而產生更大的認知負荷，造成學習困難。

二、人類的長期記憶區本身沒有容量的限制，它所儲存無盡的知識內容，是專家和生手差別的主要來源，專家有豐富的先備知識，並且能熟練的從長期記憶區提取並使用這些知識。

三、長期記憶的知識與技能是以基模的型態儲存的。基模包含了訊息的成份，它由簡單到複雜，由粗略到精緻的建構過程。基模在長期記憶中可以發揮組織和儲存知識的功能，而在運作記憶中則可發揮降低記憶負荷的功

能，因為許多訊息佔用記憶區的容量，基模可以將一堆複雜的知識結構融合成一個單一的處理單位，因此基模建構是教學或訓練的主要目標之一。

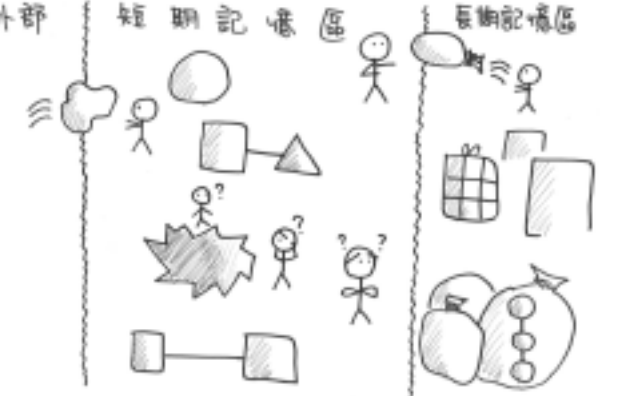
四、所有的訊息都是透過監控式（controlled）或自動式（automatic）的處理。監控式的處理發生在意識層面，佔用許多運作記憶的空間，而自動式的處理較少為意識所監控，佔用較少的運作記憶空間。因此基模運作自動化是基模建構過程中重要的步驟。當基模運作自動化後，可以節省許多運作記憶的空間，對更多訊息作同時或更深入的處理。

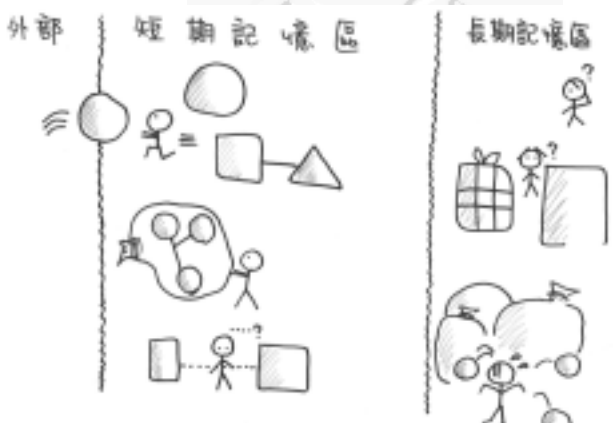
在學習過程中，短期記憶區所處理的不僅所接收的外界訊息，還有從長期記憶中所提取的基模，但是處理容量的侷限，使得短期記憶區無法同時處理過多的資料，而造成學習者的認知負荷。此外學習過程中，有一些與學習內容無關的資訊，也可能佔據短期記憶區，而產生無益的認知負荷。因此，教學方法、教學內容都有可能造成認知負荷。如能降低認知負荷則有助於學生專注於資訊的處理。

以訊息處理理論的觀點來看，研究者認為認知負荷不全然對學習產生負面效應，因為有認知負荷就代表學習者有接收到訊息，並且在腦中運作處理並吸收，但就是因為腦中處理這些知識的工作環境(短期記憶區)空間有限，所以一旦認知負荷過大，超過學習者能承受的範圍，就會產生學習上的障礙。所以學習過程要給予學生適量的訊息，並且不要有太多與學習內容無關的資訊佔據短期記憶區，讓學習者有充裕的思考空間進行學習。此外如果學習的內容對學習者困難度太高，或是過程中接收到無法理解的訊息，學習者可能因為承載較大的認知心力，甚至因為無法處理而放棄。教學的部份要注意學習內容是否適合學習者的認知能力，還有學習者是否有學習此概念所必須要有的先備知識，才能在學習中拿出先備知識來使用。

我們根據上述理論，將認知負荷與描述統整如表 2-5-7：

表 2-5-7 認知負荷的來源(出自於研究者)

認知負荷	認知負荷的圖示	敘述
正常情況		在短期記憶區中,有來自外部世界內化而來的知識,也有從長期記憶區來的先備知識,在短期記憶區中做統整及膠囊化。
短期記憶區負荷量太大		當一次接收到外界太多的資訊,或是短期記憶區中有太多概念要處理,就會有「塞車」的現象。
有未能理解的資訊或是艱難概念		當內化的資訊無法理解或是概念本身對學習者是困難或複雜的,就會產生認知負荷。

沒有或是找不到先備知識		當概念的理解或處理需要用到先備知識,但是在長期記憶區找不到這個知識時,就會產生認知負荷。
-------------	--	--

從學習與操作的過程來探討，Arnold 和 Roe (1987) 認為認知負荷很容易引起操作上的錯誤，而操作錯誤又更會引起認知負荷，而形一個惡性循環。所以在學習過程的脈絡中，每一步驟都會有認知負荷的出現，也就是說認知負荷具有個別性與互動性。

Paas 和 Merriënboer (1994) 認為過度的與外在來源互動會產生認知負荷，會影響到學習本身。認知負荷可以說是以多層面的持續與循環的動態情形存在；學習者、任務（環境）、任務與學習者的交互作用，都可能造成認知負荷，認知負荷會影響學習的表現（工作成效），工作成效（行為表現）又回饋到學習者本身，形成循環的互動作用與關係。如圖 2-5-8 所示：

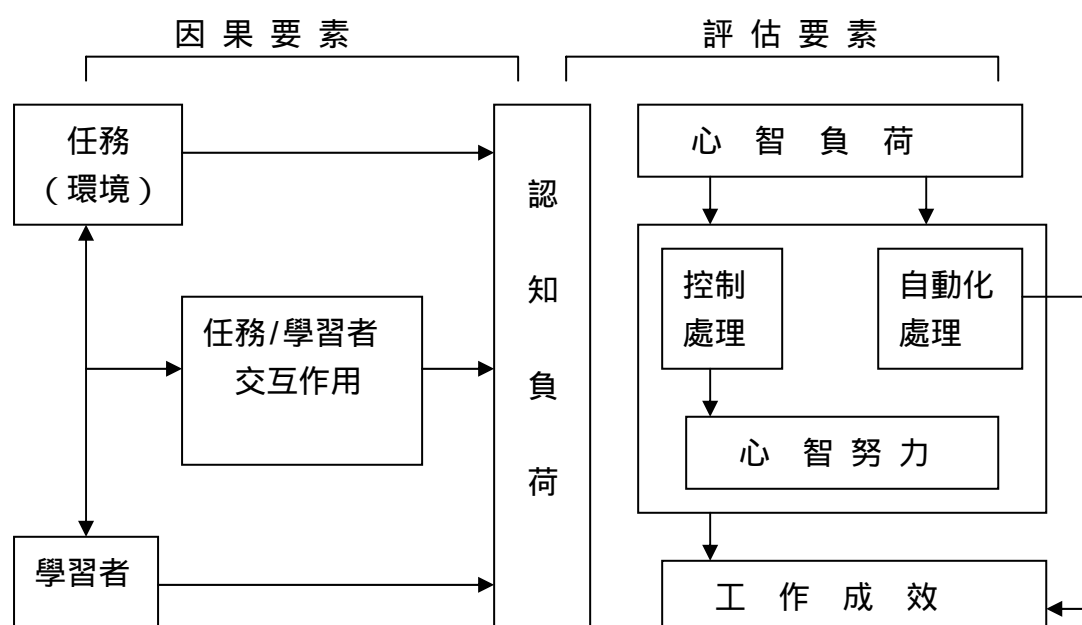


圖 2-5-8 認知負荷結構圖（採自 Paas & van Merrienboer, 1994）

三、認知負荷的相關研究

認知負荷理論強調，教學設計要達到的首要目標是「基模的建構」和「自動化」，這兩者都必須借助運作記憶的處理始能達成，因此訊息在運作記憶處理時的難易度，便成為認知負荷關心的焦點。Sweller、Merriënboer 和 Paas(1998)指出造成訊息在運作記憶中處理的難度和負荷感的來源有三種：

一、內在認知負荷 (intrinsic cognitive load)：此種負荷是材料本身的特性造成的 (如材料的複雜度)，因此不易由教學設計來改變。

二、外在認知負荷 (extraneous cognitive load)：此種負荷是外加的，譬如教材設計和呈現的方式，或教學活動的本身，因為是外在部份，因此可以藉由教學設計的修改而降低。

三、增生認知負荷 (germane cognitive load)：與外在認知負荷有關，指在降低外在負荷之後，刻意以教學活動改變學生的注意力或處理方式，而達到基模建構的一種認知努力 (cognitive effort)。增生認知負荷為外在認知負荷的一種，雖然會增加學習者的負荷感，但為協助基模建構所需的努力，只有在總認知負荷量 (內在認知負荷與外在認知負荷之總和) 未超出學習者的能力範圍時，適當的引入「增生認知負荷」才有意義。例如：設計未完成的數學推理範例，引導學習者完成之，這樣的過程即增加了「增生認知負荷」，協助學習者建構相關之基模。

從以上的資料可知：

- (一) 短期記憶負荷的項目越多，認知負荷越大。
- (二) 學習過程中，越需要努力學習的，認知負荷就越大。
- (三) 意識到任務要求與自身認知能力間差距愈大，則認知負荷愈大。

因此，不論是概念的學習，或是解題策略的形成，都應該減少學習過程中過多的認知負荷，才能維持一定的學習效果。

由於認知負荷的外在來源主要為教材的編排格式所造成。因此，Sweller、Merriënboer 和 Paas(1998)表示設計教材的時候應減低教材的負荷量，以有助學習者的學習。而教材的編排格式上，應注意的是：

- 一、分散注意力效應 (Split-attention effect)

分散注意力效應為認知負荷中的一個現象。分散注意力的發生原因是：學習者需要將他們的注意力分開，以獲得不同呈現來源的資訊，並且花費心力將不同來源的資訊整合起來。

如閱讀一篇文章時，當字詞的註釋（指的是對字彙或字句的解釋）與內文分開時，讀者遇到不熟悉的辭彙，則會跳離所讀的文章，到註釋處讀完解釋後，將解釋短暫的記在記憶區中，再回到先前文章處，將文章內容與辭彙解釋合併在一起。這樣處理兩種來源的資訊時，便產生較高的認知負荷，稱為「分散注意力效應」（圖 2-5-9）。此效應的發生，是當讀者需要分散其注意力在不同的資料來源，並且須整合此多重來源的資訊（Jeung, et al., 1997）。

當敘述與圖形整合在一起時，可減少認知負荷量（圖 2-5-10）。相同內容的資訊以整合方式呈現時，會比花費心力將不同來源的資訊整合起來，較有效地獲得資訊。因為整合的資訊會減低工作記憶區的負荷量。因此，為了減少額外的負荷，許多研究驗證，若資訊是以實際的整合方式呈現，而不是靠心力去整合時，可以去除分散注意力的效應（Mousavi, et al., 1995）。

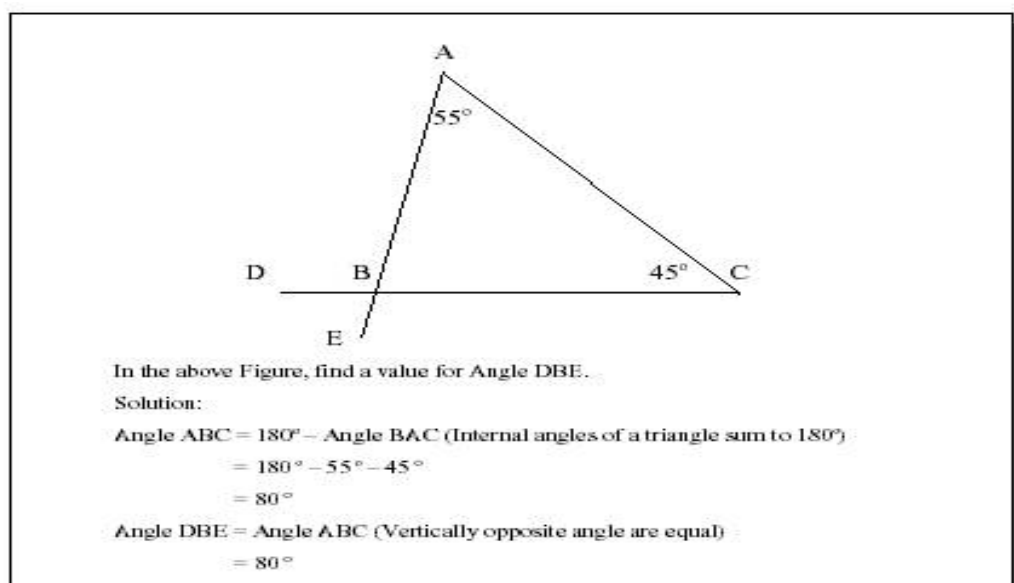


圖 2-5-9 分散注意力的例子(Sweller, van Merriënboer and Paas, 1998, 251-297)

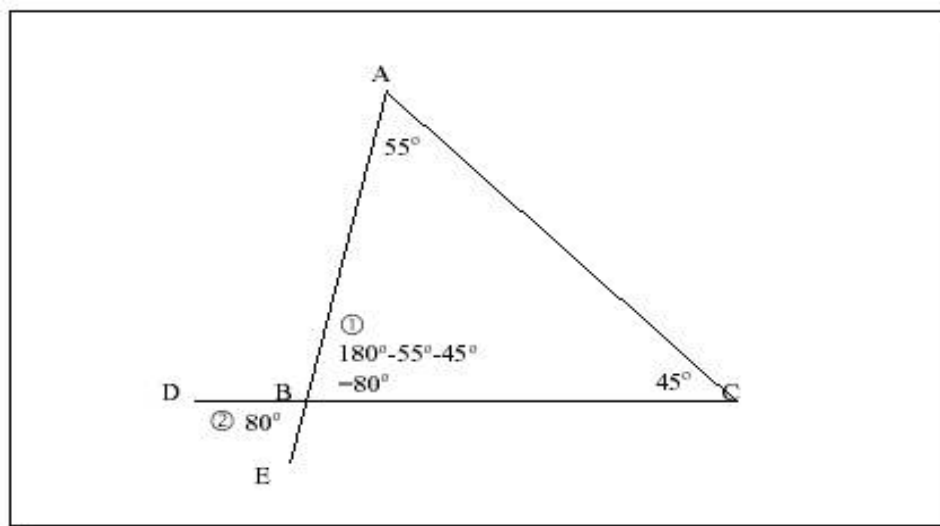


圖 2-5-10 圖文整合的例子(Sweller, van Merriënboer and Paas, 1998, 251-297)

二、形式效應 (modality effect)

Mousavi (1995) 的研究中提及，較新的記憶區理論提出人類在處理資訊時可經由多重管道，而非單一模式。如 Baddeley 的理論提出兩套處理的系統，一套為專門處理視覺相關的資訊，另一套則為專門處理聽覺的資訊，如說話、言詞方面的資訊，這兩套系統獨立處理其不同的資訊。如 Frick 的實驗中，當資訊以視覺方式呈現後又伴隨一連串的聽覺資訊，其學習者的回憶效果比前後都是以單一視覺或單一聽覺的呈現方式好。

Mousavi (1995) 說明形式效應便是由分散注意力效應所導出：利用雙重來源的方式呈現資訊可擴充有效記憶區的容量，所以採用整合雙重媒體的技術，會改善分散注意力的效果。

三、重複效應 (redundancy effect)

有學者發現當圖片與文字分別都能解釋內容時，若二者同時放置一起，將強迫讀者去建立二者間的關聯，這多此一舉的現象非但不能加強學習效果，反而會造成認知負荷 (范懿文、陳彙芳，民 89)。

Jeung 等人 (1997) 對字彙解釋的研究發現，藉由實體上的整合，即在辭彙旁加上字詞的註釋，有助於對文章的理解，但是此方式是對有助文章理解時加上必要註釋，才會有助學習。然而，若是對學習者而言，所加的註釋是不需要的資訊時，則會產生重複的效果，而有礙學習。

Merriënboer (2002)利用認知負荷理論(CLT)設計一些研究實驗和訓練情

境。研究的目標有(1)避免認知負荷過重(2)減少外在認知負荷 (3)增加整體可用的認知空間限制。這個研究的重點在於減少外在認知負荷和增加增生認知負荷。

CLT 的焦點放在設計教學技術來減少外在認知負荷，外在認知負荷是加諸於認知的歷程和學習沒有直接的相關。而認知歷程中的某些地方會產生高度的外在認知負荷，像是在解題時運用解題策略，或是解題中有目標導向的問題。個體心智整合生理去分配資訊，處理掉多餘的資訊。在問題的格式部份，像是沒有目標導向的問題中，顯示出這樣的格式會產生比較少的外在認知負荷而且會增進學習。Sweller (1998)指出教學者應該設計一些方式讓學習者不需要分散他們的注意力在不同的資訊上或是處理多餘的資訊。有些實驗教學是運用局部問題當作教學方法來減少外在認知負荷。局部問題提供不只是問題的描述還有部份問題的解答，必須要靠學習者來完成它。

Merriënboer 和 Krammer(1987)首先提出使用局部問題(completion example)以增進電腦程式設計技能。局部問題是指一個問題給予問題陳述、目標陳述和一部份的解法(未完成的電腦程式)提供學習者必需完成部份解。這種方式介於全控問題(work example)和無提示問題(conventioned example)之間。全控問題可視為局部問題加上全部的解答，無提示問題可視為完全沒有解答過程。這種訓練策略剛開始可用局部問題但是提供幾乎完整的解答，最後操作局部問題時全部或大部份的解答都是由學習者來完成。這種策略稱為「局部策略」。

局部問題和無提示問題的差別是學習者在操作無提示問題時，所產生的外在認知負荷是很高的，而且對基模的建構歷程(關注在學習識別問題的陳述和聯結問題的步驟)關聯較少。相反的，學習者在操作局部問題時可以專注在問題的陳述和聯結問題的步驟，可讓他們歸納出一般的解法和認知的基模。明確的認知基模可讓他們獲取應得的技能。

Merriënboer 的研究(1990)以及 Merriënboer 和 De Croock(1992)的研究在電腦程式設計方面在局部問題部份給予強大的支持，但並未收集認知負荷的資料。在解題的統計方面，Paas(1992)首先比較了局部問題、全控式問題和無提示問題在測試效能和訓練成效期間的認知負荷效果。學習者對每一個問題或例題評估他們所察覺到的心智努力，做了九分量表。利用九分量表讓

學習者表示自身察覺到的心智努力，對於認知負荷是一種合適的測量法 (Paas, van Merriënboer & Adam, 1994)。他們發現局部問題的訓練和全控式問題上需要等量的心智努力和測試表現，比起用無提示問題時，另外兩種方式在測試期間呈現較低的認知負荷。研究中也指出用局部和全控式問題會產生較好的認知基模。

CLT 也用來解釋教學技術的效果以增加增生認知負荷，增生認知負荷是加諸於認知的歷程和學習有直接的相關。增生認知負荷要做的就是建構認知基模。Paas (1994)指出各種不同的問題情境或是其他任務維度，像是這項任務想要呈現的方式，顯著的定義特徵，文字敘述任務的執行，都可能增加增生認知負荷以及增進基模的建構。一些研究的目的是運用高度情境關聯 (contextual interference) 當作教學方法來增加增生認知負荷。高度情境關聯可視為特殊變化形式在於情境內部關聯的結果。

低度情境關聯可能從制式的練習計劃中產生，這種能力需要解決一種形式的問題和進行下一種形式的問題之前繼續練習(譬如 B-B-B, A-A-A, C-C-C)。高度情境關聯可能從隨機的練習計劃中產生，不同的問題以隨機方式排列(譬如 B-A-C, B-C-A, C-A-B)。例如一個教學單元有三種類型的問題，每一種類型的問題都有好幾題，低度情境關聯會將同類型的問題放在一起，一種類型的問題解完再解下一種，而高度情境關聯會這三種類型的問題以隨機的順序出題。

情境關聯成效指出，比起低度情境關聯，高度情境關聯導致較佳的記憶力以及高度獲得之能力。但是學習者實行在關聯的情況之下一般需要更多的時間和投入更多的心智努力以掌握這個能力。而且一般應用的知識是從所呈現的不同問題的答案所歸納出來的。當在高度情境關聯之下練習時，學習者為了去能夠瞭解和解出每一個特殊的問題而需要去應用不同的知識和能力。所以學習者模擬去比較每個問題的解法還有留意解法的異同，在解題中探索的過程會增加認知負荷。然而，因為這種認知負荷對學習會有直接相關(建構認知基模和工作的表現有所相關)這被視為有用的「增生認知負荷」。

Jelsma 和 Bijlstra(1988)研究情境關聯對於訓練複雜的認知技能。他們的報告對學習者應取得技能的時間有些延誤，但是有較好的高度情境關聯以及成效。De Croock, Merriënboer 和 Paas(1998)延伸 Jelsma 和 Bijlstra(1988)

的研究藉由測量情境關聯對認知負荷上的成效。他們預測當在解練習題時高度情境關聯會產生高度的增生認知負荷，但最後會導致較好的認知基模。他們研究學習者接收訊息時什麼種類的表徵會導致不同類型的系統錯誤(錯誤原則)然後用高度或低度情境關聯，以程式性練習解決系統錯誤。練習後他們作了測試包含問題整合錯誤的表現，做程式性的疑難排解。De Croock、Merriënboer 和 Paas(1998)發現和 Jelsma 和 Bijlstra(1988)一樣的結果：學習者在在高度情境關聯練習程式性的疑難排解，在練習中取得技能時間有些延誤，但是有較好的表現。

Merriënboer (2002)假設一些教學的方式在訓練期間，會減低外在認知負荷而不會有負面影響轉移表現，因為少量的注意力在認知歷程上不會直接和學習有所關連(譬如整合不同資訊的來源)。舉例來說，我們將一個證明的例題給予提示，除了關鍵的證明步驟挖空，其餘的都附上去給學生，讓學生補上挖空的部份。更進一步，Merriënboer 會假設一些教學方法在訓練期間會增加增生認知負荷以及增進表現，因為更多的注意力在認知歷程上會直接和學習有所關連(譬如基模的建構和心智抽象)。譬如運用一些不同的表徵來表示同一個概念。

接下來就是建立教學方法，來結合減少外在認知負荷和增加增生認知負荷，將會展現較佳的效能。例如教學設計和教師對學習者使用無提示問題會困在一些較難或較複雜的階段，而產生認知負荷。而局部問題讓學習者預測出部分或全部的問題，因為像這種部分可減少外在認知負荷和增加增生認知負荷。然而，這個研究主要的問題在訓練中是不可能清楚的預測認知負荷。目前研究中沒有測量的工具用來分辨外在認知負荷和增生認知負荷。學習者只能回報感覺到的心智努力在他們的工作表現，包含兩部分的認知負荷。

Brunken, Plass 和 Leutner (2003)則認為可以從兩個向度來評估認知負荷，一為「客觀性」(objectivity)，包括主觀的或客觀的(subjective or objective)兩個層面；另一為「因果關係」(causal relationship)，包括直接的或間接的(direct or indirect)兩個層面(表 2-5-8)。

一、主觀的測量：學習者自我反省，將自己的負荷量化。如將所花的心智力量化為「1」到「9」，所對應的是「極少的心智努力」到「極多的心智努力」，由學習者評定本身的負荷後，選取較適合自己的尺度。

二、生理上的測量：基於所受的負荷會造成生理上的改變，因此，利用測量血壓、膚電反應、腦波等，來衡量學習者的認知負荷。

三、任務與績效的測量：如經由發生的錯誤率來測量、由任務結果來測量、插入第二任務來測量等等。

表 2-5-8 認知負荷測量方法分類表

客觀性	因果關係	
	間接的	直接的
主觀的	自陳投入的心智努力	自陳壓力的程度 自陳材料的困難度
客觀的	生理測量法 行為測量法 學習結果測量	腦部活動測量 (例如, fMRI) 雙任務(工作)績效

(採自 Brunken, Plass & Leutner, 2003 : 55)

回到本研究的問題：如何讓學生能跨越實驗幾何的鴻溝，達到演繹幾何的能力呢？我們的策略是是局部推理的形式，會採用局部推理的原因是基於認知負荷理論(CLT)，實驗幾何跨入演繹幾何的困難點在於演繹幾何是一連串抽象化的邏輯操作行為，當學生在不熟悉抽象化的思考以及學科的本質概念時，在接收了這一連串的資訊時，將會造成認知上的負擔過重。

在認知負荷理論中，我們可以發現許多可用的教學策略，包括「局部推理」的模式，利用一到兩個步驟，帶領學生逐步去做推理，不僅可以讓學生減輕負擔，還可以讓學生去針對重點部份去做反思，譬如思考應該怎麼將證明歷程連貫起來，這可以促進學生的反思抽象。相較於完全不給予提示，局部推理的確可以減低外在認知負荷(圖 2-5-11)。

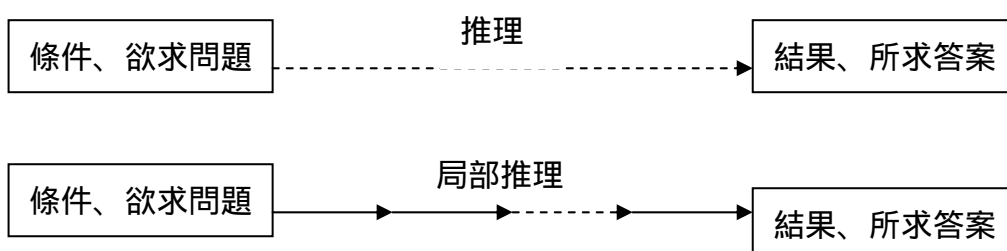


圖 2-5-11 局部推理的策略

但是如果是把推理過程全部給予學生，似乎可以減少更多外在認知負荷，但是研究者認為，局部推理也是一種「情境關聯」，刺激學生去思考挖空的部份，以前後關聯條件去推得未知部份，以增加增生認知負荷，相較於將證明過程全部給予學生，局部推理也可以減低分散注意力效應。另外動態幾何的引入可以讓學生從圖文對照之下增加形式效應，並且在情境關聯之下促使認知基模的建構，以增加增生認知負荷。

另外研究者認為在教學活動中置入電腦輔助，利用動態幾何軟體，將活動中的一些概念及問題以圖形呈現。動態圖形的呈現，也可能改變學生的注意力或處理方式，而達到基模建構的一種認知努力（cognitive effort），以增加增生認知負荷。