

國立臺灣師範大學數學系碩士班碩士論文

指導教授：楊凱琳 博士

大學生閱讀線性變換標準矩陣表示法證明題之研究



研究生：褚雪惠 撰

中華民國一〇六年七月

致謝

四年轉瞬即逝，這一路上要感謝的人很多。首先，要感謝的是我的指導教授楊凱琳老師。謝謝老師給我很大的空間去做很多事，當我需要老師的時候，老師都在。記得當初第一次進到老師研究室的那天，老師說：「當你畢業以後回想這兩年，你要留下些什麼？」這句話深深的打動我，當下就決定要跟著老師學習。但後來，因為自己的外務繁重，要當助教、要當老師，導致一直無法專心在自己的研究上。謝謝老師在這最後一年的最後幾個月督促我完成論文。

「你要拿東西來給我看，我才要簽口試申請書」

「如果星期一妳的論文還未完成，就要取消口試了」

甚至在最後幾天您很忙碌、很疲倦的時候還要幫我看論文。

為了我，在登機前提供我修改建議；

為了我，即使是開會到晚上十點，回到飯店還是幫我修論文；

為了我，在國外的最後一天超時工作到半夜一點；

為了我，在最後一天早晨去機場前還幫我看論文。

種種許多，是一頁 A4 紙都無法訴說；謝謝老師，還好有您在。

感謝口試委員鄭英豪老師和曹博盛老師在百忙之中願意撥空蒞臨指導，提出很多具體修改建議，讓我的論文能更加完善。

感謝胡舉卿老師和郭君逸老師幫助我理解論文中最核心的證明題。

謝謝電腦教室 M411，有你超強的冷氣，讓我寫論文不煩躁。

謝謝佑萱在最後一天的凌晨，熬夜幫我做三角校正。

謝謝因口試認識的薇吏，一起撐過這段日子。

謝謝我最棒的好同學們：怡彤、梅芳、桂安、泳欣、金尚、藝芳、國裕、育瑋、筠茜、怡廷、香鈞、韋霖、良聿、政和、家豪、秉君、昶宏、崇峰、睿紘、俊廷，一起度過前兩年美好的時光。

謝謝資優教程的好夥伴：怡玹、韋霖、宗倫、巧璇、偉琳，一起度過了充實的後兩年。

謝謝我的好室友：孟青、佩珊、楊娃、璧瑜，陪伴在我的生活中。

謝謝附中的老師幫我 cover 工作，讓我不會負荷太重。

謝謝附中 1383、1384、1386、1393、1406、1409、1410、1418 和 1427 的每一位學生，因為論文，無法用更多的力氣照顧你們。

最後，謝謝我的家人讓我沒有後顧之憂往前邁進，完成學業；尤其是我的妹妹上儀，在我最崩潰的時光陪在我身邊。



褚雪惠 謹至於 師大
中華民國 106 年 7 月

摘要

本研究旨在探討大學生閱讀線性變換標準矩陣表示法證明題的閱讀行為，包含外在評估不同先備知識學生對此證明的理解與不理解之處為何？不同先備知識學生對此證明整體理解狀態，在自我評估與外在評估上有什麼差異？不同先備知識學生閱讀證明時，理解狀態改變的來源是自我還是外在？並且其和學生運用了哪些閱讀策略有何關連？

為了回答以上的研究問題，本研究以某國立綜合型大學修習線性代數（二）課程的學生為對象，施予了關於此證明題的先備知識測驗。施測完以後，從中挑選出六位研究對象進行半結構式訪談。訪談過程共分為三個階段，第一階段是放聲思考，讓研究對象閱讀證明題文本。因放聲思考法有其研究限制，學生可能無法完全將自己的想法透過聲音表達出來，故第一階段完成以後需要有第二階段的追問；第二階段是具體提問，讓研究對象自己評估自己理解與不理解之處，以及用什麼策略來促進自己理解、解決自己不理解的部分。但有時候，學生評估自己理解與真正是否理解是有落差的，因此，需要有第三階段的訪談問題；第三階段是檢驗閱讀理解，由研究者去評估研究對象的證明理解狀況，檢驗學生是否真正理解。

最後根據研究結果，本研究提供了學生學習數學證明的四點建議，以及未來研究的三個方向供研究者參考。

關鍵詞：證明理解、線性變換、閱讀理解、閱讀策略

目錄

致謝.....	i
摘要.....	iii
目錄.....	iv
表目錄.....	vi
圖目錄.....	viii
第壹章 緒論.....	1
第一節 研究動機.....	1
第二節 研究目的與研究問題.....	4
第三節 名詞界定.....	5
第貳章 文獻探討.....	7
第一節 大學數學證明的閱讀理解.....	7
第二節 學生解讀證明的閱讀特徵.....	10
第三節 大學數學證明的相關研究.....	13
第參章 研究方法.....	17
第一節 研究設計.....	17
第二節 研究對象.....	19
第三節 研究工具.....	22
第四節 資料處理與分析.....	45
第肆章 研究結果.....	59
第一節 理解與不理解之處.....	59
第二節 整體理解狀態在自我與外在評估上的差異.....	131
第三節 理解狀態改變的來源與閱讀策略的關連.....	151
第伍章 討論與建議.....	161
第一節 結果與討論.....	161
第二節 建議.....	164
參考文獻.....	167
附錄一 證明題文本.....	171

附錄二	先備知識測驗卷.....	172
附錄三	專家修改建議與修改內容.....	174
附錄四	雙向細目表.....	184
附錄五	證明題文本引用的定理.....	190
附錄六	第一個放聲思考練習文本.....	191
附錄七	第二個放聲思考練習文本.....	192



表目錄

表 2-1 評估證明理解的模型	9
表 2-2 國中生之各組閱讀特徵	10
表 2-3 高中生之各組閱讀特徵	11
表 3-1 研究對象描述	19
表 3-2 本校等級制定義(12 級)與百分制、績分之換算方式.....	20
表 3-3 證明題的命題內容與簡記	24
表 3-4 證明題的命題內容分析	24
表 3-5 證明題的證明內容與簡記	25
表 3-6 證明題的命題內容分析	25
表 3-7 證明題文本理解內容	26
表 3-8 先備知識測驗卷題目設計架構	28
表 3-9 先備知識測驗卷之雙向細目表	31
表 3-10 自我評估的訪談問題	37
表 3-11 評估證明理解的訪談問題	40
表 3-12 策略類別與內涵說明表	42
表 3-13 證明題使用的策略類別與內涵說明表	43
表 3-14 先備知識測驗卷作答情況編碼表	45
表 3-15 半結構式訪談時程	46
表 3-16 理解狀態的判準	47
表 3-17 自我與外在評估理解狀態的差異	48
表 3-18 自我與外在評估整體理解狀態的判準與編碼表	50
表 3-19 理解狀態改變的來源	51
表 3-20 從不理解至理解使用的策略類別編碼表	52
表 3-21 從理解至不理解使用的策略類別編碼表	54
表 3-22 不理解時使用的策略類別編碼表	55
表 3-23 促進理解時使用的策略類別編碼表	56
表 4-1 不同先備知識學生理解與不理解之處	129
表 4-2 學生 S5 自我與外在評估整體理解狀態的差異	132
表 4-3 學生 S6 自我與外在評估整體理解狀態的差異	136

表 4 - 4 學生 S1 自我與外在評估整體理解狀態的差異	139
表 4 - 5 學生 S3 自我與外在評估整體理解狀態的差異	142
表 4 - 6 學生 S4 自我與外在評估整體理解狀態的差異	147
表 4 - 7 學生 S2 自我與外在評估整體理解狀態的差異	149
表 4 - 8 不同先備知識學生自我與外在評估整體理解狀態的差異	150
表 4 - 9 學生 S5 理解狀態改變的來源	152
表 4 - 10 學生 S6 理解狀態改變的來源	153
表 4 - 11 學生 S1 理解狀態改變的來源	154
表 4 - 12 學生 S3 理解狀態改變的來源	155
表 4 - 13 學生 S4 理解狀態改變的來源	156
表 4 - 14 學生 S2 理解狀態改變的來源	156
表 4 - 15 學生 S5 理解狀態改變的來源與閱讀策略的使用	157
表 4 - 16 學生 S6 理解狀態改變的來源與閱讀策略的使用	157
表 4 - 17 學生 S1 理解狀態改變的來源與閱讀策略的使用	157
表 4 - 18 學生 S3 理解狀態改變的來源與閱讀策略的使用	158
表 4 - 19 學生 S2 理解狀態改變的來源與閱讀策略的使用	158
表 4 - 20 不同先備知識學生理解狀態改變的來源與閱讀策略的使用	158

圖目錄

圖 3 - 1 研究設計流程圖	18
圖 3 - 2 研究對象分類	21



第壹章 緒論

線性代數是大學理工科中一門重要且基礎的課程，它是高中課程的延續，在理論與計算方面，被廣泛地應用在自然科學、工程、計算機科學和社會科學中。在線性代數裡，我們經常需討論很多不同的抽象函數空間，如果能將這些函數轉換成我們熟悉的矩陣，我們將可以更容易的瞭解。本章共分為三節，第一節描述研究者的研究動機，第二節提出研究目的與研究問題，第三節為名詞界定，針對本研究中的相關名詞加以說明。

第一節 研究動機

聯合國教科文組織出版的《學會生存—教育世界的今天和明天》(Learning to Be: The World of Education Today and Tomorrow) 書中指出「未來的文盲，不再是不識字的人，而是沒有學會怎樣學習的人。」西元 2000 年，全球超過 40 個國家開始推動「國際學生能力評量計劃」(The Programme for International Student Assessment, 簡稱 PISA)，藉此評鑑學校培育學生面對未來挑戰的效能，研究結果發現，閱讀讀寫能力程度高低，可以明顯預測其未來發展，顯示閱讀能力的提升對國家競爭力有極大的影響 (Yu、Wu、吳育雅與于曉平，2013)。經濟合作與發展組織 (Organization for Economic Cooperation and Development, 簡稱 OECD) 指出，國民閱讀水準高低深刻影響國家經濟表現和社會發展，閱讀能力愈高的國家，國民所得越高，其國家競爭力也愈高 (Tuijnman, 2000)。可見閱讀不僅能開拓心靈視野，更能厚植國家的知識力量與競爭基礎 (林巧敏，2009)。

高等教育要使學生知道自學的重要性、激發他們的自學意識、養成良好的自學習慣 (王俊紅，2004)。培養自學能力的其中一個方法是透過閱讀，在高等數學課程中，學生需要花大量的時間閱讀證明。他們讀他們數學課本和他們教授講義裡的證明，他們讀和聽他們教授呈現在課堂上的證明。學生若可以閱讀 (read) 和研究 (study) 這些證明，將有助於他們瞭解證明，並從中學習 (Mejia-Ramos、Fuller、Weber、Rhoads 與 Samkoff, 2011)。

在證明相關的文獻中，有四個概念分別是證明理解 (proof comprehension)、證明建構 (proof construction)、證明判讀 (proof validation) 和證明評估 (proof evaluation)。Annie Selden John Selden (2015) 指出，在閱讀證明的過程中，這四個概念是交互影響的。證明理解指的是瞭解教科書或講義裡的證明；證明建構是在大學數學系學生的層級下，建構一個正確的證明；證明判讀是讀出、反思和企圖去確定證明的正確性；證明評估包括看證明是否清晰、上下文的連結如何、說服力強不強、美不美麗、優不優雅和有沒有深度。在 Inglis 與 Alcock (2012) 的研究也指出數學家和大學生閱讀數學證明的方法有所不同，簡單來說，數學家會去尋找邏輯結構和確保隱含內容的正確性，大學生會去檢查證明的表面特徵。

在大多數國家，科學為導向的課程中，前兩年的大學課程包含兩個主要科目，即微積分與線性代數 (Dorier, 2003)。線性代數是第一個學生碰到具有高度概念的數學課程 (Uhlig, 2002)。線性代數在大學階段上的教學，幾乎普遍地被教師和學生認為是一個令人挫折的經驗 (Hillel, 2000)。而研究者本身也曾受線性代數所苦，修了四次才過。學生會覺得他們好像來到了另一個星球，被新定義的數量以及缺乏先備知識的連結擊垮 (Dorier, 2003)，而且掌握線性代數的概念，需要抽象的高水平 (Thomas, 2012)。特別的是，研究者在擔任某班微積分助教時期，該班同學在微積分的課程上有 25 人通過，但在線性代數上卻只有 8 人，其餘都被當掉。由此可見，無論線性代數是如何教的，它仍然是一個在認知和概念上很困難的科目 (Dorier、Sierpinska, 2002)。

Hillel (2000) 將線性代數課程分為三大模式，分別是抽象模式、代數模式和幾何模式。抽象模式是使用一般正規化理論的語言和概念，包括：vector spaces、subspaces、linear span、dimension、operators、kernels；代數模式是使用 R^n 空間更具體理論的語言和概念，包括：n-tuples、matrices、rank、solutions of systems of equations、row space；幾何模式是使用 2 維和 3 維空間的語言和概念，包括 directed line segments、points、lines、planes、geometric transformations。以變換 (Transformations) 為例，在抽象模式中，線性變換指的是向量空間之間保持加法和係數乘法的映射 (mappings)；在代數模式中，變換指的是 $m \times n$ 的矩陣；在幾何模式中，變換指的是簡單的幾何描述，像是旋轉 (rotations)、投影 (projections)、鏡射 (reflections)、推移 (shears)。在課程內容中，這三種模式並不一定互相獨立，一個概念也可以包含兩種模式，例如： $\overrightarrow{OP}$ 用坐標表示就是代數模式，如果看成從原點 O 出發連接到 P 點的有向線段就是幾何模式。

Hillel (2000) 在研究中指出，無論是在相同的模式下或不同模式間，瞭解向量和變換如何不同被表示的能力是至關重要的。由於表示法在不同基底的選擇或不同坐標系下通常不唯一，瞭解基底間的關係是學生的一大挑戰，他們需要能夠找到一個給定基底線性變換的矩陣表示法。因此，代數—抽象模式中的線性變換矩陣表示法 (The basis-dependent representation) 是學生在入門線性代數課程困難的主要原因。在線性變換矩陣表示法學習內容中，包含理論證明的理解，以及純粹計算的應用。既然學習證明如此重要，而且學習證明其中一個很重要的手段是透過閱讀，數學系的學生也需要學會利用「閱讀」這項能力去學習證明。因此，本研究選定學生在入門線性代數課程感到困難的線性變換標準矩陣表示法證明題給學生閱讀，探討不同先備知識的學生在閱讀此證明時，理解與不理解之處為何，以及運用哪些閱讀策略來促進自己理解，或解決自己不理解此證明的情形。



第二節 研究目的與研究問題

基於上述的研究動機，本研究的研究目的如下：

大學一年級的第一學期學過「線性變換標準矩陣表示法證明題」的學生，在一年級的第二學期自行閱讀此證明時，不同先備知識學生對此證明的理解與不理解之處為何，以及運用哪些閱讀策略來促進自己理解或解決自己不理解此證明的情形。

依據研究目的，本研究將聚焦於下列的研究問題：

- 一、外在評估不同先備知識學生對此證明的理解與不理解之處為何？
- 二、不同先備知識學生對此證明整體理解狀態，在自我評估與外在評估上有什麼差異？
- 三、不同先備知識學生閱讀證明時，理解狀態改變的來源是自我還是外在？並且其和學生運用了哪些閱讀策略有何關連？

第三節 名詞界定

一、線性變換標準矩陣表示法證明題

Hillel (2000) 指出代數—抽象模式中的線性變換矩陣表示法 (The basis-dependent representation) 是學生在入門線性代數課程困難的主要原因。但 The basis-dependent representation 此名詞, 研究者在學習線性代數的過程中從未看過, 經由上下文推敲得知, 此名詞即為 Fraleigh 與 Beauregard (2013) 教科書中談到的線性變換矩陣表示法 (Matrix Representation of a Linear Transformation)。在此教科書中, 關於線性變換矩陣表示法的證明內容有兩部分, 第一部分是證明在 $\mathbb{R}^n$ 空間底下成立, 第二部分是證明它可以適用於任何有限維向量空間。

本研究選定的是在 $\mathbb{R}^n$ 空間底下成立的線性變換矩陣表示法, Fraleigh 與 Beauregard (2013) 稱為線性變換標準矩陣表示法 (Standard Matrix Representation of a Linear Transformation), 定義如下:

Let $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ be a linear transformation, and let A be the $m \times n$ matrix whose j th column vector is $T(\mathbf{e}_j)$, which we denote symbolically as

$$A = \begin{bmatrix} | & | & \cdots & | \\ T(\mathbf{e}_1) & T(\mathbf{e}_2) & \cdots & T(\mathbf{e}_n) \\ | & | & \cdots & | \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Then $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ for each column vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

The matrix A in Eq. (2) is the **standard matrix representation** of the Linear Transformation T .

為方便描述, 本研究有時將「線性變換標準矩陣表示法證明題」簡稱為「證明題」、「Cor」。

二、理解狀態

根據教育部（2015）重編國語辭典修訂本，理解一詞有兩義：

1. 了解、明白事理。《宋史·卷四三三·儒林傳三·林光朝傳》：「然未嘗著書，惟口授學者，使之心通理解。」
2. 能以自己的口語、文字或其他符號，將已知的事實與原理、原則作成解釋，稱為「理解」。

本研究中所指的理解狀態是指學生對於證明題文本內容「理解」或「不理解」，理解面向是參考 Mejia-Ramos 等人（2011）評估證明理解的模型，該模型有七個面向來評估學生的理解狀態。而理解的內容是指證明題文本內容中的專有名詞、符號與敘述。評估學生理解和不理解是透過外在評估，外在評估是指研究者針對各內容訂定能力指標，分析學生在專有名詞、符號與敘述的理解狀態。若能達成能力指標，則稱學生「理解」該物件；反之，稱為「不理解」。

三、整體理解狀態

本研究指的是研究對象閱讀完證明題以後，對整個證明題的理解狀態。整體理解狀態的評估來源有兩種，一種是自我評估，另一種是外在評估。研究者分別在這兩個評估來源底下，將整體理解狀態分為完全不理解、偏向不理解、理解與不理解各半、偏向理解、完全理解這五種類別，並針對這十種類別給出操作型定義。另外，此名詞中的整體與 Mejia-Ramos 等人（2011）評估證明理解模型裡的整體含意不同。

四、理解狀態改變

在閱讀文本的過程中，對於某字詞或段落的理解狀態可能會隨時改變，本研究中的理解狀態改變是指學生閱讀文本時，出現的「從不理解至理解」或者「從理解至不理解」的過程。

第貳章 文獻探討

為了瞭解大學生對於證明的閱讀理解，本章共分為三節，第一節是大學數學證明的閱讀理解，探討大學數學證明理解的面向有哪些，該怎麼評量學生是否理解等等；第二節是學生解讀證明的閱讀特徵，由文獻上已談到的閱讀特徵，作為研究學生的參考。第三節是大學數學證明的相關研究，瞭解既有的相關研究，最後可以與本研究對照並提出建議。

第一節 大學數學證明的閱讀理解

Mejia-Ramos 等人 (2011) 參考 Yang 與 Lin (2008) 的幾何證明閱讀理解模型，將其修改後提出關於大學數學的證明理解評量模型，此篇文獻以數論為例，將大學數學的證明理解分為七個面向，分述如下：

第 1 個面向，專有名詞 (terms) 和敘述 (statements) 的意義：主要是用來衡量學生對證明裡關鍵的專有名詞和敘述的理解狀態。

第 2 個面向，敘述 (statements) 和證明架構 (proof framework) 的邏輯定位：這些問題是用來評估學生是否知道證明裡語句間的邏輯關係，知不知道某個句子的用途，如果少了這個句子會有什麼影響。學生經常沒有考慮他們正在閱讀的證明的架構，導致學生不確定要證明什麼，無法確認證明是否正確 (Weber, 2009)。

第 3 個面向，宣稱 (claims) 的合理性：通常一個證明要被證出來可能需要以前學過的數學原理，但是如果每個證明都把所有以前用到過的東西再敘述一次，證明會非常的冗長，所以多數的證明都只會說，在這裡因為某某定理的關係，所以我們得知以下的情況。例如：「由畢氏定理可知，……。」如果學生根本不知道什麼是畢氏定理，那他當然會讀不懂。因此，我們需要去確認學生是否理解這個證明所需的數學原理。

第 4 個面向，透過高層次的想法摘要：理解是有不同的層次的，一種層次是知道證明裡的邏輯、知道為什麼是對的。另一種層次是看到證明的概念，作者為什麼想這樣證，他想要去做些什麼，他怎麼做。Leron (1983) 還說，要檢驗學生是否理解，就是給他十頁的證明，用一頁來描述。

第 5 個面向，辨認模組結構：有些數學家談到，要理解證明需要將證明分成幾個區塊，而且要瞭解這幾個區塊間的邏輯關係（Mejia-Ramos 等人，2011）。

第 6 個面向，轉移一些基本概念（general ideas）或方法（methods）到其它上下文（context）：瞭解證明的一個重要面向是知道這個證明可以如何應用，或用來解決其它證明。有時候我們在讀書，可能某個問題一直不太理解，但某天，你突然發現這個問題的關鍵，就是使用某個證明來解釋，那麼，你對於這個證明又有更深一層的理解了。

第 7 個面向，舉例說明：有時候，能用例子來說明證明，也是一個不可或缺的工具。Mejia-Ramos 等人（2011）訪談的數學家提到，我總是用例子來確認定理是有意義的，證明是有效的。如果學生沒有畫一張圖，就不能理解單調有界數列收斂的證明。

在這七個面向中，前三個面向是用來評估學生對於證明的局部理解，後四個面向是用來評估學生對於證明的整體理解。特別的是，Mejia-Ramos 等人（2011）認為這七個面向都是用來衡量不同的理解面向，他們不把這些不同類型的理解面向分層次，而是去衡量學生在不同維度上的證明理解。

該模型可以用來檢驗學生證明理解的發展方式，並評估改進方法。使用此模型也可以讓老師具體的知道學生理解了什麼，以及不瞭解的地方在哪。當老師知道了學生的問題點，就可以改進他們的課堂，而且老師也可以運用這個模型，讓學生知道老師希望他們有什麼樣的理解。

評估證明理解的模型可參閱表 2 - 1。

表 2 - 1

評估證明理解的模型

局部理解	專有名詞和敘述的意義	1-t-1 描述證明裡給定專有名詞的定義。
		1-t-2 找出例子說明證明裡給定的專有名詞。
		1-s-1 用不同但等價的方式去描述一個給定的敘述。
		1-s-2 找出一個給定敘述的顯然推論。
		1-s-3 找出例子說明一個給定的敘述。
局部理解	敘述和證明架構的邏輯定位	2-1 找出證明架構內一個句子的用途。
		2-2 找出證明架構的種類。
	宣稱的合理性	3-1 提出使證明明確的隱含保證。
		3-2 找出特定數據支持一個給定的宣稱 (claim)。
		3-3 找出特定的宣稱去支持給定的敘述。
整體理解	透過高層次的想法摘要	4-1 找出或提供這個證明一個好的摘要。
		4-2 找出證明裡一個關鍵子證明的一個好摘要。
	辨認模組結構	5-1 要求學生把證明分割成幾個模組。
		5-2 找出證明中一個模組的用途。
		5-3 找出證明裡模組間的邏輯關係。
整體理解	轉移一些基本概念或方法到其它上下文	6-1 轉移方法。(能成功的應用該方法去解決不同的任務)
		6-2 找出方法。(能知道原本的證明方法可以在不同的證明任務中使用)
		6-3 體會該方法的範圍。(能解釋為何用在某定理證明的某方法，不能用來證明另一個敘述)
舉例說明		7-1 用一個具體的例子說明一系列的推論。
		7-2 解釋一個敘述或其證明的關係圖。

第二節 學生解讀證明的閱讀特徵

閱讀理解的程度和其閱讀過程中所使用的思考、推理和策略息息相關，沒有思考的閱讀只能建構表層的意義，沒有推理的閱讀會喪失預測資訊的機會，沒有策略的閱讀造成理解歷程的負擔（楊凱琳、林福來與王繹婷，2006）。

楊凱琳等人（2006）依據學生對幾何證明閱讀推論理解之表現，分析他們解讀證明的閱讀特徵，該研究發現國中生、高中生的閱讀特徵如下：

表 2-2

國中生之各組閱讀特徵

組別	閱讀特徵
均優	1. 每一證明題都先大略看過，從第一題開始寫。 2. 會搭配先備知識去思考證明。 3. 證明過程、幾何圖形、性質補充與題目會相互搭配著看。 4. 當看不懂時，會再回憶先備知識思考證明過程；若仍舊不會則先做其他題，之後再思考不會的問題。 5. 認為每一步驟皆是重要的，特別是已知與結論的部份。 6. 會依照證明步驟對幾何圖形做記號。
整體尚可	1. 每一證明題都先大略看過，從第一題開始寫。 2. 證明過程、幾何圖形、性質補充與題目會相互搭配著看。 3. 當看不懂題目時，會從證明步驟中尋找答案；最後，再回來看不會的題目。 4. 容易將顯而易見的步驟視為多餘，但是有其存在之必要性的。 5. 對於題目有相當的想法，但不知道該如果陳述才能清楚表達題意。
微弱尚可	1. 每一證明題都先大略看過。 2. 認為性質補充有看與否影響並不大。 3. 當看不懂時，會再回憶先備知識思考證明過程、幾何圖形；若仍舊不會則先做其他題，之後再思考不會的問題。 4. 容易將顯而易見的步驟視為多餘，但是有其存在之必要性的。
局部	1. 每一證明題都先大略看過。

-
- 部 2. 證明過程、幾何圖形、性質補充與題目會相互搭配著看。
- 特 3. 依先備知識配合幾何圖形及證明過程以理解思考。
- 優 4. 不容易抓到已知條件與欲證目標。
5. 認為每一個步驟都是必要的。
-
- 均 1. 先找自認為喜歡的證明題做。
- 弱 2. 不會臆測下一步驟可能為何。
3. 想不出來時，會在幾何圖形上依據自己的先備知識作記號。
4. 步驟過於冗長的證明不會想看。
5. 不容易抓到證明過程的重點。
-

表 2-3

高中生之各組閱讀特徵

組別	閱讀特徵
均	1. 閱讀順序為證明過程而後題目。
優	2. 性質補充感覺熟悉，所以未仔細閱讀。
	3. 以先備知識搭配證明過程便容易思考出答案。
	4. 認為每一步驟都是必要的。
	5. 認為沒有困難或者不了解的地方。
局	1. 認為沒有不必要的步驟。
部	2. 以先備知識容易推導。
尚	3. 認為步驟冗長且圖形不熟悉，所以閱讀起來困難重重。
可	4. 當看不懂時，再回頭看一次若仍舊看不懂時，就試圖把空格填滿或放棄。
均	1. 每一證明題都先大略看過，憑感覺寫。
弱	2. 隨便寫且性質補充沒看。
	3. 當看不懂時，會先做其他題，最後再回頭思考不會的問題。

由表 2 - 2 可看到，不管是均優、整體尚可、微觀尚可或局部特優的學生都會將每一證明題先大略看過；均優、整體尚可、局部特優的學生會把證明過程、幾何圖形、性質補充與題目相互搭配著看；均優、整體尚可、微觀尚可的學生，當看不懂時，會再回憶先備知識思考證明過程或從證明步驟中尋找答案。若仍舊不會則先做其他題，之後再思考不會的問題；均優和局部特優的學生會搭配先備知識去思考證明；均優和均弱的學生會依照證明步驟或自己的先備知識在幾何圖形上做記號；特別的是，均優和局部特優的學生認為每一個步驟是重要或必要的，這點與整體尚可和微觀尚可的學生不同，整體尚可和微觀尚可的學生容易將顯而易見的步驟視為多餘，但這是有其存在之必要性的。因此，研究者認為，國中生在閱讀推論理解表現的差別，可能是來自於對每一步驟的看法不同。

另外，我們由表 2 - 3 可看出，均優的學生性質補充感覺熟悉，所以未仔細閱讀。均弱的學生隨便寫且性質補充沒看；均優和局部尚可的學生認為每一步驟都是必要的，且以先備知識搭配證明過程便容易思考出答案。因此，研究者認為，高中生在閱讀推論理解表現的差別，可能是來自於對每一步驟的看法不同。

綜上所述，不管是國中生或高中生，造成他們閱讀推論理解表現懸殊的可能原因是對每一步驟的看法不同。若學生視每一步驟是重要或必要的，則在閱讀推論理解有較佳的表現。另外，在閱讀推論理解表現較差的學生上也可以看到較粗糙的閱讀特徵，例如：找喜歡的證明題做、憑感覺寫等等。因此，研究者猜測，大學生或許也有類似的閱讀特徵。

第三節 大學數學證明的相關研究

在大學數學課堂上幾乎都是由定義、定理、證明所組成，學生需要花費大量的時間閱讀教授呈現給他們的證明。如果學生需要透過跟教師學習證明來學數學，教師會認為學習一個證明有什麼樣的特徵？教師（專家）與學生（生手）閱讀證明的方式有什麼不同？

Weber (2001) 讓主修代數的四位博士生（專家）與四位大學生（生手）建構七個命題的證明，這七個命題的主題與群同構 (Group homomorphisms) 有關。研究對象在建構證明的過程中會放聲思考，他不僅可以查閱大學代數課程的教科書，建構證明也沒有時間限制。如果研究對象使用複雜的技術完成證明，研究者會詢問研究對象為何使用這種技術。在證明完命題以後，研究者會要求研究對象說明那七個命題是真還是假。判斷完以後，要用 0~2 分去表示自己對自己答案的信心程度，0 分表示「用猜的」，2 分表示「非常肯定」。接著，Weber (2001) 將專家與生手在這七個命題中證明建構的表現分為四項，分別統計符合該項目條件的人數，這四項包括：

正確的證明 (Correct proof)：研究對象生成有效的證明。

未能引用語法知識 (Failure to invoke syntactic knowledge)：研究對象在生成證明的過程中陷入僵局。

語法知識庫不足 (Insufficient syntactic knowledge base)：同上，研究對象在生成證明的過程中陷入僵局。

證明有邏輯錯誤 (Proof with logical error)：研究對象生成他自己認為是有效的證明，但實際上是無效的。

結果發現，生手無法建構證明是因為他們未能應用其語法知識。當他們被明確告知可以用哪些事實證明這些命題時，他們就能建構證明。這些數據表明，理解數學證明和領域事實的語法知識不足以成為一個有能力的定理證明者。那為什麼擁有語法知識的生手在證明時會有困難？Weber (2001) 認為知道有這些事實不足夠，必須回顧這些事實。他認為證明建構是一個解決問題的任務，而解決問題任務需要策略知識。他從專家和生手的表現與他們為什麼使用複雜技術完成證

明的解釋中猜測，生手似乎缺乏三種策略知識，包括：瞭解該領域的證明技巧、知道哪些定理是重要的且它們何時是有用的、知道何時可以且何時不可以使用語法策略。但該研究並沒有在策略知識上著墨，這是可以延伸探討的。

Annie Selden 與 Selden (2003) 以半結構的方式訪談八位具有數學和中學數學專業的大學生，訪談過程有四個階段：第一階段，給一個關於數論的定理，要求他們用自己的話解釋定理並證明；第二階段，讓學生閱讀四個證明，要求閱讀時需放聲思考，並判斷哪個可以用來證明第一階段的定理。如果認為該證明無法證明第一階段的定理，盡量說出哪些部分有問題；第三階段，仔細觀察並思考四個證明，學生們可以重讀證明並思考要不要改變第二階段的答案，但在這個階段，不能說不確定這個證明是否可以證明定理，一定要做出決定；第四階段，學生被問到跟證明有關的八個問題，以及他們如何閱讀、理解與檢驗證明是否有效。研究結果發現，大學生會花比較長的時間在關注證明的表面特徵，例如：代數符號和計算上，而不是注意證明的基本邏輯結構。

Weber (2008) 將 Annie Selden 與 Selden (2003) 研究中的四個證明拿給八位數學家（大學教授）判斷證明的有效性，這八位數學家的研究領域包含拓樸、分析、代數、組合和應用數學。每位研究對象都會進行三個階段的訪談，訪談流程和 Annie Selden 與 Selden (2003) 的研究類似。第一階段，閱讀那四個證明並判斷證明是否有效；第二階段，每位研究對象都會被告知，他將會閱讀到一位數學家可能會提交到數學雜誌上面的幾個證明，例如：美國數學月刊（American Mathematical Monthly），並再次被要求確認這些證明是否有效；第三階段，每位研究對象都會被問到一組關於他們如何決定一個證明是否有效的問題。研究結果發現，數學家在判讀證明時使用了幾種不同的推理方式，包括：正式推理（formal reasoning）、建立嚴格的證明（the construction of rigorous proofs）、非正式演繹推理（informal deductive reasoning）和根據例子的推理（example based reasoning）。

除此之外，Annie Selden 與 Selden (2003) 還提到數學家有能力就證明的正確性和定理的真實性達成一致，但 Weber (2008) 研究數學家判讀證明時發現，八位數學家的判斷並沒有一致，這也表示 Annie Selden 與 Selden (2003) 和 Weber (2008) 的研究需要證據證明。另一方面，Weber 與 Mejia-Ramos (2011) 建議閱讀證明時可以採用兩種策略：微觀（zooming in）和鉅觀（zoom out）。微觀又稱為逐行閱讀（line-by-line reading），這個過程可以填補每行之間的邏輯差距；鉅觀又稱為模塊閱讀（modular reading），若數學家使用鉅觀策略，則不會專注於

論證的邏輯細節。該研究使用了兩個數據來支持，第一個是 Weber (2008) 訪談八位數學家的研究，第二個是 Weber 與 Mejia-Ramos (2011) 與九位數學家進行半結構式的訪談資料，該訪談目的主要是瞭解數學家閱讀其同事發表的證明的原因和方法。但是上述研究的過程，通常是依賴學生和數學家的反思或利用他們放聲思考得知。這些方法會有缺點，並非所有的判讀過程都是有意識的。因此，Inglis 與 Alcock (2012) 透過眼動儀紀錄 12 位數學家（專家）與 18 位大學生（生手）閱讀證明時眼球運動的差異，為上述研究提供證據。

Inglis 與 Alcock (2012) 的研究有三個階段，第一階段，研究對象會被告知要閱讀 Annie Selden 與 Selden (2003) 和 Weber (2008) 使用過的那四個證明，並判斷這四個證明是否有效。每個證明都會顯示在電腦螢幕上，研究對象可以長時間思考直到他們判斷出有效性。判斷完有效性以後，要用 0~4 分去表示自己對自己答案的肯定程度，0 分表示「用猜的」，4 分表示「我非常確定」；第二階段跟第一階段類似，研究對象會被要求閱讀兩個從報紙摘錄下來的非數學段落，這個階段主要是要讓研究對象休息的；第三階段，研究對象會被告知，要閱讀兩個已經提交到普及數學刊物上的證明，例如：The Mathematics Gazette。其中一個證明是 Weber (2008) 有使用到的，另一個證明是新的，是與微積分有關的證明。研究結果發現，數學家在判斷其中三個證明的有效性結果不一致，這個支持了 Weber (2008) 的研究。

再來，Inglis 與 Alcock (2012) 從每位研究對象在每個式子上的停留時間發現，生手在判讀證明時，確實花費較多的時間在證明的表面特徵上，支持了 Annie Selden 與 Selden (2003) 的研究。不過，沒有任何證據顯示專家與生手在開始判讀證明時會先使用鉅觀策略，這跟 Weber (2008) 的假設不符。但是，研究發現專家比生手多出了將近 50% 在不同式子上的掃視，而這些額外的掃視大多在連續的式子之間，也就是說專家比生手投入更多的時間來回的在證明語句間察看，來推斷句子間隱含的保證。

雖然文獻裡面有談到專家和生手建構證明與閱讀數學證明的差別，但都只是大方向，沒有細部針對他們在閱讀證明時理解了什麼，以及運用了哪些閱讀策略。因此，本研究以線性代數裡面的證明題為例，分析學生理解狀態，以及運用了哪些閱讀策略來改變理解狀態。

第參章 研究方法

本研究採質性與量化並行的方式進行線性變換標準矩陣表示法證明題的分析。在量化研究上，本研究在訪談前施予先備知識測驗，確定學生的基本概念和起點行為，作為分層取樣的依據；在質性研究上，本研究透過先備知識測驗選定研究對象，利用放聲思考法以及半結構式訪談來進行研究。

第一節 研究設計

本研究之研究設計分為三個階段，第一階段為準備階段，在確立研究主題後，研究者依據研究目的與研究問題擬定研究計畫，並設計研究所需之研究工具進行前置研究。在前置研究中，研究者找了兩位研究生進行試測及訪談，根據這兩位研究生的訪談結果，作為資料分析的依據。

第二階段為實行階段，使用自編之「線性變換標準矩陣表示法證明題先備知識測驗卷」對大學生進行先備知識測驗，並根據測驗結果，從中挑選出六位學生來進行半結構式訪談。

第三階段為資料處理與分析階段，將第二階段所蒐集到的資料作分析，再進行研究結果與討論。

茲將研究設計流程圖呈現如下：



圖 3 - 1 研究設計流程圖

第二節 研究對象

本研究對象為某國立綜合型大學數學系一年級的學生，此系的線性代數課程為大一學生必修課，共開設三個班，分別由不同的老師授課，但使用的教科書、期中期末考試內容與學期成績的評定標準都是統一的。

研究者在學期中對三個班做先備知識測驗，測驗時間為 15 分鐘，參與施測的學生共 62 人，施測日期為民國 105 年 5 月 26 日。這些學生正在修習 104 學年度第 2 學期的線性代數（二）課程，而線性變換標準矩陣表示法證明題的學習內容包含在 104 學年度第 1 學期線性代數（一）的課程中。

研究者根據 104 學年度第 1 學期線性代數（一）的學期成績與先備知識測驗結果挑選了六位學生作為研究對象，這六位研究對象在 104 學年度第 1 學期線性代數（一）課程的學期成績與先備知識測驗的作答情況如表 3-1（該校成績百分制的換算請見表 3-2）。記號○表示該學生在那一類的試題全對；若不是以記號○表示，直接寫出數字，則該數字表示該學生答對的題號。例如：研究對象 S4 概念性知識試題全對，程序性知識試題答對的題目有第 7 題。（先備知識測驗卷共有 9 題，前 3 題為概念性知識試題，後 6 題為程序性知識試題）

表 3-1

研究對象描述

研究對象	先備知識 線代學期成績	概念性知識 (共 3 題)	程序性知識 (共 6 題)
S1	A+	○	4. 5. 7.
S2	B-	2. 3.	○
S3	A+	2.	4.
S4	B-	○	7.
S5	A+	○	○
S6	A+	○	○

表 3 - 2

本校等級制定義(12 級)與百分制、績分之換算方式

等級分法 (Grade)	教學與學習目標的定義	百分制 分數區間	單科成績轉換 百分制分數
A+	所有目標皆達成且超越期望	90~100	95
A	所有目標皆達成	85~89	87
A-	所有目標皆達成，但需一些精進	80~84	82
B+	達成部分目標，且品質佳	77~79	78
B	達成部分目標，但品質普通	73~76	75
B-	達成部分目標，但有些缺失	70~72	70
C+	達成最低目標	67~69	68
C	達成最低目標，但有些缺失	63~66	65
C-	達成最低目標，但有重大缺失	60~62	60
D	未達成最低目標	50~59	55
E	未達成最低目標，且令人失望	1~49	49
X	因故不核予成績	0	0

研究者由表 3 - 1 的線性代數學期成績、概念性知識、程序性知識進一步的將六位學生分為 5 類。

在線性代數學期成績為 A+ 的四位學生中，S5 和 S6 的概念性知識與程序性知識試題全對，研究者將這兩位學生歸類為 AH_CHPH (學期成績高、概念性知識高、程序性知識高)。而 S1 為 AH_CHPL (學期成績高、概念性知識高、程序性知識低)、S3 為 AH_CLPL (學期成績高、概念性知識低、程序性知識低)；在線性代數學期成績為 B- 的兩位學生中，S4 為 AL_CHPL (學期成績低、概念性知識高、程序性知識低)、S2 為 AL_CLPH (學期成績低、概念性知識低、程序性知識高)，如圖 3 - 2 所示。

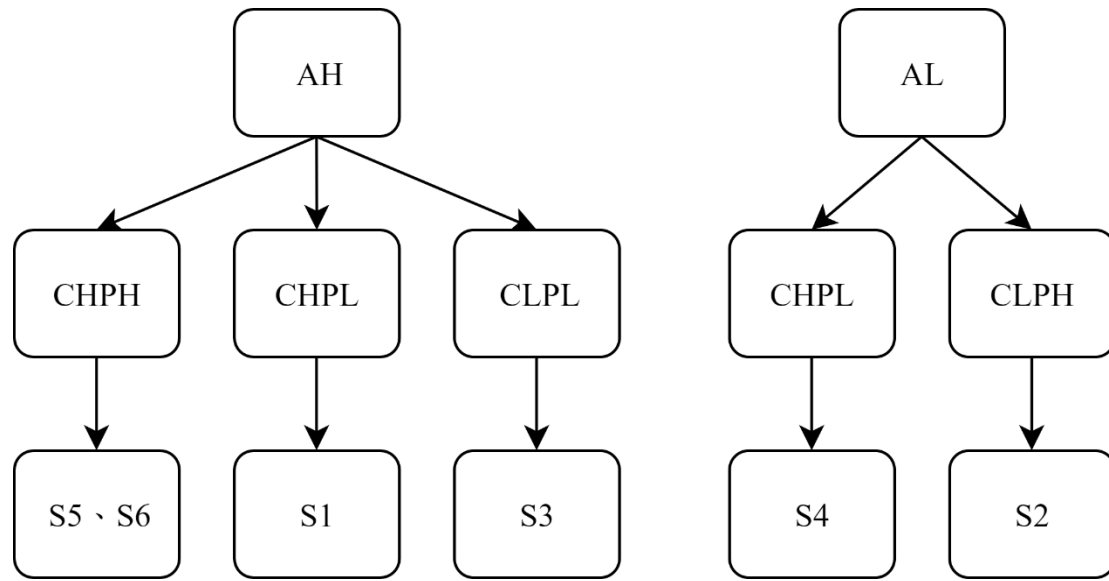


圖 3 - 2 研究對象分類



第三節 研究工具

本研究在發展研究工具前曾經先以開放式的問題詢問大二已學過線性代數課程的學生，在學習線性代數的過程中，有沒有遇到什麼困難做為參考。在 27 位學生中，有 13 位學生表示因為第一次看原文課本不習慣，英文能力不足，導致需要花很多時間查字典，有時候翻譯的過程可能會誤解意思，不過也有學生雖然英文不好，但是因為有看過原文書的經驗，可以靠上下文去推斷一些專有名詞的。而在英文閱讀沒問題的學生中，也提到：

「我覺得線代和過去國高中的數學系統不一樣，像是證明題，就不知道如何下手，而且有很多很直觀的證明，根本不知道如何起筆。況且有很多新的概念，感到陌生、且不熟練，跟上大學之前所學的數學有很大的差異，起初真的很不適應。還有一點，對於定義、定理與證明結果的運用，不太熟悉，也是導致證明題寫不太出來的原因。」

「證明證明~~~~讓人容易迷失」

為了排除學生因為英文閱讀的問題，導致學習成效不佳的狀況，研究者設計了先備知識測驗卷，確認學生具備了哪些閱讀該證明題的先備知識。在證明題文本的選擇上，參考文獻與專家的意見作挑選，最後則是自我評估的訪談問題與評估證明理解的訪談問題。

一、證明題文本

（一）文本取材

在影響學生數學閱讀理解的環境因素裡，數學文本設計會影響學生的閱讀理解成效（秦麗花，2007），但因數學文本是學校數學教育中的唯一資源（Cloer，1981），且學生對文本內容沒有選擇權（秦麗花，2006）。因此，研究者從研究對象修習線性代數課程所使用的教科書中，挑選了 Hillel（2000）研究中提到學生入門線性代數課程時，感到困難的線性變換矩陣表示法，作為研究對象閱讀的證明題文本，此文本也是校內專家認為具有代表性的證明題，可參閱附錄一。

（二）文本分析

數學證明過程中的論點，有些是具有前後邏輯次序的，也就是之前的結論可能是接下來的前提；有些是沒有邏輯次序的平行關係，也就是各有不同的子前提或子結論（楊凱琳，2004）。瞭解這些論點的邏輯關係有助於設計先備知識測驗卷與分析學生的理解狀態。因此，研究者將文本分為兩大部分，第一部分是命題內容，第二部分是證明內容。第一部分的命題內容分為四個段落，簡記為 C1～C4，可見表 3-3；第二部分的證明內容分為七個段落，簡記為 R1～R7，可見表 3-5。

在表 3-3 中，C1 是文本的標題，C2 和 C3 是命題給的前提，在這兩個前提下，會有 C4 的結論，可參閱

表 3-4 的整理。

在表 3-5 中，R1 是先前已學過的內容、R2 是命題內容中的假設，以這兩個條件為前提，則可推得 R3 這個結論，可參閱

表 3-6 的整理。

表 3 - 3

證明題的命題內容與簡記

命題內容	簡記
COROLLARY Standard Matrix Representation of a Linear Transformation .	C1
Let $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ be a linear transformation,	C2
and let A be the $m \times n$ matrix whose j th column vector is $T(\mathbf{e}_j)$, which we denote symbolically as	
$A = \begin{bmatrix} & & & \\ T(\mathbf{e}_1) & T(\mathbf{e}_2) & \cdots & T(\mathbf{e}_n) \\ & & & \end{bmatrix}. \quad (2) \dots\dots\dots$	C3
Then $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ for each column vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$	C4

表 3 - 4

證明題的命題內容分析

內容	分析
C1 標題。	
C2	$C2, C3 \rightarrow C4$
C3	以 C2 和 C3 為前提，推得結論 C4。
C4	

表 3 - 5

證明題的證明內容與簡記

證明內容	簡記
Recall that for any matrix A , $A\mathbf{e}_j$ is j th column of A	R1
This shows at once that if A is the matrix described in Eq. (2),	R2
then $A\mathbf{e}_j = T(\mathbf{e}_j)$,	R3
and so T and the linear transformation T_A given by $T_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ agree on the standard basis $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ of $\mathbb{R}^n$	R4
By Theorem 2.7, and the comment following this theorem,	R5
we know that then $T(\mathbf{x}) = T_A(\mathbf{x})$ for every $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$	R6
—that is, $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ for every $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$	R7

表 3 - 6

證明題的命題內容分析

內容	分析
R1	$R1, R2 \rightarrow R3$
R2	由先前已知結論 R1 和已知條件 R2 為前提，推得結論 R3。但未表明
R3	R1 是前提。
R4	$R3 \rightarrow R4$
	再以 R3 為前提，推得結論 R4。但未表明 R3 是前提。
R5	$R5 \rightarrow R6$
R6	再以先前已知結論 R5 為前提，推得結論 R6。
R7	$R4, R6 \rightarrow R7$
	再以 R4 和 R6 為前提，推得結論 R7。但未表明 R4 和 R6 是前提。

在這個文本中，如果單看證明的手法，研究者認為學生會在兩個地方碰到困難。第一個是 $T_A(\mathbf{x})$ ，證明的目標其實很簡單，就是去證明線性變換可以用矩陣來表示。不過在這個證明中，不是直接去證明 $T(\mathbf{x})$ 和 $A\mathbf{x}$ 是相同的，而是藉助了第三者 $T_A(\mathbf{x})$ ，所以學生會疑惑為什麼要出現 $T_A(\mathbf{x})$ 。

第二個是 Theorem 2.7，在這個文本中，證明是無法自我完備的。所謂無法自我完備是指，在證明的過程中，會用到以前學過的定理。所以當學生閱讀到 By Theorem 2.7 時，如果他不理解 Theorem 2.7 的內容，可能就會影響到他閱讀 Cor 這個文本。雖然 Theorem 2.7 在理解 Cor 這個證明中，也扮演了重要角色，但是研究者並沒有強迫學生要理解 Cor，一定要去讀 Theorem 2.7。如果學生理解 Cor 需要去閱讀 Theorem 2.7，他就會主動去翻，這跟他使用的閱讀策略有關。

其它重要需理解的物件，請見表 3 - 7。

表 3 - 7

證明題文本理解內容

項目	物件
專有名詞	linear transformation
符號	$T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$
	$T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$
	$A\mathbf{e}_j = T(\mathbf{e}_j)$
	$T_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$
	$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$
	$\mathbf{x}$
	$T(\mathbf{e}_1)$
敘述	let A be the $m \times n$ matrix whose j th column vector is $T(\mathbf{e}_j)$
	Recall that for any matrix A , $A\mathbf{e}_j$ is j th column of A
	證明的第三段（見附錄一）
	Theorem 2.7（見附錄五）

二、先備知識測驗卷

秦麗花(2007)指出影響學生數學閱讀理解的個人因素包含數學閱讀特殊技能，例如：數學先備知識與數學詞彙理解。學習者在新的學習情境前，本身已經具備之舊有的認知與技能，稱為先備知識(prior knowledge)。McKenna 與 Robinson (2014)認為文本的讀與寫是一種溝通的歷程。在此溝通的歷程中，文本撰寫者要以有限的文字進行編碼，藉以傳達所要溝通的概念，而閱讀者則以其先備知識來解讀文本的內涵，進而重整文本意義。張景媛(2011)指出學習數學的心理歷程，都是以先備知識為基礎，具有豐富學科背景知識的學習者，較容易以精緻化的策略來提升閱讀成效，尤其數學涉及很多內在與外在連結的問題。Kavale(1982)說明影響閱讀理解的因素有三，分別是文章的適合性、文章結構和內容的背景知識、理解策略的使用。由此可見，文本閱讀理解的能力，會受到學生先備知識的影響。

因此，本研究參考了美國教育進展評量(National Assessment of Educational Progress, 簡稱 NAEP)的方式，設計先備知識測驗卷，其中較為不同的是，NAEP 將數學能力分為概念性理解(Conceptual Understanding)、程序性知識(Procedural Knowledge)和問題解決(Problem Solving)三個層次，而本研究聚焦於瞭解學生閱讀證明題文本先備知識的多寡，因此，將測驗題目分為概念性知識與程序性知識，不含問題解決能力，測驗卷內容可參閱附錄二。

(一) 設計流程

研究者先分析文本內容，從文本中擷取出學生需具備之概念性知識與程序性知識，題目完成以後與指導教授討論，再請校內教授線性代數課程的教師協助檢驗內容效度，提高測驗題目的合宜性與用字遣詞的流暢性。設計完成後，研究者找了 8 位已學過線性變換標準矩陣表示法證明題的研究生進行試測，在同儕的協助下分析題目的合宜性，進一步修正完成線性變換標準矩陣表示法證明題之先備知識測驗卷。設計完成以後，研究者將測驗卷發給 103 學年度修習線性代數課程的學生試測，接著以 SPSS 22 進行內部一致性 Cronbach 的 α 係數考驗，信度分析結果為 0.692。最後，將測驗卷發給 104 學年度修習線性代數課程的學生進行正式施測。

(二) 測驗目標

本試題欲瞭解學生是否具備閱讀「Standard Matrix Representation of a Linear Transformation」此證明的基本能力。

(三) 設計架構

本研究將證明題文本中可能會影響閱讀表現的符號擷取出來，依照測驗目標將測驗內容分為線性變換、矩陣、向量三種，知識向度分為概念性知識和程序性知識，如表 3-8。

表 3-8

先備知識測驗卷題目設計架構

測驗內容 知識向度	線性變換	矩陣	向量
概念性知識	能辨識函數符號的意義。	能辨識矩陣符號的意義。	能辨識向量符號的意義。
程序性知識	能正確使用函數的運算規則。	能正確使用矩陣的運算規則。	能正確使用向量的運算規則。

(四) 試題設計說明

1. 編製過程

先前在開放式問題中，多數學生都提到在英文閱讀會有困難，因此，研究者在設計試題時，除了考量試題中需有閱讀證明題的概念性知識以外，試題也以中文敘述呈現。在概念性知識的部分，研究者將文本內容所需具備的概念性知識分為三塊，分別是線性變換、矩陣、向量。以試題 1 為例：

1. 下列哪些選項可以表示 $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ？

(A) $T([x_1, x_2]) = [x_1 + x_2, x_1]$

(B) $T([x_1, x_2]) = [x_1 + x_2, x_1, x_1 - x_2]$

(C) $T([x_1, x_2]) = [x_1, x_2, x_3]$

(D) $T([x_1, x_2]) = [x_1 + x_2, x_2, x_3]$

在研究者的學習經驗中，每次看到 $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ 都不覺得這句話有什麼重要，但其實在這句話裡面， $\mathbb{R}$ 上面的 2 和 3，告訴我們此函數空間，是將 2 維空間裡面的元素轉換到 3 維空間。這種 n 維轉換到 m 維的概念是學習者需具備的，也是多數證明題的一開始，題幹敘述會率先說明的。因此，研究者將此題放置在第 1 題，測驗學生是否具備能瞭解 T 函數是把二維的向量送到三維，而不是把二送到二、三送到二，或三送到三的能力。其它設計理念請見附錄三專家修改建議與修改內容。

不過，在第一版的試題中，研究者發現有些試題，要用中文敘述呈現有困難，於是便將部分試題改為英文敘述。以試題 2 為例：

✧ 試題 2 (修改前)

Let A be an 3×2 matrix. 下列哪些選項可以表示 A ?

(A) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$

✧ 試題 2 (修改後)

Which of the following are 3×2 matrix ?

(A) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$

在此題中，除了題幹敘述從中文變成英文以外，選項也從四個變為兩個。原本研究者的設計理念是要確認學生是否能正確判斷列是橫的、行是直的，而且想知道學生是不是能知道 3×2 表示矩陣的尺寸，只需關注列數和行數，跟矩陣裡的元沒有關係，於是增加了(C)、(D)選項。另外，整份試卷包含單選題與多選題，要不要提示學生哪題是單選、哪題是多選題也是一種考量。最後研究者決定將整份試卷的選擇題都以單選呈現，因此，(C)、(D)選項就被拿掉了。

在第一版的整份試題中，原本只有概念性知識的試題，測驗學生看不看得懂符號，知不知道某些符號的運算規則。指導教授建議，雖然我們看的是學生的閱讀狀況、理解不理解之處、使用哪些閱讀測驗，但會不會有些學生是讀得懂，但卻用不出來，或者是會用，但是卻讀不懂。因此，研究者在試題的最後增列了一題跟證明題有關的計算題，如下所示：

Let $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ be a linear transformation such that

$$T(\mathbf{e}_1) = [2, 1, 4] \text{ and } T(\mathbf{e}_2) = [3, 0, -2].$$

Find the standard matrix representation A of T and find a formula for $T([x_1, x_2])$.

2. 內容效度

經由與指導教授、同儕討論後，測驗題已大致確定，接著便是要請校內教授線性代數課程的專家教師檢驗其內容效度。先備知識測驗卷中的各題目對應至「測驗內容」與「知識向度」之雙向細目表，如表 3-9 所示。

表 3-9

先備知識測驗卷之雙向細目表

知識向度 \ 測驗內容			
	線性變換	矩陣	向量
概念性知識	1.	2.	3.
程序性知識	4. 6. 7. 8(2).	5. 8(1).	

以下以試題 1 作為範例，說明試題在修改前的具體目標，專家有哪些修改建議，以及研究者參考專家修改建議後，對試題作了什麼樣的修正。其餘測驗題目的專家修改建議與修改內容請見附錄三。另外，研究者參考專家建議將試題修正後，也一併將原本的雙向細目表修正，放置於附錄四，供未來的研究者參考用。

✧ 試題 1 (修改前)

1. Let $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ be a linear transformation, which of the following options is correct?
- (A) $T([x_1, x_2]) = [x_1 + x_2, x_1]$
- (B) $T([x_1, x_2]) = [x_1 + x_2, x_1, x_1 - x_2]$
- (C) $T([x_1, x_2, x_3]) = [x_1, x_2]$
- (D) $T([x_1, x_2, x_3]) = [x_1 + x_2, x_2, x_3]$

✧ 具體目標

能瞭解 T 函數是把二維的向量送到三維，而不是把二送到二、三送到二，或三送到三。

✧ 專家修改建議

P1: 題目有提 linear，是否要求學生知道 linear 概念。

建議增加 $T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ，求 $T\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = ?$

或 $T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ and $T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \end{bmatrix}$, then $T\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = ?$ 之試題。

P2: 行向量或列與 3, 4, 5 題改成一致。

✧ 試題 1 (修改後)

1. Let $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ be a linear transformation, which one of the followings is correct?

$$\begin{array}{ll} \text{(A)} \quad T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} & \text{(B)} \quad T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 \\ x_1 - x_2 \end{bmatrix} \\ \text{(C)} \quad T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} & \text{(D)} \quad T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \end{array}$$

✧ 修改內容

研究者在設計題目時，確實沒考慮到試題中未包含檢驗學生是否瞭解 linear 概念的試題，linear 的概念在閱讀證明題時，也是重要的一環，因此研究者參考了 P1 的建議，增列了此題目於先備知識測驗卷中。

另外，P2 建議，在同一份試卷中，向量的表示法應該要統一，不要同時有列向量的表示也有行向量的表示法，可能會造成學生混淆。對此，研究者深深覺得專家教師切中研究者學習線性代數的痛，確實研究者自身在學習線性代數的過程中，常常也因為向量一下子寫橫的、一下子寫直的被搞混，那為什麼在研究者的試卷中也出現了不統一的狀況，其實是因為某些題目是直接參考學生的教科書，在教科書中，寫法是表示成列向量，所以為了忠實呈現，研究者也將題目表示為列向量。但其實研究者較習慣直的寫法，所以若該題是由研究者自創，則會出現直的寫法。因此，才會出現同一份試卷中，寫法不統一的情況。不過，研究者最後參考了 P2 的建議，將所有題目中的向量皆用行向量表示。

在其它建議的部分，P2 再次強調 $\vec{e}$ 應為粗體且非斜體、 $T(\vec{x})$ 與 $\vec{x}$ 在 corollary 中是 column vector，建議寫成 $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ ，而非 $[1, 2, 3]$ ，避免混淆。P1 則是無其它建議。

在參考專家的建議修正後，研究者再次與指導教授討論試題，此次修正因考量到之後讓學生閱讀的是全英文敘述的證明題，且學生已經是大一下，應具備閱讀英文試題的能力，因此，將整份試卷修改為全英文敘述。修正完以後，首先，先請八位已學過線性變換標準矩陣表示法證明題的研究生進行試測，主要是看英文敘述有沒有需要修正的地方，是不是能正確判讀。試測完沒問題以後，便進行大樣本的試測，研究者找了 97 位在 103 學年度修習線性代數課程的學生試測，測驗日期為民國 104 年 3 月 12 日。

將樣本回收後，研究者先進行批改，接著以 SPSS 22 進行資料分析，是否具有內部一致性。在使用 Cronbach 的 α 係數考驗後，信度分析結果為 0.692，顯示此份試卷很可信，可以採用。另外，研究者批改試卷的過程中，發現很多學生在試題 8 漏寫了一個答案，研究者猜測，可能是因為題目的排版不佳，造成學生漏答。因此，將試題修正如下：

✧ 試題 8 (修改前)

Let $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ be a linear transformation such that

$$T(\mathbf{e}_1) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad T(\mathbf{e}_2) = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Find the standard matrix representation A of T and find a formula for $T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right)$.

✧ 試題 8 (修改後)

Let $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ be a linear transformation such that

$$T(\mathbf{e}_1) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad T(\mathbf{e}_2) = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

(1) Find the standard matrix representation A of T .

(2) Find a formula for $T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right)$.

此次修正完成後，便將測驗卷發給 104 學年度修習線性代數課程的學生進行正式施測。

三、半結構式訪談

從先備知識測驗中，研究者挑出六位研究對象進行半結構式訪談，訪談過程共分為三個階段，第一階段是放聲思考，讓研究對象閱讀證明題文本；第二階段是具體提問，讓研究對象自己評估自己理解與不理解之處，以及用什麼策略來促進自己理解、解決自己不理解的部分；第三階段是檢驗閱讀理解，由研究者去評估研究對象的證明理解狀況。

（一）第一階段 放聲思考

本研究的目的是想要瞭解學生對此證明的理解與不理解之處，以及運用哪些閱讀策略來促進自己理解或解決自己不理解此證明的情形。研究者認為閱讀是一種動態的歷程，理解與不理解的狀況可能會隨時改變，有可能一開始看到某個句子不理解，但讀到後面突然理解了，或者是本來理解的句子，可能讀一讀又不理解了。這樣動態的歷程，必須透過觀察才能得知，但有大部分的歷程可能都只在研究對象的腦中運轉，研究者無法得知。研究者想起自身家教的經驗，曾經遇過在閱讀時會放聲思考的學生，透過學生放聲思考的內容，研究者更能瞭解學生的想法，在教學的過程中也更為順利。因此，研究者希望研究對象以放聲思考的方式閱讀，若研究對象本身沒有放聲思考的習慣，可以帶他練習，而且在研究對象閱讀的過程中，研究者也會從旁觀察研究對象的眼睛、手部動作，例如：眼睛是否出現了快速掃視（略讀）、凝視（停頓）、來回檢視（再度確認）的動作，手是否在哪裡畫底線、圈關鍵字，又或者扶著下巴思考。觀察這些動作都可以幫助研究者更瞭解研究對象閱讀的歷程，也為接下來第二階段的具體提問作準備。

在選擇放聲思考的練習文本時，研究者考量的是盡量能找到與正式要閱讀的證明題相似的定理形式，但翻閱了整本教科書，找不到形式接近的定理，後來便選擇了研究對象尚未學過的定理 6.2，在教科書的第 338 頁。原本研究者只打算讓研究對象練習讀一個定理，但研究者在訪談第一位學生時，發現練習一次太少，無法讓研究對象習慣放聲思考，再加上學生自己要求想要再多練習一次，於是，研究者從教科書中再選定一個定理讓學生練習，在教科書中第 308 頁的定理 5.3。接下來的研究對象為求一致，也都讓他們練習兩次（放聲思考練習文本可參閱附錄六與附錄七）。在學生閱讀的過程中，除了放聲思考以外，研究者也請學生在

閱讀的過程中，用手或筆指著閱讀的內容，若學生不小心忘記放聲思考，研究者也能得知學生讀到哪裡。

在放聲思考的練習後，正式進行證明題文本的閱讀，文本的閱讀時間約為 8~10 分鐘，視學生閱讀速度而定。為了可以回收學生閱讀過的文本，研究者將證明題打在 A4 紙上，也請學生攜帶自己的教科書或任何平常唸書時需要的筆記供查閱，盡量忠實呈現學生平時讀書的環境。在學生閱讀的過程中，研究者除了觀察眼睛與手部動作以外，也會特別注意嘴巴有沒有說出「為什麼會這樣」、「這是什麼意思啊」，或者是「嗯哼」、「哦」、「原來如此」、「soga」這種不理解與理解的聲音。

（二）第二階段 具體提問

因為在放聲思考階段，只能得到研究對象在閱讀時的片段思考，所以在研究對象閱讀完文本以後，研究者提出一些問題來確認研究對象在閱讀文本時的閱讀理解歷程與使用的閱讀策略，詳細訪談問題請參閱表 3 - 10。

表 3 - 10

自我評估的訪談問題

訪談目的	訪談問題
自評自己 整體的理解狀態	1-1 你已經讀完了？讀懂了嗎？
學生理解什麼、不理解什麼	2-1 可以用你的話說說看這個證明題在講什麼嗎？ 2-2 為什麼你覺得自己讀不懂呢？可以說說看哪些地方讀不懂嗎？ 2-3 在你讀的過程中，有沒有本來不懂，但後來懂的地方？你是怎麼從不懂變成懂的呢？ 2-4 在你讀的過程中，有沒有本來覺得懂，但後來又不懂的地方？你是怎麼從懂變成不懂的呢？
學生不理解時使用哪些策略	3-1 你讀不懂時，會做什麼呢？ 3-2 你讀不懂時，會想什麼呢？ 3-3 你讀不懂時，會用什麼方法讀懂呢？ 3-4 依你的經驗，若同學讀不懂時，你會建議他怎麼做？

學生使用	4-1 你是怎麼讀的？
哪些策略	4-2 你用了什麼策略？
來促進理	4-3 還有其他策略嗎？
解	4-4 依你的經驗，你會建議同學怎麼閱讀這個證明？

學生在閱讀完文本後，研究者會先讓學生自評自己整體的理解狀態。學生大概分四種類型，第一種是認為自己完全讀懂了，沒有任何問題；第二種是認為自己大致上讀懂了，但好像不是完全讀懂；第三種是認為自己讀不懂，但好像又有點知道證明在講什麼；第四種是認為自己完全讀不懂。

訪談問題 1-1 即是用來確認學生是哪種類型。若是第一種類型，則透過訪談問題 2-1 確認他理解了什麼；若是第二種類型，則先透過訪談問題 2-1 確認他理解了什麼，再透過訪談問題 2-2 確認他不理解什麼；若是第三種類型，則先透過訪談問題 2-2 瞭解學生不理解什麼，再透過訪談問題 2-1 瞭解學生理解什麼；若是第四種類型，則透過訪談問題 2-2 確認學生不理解什麼。最後，不管是哪一種學生都會詢問 2-3、2-4 確認他的理解與不理解歷程。如果當學生談到自己理解證明時，就會追問 4-1 到 4-4 確認他們使用哪些策略來促進理解；當學生談到自己不理解證明時，會追問 3-1 到 3-4 確認他們不理解時使用哪些策略。

當然，在訪談過程中，研究者會隨著訪談對象的不同以及對答的狀況，隨時調整訪談問題，不一定會跟表 3-10 完全相同，也不會脫離表 3-10 的主軸。

（三）第三階段 檢驗閱讀理解

學生自我評估理解的情況，可能與他真正所理解的情況不同，有些學得比較淺的學生會說「我懂了」，是因為他看不出問題；思考比較深的學生會說「我覺得自己好像不是很懂」，是因為思考的深，評斷自己懂不懂的標準也比較高。所以，學生說自己懂或不懂，不一定是真的懂或真的不懂。因此，在放聲思考與具體提問這兩階段過後，才會有第三階段，由研究者來檢驗學生的閱讀理解，客觀的說學生的理解狀況。

1. 證明理解的狀況

此階段檢驗閱讀理解的訪談問題是參考 Mejia-Ramos 等人（2011）發展出來的評量模型去設計題目，可參閱表 2-1，茲將每個面向將設計的題目陳述如下：

第 1 個面向，專有名詞和敘述的意義：在專有名詞方面，研究者會請學生敘述證明裡專有名詞的定義，並給出具體的例子來描述。例如：「你知道什麼是 Linear Transformation 嗎？」、「能不能舉個例子來告訴我什麼是 Linear Transformation？」另外，為了得知學生對證明裡面敘述的瞭解程度，會請學生用不同但等價的方式去描述一個給定的敘述，找出例子去說明，例如：「你可以用你的話告訴我這段話在講什麼嗎？」、「能不能舉個例子告訴我，這段話在說什麼？」

第 2 個面向，敘述和證明架構的邏輯定位：研究者會詢問「為什麼命題一開始要假設 T 是一個線性變換？」、「證明一定要有這句話嗎？」、「如果沒有這句話會怎樣？」確認學生是否知道自己在證什麼。

第 3 個面向，宣稱的合理性：研究者會詢問「證明說 By Theorem 2.7, and the comment following this theorem, we know that then $T(\mathbf{x}) = T_A(\mathbf{x})$ for every $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ —that is, $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ for every $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ，你知道為什麼要用到定理 2.7 嗎？」、「定理 2.7 在談些什麼？」、「定理 2.7 跟這個證明題有什麼關係？」確認學生是否理解這個證明所需的數學原理的概念。

第 4 個面向，透過高層次的想法摘要：研究者會詢問「你能不能在白紙上寫上這個證明的摘要？」確認學生瞭解這個證明的目標、為什麼想這樣證、想做些什麼。

第 5 個面向，辨認模組結構：研究者會詢問「如果要把這個證明分成幾個區塊，你會怎麼分？」、「為什麼會這樣分？」、「這些區塊之間有什麼關係？」確認學生是否瞭解證明區塊間的關係。

第 6 個面向，轉移一些基本概念或方法到其它上下文：研究者會詢問「你知道這個證明可以用在哪嗎？」確認學生可以將這個證明靈活運用到別的地方。

第 7 個面向，舉例說明：能用例子來說明證明，對於理解證明也是很重要的。在這個面向裡，研究者會問學生：「你能不能用一個例子說明這個證明在談什麼？」

關於上述七個面向，Mejia-Ramos 等人 (2011) 其實還有細分為 20 個面向，研究者將這 20 個面向所對應的訪談問題整理在表 3-11 作為參考，正式訪談時，不一定會照順序問下來，會依照不同的訪談狀況作些調整，若在訪談的過程或前兩個階段就已得知他具有哪些理解面向，則在此階段不會再追問。

表 3 - 11

評估證明理解的訪談問題

理解面向	訪談問題
1-t-1	你知道什麼是 Linear Transformation 嗎？
1-t-2	能不能舉個例子來告訴我什麼是 Linear Transformation？
1-s-1	你可以用你的話告訴我 let A be the $m \times n$ matrix whose j th column vector is $T(\mathbf{e}_j)$ 這句話在講什麼嗎？
1-s-2	
1-s-3	能不能舉個例子告訴我，在什麼樣的情況下， $A\mathbf{e}_j$ 會等於 $T(\mathbf{e}_j)$ ？
2-1	為什麼命題一開始要假設 T 是一個線性變換？
2-2	
3-1	為什麼它說 Recall that for any matrix A ，就可以得到 $A\mathbf{e}_j$ is j th column of A ？
3-2	證明說 By Theorem 2.7, and the comment following this theorem, we know that then $T(\mathbf{x}) = T_A(\mathbf{x})$ for every $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ —that is, $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ for every $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ，你知道為什麼要用到定理 2.7 嗎？
3-3	
4-1	你能不能在白紙上寫上這個證明的摘要？
4-2	你能不能在白紙上寫上定理 2.7 的摘要？
5-1	如果要把這個證明分成幾個區塊，你會怎麼分？
5-2	為什麼會這樣分？
5-3	這些區塊之間有什麼關係？
6-1	你知道這個證明可以用在哪嗎？
6-2	
6-3	
7-1	你能不能用一個例子說明這個證明在談什麼？
7-2	

眼尖的讀者會發現，在表 3 - 11 中，1-s-2、2-2、3-3、6-2、6-3、7-2 這幾個理解面向的訪談問題是空白的，這是因為研究者選定的證明題，無法用從這幾個面向去設計訪談問題。除此之外，研究者所問的訪談問題也不是全部都能歸類到這 20 個面向，像是在第一個面向，Mejia-Ramos 等人（2011）關注的是專有名詞與敘述，沒有談到符號的理解，研究者在訪談時會詢問「它說 T 是從 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^m$ ，

你知道什麼叫 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^m$ 嗎？」、「 $\mathbb{R}$ 是什麼？ n 和 m 又代表什麼？」、「 T 是什麼東西？」、「 $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ 是什麼意思？」、「為什麼右邊的 A 沒括號， T 那邊有括號？」這類的問題。

另外，表 3-11 中，每個理解面向雖然只放了一個訪談問題，但不代表就只問這個問題，像是在專有名詞的部分或是敘述間的邏輯關係有很多，如果將所有的問題都列出來會過於繁複。因此，研究者只挑選一個問題當代表，整理成表格。

2. 閱讀策略的使用

蘇慧珍（2013）的研究發現，在提出閱讀策略教學方式的相關文獻中，交互教學法（reciprocal teaching method）已經累積了很多教學成果證明它的有效性。此教學法是教導學生使用提出問題（questioning）、摘錄重點（summarizing）、澄清（clarifying）、預測文章內容（predicting）這四種閱讀策略來進行有意義的學習。Rosenshine 與 Meister（1994）將交互教學法相關的文獻整理後得知，大部分的實徵研究包含四種策略：

- (1) 預測策略：結合先備知識，以現有的線索去預測文本會發生什麼事。
- (2) 提問策略：自己提出跟文本相關的問題，為了瞭解文本的主旨。
- (3) 摘要策略：摘錄文本中的重點，能讓注意力集中在文本的主要內容上。
- (4) 澄清策略：澄清文本中不瞭解的部分。

蘇慧珍（2013）根據研究需要，將上述四個策略整理成表 3-12。

表 3 - 12

策略類別與內涵說明表

策略類別	內涵說明
預測	進行閱讀時對標題的預測。 進行閱讀時對圖表的預測。 進行閱讀時依據上文對下文的預測。 進行閱讀時依據先備知識對內容的預測。
提問	進行閱讀時對於概念的提問。 進行閱讀時對於解法的提問。 進行閱讀時對於圖形與內容關係的提問。 進行閱讀時對於題目的提問。
澄清	進行閱讀時對於先前預測的澄清。 進行閱讀時對於先前未懂內容的澄清。 進行閱讀時對於先前發問後自我解釋的澄清。
摘要	進行閱讀時對於問題所提供資訊的摘要。 進行閱讀時對於重要概念的摘要。(包含課文與例題詳解) 進行閱讀時對於內容大意的摘要。(包含課文與例題詳解) 進行閱讀時對於課程單元內容形成架構。

但蘇慧珍(2013)的研究為閱讀中學數學課本，中學數學課本與本研究大學數學證明題包含的物件不同，以表 3-12 的預測策略為例，因為中學數學課本的內容幾乎都有標題、圖表、內文以及例題，所以我們可以看到內涵說明裡包含對這四個物件內容的預測。但是在本研究的證明題中，沒有圖表，如果完全按照表 3-12 來觀察學生是否使用了某些閱讀策略似乎不太恰當。而且，研究者認為當遇到不理解時，能知道運用什麼策略來幫助自己是很重要的，這正是 Yang 與 Lin (2012) 提出的反思 (reflecting) 策略。因此，研究者參考這兩篇文獻以及本研究的需要，將表 3-12 修改為表 3-13，並依此分類觀察學生運用哪些閱讀策略來理解證明題。

表 3 - 13

證明題使用的策略類別與內涵說明表

策略類別	內涵說明
sp 預測	sp-1 進行閱讀時對標題的預測。
sq 提問	sq-1 進行閱讀時對於專有名詞的提問。
	sq-2 進行閱讀時對於數學符號的提問。
	sq-3 進行閱讀時對於數學式子的提問。
sc 澄清	sc-1 進行閱讀時對於先前預測的澄清。
	sc-2 進行閱讀時對於先前未懂內容的澄清。
	sc-3 進行閱讀時對於先前發問後自我解釋的澄清。
ss 摘要	ss-1 進行閱讀時對於問題所提供資訊的摘要。
	ss-2 進行閱讀時對於重要概念的摘要。
	ss-3 進行閱讀時對於內容大意的摘要。
sr 反思	sr-1 自我監控四種策略與理解的關係。
	sr-2 在遇到不理解時，可以運用什麼策略來幫助自己。

(四) 訪談流程

1. 說明實施本研究的目的。

「謝謝你參與本研究，本研究主要是為了瞭解你在閱讀線代課本裡的證明題時，理解與不理解之處為何，以及運用哪些閱讀策略來解決自己不理解，或促進自己理解此證明的情形。為了能更瞭解你的閱讀狀況，待會兒的流程會分為三個階段，第一階段，閱讀證明題。如果這個證明題是期末考必考的內容，你務必要弄懂，但又沒有任何人可以問，只能靠自己，那你會怎麼想辦法把它讀懂？讀的時候，我希望你用放聲思考的方式來閱讀，所謂放聲思考，就是把你閱讀過程中想到的任何事情大聲說出來，讓我知道你在想什麼。而且在閱讀過程中，希望你用筆指著你注視的地方，方便我瞭解你閱讀到哪裡，在正式閱讀之前，我會先拿另一個定理讓你練習看看；第二階段，在你讀完證明題，並確認你理解之後，我會對你的閱讀歷程做一些提問，確認你的閱讀狀況；第三階段，關於證明題內容的提問，主要是用來確認你對證明題的理解狀況。為了避免資料遺漏或解讀錯誤，過程中將全程錄音及筆記，訪談內容僅供研究參考，不會對外公開。」

2. 詢問受訪者是否瞭解訪談的實施方式。若無疑問，則先利用第 338 頁的定理 6.2 與第 308 頁的定理 5.3 做放聲思考的練習。
3. 練習完以後，開始正式閱讀證明題文本。
4. 學生閱讀完證明題文本後，進行第二階段的追問。
5. 進行第三階段的提問。

第四節 資料處理與分析

本研究的研究工具有證明題文本、先備知識測驗卷、自我評估的訪談問題以及評估證明理解的訪談問題，這些研究工具的編製過程已在前一節做了說明。在本節中，會說明先備知識測驗卷的編碼與給分方式，以及訪談過程中的逐字稿資料是如何處理的。

一、先備知識測驗卷

(一) 編碼

研究者設計的先備知識測驗卷，題型包含單選題與非選題，在資料分析前，研究者依照學生的作答情況編碼，編碼表可參閱表 3-14，編碼方式如下：

1. 單選題：共 5 題，選項有 2 個、4 個、6 個不等，用(A)到(F)表示。若學生選擇(A)選項，則以 1 表示；若學生選擇(B)選項，則以 2 表示，依此類推；若未作答，則以 9 表示。
2. 非選題：共 4 題。若有作答，則以 1 表示；若未作答，則以 9 表示。

表 3-14

先備知識測驗卷作答情況編碼表

題號	編碼
1	1 選(A)選項；2 選(B)選項；3 選(C)選項；4 選(D)選項；9 未作答
2	1 選(A)選項；2 選(B)選項；9 未作答
3	1 有作答；9 未作答
4	1 選(A)選項；2 選(B)選項；3 選(C)選項；4 選(D)選項；9 未作答
5	1 選(A)選項；2 選(B)選項；3 選(C)選項；4 選(D)選項；9 未作答
6	1 選(A)選項；2 選(B)選項；3 選(C)選項；4 選(D)選項； 5 選(E)選項；6 選(F)選項；9 未作答
7	1 有作答；9 未作答
8 (1)	1 有作答；9 未作答
8 (2)	1 有作答；9 未作答

(二) 給分

不管是單選題或非選題，只要寫出正確答案就給 3 分，若有寫但寫錯，則給 1 分，未作答就是 0 分。

二、逐字稿資料

本研究在進行完先備知識測驗後，挑選了六位研究對象做半結構式訪談，詳細的訪談流程請見上節。在訪談時，研究者與研究對象以一對一的形式進行訪談，地點皆為研究者所就讀學校的同一間空教室。同時，研究者也架設了攝影機與使用手機作為錄音設備，以便後續研究使用。而且，為了避免學生隨著時間的流逝，對證明題的先備知識有所遺忘，在先備知識測驗完的三天後，研究者隨即進行半結構式訪談。除了研究對象 S6 因為時間的關係，晚了一天進行訪談之外，其餘五位研究對象皆在同一天完成訪談，且訪談時間以 60~90 分鐘為主。訪談時程如表 3-15。訪談結束後，便將錄音檔轉為逐字稿分析使用。

表 3-15
半結構式訪談時程

訪談對象	訪談日期	訪談時間 (分)
S1	2016.05.29 (日) 13:00-15:00	78
S2	2016.05.29 (日) 15:30-17:00	60
S3	2016.05.29 (日) 17:00-18:30	62
S4	2016.05.29 (日) 18:30-20:00	61
S5	2016.05.29 (日) 20:30-22:00	87
S6	2016.05.30 (一) 20:00-22:00	69

(一) 編碼

研究者拿到逐字稿後，先將資料作切割。除了放聲思考階段當成一個段落以外，其餘的段落以有意義的話題為界線切割。這些切割單位化後的資料稱為分析單位，分析單位可能是一句話或一段敘述。以編碼 S2-06 為例，S2 指的是研究對

象，S2-06 表示這是研究對象 S2 的第 6 個分析單位。編碼 S6-15 表示這是研究對象 S6 的第 15 個分析單位。特別的是，放聲思考階段的單位會再做細分，例如：編碼 S1-04-10 表示研究對象 S1 的第 4 個分析單位，此分析單位為放聲思考階段，因此，編碼 S1-04-10 為研究對象 S1 在放聲思考階段裡面的第 10 個分析單位。

(二) 閱讀理解

段落編碼完成後，研究者先利用 Mejia-Ramos 等人 (2011) 評估證明理解的模型將學生理解與不理解之處列出來，針對專有名詞、符號與敘述訂定能力指標。為了降低單一研究者的偏誤，本研究邀請一位數學教育背景的研究生進行三角校正，以下稱為編碼者。在編碼者進行編碼前，研究者先介紹理解狀態判準裡面的物件與相對應的能力指標，接著選取一位研究對象的逐字稿進行編碼。

理解狀態的判準中，共有 12 個分析單位。在這 12 個分析單位中，有 3 個不一致的編碼。依一致性公式「 $\text{一致性} = \frac{\text{一致次數}}{\text{一致次數} + \text{不一致次數}} \times 100\%$ 」計算，

一致性為 75%。經過討論後發現，原本物件「 $T(\mathbf{e}_1)$ 」的能力指標「能知道 $T(\mathbf{e}_1)$ 」

上下兩條直線是省略記號」會讓編碼者認為，如果要瞭解學生知不知道那是省略記號，必須學生有主動說明「那是省略記號」。但實際上，學生知道那是省略記號，但不一定會主動說出「省略」這兩個字。因此，研究者將能力指標改為「能知道這個符號表示的含意」。將能力指標修改後，一致性達 83%。理解狀態的判準請見表 3-16。

表 3-16

理解狀態的判準

項目	物件	能力指標
專有名詞	linear transformation	能說出定義。
符號	$T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$	能知道 T 函數是 n 維送到 m 維的實數空間。

$T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$	能知道證明題的重點就是要證明這個等式。
$A\mathbf{e}_j = T(\mathbf{e}_j)$	能說明此等式成立的原因。
$T_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$	能知道 T_A 這個函數是被假設出來的。
$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$	能說出 $\mathbf{x}$ 在 $\mathbb{R}^n$ 空間裡面的長相。
$\mathbf{x}$	能說出 $\mathbf{x}$ 是一個行向量。
$T(\mathbf{e}_1)$	能知道這個符號表示的含意。
敘述 let A be the $m \times n$ matrix whose j th column vector is $T(\mathbf{e}_j)$	能正確說明此敘述。
Recall that for any matrix A , $A\mathbf{e}_j$ is j th column of A	能正確說明此敘述。
證明的第三段	能說明此段落利用定理 2.7 證明出 $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ 的原因。
Theorem 2.7	能說出此定理與 Cor 證明題的關連。

接著，為了比較學生理解狀態在自我評估與外在評估的差異，研究者設計了一個 2×2 的表格打算針對每一項物件理解狀態自我評估與外在評估的差異逐項分析，此處的物件指的是學生對證明題的理解與不理解之處，表格請見表 3-17。

表 3-17

自我與外在評估理解狀態的差異

理解狀態 \ 評估者	自我	外在
理解		
不理解		

研究者原本預期在訪談的過程中，學生會主動說明自己理解與不理解之處，但實際訪談後發現，學生回答問題不會在每一項物件主動告知研究者該問題他是否理解。因此，研究者修正研究問題，改為分析學生對證明「整體理解狀態」，在自我評估與外在評估上的差異。

為了分析學生理解狀態在自我評估與外在評估上的差異，首先，研究者對自我評估與外在評估理解狀態給出操作型定義。接著，為了降低單一研究者的偏誤，本研究邀請一位數學教育背景的研究生進行三角校正，以下稱為編碼者，此編碼者與理解狀態判準的編碼者相同。

在編碼者進行編碼前，研究者先介紹自我與外在評估整體理解狀態的操作型定義。在自我評估中，原本偏向理解和偏向不理解的定義分別是「以不確定的語氣說出自己不懂、不知道」和「以不確定的語氣說出自己懂、大概知道」。但編碼者認為，若學生回答「我只看得懂一點點」或「我有一點點不懂」，他會不知道該歸類在哪。因此，研究者分別在這兩個類別的操作型定義增加了「或表示自己只看得懂少部分內容」和「或表示自己有少部分內容不懂」，並在每個類別的操作型定義後面舉例說明。

在編碼者瞭解定義後便開始進行編碼，自我評估整體理解狀態的編碼共有 6 個分析單位，分別對應六位研究對象的訪談內容。在這 6 個分析單位中，沒有不一致的編碼，一致性為 100%。雖然一致性為 100%，研究者還是有詢問編碼者，是否曾在哪些分析單位有猶豫不知該如何選擇。編碼者指出，「像是 trivial 的感覺」有讓他猶豫。不過，因為「像是」算是不確定的語氣，後來就將它歸類在「偏向理解」。另一個特別的分析單位是研究對象 S2 的訪談內容，因為 S2 在訪談過程中沒有直接談到他的整體理解狀態，因此，研究者也特別詢問，編碼者在 S2 的分析單位編碼過程有沒有困難。編碼者回應，因為 S2 一開始就說「這裡就是定義」，感覺是很肯定覺得自己理解，才會說出這樣的話，所以在判斷 S2 時並無困難。

接著，研究者繼續介紹外在評估理解狀態的定義，選定了一位研究對象進行理解狀態的編碼。在 12 個物件中，編碼者認為研究對象理解其中 10 個，而研究者認為理解 8 個。不管是 10 個或 8 個，都涵蓋在外在評估偏向理解的操作型定義中。因此，編碼者與研究者的外在評估皆為偏向理解，一致性達 100%。

自我與外在評估整體理解狀態的判準可參閱表 3-18

自我與外在評估整體理解狀態的判準與編碼表表 3-18：

表 3 - 18

自我與外在評估整體理解狀態的判準與編碼表

評估 來源	類別	操作型定義	編碼
自我	完全 不理解	明確說出自己不懂或不知道。 【例如】我不知道它在幹嘛。	1
	偏向 不理解	以不確定的語氣說出自己不懂、不知道，或表示自己只看得懂少部分內容。 【例如】我只看得懂一點點、好像不太懂、我不是很懂。	2
	理解與 不理解 各半	表明自己無法確定自己的理解狀態。 【例如】我不確定我懂不懂。	3
	偏向 理解	以不確定的語氣說出自己懂、大概知道，或表示自己有少部分內容不懂。 【例如】我有一點點不懂、大致應該懂。	4
	完全 理解	有明確說出自己懂，透露出很容易、自己理解了訊息，或是他可以把內容明確的說出來(不管說的正不正確)。 【例如】這不是很簡單嗎、啊就這樣子啊。	5
外在	完全 不理解	在專有名詞、符號與敘述的這 12 個物件中，有 0 個物件是理解的。	1
	偏向 不理解	承上，有 1~4 個物件是理解的。	2
	理解與 不理解 各半	承上，有 5~7 個物件是理解的。	3
	偏向 理解	承上，有 8~11 個以上的物件是理解的。	4
	完全 理解	承上，有 12 個物件是理解的。	5

除了知道研究對象的理解狀態，在自我評估與外在評估沒有什麼差異以外，研究者更感興趣的是學生的理解狀態是怎麼從「理解至不理解」或「不理解至理解」。理解狀態改變的來源可能會有二：一個是自我、另一個是外在。若學生是自己閱讀證明時發理解狀態改變，例如：學生在閱讀的過程中，可能自己看一看就說：「欸，我剛剛那邊看錯了」，則改變的來源為自我；若學生是經由研究者提問才發生了理解狀態改變，例如：學生在研究者詢問某個專有名詞的定義時才突然說：「欸，不對，我這個好像不懂」，則改變的來源為外在。因此，研究者在分析資料的過程中，會將理解狀態改變的來源分成自我與外在兩種維度去看，如表 3 - 19。來源如果是自我，有可能因為自己使用了某些閱讀策略，讓理解狀態作了改變，這時會再作進一步分析。

表 3 - 19

理解狀態改變的來源

理解狀態改變	來源	
	自我	外在
理解至不理解		
不理解至理解		

(三) 閱讀策略

在閱讀策略使用方面，本研究採取分析歸納法 (analytic induction) 和紮根理論 (grounded theory) 來作資料的分析。首先，使用分析歸納法，將文獻中閱讀策略整理成表 3-13，將表 3-13 的策略類別當作初始架構去分析逐字稿。接著，利用紮根理論裡面的開放性編碼 (open coding) 逐行分析，在各分析單位中尋找關鍵語句做分類，經過多次比較且與指導教授討論後，形成閱讀策略的類別並命名，最後寫下各類別的操作型定義，策略類別編碼表請見表 3-20

從不理解至理解使用的策略類別編碼表表 3-20～表 3-23。

表 3-20

從不理解至理解使用的策略類別編碼表

策略類別	操作型定義
對照筆記	參考老師的上課筆記。 【例如】S1 訪談 S1-03 S1 對，我也覺得，哈哈，所以這寫什麼？(小聲自言自語)，結果發現好像老師沒有寫(找筆記找不到)，然後就看這個就好，嗯，146 頁。
檢視相關定理	查看跟證明有關的定理。 【例如】S1 訪談 S1-10 S1 然後就是它有說利用這個 2.7 的定理，所以我就回去看這個定理。
多讀幾次	同一段內容重複看很多次。 【例如】S5 訪談 S5-09 S5 然後就是讀了好幾次才搞懂它到底在幹嘛
檢視命題資訊	檢視命題給的資訊。 【例如】S2 訪談 S2-13 S2 我在想說如果是數字要怎麼乘。 R 跟誰乘？ S2 跟 A。 R 跟 A 乘，好，然後呢？ S2 再想一下 (43:18~)。

	R 好，你想，沒關係。 S2 (S2 思考中~43:55) 就感覺乘出來，原本是 n 乘 1，乘完會變成 m 乘 1。
查看課本	翻閱課本查找相關內容。 【例如】S6 訪談 S6-15 S6 啊就翻到前面看一看，我現在翻不到不知道在哪裡哈哈，那是哪一節的？喔~~~找到了找到了，是 vectors space 啊，喔~那麼前面啊，喔~第一頁耶，對啊，我應該沒有寫錯，唉？還是，不知道在哪裡耶，我真的不知道在哪裡。
動筆寫	用筆在紙上將證明的推論寫下來。 【例如】S1 訪談 S1-21 S1 對，就是感覺就是個表示法而已，就是可以直接寫成這樣(手寫)，欸？ R 和原本長的不太一樣。 S1 好像不太一樣耶，TA..... R 妳本來是要告訴我 TA 最後這個地方和這個其實是一模一樣的，結果後來發現好像長的不一樣的。
外在澄清	研究者確認研究對象的表達內容。 【例如】S1 訪談 S1-24 R 妳說這個 A 和這個 A 是一樣？ S1 其實 A 是一個矩陣。 R A 是一個矩陣，然後？妳把所以這個 A 和這個 A 是一樣的意思嗎？因為妳把它寫在中括號裡面。 S1 應該是不對，只是說一種感覺吧，那把 A 假設是矩陣 a, b, c, d 乘上 $(1, 0)$，這樣的話得出來就是 (a, c)，那這樣就是代表著它的第一行的向量，第一行的，所以這兩個是一樣的，這是第一行，A 矩陣的第一行。

表 3 - 21

從理解至不理解使用的策略類別編碼表

策略類別	操作型定義
自我提問	進行閱讀時對於證明內容的提問。 【例如】S1 訪談 S1-05 S1 就剛看完證明，因為它這個有用到這個。就再看一次這個證明，是.....，恩，Ae，A 乘以 ej 等於 $T(ej)$ (喃喃自語)
讀了 Cor 的證明	讀了該定理的證明。 【例如】S1 訪談 S1-11 S1 我就先看這一塊，當時就覺得很簡單，這線性變換就是長這樣。 R 就 $T(x)=Ax$，好。 S1 然後就接著看證明，但它的證明就讓我有點，因為它感覺它證明又繞了很多圈，不知道為什麼到底為什麼要寫成這樣。
動筆寫	用筆在紙上將證明的推論寫下來。 【例如】S1 訪談 S1-06 S1 就先把 x 寫成寫成一個向量，一個行向量。 R x 是這個粗體的 x？ S1 對，把它寫成行向量，然後就把它乘開來，這邊就是 Ax，然後前面如果 $T(x)$ 的話，那就應該 T 到 $T(x)$...，所以定理是說這個等於這個。 R 妳說定理是講 T，然後把 x_1 到 x_n 會等於後面 $T(e_1x_1)$ 到 $T(enx_n)$，是不是這樣？ S1 對。 R 就是妳覺得它在講這兩個東西是一樣的。 S1 恩。然後因為 A 又是這個，$A...T...$(沉默) R 妳現在在想什麼？ S1 我也不知道我該怎麼辦耶，我現在有點不懂它在講什麼。

表 3 - 22

不理解時使用的策略類別編碼表

策略類別	操作型定義
多讀幾次	同一段內容重複看很多次。 【例如】S3 訪談 S3-10 S3 就是，讀不懂的話我可能會，就是，又往回上去再仔細看一遍它到底在做什麼。 R 上，上面的東西重看。 S3 對，就還在，仔細再看一次有什麼，漏掉的、之類的。 不然就是，然後再去慢慢的看，然後在慢慢的想。
檢視相關敘述	查看跟證明有關的內容。 【例如】S4 訪談 S4-06 S4 然後 describe 是什麼?描述在這個是第二，例題 2 嗎?就是 in...我就翻例題 2。
來回檢視	反覆比對不同內容。 【例如】S1 訪談 S1-11 R 妳剛剛有做哪些動作去確認這件事? S1 就剛剛不是說就回來看這個 2.7 的證明。 R 就仔細比，反覆比對這個證明? S1 對，然後就發現好像真的長得差不多。
動筆寫	用筆在紙上將證明的推論寫下來。 【例如】S5 訪談 S5-12 S5 應該是反覆確認後是什麼把它寫下來然後看它到底在幹嘛
舉例子	用實際的數據代入不理解的內容。 【例如】S2 訪談 S2-16 S2 可能就實際就自己代進去看看啊。 R 你就會代數字，像這樣的矩陣你就會代數字，是舉例子的意思嗎? S2 嗯。

表 3 - 23

促進理解時使用的策略類別編碼表

策略類別	操作型定義
瞭解目標	瞭解證明的目標。 【例如】S5 訪談 S5-05 S5 嗯對，然後先大概理解敘述在幹嘛然後之後再下去看它的證明，然後證明會先瞭解說它證明到底要做哪些，它目標是要做什麼事情 嗯
反覆確認	確認證明的目標要做哪些事。 【例如】S5 訪談 S5-05 S5 對就是有時候看證明就知道喔這句話對對對對對對然後看到最後不曉得說喔所以我到底是想要證什麼 R 喔會忘記你自己要證的東西 S5 對所以就要再跑回去檢驗說這個定理到底是叫我們證什麼
檢視相關定理	查看跟證明有關的定理。 【例如】S5 訪談 S5-05 S5 然後像這裡面有說看到一些它說喔譬如說它這邊說定...要根據定理 2.7 那我就會先回去翻定理 2.7 的敘述，然後看完它的敘述之後呢我會再回來就是再把我題目現在的東西帶進去這個定理的敘述裡面
分類	將證明的內容分段。 【例如】S5 訪談 S5-06 S5 應該就是只有就是把它分類
畫示意圖	把數學內容圖像化。 【例如】S5 訪談 S5-06 S5 一開始在看定理的時候就是看 n 跟 m 有時候會搞不太清楚所以先把它圖大概畫了下來
動筆寫	用筆在紙上將證明的推論寫下來。 【例如】S5 訪談 S5-07 S5 就是把它這邊在做事情就是在把它寫在下面說所以我做

了哪些事情，然後最後是有哪些結論得證，例如說這個是你先講說這兩個相等再說這兩個相等所以我們由 1 跟 2 得證說是這兩個是相等的。

挑重點看

只看重要的數學代號。

【例如】S6 訪談 S6-11

R 例如說，你就會特別跟我說對所有的 x 就是重點，啊這裡符號、啊名詞這麼多為什麼你認為對所有的 x 就是重點？

S6 因為它不是只是就是它已經、它已經是一個很大的範圍了，那我們必須縮小範圍啊！

R 一個很大的範圍必須縮小範圍？

S6 縮小範圍到 e_1 、 e_2 到 e_n 然後我才能進一步作成這個證明。

R 好。

S6 你對於一個 x ，陌生的 x 來沒有 e_1 到 e_n 當然沒辦法做事啊。



第肆章 研究結果

本章將針對三個研究問題，分成三節來討論研究結果。第一節為理解與不理解之處，此節研究者會將不同先備知識學生對此證明的理解與不理解之處列出來，並描述其特徵；第二節為整體理解狀態在自我與外在評估上的差異，此節會透過外在（研究者）的角度去分析差異；第三節為理解狀態改變的來源與閱讀策略的關連，不同先備知識學生理解狀態改變的來源是自我還是外在，若是自我，是使用了哪些閱讀策略來促進自己理解，或解決自己不理解。會不會在不同先備知識的學生中，程序性知識全對的學生從不理解至理解時，多半都是透過自我，而程序性知識有錯的學生多半需要外在介入。

第一節 理解與不理解之處

本節利用 Mejia-Ramos 等人（2011）評估證明理解的模型，將證明題文本內容分為七個面向，在這七個面向中，研究者認為第一個面向：專有名詞和敘述的意義是最重要的，如果連基本的名詞、符號都不理解，那其它面向也不太可能理解了。因此，本節在描述不同先備知識學生理解與不理解之處時，多著重在專有名詞和敘述的意義。

（一）AH_CHPH 學生：S5

能將證明分為兩階段來描述，能陳述整個證明題的命題。

R 你讀完了

S5 嗯

R 那你覺得你有讀懂嗎？

S5 哦..大致應該懂

R 大致應該懂，好那好你可以稍微跟我說明一下你覺得這個證明在說什麼嗎？

S5 欸...這個證明大致分兩階段，第一個階段，它想要把這個 Ax 當作是一種線性變換，然後就是它，首先要先證明的就是 Ax 確實是可以寫成一

個線性變換，然後第二件事情它想要說的是這個線性變換剛好就會是就是你把 x 向量作線性變換之後結果

R x 向量作線性變換之後結果

S5 嗯對

(引自 S5 訪談 S5-03)

R 好，然後那你可以告訴我這個定理的敘述在說什麼嗎？

S5 嗯這個定理的敘述是在說如果你把這個就是你可以嗯...我想一下怎麼講喔 let A be a...就是你把它的這個就是你要把它寫成一個線性變換你可以先表示成這個 Ax 然後它是把它的 e_1 、 e_2 、 e_3 到 e_n 然後就是都把它丟進去然後...

R 丟進哪裡？

S5 欸就是把它丟進那個線性變換裡面

R 這個線性變換是指哪一個線性變換？

S5 就是它原本題目給的這個從 n 到 m 的線性變換

R 喔繼續

S5 嗯然後就是把你的 e_1 、 e_2 到 e_n 把它丟進線性變換裡面然後跑出來的結果把它寫成一個矩陣然後這個矩陣就是只要把這個這邊原本的向量乘以乘以這個矩陣然後就會變成你那個你線性變換最後要的結果，就對於所有的就是所有 n 的向量

R 所有 n 的向量

S5 嗯就是如果它是 R^n 應該說它是個...對啊這樣算是 n 的向量啊嗯就是一個怎麼講， n 維的向量

R n 維的向量

S5 嗯

(引自 S5 訪談 S5-04)

在 $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ 中，S5 能說出 R^n 和 R^m 分別是 n 維和 m 維的向量，可惜研究者沒請他舉例說明。

R 好那再這裡一開始說 T 是 $R^n \rightarrow R^m$ ，然後 be a linear transformation

那想要問你說就是什麼叫 R^n 什麼叫 R^m

S5 R^n 就是一個欸 n 維，我是會把它解讀成一個 n 維的向量

R n 維的向量

S5 對然後 R_m 是指一個 m 維的向量

(引自 S5 訪談 S5-16)

在 Let $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ be a linear transformation 這句話中，S5 能說出線性變換的定義，並能說出這個敘述不能拿掉，如果拿掉會影響到後面 $T(x)$ 拆開的過程，顯示他瞭解在證明的哪個部分會用到線性變換。

R 那為什麼他這邊要講 T 是一個 linear transformation? 那什麼叫 linear transformation?

S5 linear transformation 他要保證兩件事情，第一件事情就是假設 $Ta+Tb=Ta+b$ 另外一件事情是如果他乘以一個係數好了他會等於 r 倍的 Ta 嗯他要保證這兩件事情

R 那你覺得這個敘述，在這邊如果他沒有附註 T 是一個 linear transformation 的話會影響到後面的結果嗎?

S5 我覺得會

R 例如在哪邊的時候會影響到?

S5 你是說在整個在整個證明的過程中哪邊如果它不是一個 linear transformation 會不會影響嗎?

R 對對對對對

S5 我覺得應該是在這邊就是 Tx 因為..

R Tx

S5 對

R 你說最後一行 Tx 那邊?

S5 對

R 是證兩個相等得時候?

S5 證兩個相等的時候因為這邊然後把它拆開來的時候會用到說他是就是用到 linear transformation 這邊的性質

R 才能拆開是不是?

S5 嗯對

(引自 S5 訪談 S5-17)

在 and let A be the $m \times n$ matrix whose j th column vector is $T(\mathbf{e}_j)$, which we denote symbolically as

$$A = \begin{bmatrix} | & | & \cdots & | \\ T(\mathbf{e}_1) & T(\mathbf{e}_2) & \cdots & T(\mathbf{e}_n) \\ | & | & \cdots & | \end{bmatrix}. \quad (2)$$

這段敘述中，S5 能正確解釋句子的含意。

R OK 好然後接下來他說 A be the $m \times n$ matrix 然後一直到後面 as 那你
可以告訴我他在講什麼嘛？

S5 他就是在說 A 是一個 $m \times n$ 的矩陣前面這邊在講這個然後再來他的
第 j 個 column 就是它的第 j 個 column 就是 $T\mathbf{e}_j$ 這個向量就是直接把 $\mathbf{e}_j$ 放
進這個換線性變換之後的向量就是跑出來的那個向量

R 好，那你還想說什麼？

S5 然後它就是可以把他表示成像這樣他就是把前面這件事情把它寫得
更具體化一點就是可以寫成這樣子

R 中間那個圖？

S5 對

(引自 S5 訪談 S5-18)

在 Then $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ for each column vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ 這句話中，S5 能分辨有小
括號的是函數、沒有小括號的是矩陣乘法，知道 $\mathbf{x}$ 用粗體表示它是向量，也知道
此句中的三個 $\mathbf{x}$ 是一樣的。而對於為什麼向量不寫 vector 就好，要寫 column
vector 這件事，S5 在閱讀的過程中曾經思考過，但後來他覺得有沒有加都無所
謂。對於 $\mathbf{x}$ 屬於 $\mathbb{R}^n$ 這件事，S5 也知道因為是要從 n 維送到 m 維，因此原本的
向量一定要是 n 維。

R 那最後他這邊說 Let $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ 我想要問你，這是它說這兩個相等嗎
嘛，那為什麼前面 $T(\mathbf{x})$ 那邊有小括號後面沒有？

S5 哪個小括號？

R 這裡 $T(\mathbf{x})$ 這邊為什麼要有一個小括號，這裡 A 跟 $\mathbf{x}$ 中間沒有小括
號？

S5 因為 $A\mathbf{x}$ 這邊就是矩陣的乘法那然後這邊的話，把 $\mathbf{x}$ 就有點像函..送
進一個函數裡面，對所以是把 $\mathbf{x}$ 這個向量丟進 linear transformation 這個
函數之後結果所以我不會把它寫成，就是不會直接寫 $T\mathbf{x}$ 會把它寫成就是
T 把它寫成以前我會寫的 $f(\mathbf{x})$ 這樣子，就是把 $\mathbf{x}$ 這個東西丟進一個函數對

所以我才要多寫一個括號

R 那 A 那邊可以加括號嗎?

S5 A 這邊把它加括號，我剛才過程中有一個地方不小心加了括號

R 哪裡啊?

S5 被我擦掉了，原本這邊是被我寫 $A(x)$

R 啊後來你為什麼

S5 對因為後來我覺得這樣子好像會混淆掉。就是 A 和一個就是一個 linear transformation 所以我才把它擦掉就是我這樣寫成 Ax 這樣子比較清楚表達說他是一個矩陣乘法，對那我覺得如果把它寫成 Ax 也是無所謂，但就是感覺很就是有點奇怪啊，應該是說這樣 $A(x)$ 會等同於直接寫就在這邊，這塊已經證明完了意思，我 Ax ，假設我定義 Ax 這個東西他就是等於 Ax 我是直接說這個就是一個 linear transformation 的感覺

R 喔

S5 對就是我定義這個函數他就是長這樣子 Ax

R 證明第二行這邊

S5 對，要證明第二行以後寫 Ax 好像也無所謂，你只要知道說他就是一個他的意思就是指說你把這個 x 如果被丟進來這個函數之後然後它會變成 Ax 跑出來

R 好，然後像這個 x 的部分他用粗體表示，你知道為什麼要用粗體表示嗎?

S5 他用粗體表示代表向量

R 那這個他也是你覺得他也是向量的意思

S5 嗯對它也是向量

R 那這裡 $T(x)=Ax$ 這裡有 x 後面也有 x 你認為它們是一樣的 x 嗎?

S5 這邊的 x 他這邊的 x 是不是一樣東西我想一下喔， $T(x)=Ax$ 對於所有的 x 屬於 R ，嗯...要講一樣不一樣感覺很奇怪，反正他這邊的意思就是說反正你所有的只要是 n 維的向量都會符合這件事情，對所以我也不知道到底要叫做一樣還不一樣

R OK 那那為什麼如果是像你說的是所有的向量都進去的話為什麼他不寫 for each vector 就好要寫 column vector?

S5 嗯...其實我也搞不太懂為什麼要加一個 column 就是我在讀這邊的時候有點卡住但是後來想說就是不理那個 column 這個字

R 喔所以你那時候有思考過這件事情

- S5 對有思考過然後我後來就是覺得價不加 column 都無所謂
- R 那你有發現其實這邊有出現過 column vector 嗎?
- S5 嗯有我知道這邊有出現過 column vector，就是我這邊有寫就是第 j 個 column vector
- R OK
- S5 嗯對啊
- R 然後可以看一下，逆這邊是寫 c 什麼啊?
- S5 喔就是 column 我就直接寫 col.就不想把它寫
- R 喔我只看到 cd ，然後這個是 $T(e_j)$ 嗎?
- S5 對
- R OK 好再來像啊這邊為什麼你要寫 T 屬於 $\mathbb{R}^n$
- S5 你說為什麼 x 屬於 $\mathbb{R}^n$ 喔
- R 對啊，為什麼他要說 x 屬於 $\mathbb{R}^n$?
- S5 因為它要是從 n 維送到 m 維啊，所以你這邊原本的東西你一定要是 n 維的向量啊

(引自 S5 訪談 S5-19)

在 Recall that for any matrix A , Ae_j is j th column of A 這句話中，S5 能理解此句的含意，並能舉例說明。

- R 好 ok 那接下來證明的第一行啊，他說 Recall that for any matrix A ， Ae_j is the j th column of A 嗯...這句話在談什麼?為什麼他是對的?
- S5 就是我剛才講這個地方，就是你如果實際下去乘以後，你會發現 Ae_j 確實就是真的是第 j 個 column
- R 因為你剛剛在解釋底下這個部分的時候你是在解釋第二行的 $Ae_j = Te_j$
- S5 嗯對
- R 所以你認為底下這個計算過程他也可以用來解釋第一行?
- S5 對

(引自 S5 訪談 S5-20)

在 and so T and the linear transformation T_A given by $T_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ agree on the standard basis $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ of $\mathbb{R}^n$ 這句話中，S5 認為 $T_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ 是被證明出來的，直到研究者詢問為何會突然出現 TA 這個符號，S5 才重讀敘述，發現 TA

是被定出來的。

R OK 好然後再來那個所以你知道這邊會寫 $TAx=Ax$ 嗎?證明第三行。

S5 他這邊寫 $TAx=Ax$ 就是告訴你說 Ax 就是你把 x 乘上 A 這個矩陣之後確實是一個線性變換所以他特別些說他 TAx 確實是一個線性變換

R 所以他是告訴你確實是就是

S5 對啊就證明出來，嗯?

R 還是你覺得證明他已經證明出來了嗎?在第三行的時候，你的意思是說他已經出來 $TAx=Ax$ 嗎?

S5 嗯對

R 那他是根據什麼原因去證出這件事情?

S5 他因為對於每一個 $j=1\sim n$, $Ae_j=Te_j$ 這樣都會成立，所以他到最後就直接推出來說所以他這個樣子應該是一個就是線性變換

R 好

S5 嗯

R 因為我在想說你那個 TA 突然冒出來的東西嘛?

S5 TA 這邊嗎?

R 對啊 TA 是一個突然冒出來的東西

S5 that given as Tx

R 然後前面都沒有出現 TA

S5 對，linear transformation TA given by $Tx=Ax$ agree on the standard, T a linear transformation TA ，欸對所以這邊好像在定義 $Tx=Ax$ ，就好像這邊是單純定義然後但我覺得他已經有說就是他除了他應該是說它 Ax 確實是一個線性變換，但是我就定義說這個線性變換叫什麼，所以他就叫做 TAx

R 喔所以你現在認為他是定義

S5 欸就是它說它以精確定說它是一個線性變換，但是我想要給他一個符號去表示說表示這個線性變換所以我就把它定義成 $TAx=Ax$ 嗯

R 所以這跟你原本剛剛的想法不一樣，你剛剛是認為他跟你說對所有的 j 然後 $Ae_j=Te_j$ 的話就可以說明，欸其實你剛剛也是說 Ax 也是一個線性變換是不是?

S5 嗯對

R 只是你沒有...

S5 只是這邊就是他新的符號出來，就是它已經說它是一個線性變換，然後指是我在把它給這個線性變換名字而已

R 一個名字

S5 對

R 喔你剛剛是沒有去 care 那個名字就對了是嘛？

S5 剛才有沒有 care 這個名字嗎？就是對啊就是搞不清楚 A TA_x 的時候就是要回來看這個名字所以就是喔他是把它定義叫什麼東西

(引自 S5 訪談 S5-21)

在證明的第三段，S5 能理解定理 2.7，並將原命題的條件代入，證得結論。並能用自己的話整理出來。

S5 然後像這裡面有說看到一些它說喔譬如說它這邊說定...要根據定理 2.7 那我就會先回去翻定理 2.7 的敘述，然後看完它的敘述之後呢我會再回來就是再把我題目現在的東西帶進去這個定理的敘述裡面

R 喔

S5 嗯然後代進去看它是怎麼代的，然後代完之後我的到的結論是什麼，嗯然後像我這次作的過程裡面我一開始只有看到說 $T(v)$ 可以寫成就是 $T(b_1)$ 一直到 $T(b_n)$ 的線性組合 2 但是我少看到一個唯一所以我在就是證到後面說喔所以我們得到什麼樣的結論我看起來就覺得很奇怪，然後我就再回去檢驗說那個這本就是它的定理 2.7 是不是有漏看什麼然後發現我漏看了唯一這件事情

R 所以你一開始在定理 2.7 只看到 $T(v)$ 可以寫成

S5 對就是如果有一個 v 可以把它寫成就是它的 basis 構成了之後那我把它變 $T(v)$ 之後也可以把它寫成 $T(v_1) \sim T(v_n)$ 的線性組合我只看到這樣 對

R 那後來你發現唯一這個詞之後有幫助你什麼東西嗎？

S5 哦...看到有唯一這個詞的時候，因為就是你知道這個線性組合是唯一的，所以最後就是可以說明說為什麼兩個會一樣，如果漏了這個條件之後，它反正可以寫成線性組合你也不知道幹嘛

R 喔是那個唯一是幫助你理解

S5 就是最後

R 原本這個證明題？

S5 對，因為它這邊寫很醜，所以這樣子我們就馬上得 $T(x)=TAx$ ，它沒有再特別給你強調說為什麼，所以就是在這部份看的時候就會有一點點困難

(引自 S5 訪談 S5-05)

對於在白紙上寫上證明的摘要，S5 認為要寫出來有困難，除非有練過兩三遍，但是他可以看著證明，用自己的話整理出來。最後他也確實將證明整理出來。

R 好，那如果現在給你一張白紙你有辦法寫出他的證明嗎？

S5 感覺好像還是有困難喔

R 怎麼說？

S5 就是已經大概讀一讀，但是到後來其實還是會忘記說到底前面做了什麼事情，我通常讀證明如果要默寫的話，至少要是練過大概兩遍到三遍

R 那如果你看著他有辦法整理出你自己的證明嗎？

S5 看著他有辦法整理出你自己的證明，應該還可以

R 還可以那你現在有辦法做到這件事嗎？

S5 可以試試看

R 這邊這個部分，對會不會不夠用

S5 還是我寫背面

R 可以可以

S5 OK

R 你真的沒有門禁喔？

S5 嗯沒有，沒差，只是系館有門禁而已

R 喔系館，我可以帶你下去

S5 嗯，Recall that it shows that equation 2, $Ae_j=Te_j$ ，就是這邊還是要把我所有的過程都直接講出來，還是我自己寫，還是不用講我寫的過程

R 寫的過程跟你想的事情會不一樣嗎？

S5 唉應該會類似只是我想了過程會再多一些雜訊

R 可以啊可以把那些雜訊講出來

S5 嗯 OK，嗯所以說它會 $T=$ 一開始是這樣子，會不會跳太快？想一下喔 $Ae_j=Te_j$...好像跳太快。所以先寫下前面的東西好了...對於所有的 matrixs... Ae_j =第 j 個 column, A 的第 j 個 column 然後再來 let $Ae_j=Te_j$ shows

that so that 下一個事情 $Ae_j = Te_j$ 因為它的下面那個矩陣的表示法，就是他的第 e_j ， e_j 就是寫他第 j 個 column 嘛然後它就會是 Te_j 對，然後再來所以這樣子就可以說 TAx 應該是說我要寫成 Ax 之後它是一個 linear transformation 也因此得，所以我們定義他定義說 TAx 這個符號就代表了 Ax 向量，然後接下來第二部分我的先回顧 theorem 2.7 說如果 b_1 到 b_n 是一個 basis 的話 basis 且 v 可以寫成 c_1b_1 到 c_nb_n 的這個線性組合所以我最後可以得到欸...假設欸... T 欸...接下來我可以說 Tv 這個向量他可以寫成 b_1 這個向量，等下 b_1 加到 b_n ， $Tb_1 \dots b_n$ 欸好所以根據把原題代入 theorem 2.7 已經知道 (75:47~75:52) 所以已經知道了 $b_1 \sim b_n$ 它是一個 basis 而且任意的向量 x ，他都可以寫成 d_1e_1 加到 $d_n e_n$ 的線性組合所以我們可以得到 Tx 他會等於應該要再多寫一個位，且 $e_1 \sim e_n$ 是唯一的所以 $Tx = Tb_1, b_1 Tb_1 \dots b_n Tb_n$ 是唯一的欸且 b_1, b_n 是唯一的 OK 所以既然他是唯一的而且我現在如果把 x 拆開來的話如果 x 隨便一個 Ex 我把它拆成啊!等一下這邊已開始這邊用的是線性組合應該要是 TA ，這邊就要用 Tx 嗎?還是我這邊要用 Tx 啊?嘖 想想看喔 $Tx = Ax$ 欸可以把它拆開來且是唯一的欸然後我們定義又是我這邊任一個向量乘以這樣的矩陣之後第 A 個... $T.Ae_j = Te_j$ 欸定義這個就是他就是寫成反正寫原本的向量可以拆成這樣子嘛，欸是原本的向量 Tx ...欸? $x \dots x$ 向量本來就會有原本的東西假設我就叫他 b_1 ，第 n 個然後送進來這邊之後出來的應該會是經過 Tx 之後然後這東西應該會是 Te_1, Te_1 加上點點點點加上 Ten 。所以又應該要是唯一的所以最後得到 $Tx = TAx$ 欸所以到最後會說 $Tx = Ax$ 得證

R 我可以看一下

S5 欸

R 所以這邊是對所有的 matrix $Ae_j =$

S5 先前面多提一下這件事情然後根據他這邊的表示法直接代回去

R 喔這個變成是中文 $Ae_j = A$ 的第 j 個 column，把中文轉換成數學，這個是 $Ae_j = Te_j$ 好，再來是 Ax 是 linear transformation

S5 對

R 定義

S5 所以我們的定義 TAx 這個東西是等於...

R 喔~~~OK 最後是

S5 先把 Theorem 2.7 若這些條件則怎樣怎樣寫出來所以我們就把它代回去

R 所以這兩行 $b_1 \sim b_n$ 則 Tb_1 這兩行是定理 2.7 的敘述你把它寫出來

S5 對

R 所以他敘述是寫說 $b_1 \sim b_n$ 是一個 basis 而且 v_1 可以寫成 cv_1 到 cv_n

S5 嗯

R 然後則 v 經由 T 送過去之後可以表示成 Tb_1 到 Tb_n ，係數 $d_1 \sim d_n$ 然後特別的是，你還註明 $d_1 \sim d_n$ 是唯一的，這是你認為的敘述

S5 對

R 然後把原題代入，你說原題的意思是說 $e_1 \sim e_n$ 是 basis，喔所以你的意思是其實 $e_1 \sim e_n$ 其實可以替代他然後再來 x 這個向量喔就直接改了

S5 嗯對

R 好再來，再把她送進 T 裡面會得到另外一個係數，那你這邊 d_1 跟 d_n 跟上面的 Tv 是一樣的嗎？在這裡的時候

S5 因為我因為這邊他沒有要特別加符號就就如果原本有就是要有的符號我就把它改掉，譬如說他這邊要的是 $e_1 \sim e_n$ 所以我就會把這邊替換掉然後到這邊他沒有特別講這件事情的時候我就想說反正他是一個代號而已，就是前面跟後面會無關所以就是這個代號在這邊用我也不會去聯想到跟上面的有關係

R 所以你，其實你這個證明的過程你上面的 Tv 裡面的 $d_1 \sim d_n$ ， Tx 裡面的 $d_1 \sim d_n$ 是不一樣的

S5 是不一樣的，就是可以直接把這邊括號起來，這邊就只是一個有點像是思考路徑而已實際上要如果要寫證明的話這怪可以不用寫，只是我理解

R 但是你會寫上去

S5 對。就是看有沒有 open book 啊如果有 open book 的話就是我不可能就是會先寫一下他的前提到底是，但如果不是 open book 的話我就定理直接代就不會寫這塊就直接寫這個

R 不是 open book 喔如果有 open book

S5 就可以查到那個定理到底是講什麼

R 然後你就會把定理

S5 對但是如果沒辦法查只能憑腦中印象的話我就不會在特別去寫出來原本的敘述

R 然後最後這邊 TA 你把 $d_1 \sim d_n$ 代進去然後...那你怎麼連結到 TA $d_1 \sim d_n$ 代進去就會突然變這個？

S5 就是它的

R 你是代這個是不是?

S5 沒有,代這邊。就是我如果這個東西我把它定義成就是 a 跟 x 乘嘛,然後乘完之後應該要長成這樣子

R 你定義 A 跟上面的 A 跟 x 乘是 $d1 \sim dn$

S5 對因為這邊 (84:36) $d1 \sim dn$ 對

R 然後把 $d1 \sim dn$ 代進去,那為什麼 $TAx d1 \sim dn$ 會等價於這個

S5 就是直接拿這個東西跟這個東西跟這個乘啊

R 嗯?你剛剛不是說 $d1 \sim dn$ 是 Ax 的結果

S5 對啊

R 那為什麼你現在又說 $d1 \sim dn$ 就是又拿來跟 A 乘才會得到

S5 就是這邊本來就是要跟 A 乘嗎?我如果在這邊 TAX 我本來就定義他是跟 A 乘啊對啊所以我不是要乘以這個 A 嗎?

R 所以喔

S5 反正定義的這個 A

R 因為你剛剛是說因為我剛剛問你是為什麼這裡是擺 $d1 \sim dn$,你這邊的 $d1 \sim dn$ 有跟這兩塊前面的 $T(V)$ 跟 $T(X)$ 裡面 $d1 \sim dn$ 有一樣嗎?

S5 有一樣嗎?

R 有不同的

S5 我覺得好像是一樣不然這樣子等下應該要說不一樣但是就是還不確定一不一樣是等到後來我才就是根據定理確定

R 目前前三塊的 d 都是不一樣的?

S5 痾...這第一塊 $d1$ 不用理他

R 好第一塊不用理他

S5 對不確定一不一樣是等到根據定理因為它是唯一的所以才確定是一樣的

R ok所以目前目前你寫到這裡的時候這個 $d1 \sim dn$ 跟那個 $T(x)$ 是不一樣對然後代進你 TA 代近來的意思把這個東西跟 A 乘你的意思是這樣好然後證完之後就會變成,那乘完之後為什麼變成 $dxTe1$?

S5 就是直接乘吧

R 就是你直接

S5 直接拿兩個相乘

R 你說這塊直接乘他其實剛好就等於這樣子的結果,乘法結果好,然

後從這裡退到所以勒

S5 因為最後他們可以說它們兩個相等就是它們兩個這兩線性變換相等

對然後我們又定義這個最後就會等於 $Tx=Ax$

(引自 S5 訪談 S5-23)

(二) AH_CHPH 學生：S6

在 $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ 中，S6 能說出 T 這個轉換是把一個在 R_n 裡面的向量，轉換到 R_m 裡面的向量，而 R_n 就是裡面有 n 維的一個空間。S6 自己舉例，例如： R_2 轉換到 R_3 ， $T(x, y) = (2x, 2y, 3y)$ 。也知道 R 表示實數空間，裡面的所有數字都是實數。

R OK，那再來最後啊，就是我想要問一下一些細部的東西，例如說像

$T: R_n \rightarrow R_m$ 然後我問你，你知道什麼叫 $T: R_n \rightarrow R_m$ 嗎？這個符號的意思。

S6 T 這個轉換是把一個在 R_n 裡面的向量轉換到 R_m 裡面的向量。

R 好，那什麼是什麼是 R_n ？什麼是 R_m ？

S6 R_n 就是裡面有 n 維的一個空間。

R 裡面有 n 維的一個空間。

S6 是一個 n 維的空間，嗯。

R 一個 n 維的空間。

S6 當然你要，如果要講簡單就是舉例嘛。

R 好，那你可以舉個例子嗎？

S6 就是從 R_2 轉換到 R_3 嘛， R_2 裡面的某個向量轉換到 R_3 裡面，這邊每個一定會對上一個向量在 R_3 裡面。

R 你可以直接舉一個實例的數字或什麼？

S6 嗯，如果是 $Txy=2x, 2y$ 然後 $3y$ 這樣之類的。

R 這個就是你所謂的 R_2 到 R_3 的一個轉換？

S6 對啊。

R 那為什麼它寫 R ？這個 R 是什麼意思？

S6 因為它在實數空間裡。

R 喔。實數空間。

S6 就是裡面的所有數字都是實數。

(引自 S6 訪談 S6-14)

在 linear transformation 中，S6 認為 linear transformation 是非常基本的概念，能把一個向量打到另一個向量，還有最重要的性質是它能拆開。當 S6 要分享 linear transformation 的定義時，他忘記是八個檢驗法還是四個，跟 vector space 搞混，後來用自己的話說明定義時，除了原始的兩個定義以外，自己還多加了 $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ ，不過基本上，他是懂定義的。

R 那你剛剛有談到 linear transformation，然後你認為 linear transformation 的意思是什麼？

S6 就是線性轉換啊。

R 不是直接翻譯的那種意思，如果有人問你什麼是 linear transformation，你會怎麼跟他解釋？

S6 是在最初嗎？還是看到這個證明的時候？

R 就是現在這個時刻。

S6 他在念這個證明的時刻？那我會覺得你沒救了，你現在怎麼還不知道 linear transformation。

R 那你還是要救他一下啊，不能就這樣。

S6 還是要救他，救他一下，那就是回到課本最前面的，看有沒有什麼能講的講給他聽啊。

R 好，那你可以舉例子嗎？

S6 嗯...

R 有沒有辦法舉例說明什麼是 linear transformation？

S6 linear transformation，其實就是把一個向量打到另外一個向量啊，然後這樣舉例應該就夠了吧？這樣舉例他應該會知道。

R 你說你剛剛寫的 $T(x,y)$ ？

S6 嗯，然後...

R $2x, 2y, 3y$ 。

S6 然後當然他最重要的性質要講就是他能拆開嘛。

R 他能拆開。

S6 對，啊！然後就不是有那個什麼 8 個檢驗法嗎？诶~是嗎？還是 4 個？我有點忘記了，是 4 個吧，8 個 8 個是那個 vectors space 嗎？

R vectors space。

S6 對，8 個是 vectors space，4 個 4 個是 linear transformation，對啊，我一翻就翻...诶~不對我還以為我一翻就翻到了，有這麼前面嗎？有這麼

前面嗎?我記得是 4 個吧應該沒錯吧?

R 哪 4 個?

S6 欸.....

R 你是說你還會去跟他補充有這 4 個東西對不對?啊是哪 4 個東西?

S6 啊就翻到前面看一看，我現在翻不到不知道在哪裡哈哈哈，那是哪一節的?喔~~找到了找到了，是 vectors space 啊，喔~那麼前面啊，喔~第一頁耶，對啊，我應該沒有寫錯，诶?還是，不知道在哪裡耶，我真的不知道在哪裡。

R 但你現在想不起來?

S6 我大該知道他要幹嘛啦，就是...

R 那你就用你的話講一下。

S6 我不知道有沒有辦法講很清楚耶。

R 好。

S6 $Tuv = Tu + Tv$ 。

R $T(u+v) = T(u) + T(v)$ 。

S6 然後第二個應該是...減嗎?還是什麼的?好像是這個吧對不對?

R 你這個是，你這個東西是什麼符號?

S6 就零向量。

R 所以是 $T(\text{零向量}) = \text{零向量}$ 。

S6 對，我有點忘記了誼。是這樣嗎?

R 那第三個是 $T()$?

S6 檢驗 linear transformation (思考)

R 第三個是 $T(rv) = r$ 倍的 $T(v)$ 。

S6 等一下喔我想一下，linear transformation 檢驗，不是檢驗非空，然後，好久好久沒檢驗這個了哈哈哈哈哈，好久沒檢驗了，是什麼?檢驗非空然後，對任意一個，喔對啦，我記得好像可以濃縮成什麼 $au + bv = a$ 倍的 Tu ，這是 u 寫錯了，加 b 倍的 Tv 。

R $T(au + bv)$ 。

S6 這是...應該想這是第二個，第一個是 $T(0)$ 會得到 0，這兩個應該就夠了。

R $T(0)$ 。

S6 $T(0) = 0$ 。

R 然後第二個是 $T(au + bv) =$

S6 等於 $aT(u)+bT(v)$

R ok

S6 這兩個就夠了嗎?

R 你剛剛為什麼要檢驗這兩個?

S6 你說我為什麼要檢驗這兩個喔?

R 對對對。

S6 啊，就是 linear transformation 的定義啊。

R OK，所以你認為這兩個是 linear transformation 的定義你會特別再告訴他?

S6 這就是檢驗是不是 linear transformation 的條件嘛，那當然他就是他就等價於 T 是 linear transformation，對啊。

(引自 S6 訪談 S6-15)

在 and let A be the $m \times n$ matrix whose j th column vector is $T(\mathbf{e}_j)$, which we denote symbolically as

$$A = \begin{bmatrix} | & | & \cdots & | \\ T(\mathbf{e}_1) & T(\mathbf{e}_2) & \cdots & T(\mathbf{e}_n) \\ | & | & \cdots & | \end{bmatrix}. \quad (2)$$

這段敘述中，S6 能正確解釋句子的含意。

R 那我們繼續。好，那你可以告訴我第二句話: A be the $m \times n$ matrix is 一直到 as 這邊嗎?這段話在講什麼?

S6 他在 let A 啊，然後是一個 m by n 嘛，然後第 j 行，嗯，這是第 j 啊然後行是長這樣阿，意思啊長這樣然後 denote 這樣。

(引自 S6 訪談 S6-16)

在 Then $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ for each column vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ 這句話中，S6 知道有小括號的是函數、沒有小括號的是矩陣乘法，沒有注意過 $\mathbf{x}$ 用粗體，但猜測它是向量。S6 認為定理之所以說 $\mathbf{x}$ 屬於 $\mathbb{R}^n$ 是因為他現在只想討論在 $\mathbb{R}^n$ 裡面會對，或許有可能以後在 $\mathbb{C}^n$ 裡面會對。S6 知道此句中的三個 $\mathbf{x}$ 是一樣的。而對於為什麼向量不寫 vector 就好，要寫 column vector 這件事，S6 認為那是因為這邊的 $\mathbf{x}$ 要擺直的，如果擺橫的會有問題，可惜研究者沒問他會有什麼問題。

R 把 A 寫成這個樣子，好，那最後一行啊，我問你為什麼 $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ ，

T(x)那邊有小括號但是後面沒有?

S6 這是一個 linear transformation。

R 你說有小括號是 linear transformation?

S6 你有寫 T 啊, T 就是一個 linear transformation, 他是一個函數嘛, 函數就要這樣啊。

R 函數就要有一個括號?

S6 對啊, 你要講說你要代入什麼啊, 所以你要用括號, 然後後面是矩陣相乘啊, 是 A 矩陣乘 x, 對。

R 好, 那這裡的 x, 包括這邊的 c 啊他都他是粗體了嘛, 那你知道為什麼他是特別粗體嗎?

S6 我倒是沒有注意過這邊。

R 喔, 你沒有發現?

S6 沒有注意啦, 對, 嗯。

R 那現在問你的話你會知道為什麼他特別要是粗體嗎?

S6 應該是因為它是向量吧, 我猜測。

R 你猜測, 好, 那後面啊, 他這邊 x 屬於 R^n 。 R^n , 為什麼他要去說 x 屬於 R^n ?

S6 你要...因為你要講定說因為這個定理只限制在 x 在 R^n 裡面的時候。

R 為什麼要限制在 R^n ?

S6 因為如果不在 R^n 裡面有可能他會錯, 或者是我們這邊只強調他在 R^n 的時候有可能說以後以後在 C^n 裡面會成立, 但是我們先暫時不討論這部分, 有可能是我們證明能力還不足。

R 所以你認為在這個定理裡面他現在只是想要討論在 R^n 裡面都會對?

S6 嗯。

R 好, 那這個這個 x 屬於 R 的 x 跟前面的 T(x)跟 Ax 的 x 是一樣的嗎?

S6 該怎麼講, 嗯, 就是我在閱讀的時候是這樣:就是對於我隨便找一個 x 在 R 裡面, 那麼這個 x 代進來這兩個就會正確。

R 好, 那你剛剛有談到粗體的 x 應該是向量的意思嘛, 那為什麼這邊是寫 for each column vector 不寫 each vector 就好了?

S6 因為它這邊 x 要擺直的, 他擺橫的會有問題。

R 所以你認為他強調 column 是因為擺橫的有問題?

S6 嗯。

R 啊, 你剛剛在閱讀的時候其實也有注意到這件事嗎?還是我問你才回

答我這個問題?

S6 嗯...看到的時候就過去了，因為我自然會把他擺成直的。

(引自 S6 訪談 S6-17)

在 Recall that for any matrix A , $A\mathbf{e}_j$ is j th column of A 這句話中，S6 能理解此句的含意，怎麼從第一句推到第二句。

R OK。然後接下來證明的第一行 Recall that for any matrix，然後推得 $A\mathbf{e}_j$ is j th column of A ，那我可以問你第一句是怎麼做推論的嗎?就是為什麼他說了第一句就會得到第二句?

S6 那你 $A\mathbf{e}_j$ 那你代回來啊，就等於 $T\mathbf{e}_j$ 嘛，阿不就是 $T\mathbf{e}_j$ 嗎?

R 就回到上面那個。

S6 對啊。

(引自 S6 訪談 S6-18)

在 This shows at once that if A is the matrix described in Eq. (2), then $A\mathbf{e}_j = T(\mathbf{e}_j)$ 這句話中，S6 一開始覺得很簡單，就是定理敘述的最後一行 $T(\mathbf{x})=A\mathbf{x}$ ，但當研究者跟他確認他的想法時，他又突然覺得自己的解釋似乎不對，不能拿我們要證明的結果來做推論。在經過一番思考以後，S6 正確說明原因，並分析自己剛剛會弄錯，應該是因為已經懂了定理的結論，不自覺就會快速聯想到結論。

R 矩陣 A 矩陣，好 OK，接下來第二行他說 this show at once，然後一直到這邊 $A\mathbf{e}_j = T\mathbf{e}_j$ 這邊，你可以告訴我為什麼他這邊寫 $A\mathbf{e}_j = T\mathbf{e}_j$ 嗎?證明的第二行。

S6 就這邊啊(指)。

R 一樣是定理敘述的最後一行 $T(\mathbf{x})=A\mathbf{x}$ 。

S6 欸等一下喔，等我一下，對我這樣跟你解釋可以嗎?嗯...喔不對不應該從這邊，因為是結果，應該從這邊。

R 從那裏 $T(\mathbf{x})$ 。

S6 對從這邊開始。

R 你說敘述的第二行。

S6 對對對對對

R A 矩陣。

S6 嗯，喔~~可是是 recall 啊。

- R 所以 recall 代表什麼?
- S6 recall 是你之前學的啊，嗯。
- R 你現在不是在讀第二行嗎?
- S6 喔，沒有，我是在講剛剛。
- R 剛剛，喔，所以，欸~所以我剛剛在問你證明的第二行 Ae_j 為什麼等於 Te_j 的時候，讓你去反思剛剛第一行你對我的回答 o 不 ok 是不是?
- S6 對。
- R 然後經過你的檢驗...
- S6 發現怪怪的。
- R 怪怪的。
- S6 對。
- R 所以你現在還是覺得怪怪的嗎?
- S6 就不能從這邊啊，那就是結論啊，我們現在要推結論。
- R 所以你的意思是說第二行不能從結論那邊。
- S6 對。
- R 那第一行勒?剛剛。
- S6 第一行就從這邊啊。
- R 第一行就從敘述的 Te_j 。
- S6 沒有沒有，第一行是 recall 啊。
- R 所以你剛剛看到 recall 了。
- S6 第一行是 recall，原本就有看到，只是你剛剛在重新問我的時候我直接看到這邊了。
- R 你直接看了敘述的結論。
- S6 那是一個就是，因為我們已經看懂了這個東西，所以你就會很快速的聯想到這邊，然後就會是有問題。
- R OK，好，所以你剛剛說第二行 $Ae_j=Te_j$ 的原因是?
- S6 他講這個是 A 的第 j 行。
- R 你說 Ae_j 是 A 的第 j 行。
- S6 對然後 A 的第 j 行就是 Te_j ，由一開始我們令的。
- R 由一開始我們敘述令的 A 矩陣的樣子。
- S6 對。

(引自 S6 訪談 S6-19)

不過 S6 能正確舉例說明為何 $A\mathbf{e}_j = T(\mathbf{e}_j)$ 。

R 好，那你有沒有辦法對 $A\mathbf{e}_j = T\mathbf{e}_j$ 這個等式舉個例子來說明？

S6 $A\mathbf{e}_j = T\mathbf{e}_j$ 。

R 因為你剛剛是帶我回去看定理敘述，就你覺得很簡單嘛，那如果有人如果看不懂這種註記的方式的話你有沒有辦法舉一個實體數字的例子給他

S6 好，那就這樣吧，123456789 這是我從左邊開始嘛，然後如果我是 $\mathbf{e}_2$ 的話就是 010 嘛，那麼就去乘乘看啊，乘出來就會發現他是第二行了吧。

R Ok，所以你就用這個例子跟他解釋。

S6 對。

(引自 S6 訪談 S6-22)

在 and so T and the linear transformation T_A given by $T_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ agree on the standard basis $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ of $\mathbb{R}^n$ 這句話中，研究者認為 S6 解釋的不是很清楚，他說 $T_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ 會對，是因為把 $\mathbf{e}_1$ 、 $\mathbf{e}_2$ 到 $\mathbf{e}_n$ 代進去左右兩式都會符合，但事實上 T_A 是被定義出來的。當研究者詢問為何會突然出現 T_A 這個符號時，S6 認為這只是一種註記方式，但是他從來沒見過。

R 好，那接下來下面這句呢？你可以告訴我他為什麼做這樣子的說明嗎？and so T 這邊。

S6 and so T and the linear transformation T_A given by $T_A\mathbf{x} = A\mathbf{x}$ agree on the standard basis 就是這個情況。

R $T_A\mathbf{x} = A\mathbf{x}$ 。

S6 符合，把這些東西代進去都會符合。

R 你說把 $\mathbf{e}_1$ 、 $\mathbf{e}_2$ 到 $\mathbf{e}_n$ 代進去 $T_A\mathbf{x} = A\mathbf{x}$ 都會符合。

S6 對。

R 你認為證明的第二段後面這行是在講這個意思？那為什麼會出現一個 T_A 啊？

S6 嗯...只是一個註記而已吧，就是...

R 因為前面剛剛好像都沒有出現 T_A 。

S6 其實我好像沒印象有這個註記耶，嗯沒用過。

R 嗯。

S6 老師好像不會這樣寫吧？

R 好那你認為是一個什麼樣的註記?

S6 就是他是代表 A 啊。

R 代表 A，TA 是一個代表 A 的註記。

S6 就是一個代表一個 T 裡面是表示 A，就他的 standard marixs 是 A 的註記。

R 什麼叫 T 的 standard marixs 註記是 A?

S6 嗯，就是 T 的 standard marixs 是 A 嘛，那我們就註記 A 在下，底下這樣。

R OKOK，好。

S6 其實好像沒寫過這樣的東西耶。

(引自 S6 訪談 S6-20)

在證明的第三段，S6 認為定理 2.7 一定是對的，只要看 Cor 有沒有符合定理 2.7 的條件即可，由訪談過程中可知，S6 理解證明的邏輯，但是細節可能沒有太注意。

R OK，好，那最後勒 by theorem2.7。

S6 那就是有定理 2.7 嘛，然後知道他都對了啊那麼...

R 知道誰都對了?

S6 對於他的 basis 都對了。

R 對於他第二行談的 basis $e_1 \sim e_n$ 都對了。

S6 這句話對於 basis 都對了。

R 你說 $TA(x)=Ax$ 對於 $e_1 \sim e_n$ 都對了。

S6 對。

R 你覺得 2.7。

S6 然後你就要看到 2.7 的條件有沒有符合 2.7 的條件，然後如果符合的話那麼就會得到這件事。

R 就會得到 $T(x)=TA(x)$ 。

S6 對嗯，嗯對。

R 然後最後....你有看到最後嗎?

S6 有啊我有看到這邊啊，我怎麼覺得對這個註記沒什麼印象，我們那時候有寫這個嗎?

R 你的意思是說在你學習的過程中沒有看過這個註記?

S6 沒什麼印象。

R TA 這個。

S6 這是哪裡的啊?是這個嗎?2.3 嘛?是不是沒寫啊?你是不是沒這樣寫?還是可能沒有這樣寫?2.3，是定理 2.7 這個嗎?老師可能不是這樣證的吧，為什麼老師是證 R_n 到 R_n 啊?老師好像是證 R_n 到 R_n 。嗯，他沒有用到這個。

R 你說定理 2.7 喔?

S6 嗯，對所以他們有用這個註記，所以我對那個註記沒印象。

(引自 S6 訪談 S6-21)

S6 能在白紙上寫出證明的摘要，並對一些他認為原本定理不夠嚴謹的地方加上敘述。在訪談過程中，有談到對於 $T(e1)$ 、 $T(e2)$ 、 $T(en)$ 上下需不需要畫一槓的問題，S6 的程式設計老師曾經說過現在大家都不會這樣畫，所以他自己也不知道這樣的表示法是不是正式的寫法。

R 好，那最後啊，就是你有沒有辦法，因為你剛剛有談到說其實你會帶同學去讀懂他的話就是教他把證明轉成數學語言，那你有沒有辦法就是在那個用一張白紙寫下這個證明的摘要或者是你認為怎麼樣寫是你比較能是比較能理解的數學語言?就如果你用白紙寫下他的證明的話你有沒有辦法自己再統整一次?

S6 嗯，這前面有定義嗎?recall?好像沒有，recall 前面的定理嗎?我不知道耶這前面有沒有定理啊?我不知道這前面有沒有定理耶， $A_{ej}=A$ 的第 j 行，這有沒有定理啊?我不知道這有沒有定理耶，這個找可能又要一段時間了，應該在很前面喔，可不可以直接寫啊?

R 你可以寫啊，可以直接寫啊。

S6 直接寫，嗯，由前面。

R 好，那你寫。

S6 這邊寫:由前面知道對於所有的 A is a matrix, $A_{ej}=A$ 的第 j 行，就看他英文好不好啊，他如果 column 好，我就直接寫 column。

R 那可不可以說你就是假想你現在如果期末考遇到這個證明，你會寫得讓助教能給你分，你會怎麼寫?

S6 所以就是任何英文他都會看得懂嗎?就是助教任何的英文都會看得懂。

R 對所以...

S6 因為助教一定看得懂啊。

R 好，那你就，所以你的意思是說你怕寫看不懂？

S6 我怕我寫的他看不懂。

R OK，你就以你現在要寫一個這個定理的證明然後給助教看，給他批閱然後讓助教可以讓你得到滿分，那你會怎麼寫？

S6 那麼，所以，所以，嗯.....其實應該要，我覺得這個定理有，有一點不夠嚴謹

R 怎麼說？

S6 前面應該寫對於任意的 j ，他只寫一個 j 。

R 你說哪邊前面應該要補？

S6 這邊啊。(指)

R 你說 recall...

S6 or any matrix A 。

R 證明第一行 for any matrix A 。

S6 然後你還要再寫對於所有的 j 。

R 對於所有的 j 才能說 Ae_j 是？

S6 我覺得這樣會比較好啦。

R 好，那你就寫出你認為比較好的。

S6 那我可能會在後面寫一個對於所有的 j ，然後看一下範圍，可以不要寫範圍嗎？我懶得寫，範圍是多少？是 N 嗎？如果要寫的很詳盡嗎？還是寫會得分就好？

R 會得分啊，會得分。

S6 這樣應該會得分啊哈哈，我寫這樣應該會得分吧？他不給我分我也無法了，我覺得他會，我個人是這樣啊，我覺得他，我覺得會得分的我就寫這樣，然後如果最後沒得分那我就認了

R 喔。

S6 對，就是像是我之前在證那個微積分，欸不對，也是線代有一個東西助教認為要證，我認為應該是 trivial 的，那他要扣我分，我真的無話可說，對這是認知上的問題，對啊，這也是...

R 那你也蠻 nice 的耶，不會去跟他搶。

S6 沒有啊，他就他就統一統一這樣改，他每個人都有扣那我沒意見啊，我不能我不，公平的嘛，不是說他有扣我然後沒扣別人，如果是這樣我可

能就會跟他 argue，對啊。

R 所以你可能知道原來他有這樣的要求，你以後就做到這樣。

S6 以後不會再遇到他，哈哈，除非我有念研究所。

R 好好好。

S6 唉...所以 A，我用我們我們我不用提 A，喔，因為...

R 你就用一個你覺得比較好理解的方式來去寫出這個證明就可以了，因為有時候他寫，像你剛剛就會覺得他寫得不夠嚴謹嘛，你就怎麼寫...

S6 沒有主要是個我沒有遇過這個。

R 那你可以不用寫沒關係，你用你覺得比較好的方式來寫。

S6 嗯，那這邊或可寫可不寫啦我覺得，我可寫可不寫就括號起來，欸我那天在上程設的時候，那個黃春明老師跟我講說這個他們好像都不畫耶，可是我們的習慣裡面都會畫。

R 你說一槓嗎？

S6 對。

R 你說 Tej 上下會畫一槓嗎？

S6 這我就覺得到底哪一邊才是對的我也不知道。

R 啊為什麼會講到這個？

S6 他在他在上課的時候就他需要啊。

R 所以你的意思是說他上課的時候他要寫矩陣，然後...

S6 他好像是叫同學上去寫一次他的數學邏輯然後同學畫，然後他說他像是說那個現在都不畫還怎樣的，他說就寫這樣人家就知道了。

R 好，那你可以告訴我一槓是什麼意思嗎？

S6 就是把它擺成橫向量啊。

R 好，然後它們是不會寫一槓只要寫一個括號然後 Tej 那些？

S6 對，他意思是說寫這樣大家都知道，那我不知道哪個比較正確。

R 啊你覺得這樣寫有沒有差異？

S6 寫寫...畫比較大家比較容易懂但是我不知道是不是正式的寫法。

(引自 S6 訪談 S6-23)

R 好，你繼續。

S6 等下你跟我講這個我也想知道，對嘛，然後然後就所以對於這個要怎麼翻就翻起來，就這樣寫吧，然後再來就是定理 2.7 的條件嘛，定理 2.7 是用 TA 嗎？定理 2.7 在哪裡？是用 TA 嗎？他也沒有用 TA 啊對不對？所以就 $Tx=Ax$ ， x 屬於 R ，嗯寫完了。

R 好，我看一下，由前面知，對所有的 A is a matrix column 對所有的 j ，所以 $Ae_j = Te_j$ ，喔，你還特別附註因為？

S6 這可寫可不寫啦。

R 好，那對所有的 k $1 \sim n$ 這是什麼？

S6 Aek 。

R 喔， $Aek = Tek$ 。

S6 只是想要表達這個翻成數學式不好翻，因為他用英文，就是因為英文寫這樣嚴不嚴謹耶。

R 像你剛剛翻譯過來的對所有 k $1 \sim n$ $Aek =$

S6 我只是要講說這邊每個 e 代進去都正確，我只要想要表達這件事而已，這樣講的跟寫的有時候不能一樣啊~哈哈

R 對，所以我才想說請你把他....

S6 我剛剛原本也是想要寫對於 e_1 ，但其實現在表達起來也怪怪的啊，我後面要寫變成 Aek 就在一樣，再寫這句話然後我還要寫對於所有的 k 。

R 所以這裡是一個結論嘛，還是說這是一個前提？

S6 嗯...小結論。

R 小結論是從哪裡得到的結論？

S6 從這邊。(指)

R 從 $Ae_j = Te_j$ 得到的小結論。

S6 對。

R 好。

S6 應該再補一個所以啦，唉喔不用啦，上面就所以了，那不用，可能會寫這樣吧。

R 一個箭頭。

S6 嗯。

R 好，最後因為 $e_1, e_2, \dots, e_n$ is a basis。

S6 還有這件事嗎？如果還要再寫精準一點的話就是要再把它抄一次，但通常懶得抄嘛，因為你就在上面而已。

R 所以 is a basis 你然後而且...

S6 還要再寫一個 n 。

R in R^n ，然後而且對所有的 k $1 \sim n$ ， $Aek = Tek$ ，再來就是 by 定理 2.7。

S6 我忘記 2.7 在幹嘛，2.7 的條件是這樣嗎？對嗎？

R 為什麼你會說你忘記你剛剛不是沒有看嗎？

S6 我剛剛沒看到他啊，我是看這邊啊，我看這邊大概可以知道他要用這個條件嘛，他不用在條件就不用寫了啊。

R 好。

S6 對啊，然後驗證我的猜測是正確的哈哈，對啊，它說 b 是一個 basis 啊，對啊，然後對嘛。

R 他說了什麼？ b 是一個 basis。

S6 對於所有的 V 阿，然後他可以單獨被拆成這些組合啊。

R 拆成 Tb_1 、 Tb_2 到 Tb_n 的組合， TV 可以拆成那些組合。

S6 嗯。

R 那這跟我們要證明 $T(x)=Ax$ 有什麼關係？

S6 我想一下喔。所以我要詳細看一下這邊的內容。

R 所以你突然又覺得這個推論...

S6 沒有因為我剛剛我在想我在想的可能跟要在會有點...

R 出入？

S6 對，對啊表達啊，表達式啊那什麼？唯一的表達式啊，對啊他的組合啊，然後所以 x 就可以用他組合啊，嗯， x 可以用這個組合。

R 表示成 e_1 、 e_2 到 e_n 的組合然後呢？

S6 然後就就怎樣。

R 所以你覺得要不要加些什麼讓這個更完整？

S6 可是課本這裡就這樣而已啊哈哈。

R 所以我才問你有沒有更好的方式可以寫得更好理解，你覺得他這樣寫很好理解嗎？

S6 沒有對沒有，所以我說課本就是這樣啊，這就是我們現在的課本有時候的缺漏啊，就是會有時候會漏一點不嚴謹啊或者是寫得好像很 trivial，但其實沒有很 trivial。

R 對。所以你現在覺得這個 trivial 嗎？

S6 如果照他這樣寫沒有很 trivial。

R 那補上那些東西會比較 trivial？

S6 補上那些東西會比較 trivial 喔？

R 應該說你覺得他不 trivial，那你覺得補上那些東西會比較好？

S6 可能這邊會寫：所以對於所有的 x 屬於 R^n 那麼要寫英文嗎？嗯....等一下喔。

R 你現在在想什麼？

S6 我現在在想定理內容要怎麼套進來這邊。

R 喔，定理 2.7 的內容是不是？

S6 對，條件是 b 是一個 basis 對於任意的 v 在 R 裡面，所以我要寫對於任意的 x 在 R^n 裡面 Tx 可以唯一地，地可以這樣寫嗎？我也不知道，表成 Tx =這樣寫符合他的結論嗎？應該算符合吧？嗯。

R 然後呢？

S6 然後呢，我要證 $Tx=Ax$ ，然後這個前提啊，嗯...喔要怎麼寫啊！嗯...2.7 是不是還有用到前面定理？它不把它當定理。

R 它不把誰當定理？

S6 不把當定理啊，就是 x 可以表成 $a_1e_1+a_2e_2+....a_n e_n$ 。

R 喔，你說 x 可以表成 $a_1e_1+a_2e_2$ 。

S6 他沒有把他當定理啊，可是其實還是有引用到這個啊，就是你前面條件是 $x=a_1e_1+a_2e_2+....a_n e_n$ 那麼才會得到這件事情。

R 好好再來。

S6 對啊，然後這個就剛好會等於 $Te_1+Te_2+....Te_n$ 乘以 $a_1、a_2$ 一直到 a_n 這剛好是 x ，嗯。

R 所以這樣就證完了？

S6 嗯。

R 好。

S6 這要寫啊，這應該要寫啊。

R 應該要寫一下 $x=a_1e_1+a_2e_2+....a_n e_n$ 這樣。

S6 嗯，因為你不寫你不知道這個等於它。

R 你說不知道喔？你說不知道 $a_1e_1、a_2e_2、....a_n e_n=x$ 。

S6 對。

R 那為什麼 $a_1e_1、a_2e_2、....a_n e_n=x$ ？

S6 你要再寫進一步的話，這邊就是要寫成 a_1e_1 啊，就一樣再把它套過來，然後再讓它等於也是可以，就先寫這個，然後再寫它是 x 然後它是 A ，這個乘以這個然後等於這個乘以 X 。

R 這個 A 你已經把他轉換成 a ，然後寫然後乘這個。

S6 對，這要括號。

R 這是小括號還是中括號？

S6 他用小括號就可以了，你要用中括號我也沒意見啦，因為 e 已經是矩陣了啊，我不需要再這樣吧？

- R 它是一個怎麼樣的矩陣。
- S6 e_1 已經是一個矩陣了啊，已經是這樣啦， e_2 就是這樣。
- R 好。
- S6 對啊。它是矩陣他不需要括號啊。
- R 好，你覺得這樣子就完整了？
- S6 應該吧。
- R 就是把 $x, \dots$
- S6 有時候在看一次會漏會覺得可以再加點東西。
- R 所以 by 定理 2.7 這邊。你是會加在哪裡？by 定理 2.7 會補下面這邊嗎？還是會穿插在哪裡？
- S6 在這裡啊，對啊，by 定理 2.7。
- R by 定理 2.7，然後你就會接下面這個？然後推論到最後。
- S6 我覺得這樣寫有點小怪。
- R 怎麼說？為什麼哪裡怪？
- S6 因為它沒有整個直接套他啊，主要是這個定理，這個定理他沒有講說，我覺得這個定理應該要寫成就是說。
- R 你說定理 2.7
- S6 對，他應該是寫條件就要給 $V=$ ，欸...對於所有的 $V=a_1b_1+a_2b_2$ ，那麼 TV 可以獨立表成表成 a_1Tb_1 ，聽得懂我在幹嘛嗎？
- R 就是直接把這個形式寫出來。
- S6 更完全的讓學習的人知道說你要表達的是這個整個事情，這是另外這是 2.7 的。
- R 嗯，啊你看 2.7 的時候有沒有看到證明？
- S6 我知道他要怎麼證。
- R 你覺得敘述只是要加這個？
- S6 對，這是我後來翻過來看到這邊這個啊：the coefficient are 這個。
- R 因為你剛剛說應該要補一下 $V=a_1b_1+a_2b_2$ 。
- S6 他是有說他可以他可以表成這個的那個和啊，係數就是線性和嘛。
- R 他用文字敘述。
- S6 對，他用文字敘述，但他又沒有講更深一層的關係是如果 V 是 $a_1 \sim a_n$ ， TV 也會變成 $a_1 \sim a_n$ 的關係。
- R 所以你沒有發現其實證明裡面有出現嗎？
- S6 但是重點是你定理沒出現啊！。

R 所以你覺得現在…

S6 我應用不會看證明啊。

R 喔。

S6 應用的時候一定是看定理啊。

R 所以你認為他沒有寫在那邊會讓你…?

S6 他沒有寫在…

R 你也想到。

S6 不是，就是我現在是證明裡面套定理，那你套定理你就要完全接得上，就是條件就是條件，結論就是結論，但我現在要的結論是這邊啊，然後我還要把後面的這個轉成 x 啊。

R 所以你要的結論 $T(x)=A1Te1$ 一直到 $AnTen$ 嘛，但他沒有寫出來?

S6 但他沒有寫出來這個等於 x ，對。

R OK 好，因為像有些人的習慣他看了敘述之後他還是無法理解，他去看證明，然後他就會發現喔。

S6 也可，浪費時間這定理沒寫好就浪費時間。

(引自 S6 訪談 S6-24)

(三) AH_CHPL 學生：S1

在 $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ 此符號中，S1 對其理解只停留在表層理解：

R 好，那接下來它說 T 是從 R_n 到 R_m ，妳知道什麼叫 R_n 到 R_m 嗎?

T 是什麼東西?

S1 就自己是把它理解是個數。

R n 跟 m 是個數，那為什麼這邊要寫 R ?

S1 就我們是在討論實數的部分，不考慮有 i 的情況。

R 那妳認為 T 是什麼? 這個英文字母代表什麼? 它含有什麼概念?

S1 恩，啊不就是這個嗎? 不就是線性變換嗎?

R 妳覺得是線性變換啊，那妳知道什麼是線性變換嗎?

S1 是一種轉換的過程，它是 $linear$ ，就是它是 1-1 的感覺，因為它線性，就感覺不會是一個值出來會對到 b 跟 c (畫圖中)，大概長這樣，一個對一個。

(引自 S1 訪談 S1-14)

當研究者詢問 S1「它說 T 是從 R_n 到 R_m ，妳知道什麼叫 R_n 到 R_m 嗎？ T 是什麼東西？」時，S1 只回答 n 和 m 指的是個數，沒有談到 T 和 R ，當研究者追問「為什麼這邊要寫 R 」，才說出我們在討論實數。而對於 T 這個符號，S1 認為是線性變換的意思，S1 認為線性變換是一種轉換的過程，是 linear、1-1 的感覺，這裡顯示 S1 不清楚線性變換的定義，只是單純在描述什麼叫函數。後來，研究者請 S1 舉例說明什麼是 linear transformation 時，沒想到 S1 舉的例子變成去解釋 Cor 這個命題的含意，且用了旋轉矩陣來說明：

R 那妳剛剛說 linear transformation 妳認為它是一個變換的概念，然後因為我聽起來也好像有點抽象，妳有沒有辦法舉個例子告訴我什麼是 linear transformation？因為妳好像知道它是什麼？但萬一妳現在有人不懂問妳說：到底什麼是，妳可不可以舉一個例子告訴我？妳有沒有辦法舉個例子？現在這邊。

S1 就感覺像是旋轉矩陣好了。

R 好，妳說。

S1 旋轉矩陣之前就知道 $\cos \theta$ 、 $\sin \theta$ 、 $-\sin \theta$ 、 $\cos \theta$ (謄寫)，這個是旋轉矩陣的公式，所以我們從 $(1,0)$ 旋轉，假設 θ 是 45 度，多少，是 $1/4\pi$ ，他就會轉到這邊，就是會變到這裡，這是我們就是要求 $(1,0)$ 變換的點是多少，所以我們就會寫成這個在乘上 $(1,0)$ ，然後如果要用線性變換做表示的

話，就會直接寫成 $T \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ，這個就會等於 $(\sqrt{1/2}, \sqrt{1/2})$ ，所以這個點

就會是 $(\sqrt{1/2}, \sqrt{1/2})$ ，恩，所以如果把它寫成一個線性變換的話，就一樣會等於這樣子，然後所以這個 T 其實他就是代表著這個矩陣，這個矩陣如果用前面的表示法，它就其實就是 A ，就是這個 A 矩陣就是長這樣，然後因為我們不想要寫，可能每次你要計算很多個點的變換，每次都要寫 $\cos \theta$ 、 $\sin \theta$ 什麼的，這樣有點麻煩，所以我們就會直接用一個 T 去表示它。

R 所以妳就會跟它說這其實就是個線性變換？

S1 對。

(引自 S1 訪談 S1-23)

本來 S1 用旋轉矩陣解釋的不錯，可惜最後解釋錯了，因為 Cor 主要是在談，為何能把 T 這個函數表示成 A 。他誤以為 T 代表的是 A 矩陣，去解釋了 Ax 之

所以寫成 $T(x)$ 的原因。

在 let A be the $m \times n$ matrix 此句中，S1 理解 A 這個符號表示矩陣，且之所以形容 m by n 是因為 A 不一定是一個 square matrix：

R 那妳知道 A 是什麼嗎？

S1 A 是一個矩陣，嗎？

R A 是一個矩陣，然後呢？

S1 A 是個 m by n 的。

R m by n ，什麼是 m by n ？

S1 就是它有可能它的列跟行是，它不一定會是一個 square matrix。

R square matrix？妳是說它寫 m 乘 n 是因為它不一定是一個 square matrix。

S1 就是它可以是也可以不是。

R 它可以是也可以不是，那妳自己知道 square matrix 是什麼？

S1 我知道，只是我現在忘記，我不知道它的中文翻譯是。

R 沒關係，繼續。

S1 然後就變成是它 A 是比較廣泛的，因為有寫定理是適用在 n by n ，就所以說它不一定是這樣。

(引自 S1 訪談 S1-15)

當研究者請 S1 解釋 square matrix 是什麼意思時，S1 忘記中文翻譯，不過研究者經由與 S1 的對談過程中判斷 S1 知道其含意，可惜的是，當時其實可以請他舉例說明。

在 let A be the $m \times n$ matrix whose j th column vector is $T(e_j)$ 這敘述中，S1 理解 j th column vector 是在描述矩陣裡第 j 行那一行的向量：

R 可以是也可以不是，好，那什麼叫 j th column vector？

S1 就是這個矩陣裡面的第 j 行的那一行的向量。

(引自 S1 訪談 S1-16)

R 那妳知道什麼是 $T(e_j)$ 嗎？

S1 $T(e_j)$ ？

R 就應該是說，我想要問，就是：let A be a $m \times n$ matrix whose j th column is $T(e_j)$ 這一句在描述什麼？我現在只是想要更仔細的確認每一句妳是不

是知道它在說什麼？妳只要把妳認知的告訴我就可以了。

S1 就是感覺它已經先用 T 去做變換了，然後把這個值當成它成一個 column vector 這樣。

R 把整個值當成一個，把 $T(e_j)$ 這個值當成一個，誰的 column？

S1 就 A 的第 j 行的那個 column。

(引自 S1 訪談 S1-17)

他認為這句話是在描述 e_j 用 T 去做變換，然後把 $T(e_j)$ 這個值當成 A 矩陣第 j 行的那個 column vector。

在 $T(x) = Ax$ 中，S1 知道 A 表示矩陣，認為 $T(x)$ 有點像是以前學的函數，不確定是不是函數，但覺得有點像以前學函數那樣，把一個值丟進去，他就會變換到另一個值：

R OK 然後我問妳喔，妳知道為什麼這邊寫 $T(x) = Ax$ ？為什麼 A 這邊沒括號， T 那邊有括號？

S1 因為 A 本身是假設它是一個矩陣， T 感覺是一個，有點像是一個，因為我覺得線性變換有點抽象，它不是個實體的東西，它是一個就類似一個敘述，我們又要把它寫成一個數學的形式，所以我們把它寫成 $T(x)$ ，就有點像是一個函數的感覺。

R 妳覺得它有點像是 $f(x)$ ，一個函數的樣子。

S1 對，因為現在它這個 T 的名子是 linear transformation，所以就把這個 function f 改成 T 。

R 恩，所以妳覺得 T 是個函數嗎？還是其實只是長得有點像而已。

S1 不確定是不是函數耶。

R 不確定，但有點像。

S1 有點像以前學函數的感覺，把一個值丟進去他就會變換到另一個值。

(引自 S1 訪談 S1-18)

研究者認為 S1 不理解此等式就是此證明的精髓，要把抽象的函數用矩陣相乘來表示。

在 Recall that for any matrix A , Ae_j is j th column of A 這敘述中，S1 正確理解此敘述的含意，知道 Ae_j 是 A 的行向量：

R 好那我們來到證明，證明的第一句話它有講說：Recall that for any matrix A , Ae_j is the j th column of A ，這段話在講什麼，妳可以口語跟我講一次嗎？

S1 它是說從以前就知道的想法來看的話，就是任何一個矩陣 A ，他就可以把 Ae_j 寫成第 j 行的向量，我就覺得它感覺是定義。

R 所以妳覺得它是定義 Ae_j 是 A 的？

S1 行向量。

R 行向量，沒有為什麼就是這樣？

S1 對。

(引自 S1 訪談 S1-19)

這裡其實可以請 S1 舉例說明，更能確定 S1 是理解的。

在 This shows at once that if A is the matrix described in Eq. (2), then $Ae_j = T(e_j)$ 這段敘述中，S1 可正確理解 $Ae_j = T(e_j)$ ：

R 好，那接下來第二句話：This show 這樣下去對不對，那妳可以口語化跟我解釋，假如說我是看不懂的人，妳可以告訴我第二段在講什麼嗎？

S1 然後因為這是前面，之前可能有提過的概念，它的定義是長這樣。

R 妳是說 Ae_j 是 A 的 column。

S1 對，然後它說上面這一個敘述是說，它要讓一個 A 矩陣長成這樣。

R 對，長成上面那個框，矩陣。

S1 然後就會發現這一個 A 矩陣的行向量會長的像 $T(e_j)$ 這個，就是看它每個行都是長，都是可以用這個表現式表現出來。本身題目是長這樣，然後以前又說 Ae_j 也是可以表示成任何 A 向量的 column，然後就會得到 $Ae_j = T(e_j)$ 。

R 然後妳說 Te_j 是這個題目講的。

S1 從這個題目來的。

(引自 S1 訪談 S1-20)

但研究者請 S1 舉例說明時，不知為何一開始舉例怪怪的，他說 $A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ 。

後來經過我的詢問，才改口假設 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ，所以 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}$ ，最後正確舉

例：

R 那妳有沒有辦法舉例子說明，在什麼樣的情況下，這個 Ae_j 就會等於 $T(e_j)$ ？啊不對，妳剛剛是說這個是從這邊來的對不對？

S1 因為它，數學是把 e_1 定義成第一個是 1，其他是 0，像 e_2 就是第二個是 1，然後再來都是 0 的這種形式，假設 A 去乘上第一個，這樣的話，它只會有第一個數，只會保留第一個是 A ，其他都是 0，然後這樣他就會形成。

R 妳說這個 A 和這個 A 是一樣？

S1 其實 A 是一個矩陣。

R A 是一個矩陣，然後？妳把所以這個 A 和這個 A 是一樣的意思嗎？因為妳把它寫在中括號裡面。

S1 應該是不對，只是說一種感覺吧，那把 A 假設是矩陣 a, b, c, d 乘上 $(1, 0)$ ，這樣的話得出來就是 (a, c) ，那這樣就是代表著它的第一行的向量，第一行的，所以這兩個是一樣的，這是第一行， A 矩陣的第一行。

R 好，所以這個是 Ae_j 那邊？妳剛剛說等於 $T(e_j)$ 是題目講的？

S1 對，我要再把前面這個講得清楚一點，可能是我自己要再想想這個部分。

(引自 S1 訪談 S1-24)

在 and so T and the linear transformation T_A given by $T_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ agree on the standard basis $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ of $\mathbb{R}^n$ 這段敘述中理解有誤，覺得 $T_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ ，只是把 $Ae_j = T(\mathbf{e}_j)$ 的 $\mathbf{e}_j$ 改成 $\mathbf{x}$ ：

R 然後接著呢？

S1 就有一種感覺，把這個 e 改成一個 x ，把它表示成一個 x 向量。

R 所以妳覺得 so T and the linear transformation T_A 這一段，妳覺得它只是把第二行的 e_j 改成 x 這個向量？

S1 恩，把這個 x 就是可以把它，因為它 e_j 本來就是一組向量，它本來就不是單一的一個向量。

R 所以妳覺得 e_j 不是一個向量。

S1 它本來就是代表著，就像這裡，它是從 1 到 n ，有 n 個向量，它只

是先把寫成一個表示法，但其實它是代表的意思是每個行向量放進來，都是長這樣，所以我們把它寫成 x 的形式， x 其實是內含就是感覺也是有這個 basis。

R 所以妳覺得 e_j 是這些東西嗎？是 e_1 到 e_n 這些東西嗎？

S1 恩。

(引自 S1 訪談 S1-20)

在 By Theorem 2.7, and the comment following this theorem, we know that then $T(x) = T_A(x)$ for every $x \in \mathbb{R}^n$ —that is, $T(x) = Ax$ for every $x \in \mathbb{R}^n$ 這段敘述中，S1 跟研究者解釋 Cor 的證明過程時，突然發現自己把式子看錯：

R 好，OK，那接下來到最後一段，by 定理 2.7 這個，妳覺得最後這兩行是在講什麼？更仔細的跟我描述他說的。

S1 就是看完定理 2.7 之後，就會發現它們兩個其實好像是在講同一件事情。

R 定理 2.7 和這證明是講同一件事情？

S1 所以我們就可以說，我們後來講的這個結論有遵守定理 2.7，因為有符合它的條件，所以我們就可以說它是，就我們剛剛假設成這個形式是對的，所以就可以得到這個，這是剛剛假設的。

R 妳說哪邊是剛剛假設的？

S1 像剛剛所說的 x ，把它換成 x 。

R $TA(x) = Ax$ ，還有 $Ae_j = T(e_j)$ ？

S1 這是原本確定的，只是把這個 x 先把它自己就把 e 換成 x 。

R $Ae_j = T(e_j)$ 這個是原本就確定的，然後把 e_j 換成 x ，然後把 x 換成 e_1 到 e_n 。

S1 然後因為它就是有符合定理 2.7。

R 有符合定理。

S1 所以我們剛剛所寫的式子是對的，就是可以用這樣的表示法表示出來。

R 就是可以寫 $T(x) = TA(x)$ 。

S1 對，就是感覺就是個表示法而已，就是可以直接寫成這樣(手寫)，欸？

R 和原本長的不太一樣。

S1 好像不太一樣耶，TA.....

(引自 S1 訪談 S1-21)

發現不一樣之後，馬上重新檢視證明過程：

R 妳本來是要告訴我 TA 最後這個地方和這個其實是一模一樣的，結果後來發現好像長的不一樣的。

S1 好像不是這樣耶，這個等於這個，應該這個式子是從...

R 妳說 $T(x)=TA(x)$ 是從定理 2.7 得到的。

S1 然後我們又假設它是可以長成這樣的。

R 喔，前面有假設 $TA(x)$ 長成 Ax 的樣子。

S1 所以這兩個是一樣的東西。

R $TA(x)$ 跟上面的 $TA(x)$ 是一樣的，第三行的 $TA(x)$ 。

S1 所以就可以得到 $T(x)$ 就等價於後面這個 Ax 。

R 等價於第三行的 Ax 。

S1 就它們三個是一樣的東西。

(引自 S1 訪談 S1-21)

S1 覺得是從定理 2.7 得到 $T(x)=T_A(x)$ ，又因為第二段假設 $T_A(x)=Ax$ ，所以得到 $T(x)=Ax$ 這個結論。這裡發生了理解狀態改變，從不理解到理解。

在第三段最後一行的 $x \in \mathbb{R}^n$ ，S1 說之所以寫 $\mathbb{R}$ ，是因為 $\mathbb{R}$ 是實數，都是在討論實數裡面的數：

R 最後我問妳喔，妳知道為什麼它這邊要寫 x 屬於 $\mathbb{R}^n$ 嗎？

S1 恩，因為它就是要讓它可以符合嗎？

R 可以符合什麼？

S1 因為剛剛說 $\mathbb{R}$ 就是在實數，因為它會一整個在題目都在實數裡面，

規定 x 也是在，也不是規定，因為前面都是討論在實數裡面的數。

(引自 S1 訪談 S1-22)

S1 把 $\mathbb{R}$ 獨立出來解釋，但是 $\mathbb{R}$ 和 n 應該要合在一起看，因為 x 是向量。後來研究者詢問為何 $\mathbb{R}$ 上面有 n ，S1 說明 n 的意思是表示 A 矩陣是一個有 n 個行向量的矩陣，這裡完全誤解了 $\mathbb{R}^n$ 的意思，他沒有把 $x \in \mathbb{R}^n$ 當成一個物件來看，把 x 和 $\mathbb{R}^n$ 分離。事實上，是 x 這個向量，有 n 個元：

R 那為什麼它實數上面要 n ？

S1 因為 A 矩陣是假設是給 A 矩陣是一個有 n 個行向量的矩陣。

R 所以你認為 x 屬於 R^n 的 n 代表的是 A 矩陣有 n 行？

S1 n 行， n 個 column。

(引自 S1 訪談 S1-22)

在證明的摘要部分，S1 認為他無法寫出來，原因是因為 $T(x)=Ax$ 很顯然。如果是像放聲思考練習的定理 6.2，他就有辦法寫出來，因為這個證明是無法從命題敘述知道結果如何的證明。

R 感謝妳，應該差不多了，我本來是想問妳說妳能不能在白紙上寫上這個證明的摘要，但是妳是不是覺得這個證明好像沒什麼好寫的。

S1 恩，我覺得可能因為是本身是這個的關係。

R 是這個的關係？什麼意思？

S1 可能像剛剛練習的那種。

R 妳說練習的那個，例如說哪一個？剛剛有練過 338 頁，第一個看得是 338 頁的 6.2。(翻書)

S1 恩，就是。

R 妳覺得這個就可以有辦法寫下來？

S1 應該吧，應該可以，我可能會幫它，它就是會比較講出為什麼的那種感覺，因為就是可能像這種證明，妳沒有辦法直接看它的敘述就可以知道說為什麼會長這樣。

R 妳說沒有辦法直接看出來。

S1 對，可能會有一個過程，然後讓妳確定他就是會是這個敘述的意思。

R 喔，好，了解。

S1 就通常，我覺得證明感覺就是把它這句話，通常定理都是文字，然後就把它寫成數學的形式，然後同時去推導他為什麼從第一個式子變到最後一個式子。

R 所以妳覺得定理的功用是這樣子？應該說定理的證明是為了要把這個敘述用數學來描述得更清楚。

S1 對，同時可以驗證它講的是對的。

(引自 S1 訪談 S1-25)

(四) AH_CLPL 學生：S3

對於整個 Cor 的證明，S3 無法用比較簡單的方式寫下來：

R 那這個你有沒有辦法寫啊？

S3 這個。

R 讓你讀的這個證明題。

S3 這個證明嗎？

R 還是該不會你覺得像 6.6 的那種？

S3 我覺得它全部都是文字，然後很難用，就是，用那種符號表示出來，就可能要寫的話，就可能也是寫。

R 像它是用文字敘述。

S3 對。用文字敘述，不太會用文字敘述。

R 你說你不太會用文字敘述？

S3 對阿。

R 那為什麼你說你證明的時候可能還是會用文字敘述？

S3 就，不知道怎麼表達吧，不知道怎麼說，為什麼 $A_{ij}=T_{ej}$ ，我不知道怎麼用文字敘述寫出來，可能就會寫，用，這樣子的，用矩陣然後把這樣子寫給它看。

R 那你可以，你可以整個寫寫看嗎？就是如果你不知道怎麼用文字敘述的話，就是你剛剛說如果要用文字敘述去描述這個證明是有點困難的，那可以用你覺得比較好理解的方式把它的證明寫出來嗎？

S3 好啊。

R 好啊。那你可以寫在下面那塊空白的地方。

S3 好啊。

R 那個部分夠嗎？需不需要再給你一張白紙？

S3 可以可以可以，不會，這夠。恩，所以，(寫字聲)要證明，要證明 T_x 可以寫成，可以寫成，不是，不是 T_x 。 T_x 可以寫成 A_x ，然後 A 的話它是由，它是要證明 A 等於 T(寫字聲)， T_{e1} 到 T_{en} ，然後， T_{e1} 等於到 T_{en} ，所以就要，就要寫說，恩， $T_x=A_x$ ，它證明 $T_x=A_x$ ，然後 A 是由，A 是寫成這樣子的形式，所以，我們知道，我想想看喔，恩，A， $T_x=A_x$ ， $T_x=A_x$ ，恩，(思考中)， $T_x=1x$ ，好吧，不知道怎麼證。

R 所以，你突然覺得好像無法，用比較簡單的方式寫下來。

S3 對阿。對。

R 沒關係，所以無法進行下去。

S3 恩。

(引自 S3 訪談 S3-17)

在 linear transformation 中，S3 誤以為 linear transformation 是函數的意思，他舉了兩個例子，第一個是微分 $T(x^n) = nx^{n-1}$ 、第二個是 $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x+y+1 \\ y+1 \end{bmatrix}$ 。後來研究者詢問為何要假設 T 是線性變換時，發現 S3 整個誤解了線性變換的定義，他以為的線性變換的定義，其實是用來證明向量空間或內積空間的：

R 好，那最後我再跟你確認幾個，就是，恩，你剛剛說 linear transformation 就是它寫的 T Rn 到 Rm。

S3 黑。

R 那你有沒有辦法，所以你覺得，T，就是寫，寫了一個符號這樣，T 從 Rn 到 Rm，這樣就叫 linear transformation 嗎？還是說 linear transformation 有什麼定義，有嗎？還是什麼意思？

S3 有阿它有意思。

R 它是什麼意思？

S3 如果它是 linear transformation，然後，它會寫，恩，假如它是從，它是會寫成怎樣子，恩，假如它是從，它會寫成，它會寫成什麼？假如它是，恩，一個多項式然後經過 transformaiton

R 恩

S3 他可以表示成把他微分

R 恩微分

S3 然後他是微分的話，應該可以表示成 x^{n-1}

S3 就是從 x^n ，然後他的這個線性變化是把這個 x^n 微分，然後他這邊要滿足，滿足很東西

R 恩

S3 結合率與 摠，就是她滿足 8 個東西

R 哪 8 個

S3 哪 8 個哦？

- R 你的意思是說？
- S3 妳妳是說 linear transformation 會有什麼東西嗎
- R 應該說如果要妳舉例什麼，什麼叫？舉例說明什麼叫 linear transformation 你會怎麼解釋？
- S3 要怎麼解釋哦？
- R 對對..舉例說明的話，像你剛不是舉，
- S3 舉她微分的意思，然後如果
- R 你是說如果有一個 T 可以這樣還是什麼意思
- S3 對對對，恩...怎麼講
- R 一個要微分嗎
- S3 不一定 不一定
- R 她就是由另外一個東西變到另外一個東西去
- S3 假如 Txy 原本代 xy 進去，你把她送過去以後，她會變成 $x+y+1$ ，然後原本 $y+1$ 的話就可能她這邊這個也是個變換
- R 這就叫做 linear transformation 這樣？
- S3 哦對阿 應該
- R 是不是就是你剛剛講的把一個東西變到另外一個東西
- S3 對對對 那她這是從 R_n 送到 R_m

(引自 S3 訪談 S3-18)

在 $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ 中，一開始研究者詢問 R_n 到 R_m 是什麼意思時，S3 能說出就是 n 維送到 m 維，但是當研究者請他舉例時，他認為 $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x+y+1 \\ y+1 \end{bmatrix}$ 左右兩邊因為只有 x 、 y 兩個變數，所以稱為 2 維送到 2 維，當研究者跟他確認他的想法時，因為他不太確定，於是又想了 P_3 送到 P_2 多項式的例子，確認他自己想的沒錯，最後研究者問他，如果是 $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x+y+z \\ y+1 \end{bmatrix}$ 是不是表示 R_2 送到 R_3 ，他說是，表示他理解錯誤。這也讓研究者發現，原來學生對 $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ 可能會有這樣的誤解，也難怪 S3 在先備知識測驗卷裡面的第一題空白，選不出答案：

- R 好那我可以問你什麼叫 R_n 什麼叫 R_m 嗎
- S3 什麼叫 R_n 什麼叫 R_m 哦
- R 對

- S3 就是 n 維然後送到 m 維
- R 什麼叫 n 維什麼叫 m 維
- S3 這個這個這好抽象哦
- R 那你可以舉個例子說說看嗎
- S3 就可能 我想一下哦
- R 好
- S3 像這個例子的話，就是二維嘛 只有兩個
- R 然後這邊送過去還是二維，是嗎？
- R 所以你認為是這裡出現了 x 跟 y 兩個，所以叫二維
- S3 摠摠
- R 那這個為什麼叫二維，你說明哪邊
- S3 因為他也是只有 x 跟 y 啊
- R 你的意思是說變數有 x 跟 y 嘛
- S3 喔對
- R 是這樣的意思嘛
- S3 黑 其實我也不太確定這是什麼意思
- S3 摠.. R_n 送到 R_m 想想看喔
- R 好
- S3 恩... P_3 送到 P_2 ，就是由 3 次送到 2 次
- S3 R_n 送到 R_m 的話是 n .. n 是什麼呢？應該是變數吧
- R 所以如果你把這個 1 改成這個 $x+y+1$ 改成 $x+y+Z$ 你覺得右手邊這個就叫 R_3 ，是這樣的意思嘛
- S3 對阿
- R 確定？
- S3 確定。

(引自 S3 訪談 S3-19)

在 Let $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ be a linear transformation 這句話中，研究者期望 S3 說出 T 是函數，但 S3 翻譯了字面上的意思，說 T 是線性變換，從 R_n 送到 R_m ，可能是研究者問的方式不對，其實可以問他， T 一定是線性變換、一定是 R_n 送到 R_m 嗎？來確認他的理解狀態：

- R 好。然後再來，那為什麼她要特別去說 T R_n 到 R_m 的 linear

transformation 就是這句話 要告訴你什麼

S3 告訴我們

R T 是什麼東西啊

S3 $T \cdots T$ 是什麼東西

R 這個這個符號是有什麼意思嘛

S3 這個喔

R 對啊 對啊 T

S3 T 就是我只知道她是線性變換而已

R 喔

S3 她是從 R_n 送到 R_m

R 好

S3 然後再來 AB 的 m 乘 n 矩陣然後一直到這邊

R 摠

(引自 S3 訪談 S3-20)

在 let A be the $m \times n$ matrix whose j th column vector is $T(\mathbf{e}_j)$, which we denote symbolically as

$$A = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ T(\mathbf{e}_1) & T(\mathbf{e}_2) & \cdots & T(\mathbf{e}_n) \\ | & | & & | \end{bmatrix}. \quad (2)$$

這段敘述中，S3 能正確解釋這句話的含意。

R 我是覺得 column $T\mathbf{e}_j$ 一直到 as 這邊 你覺得這句話在說什麼

S3 就是 就是 就是說明 就是 A 矩陣的 欸 A 矩陣 A 矩陣 他的 D 假

如他是他的第 J 第 J 個 column 就是他的每一個 column 然後是由 $T\mathbf{e}_1$ 然

後就是寫成他第一個 column，然後 $T\mathbf{e}_2$ 就是寫成他第二個 column。然後

這個就是她表示的形式，這句就在講下面這個

(引自 S3 訪談 S3-21)

在 Then $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ for each column vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ 這句話中，S3 能說出 $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ 左邊有小括號就像 $f(x)=x$ 一樣，可以把 x 代入 T ，但不能明確說出 T 是一個函數。而右邊沒有括號的原因是因為就是兩個矩陣相乘，因為知道 S3 不清楚 R_n 的意思，因此研究者追問 S3， x 是一個什麼樣的矩陣，他本來說是 n 乘

m 的矩陣，但是講一講又覺得自己講得怪怪的，修正說 R_n 就可以了。這時研究者又追問 R_n 的意思，他知道在命題敘述的最後有說 x 屬於 R_n ，最後他說 x 就是一個 n 乘以某維的矩陣，而那個某維是不確定的。

R 好 ok 那接下來勒，這邊 then $Tx=Ax$ 阿你剛剛其實也有說到這定理其實就是要證 $Tx=Ax$ 這樣的感覺

S3 對對對對對

R 好，那想要問你喔為什麼 $Tx=Ax$ ，在 Tx 這邊有一個小括號但是右手邊沒有

S3 你說這樣的小括號

R 對啊，為什麼那裏有個小括號

S3 就很像那個 $F(x)=x$ 就是把 x 帶到這個 T 他的這個裡面去啊

R 那為什麼 A 那邊不加小括號

S3 因為他那邊就是兩個矩陣相乘 欸不是 就是 A 這個矩陣乘以這個矩陣

R 所以所以你覺得 x 也是一個矩陣

S3 對阿

R 好

S3 他這邊是矩陣

R 那 x 是一個什麼樣的矩陣

S3 x 他是一個他是一個欸欸欸我想想喔 n 乘以 n 乘以 n 乘以然後他是一個什麼樣的矩陣喔 我想想看 n 乘 m 的矩陣

R n 乘 m 的矩陣

S3 對沒錯欸

R 怎麼說 你怎麼確定的

S3 因為他由 R_n 送到 R_m 可是欸我想想看喔，他是怎樣的矩陣 恩 應該是 他是 R_n 就可以了

R 他是 R_n 就可以了

S3 恩

R R_n 是什麼意思

S3 R_n 是什麼意思喔？不知道

R 你說他是 R_n 就可以了那是什麼意思啊？

S3 欸 我看看喔

R 因為你剛剛不是說他要 n 乘 m 阿

S3 對阿 n 乘 m

R 那後來你說他是 R_n 就可以了那是什麼意思

S3 應該不是這樣講，我想想看 Tx 是什麼東西 $x \times x$ 這邊我寫 for each column x 屬於 R_n

R 對為什麼他講了那句話

S3 為什麼他每個都屬於 R_n 嘛？

R 恩

S3 因為他要從 n 他是從 n 送到 m

R 所以你覺得 x 長怎樣

S3 x 長怎樣喔？

S3 我覺得他長 他長 他長 他長 n 乘以 我不知道他長怎樣耶 他會長成 他好像沒有固定長成怎樣 我只知道他的 他是一個 n 乘以什麼的矩陣 就是他這邊

R 喔你覺得他是一個 $n \times n$ 乘以什麼的矩陣 但是那個什麼是不確定的

S3 對對對對對對

(引自 S3 訪談 S3-22)

不過他知道 x 是粗體，是因為 x 代表一個向量，也知道 $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ 的 x 是同一個 x 。

R 那你知道為什麼那個 x 要粗體嗎？

S3 粗體？

R 對 因為你就是好像在這個證明裡面只有 e_i 阿 x 阿這些是粗體那他們粗體有什麼涵義嘛為什麼要粗體

S3 他是一個向量

R 他是一個向量 就是你覺得粗體就叫一個向量

S3 對對對對對

R 那你覺得 $T(\mathbf{x})=A\mathbf{x}$ 這邊這兩個 x 跟後面的 x 屬於 R 是同一個 x 嘛

S3 對啊同一個欸 對同一個 沒錯

(引自 S3 訪談 S3-23)

在 Recall that for any matrix A , Ae_j is j th column of A 這句話中，S3 能正確解釋。

R 好 接下來到證明的地方 他說 Recall that for any matrix A , Ae_j is j th column of A . 你可以告訴我這句在談什麼嘛？

S3 這句就是他在談就是這邊欸 這個 A 乘上 e_j 就是他是我看 如果他是 e_1 的話就會是他的第一個 column 如果 矩陣乘上 e_1 就會是他的第一個 column 然後他乘上 e_2 就是他第二個 column

(引自 S3 訪談 S3-24)

在 This shows at once that if A is the matrix described in Eq. (2), then $Ae_j = T(e_j)$ 這句話中，能解釋這句話的意思，不過研究者發現 S3 在讀到 Eq.(2)時有疑惑了一下，是因為 S3 找不到 Eq.(2)在哪裡，不過，雖然 S3 找不到 Eq.(2)在哪裡，他還是會先把整個證明看完，再重看一次。第一次看可能會有不懂的地方，但是會選擇先看完，第二次看再來解決第一次看有疑惑的地方。

R 喔好 那再來第二句話呢？This shows at once that 那一段

S3 This shows at once that if A is 他是寫如果 A 這個矩陣他是寫成上面這樣一個形式然後 then Ae_j 會等於 Te_j

R 寫成上面這個形式 啊對了我想到了你剛剛再 equation 2 的時候有疑惑了一下

S3 喔因為我找不到那個東西在哪裡

R 阿後來你找到了

S3 他在這裡

R 所以其實就是哪一個？他在這裡所以他講了什麼

S3 講的就是他寫的這個形式

R A 矩陣喔 所以那時候馬上就找到了 是不是

S3 那時候還沒找到 但是我看到第二次的時候才看到 看到上面有一個 2

R 你什麼時候看第二次的？

S3 什麼時候看第二次的喔？

R 對

S3 全部看完的時候 我再看的

R 你全部看完的時候又看第二次

S3 對 我會先全部看完再看一次

R 你的習慣都是先全部看完後再看一次 是不是

S3 對阿，就是先看就是例如我這邊不懂 這個 equation 2 是什麼我在上
去找慢慢找

R OK

S3 然後找到他

R 阿我問你喔所以當那時候你第一次看到 equation 2 有疑惑的時候你
是先不管先看完

S3 對我先看完

R 看完之後再從看一次解決你剛剛不懂的地方

S3 對

R OK 好 接下來你已經找到 equation 2 了

S3 對

(引自 S3 訪談 S3-25)

在 $\mathbf{Ae}_j = T(\mathbf{e}_j)$ 中，S3 第一次看有卡住，不知道為何相等，但後來有想出來。

R 好後來

S3 Then

R 接下來

S3 然後 $\mathbf{Ae}_j = \mathbf{Te}_j$ 這邊一開始要卡住然後就想一下 他是為什麼會等
於他

R 你有想出來嗎？

S3 有啊 就 就是因為 恩 因為 $\mathbf{Te}_j$ 就是上面跟我們講就是 $\mathbf{Te}_j$ 就是擺
再第 j 個 column

R 對

S3 阿它這邊，上面有講啊。第 $\mathbf{A}$ 乘上 $\mathbf{e}_j$ 的話就是 $\mathbf{A}$ 的第，它的第 j 個
column，所以兩個會一樣。

(引自 S3 訪談 S3-26)

在 and so T and the linear transformation T_A given by $T_A(\mathbf{x}) = \mathbf{Ax}$ agree on the standard basis $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ of $\mathbb{R}^n$ 這句話中，S3 嘗試解釋這句話的意思，但是講得很模糊，後來說其實自己不是很懂，他第一次看的時候覺得這段在重複說明已知的東西，然後他不理解 $\mathbf{TA}$ 是什麼，不知道從哪裡冒出來的。

R 恩恩，阿接下來繼續勒？

S3 然後 so ,T and linear transformation TA gived by $T=Ax$ agree under standard basis for R^n (笑)

R 恩，這段是什麼意思？

S3 就是它就是，就是可以 Tx 會等於 Ax ，恩，standard agree ,oh,它就，它就在講一次就是，恩。

R 就為什麼他要在講那一段？

S3 就是，他說我們可以很清楚知道，恩，用它這個 standard basis e_1 然後 e_n ，然後，用 A ，用它的這個表示的話，所以 T 的

R 用，用哪個表示？

S3 Te ...就是這個它寫成的這個形式表示的話，所以他這 A 就可以寫成 T ， $TAx=Ax$ 。

R 恩？我不太懂你的意思耶？你說，你可以再解釋一次嗎？

S3 恩...恩... TA ... TA ...恩... $TAx=Ax$ ，它的 A 就是用 e_1 到，就是 Te_1 ，然後到 Te_n ，然後擺在它的每個 column，它可寫成這樣子。

R 你說 TAx ？

S3 恩。

R 然後。

S3 然後就，寫這樣子。其實這段有點不懂。

R 到目前還是有點不懂？

S3 對對對對對。

R 還是你本來以為懂了？

S3 因為，第一次看我覺得它，就覺得很，很正常。

R 很正常？什麼意思？

S3 就覺得，恩，就覺得，就...恩，solty and linear...就是 TA gived by ...覺得，要怎麼說呢，恩..agree and standard，第一次看就覺得，它在講重複的東西(笑)。

R 哦？你覺得這一段 and so T ， TA 這段。

S3 喔，那可能就，就覺得它是這邊證玩 $Ae_j=Te_j$ ，然後，下面這個就可以 A 的話， A 這個矩陣，就是，恩， A 這個矩陣可以寫出來了。

R A 那個矩陣可以寫出來了。

S3 對對對對對。

R 什麼意思？

S3 就，原本不是要找出這個矩陣？

R 原本要找出...

S3 對阿。

R 你說 Ax 這個矩陣？

S3 對對對對對。然後上面就是跟我們說，就是把每個 A ，它就是展成這樣子，就把它寫成就是寫成，就是把 $Te1$ 然後就把它寫進來，然後 A 就可以寫得出來。

R 好，所以，現在是不理解的狀況還是理解了？

S3 嘖，不太理解。不太理解，應該說， TA 是什麼？

R 你目前的疑惑就是 TA 是什麼？

S3 恩。它這邊多一個 A 我不知道它是什麼

R 恩。

S3 因為如果他這邊沒有的話，

R 沒有的話你覺得合理嗎？

S3 對，就是上面這個東西。

R 就是上面這東西。

S3 可是它多出一個 A 。

R 所以，所以你覺得它不應該有 A 嗎？

S3 (笑)應該不會不應該有 A ，就應該不知道 A 是從哪邊冒出來的。

(引自 S3 訪談 S3-27)

在證明的第三段，能簡單說明如果 $T(\mathbf{x})=T_A(\mathbf{x})$ 而且又因為第二段有說 $T_A(\mathbf{x})=A\mathbf{x}$ 所以 $T(\mathbf{x})=A\mathbf{x}$ 。但是對於為何有 TA 這個還是解釋得不清楚。

R 好，沒關係那我，那接下來最後兩行勒？

S3 最後兩行就，就 by theorem，2.7 這個定理，然後所以，所以 and comment following this theorem, we know that ,and 诶？ $Tx=TAx$ for every x 屬於 R^n ，that is $Tx=Ax$ ，for every x 屬於 R^n 。

R 所以這句在講什麼？

S3 講，講如果 $Tx=TAx$ ，然後所以 Tx 就會等於 Ax ，所以就證完了。

R 恩亨。

S3 Tx ...那它這邊說，如果 then，we know less than $Tx=TAx$ ，所以 Tx 那它上面說 $TAx=Ax$ 所以 Tx 就等於 Ax 。

R 所以到目前你感覺怎麼樣？

S3 到目前喔？稍微，有點快知道她在幹嘛了。

R 你說那個 TA 喔？

S3 恩。它的 TA 應該意思就是， TAx ，應該就是，它的 A 應該就是由 e_1 到 e_n ，它是由，就是每一個，就是把 Te_1 送過去，應該就是 A 寫成這個形式吧。

R A 寫成上面那個的形式。

S3 對對對對對。

R 恩，然後呢？

S3 然後它就，2.7 所以它，它寫成的形式就只有唯一一種，所以，它會等於 Tx 。

R 喔，然後呢？

S3 所以 TAx 就會等於 Ax 。

R 所以那個 TA 是有必要的。

S3 對對對對。就，因為我們不知道它是，它是，它寫，它原本的形式是它叫我們把 e_1 到 e_n 送進去裡面看看。

R 恩。

S3 然後再藉由它 2.7 知道不管我們送什麼，它都會是，寫出來就只有唯一的，所以， Tx 會等於 TAx ，所以它送出來的結果就只有一種。

R 它們都是送誰啊？

S3 他們是送誰喔？因為這個 A 的話好像是送，送 e_1 到 e_n 。

R 恩，所以 T 也是嗎？

S3 後面這個嗎？

R 對阿。

S3 後面這個 T 就不是阿，它可以隨便送，又例如，恩，我們 T，T，它可以隨便送，恩， $TAx \cdots TAx = TAx$ for very... 屬於 n ，所以 $Tx = Ax \dots$ (碎念) agree on the standard baiss... 噢。

R 你發現什麼？

S3 那個 x 是， x 是 e_1 到 e_n ，然後他再把這整個送過去，然後，可以寫成 A 然後再乘上 e_1 到 e_n

R ㄟ我不太懂你這個寫法是什麼意思？這個，這個中括號裡面有 e_1 到 e_n 是什麼意思？

S3 這樣子吧。

R 喔你說把 e_1 到 e_n 排成直的然後放這樣的形式然後形成一個矩陣。

S3 對對對對。然後寫，送進去。然後就會變成這個，我們的 A 乘上 e_1 到 e_n 。

R 那這個的 e_1 到 e_n 是什麼意思？

S3 也是這個。

R 喔，好。

S3 所以你覺得，恩， e_2 證明的第三行是這個，三到四。

R 對。

S3 好，就這樣了。

R 恩。

S3 好好好 OK。

(引自 S3 訪談 S3-28)

(五) AL_CHPL 學生：S4

在 $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ 中，S4 認為這句的意思是說 T 就是把一個的向量經過運算之後得到另一個向量，原本的向量屬於 $\mathbb{R}^n$ ，運算過後的向量屬於 $\mathbb{R}^m$ 。當研究者詢問什麼是 $\mathbb{R}^n$ 、什麼是 $\mathbb{R}^m$ 後，S4 能舉例說明如果是平面向量，就會寫(,)兩個，這個叫 $\mathbb{R}^2$ 。如果一個括號裡面有 n 個東西 a_1 到 a_n ，就是 $\mathbb{R}^n$ ，如果一直到 a_m 就是 $\mathbb{R}^m$ 。這裡他解釋的很清楚，可是當研究者問他什麼是 $\mathbb{R}$ 時，他認為 $\mathbb{R}$ 是維度的意思，其實 n 和 m 才是維度，而 $\mathbb{R}$ 是實數，在還沒問 $\mathbb{R}$ 之前，S4 還說 $\mathbb{R}$ 是常數的意思。

R 好，那最後我再跟你問一些細節的東西

S4 恩

R 確認一下，好，像像這邊你剛剛敘述從這邊讀下來的時候 $T: \mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^m$

S4 恩

R 這個這個東西是什麼意思？這個你知道嗎？

S4 恩…應該是說就是 T 的

R 為什麼要寫 $T: \mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^m$

S4 T 的這個東西就是它的線性變化一個一個一個向量

R 一個向量

- S4 然後到另外一個向量
- R 你覺得他是在表示什麼?
- S4 然後就是經過運算之後他會到另外一個向量，啊這個向量是屬於那個 R_n 然後這個向量就變屬於 R_m
- R 好，那我想問你什麼叫 R_n 什麼叫 R_m ?
- S4 我自己的理解嗎?好
- R 剛剛講到哪裡?我在問你什麼叫 R_n 什麼叫 R_m 對不對?
- S4 對，應該是這個吧
- R 哪個?
- S4 因為向如果是點的話我們就 x 在這邊，然後如果平面向量就會寫兩個
- R 嗯
- S4 這個是 R^2
- R 嗯喔這個叫 R^2
- S4 對啊，然後這是 R 嘛就是常數啊
- R 常數
- S4 應該是吧就是一個一個數字單純一個數字
- R 好
- S4 啊所以應該是就是這裡面然後有 n 個 R_n
- R 就一個括號裡面有 n 個
- S4 對就是有 n 個東西
- R 有 n 個東西
- S4 a_1 一直到 a_n
- R a_n 好
- S4 然後一直到 a_m 就是 R_m
- R 就是 R_m 好，那為什麼要寫 R ?
- S4 那個吧那個那個叫什麼就是維度吧
- R 維度
- S4 嗯我覺得
- R 維度
- S4 像這個兩個嘛那這個這個就是二維的一個點然後這是 n 維的一個點
- R n 維的一個點
- S4 是嗎?我是這樣覺得

R OK 所以你覺得 R 是一個維度?

S4 我一直覺得是這樣

R 沒有我剛是在想說，那維度如果是 2 的話，那幹嘛不寫數字 2 就好，

要寫 R

S4 喔

(引自 S4 訪談 S4-17)

在 linear transformation 中，雖然 S4 在訪談的過程中有提到線性變換，但是問他意思時，他其實也不知道線性變換是什麼，講不出來。

R 沒關係好，再來那你剛剛有提到線性變換，你說這個東西，然後你可以告訴我什麼叫線性變換嗎?因為這四個字是講是講出來了可是到底什麼是線性變換

S4 喔線性變換

R 嗯

S4 嗯...噴欸我，應該是痾，就是從一個維度然後欸不一定耶，線性變換喔

R 嗯

S4 其實我也不知道線性變換到底是什麼

R 為什麼你突然覺得好像不知道線性變換是什麼?

S4 對

R 因為你本來好像說知道

S4 因為嗯...

R 你是本來以為你知道

S4 會知道它怎麼算

R 嗯

S4 對然後只是突然要講線性變換是什麼就是講不出來

R 講不出來

S4 就不知道線性變換這個東西問了是要幹嘛的是嗎?我也不知道

R 好就是它可能意義什麼的但你現在是講不出來

S4 真的

(引自 S4 訪談 S4-18)

他認為像是 $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x+y \\ 2x-5y \end{bmatrix}$ 和 $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x \\ x-y \\ 2x+y \end{bmatrix}$ 這兩個就是線性變換，

線性變換可以像第二個例子一樣，從 2 維變成 3 維，變成不同維度，右邊向量裡面的數字也可以利用原本左邊給的 x 、 y 去做一些組合得到。這個舉例其實是錯的，只談到函數的概念，沒有談到線性變換的定義。

R 好 OK 那所以那如果你講不出來你有辦法舉例什麼叫線性變換嗎？

S4 舉例喔

R 嗯

S4 嗯…基本上是可以

R 那你舉個例子

S4 好，隨便舉嗎？

R 好對隨便舉例

S4 就是像如果今天它這邊跟我說 $x1$ 然後可能會變成就是它們會變成說 x 就變成 $x+y$ ，然後 y 可能會變成 $2x$ 然後 -5 然後它就可以跟 xy 這樣子算

R 所以這種長相就叫作線性變換嗎？

S4 嗯…

R 應該說還是你還是什麼？

S4 或者是它會變成不同維度的啊？就是可能變三個就可能 x 然後 $x-y$ ，
 $2x+y$

R 所以有三個的叫不同維度

S4 對，應該是這樣吧然後還有就是反正會就是它可以可以變成不同維度然後它裡面的數字也會因為原本給這兩個去做一些組合

(引自 S4 訪談 S4-19)

對於 Let $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ be a linear transformation 這個敘述存在與否，會不會對證明有影響，S4 認為會有，他覺得因為有這個規範，讓定理可以在不同維度間轉換，從 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^m$ 。如果沒有規範，就必須要是同一個維度，就是沒有線性變換的過程。簡單來說，S4 認為因為有線性變換，讓向量裡面的數量能有改變。不過他講一講以後又覺得就算可以從 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^m$ 好像也沒什麼特別意義，但是還是覺得應該要有這個敘述。從對談過程中可得知，S4 不瞭解線性變換的定義。

R 喔這種就是你認知中的線性變換 OK 好然後，那你知道為什麼就是這個這個定理它要假設 T 是一個線性變換嗎？

S4 不知道

R 好，那你覺得證明裡面會有用到嗎？

S4 什麼意思？

R 就是你覺得它，它這個定理把 T 是一個線性變換拿掉有沒有影響？

S4 嗯...有沒有影響喔？

R 對

S4 我覺得有，有影響

R 怎麼說？為什麼你會覺得有？

S4 嗯...我講我覺得

R 好啊

S4 因為它是 $m \times n$

R 對

S4 所以他裡面會有 n 個

R 哪裡有 n 個？

S4 就是 T_1

R T_1 那一行有 n 個

S4 對，欸不對喔應該是 m 個喔 m 個東西。 $m \times n$ 對有 m 個東西

R 有 m 個東西

S4 對它裡面有 m 個東西所以它就是 R 應該是 R_m

R R_m

S4 對，然後然後 e_1 這個東西是 R_n

R 嗯

S4 然後才會變成 R_n 到 R_m ，如果它沒有這個線性變換的話就變成說它們規定裡面可能就是要同個維度嗎？就它就沒有一個線性變換的一個過程

R 呵

S4 我講完了

R 喔好

S4 嗯...嗯...有沒有差喔我覺得是有差吧

R 嗯，你覺得差別是在那個

S4 它裡面...

R 數量

S4 對它裡面的話就可以對啊裡面跟外面可以變出不一樣的東西

R 矩陣的 A 矩陣的裡面跟外面

S4 嗯，就是 T、Tej 嘛

R TEJ

S4 的 ej 可以是就是...嘖不對，就是 ej 就是屬於 R_n 嘛然後它也變出一個屬於 R_m 的東西，好像沒有也沒關係耶

R 怎麼說

S4 就是它嗯...不知道我覺得應該是有

R 應該是有

S4 對，必須要

R 嗯，那為什麼你剛剛有覺得好像是沒關係，是有發現什麼會覺得好像是沒關係？

S4 嗯...就是它...因為好像如果它 R_n 變到 R_m 好像也沒什麼特別意義啊，我是突然突然這麼覺得。

R 好

S4 對

(引自 S4 訪談 S4-20)

在白紙上寫下證明流程對 S4 來說是無法做到的，他說因為裡面的單字都不太懂，但如果可以知道證明大概在幹嘛，就可以背下來。平時準備考試時，如果有不懂的就會問同學，假設現在在讀的證明可以問同學，S4 就會先問為什麼要寫 $Ax=TA(x)$ ，再來請他們用中文說明證明大概在講什麼，這樣就可以背下來。

R OK 那你剛剛不太懂它證明要這樣子證，所以如果現在要你在寫下它的證明你覺得有可能嗎？

S4 馬上寫應該不太可能，可是如果硬要背下來就可以，因為因為它知道大概在幹嘛就可以把它背起來，為什麼

R 所以你背的話你會把那個文字全部背起來是不是？

S4 這些嗎？

R 對啊

S4 欸沒有

R 那如果要你再寫一次

- S4 背大意吧
- R 背大意
- S4 可是問題是一開始我也不知道它大意是什麼，就是如果今天考試
- R 嗯
- S4 啊有同學的話，我自己我自己讀倒是長這樣子
- R 嗯
- S4 然後我就會問他們說第一個就會問她們說為什麼要這樣子
- R 嗯
- S4 對
- R 為什麼要寫 $Ax=TAx$ 跟為什麼要寫
- S4 為什麼要先證這兩個然後才證這個？
- R OK
- S4 第二個就是問她們說大概在講什麼，就是用中文講一次，就是叫他們用中文就是就是大概要怎麼翻
- R 嗯
- S4 然後，之後就就可以背下來
- R 好
- S4 對，啊不然就是其他其實就是直接問他們問她們就是是什麼意思嘛然後就是可以寫下來，因為知道它的流程，對
- R 那現在你有辦法寫下來嗎？
- S4 應該很難，因為裡面單字都是不太懂的，啊如果硬要背的話就很難背起來
- R 如果你現在沒問人的話，你也只能硬背單字？
- S4 對啊，就是要全部硬背下來
- R 然後也有可能是漏寫單字
- S4 然後也可能要考試的時候就突然又忘了然後沒有分了

(引自 S4 訪談 S4-21)

在 let A be the $m \times n$ matrix whose j th column vector is $T(\mathbf{e}_j)$, which we denote symbolically as

$$A = \begin{bmatrix} | & | & \cdots & | \\ T(\mathbf{e}_1) & T(\mathbf{e}_2) & \cdots & T(\mathbf{e}_n) \\ | & | & & | \end{bmatrix}. \quad (2)$$

這段敘述中，能正確解釋這句話的含意。

R 最後是欸像嗯,...像這邊那它剛剛是問你這句話嗎?那再來 A 是 $m \times n$ matrix 一直到這句話你認為這句話在講什麼? A be the $m \times n$ matrix...

S4 喔就是它是 m 然後乘 n 個矩陣啊

R 嗯

S4 然後

R 描述 A 是底下那個 A 是這樣的矩陣

S4 對，然後它的 A 的第 j 個 column 就可以把它寫成這樣

R 寫成 Te_j

S4 然後就 Te_1 、 Te_2

(引自 S4 訪談 S4-22)

在 Then $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ for each column vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ 這句話中，S4 認為 $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ 右邊應該不能加括號，通常大家都會把左邊的 T 加上括號，但他不知道為何要這樣做。對於 $\mathbf{x}$ 為什麼是用粗體表示，他知道是因為 $\mathbf{x}$ 代表的是向量，也知道在這句話裡面出現的三個 $\mathbf{x}$ 都是一樣的。

R 那我問你喔像敘述的最後一行說 than $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ 你知道為什麼 T 那邊有括號 A 那邊沒括號嗎?

S4 不知道

R 那你覺得括號可以拿掉嗎?或是右邊可不可以加括號

S4 喔右邊可不可以加括號我覺得應該痾我覺得應該是不行

R 你覺得 $A\mathbf{x}$ 那個括號可能不能加

S4 我也不知道為什麼耶我自己覺得應該不太行然後 T 這邊因為線性變換然後大家都寫這樣有括號

R 大家線性變換 T 大家都有寫括號

S4 然後後面這個就沒有括號

R 嗯

S4 通常

R 通常都這樣然後你也不太確定加了有沒有影響

S4 嗯

R 然後有加是什麼意思你也不太確定

S4 嗯

- R 只是因為習慣大家都這樣寫
- S4 對大家都這樣寫
- R 好那我問你喔像那個 x 啊你有沒有發現它特別加粗?
- S4 嗯
- R 你覺得它加粗有沒有什麼含意?
- S4 向量
- R x 代表的是向量
- S4 嗯
- R 那你覺得 $T(x)=Ax$ 這個 x 啊這兩個 x 跟後面 x 屬於 R 的 x 是一樣同一個 x 嗎?
- S4 一樣吧
- R 一樣的
- S4 嗯
- R 好那加粗的地方除了 e 啊 e_j 、 e_l 這些，那你覺得 e 為什麼也加粗?
- S4 向量的意思
- R 也是向量的意思
- S4 嗯

(引自 S4 訪談 S4-23)

在舉例說明何謂 $Ae_j = T(e_j)$ 中，S4 認為這個等式會成立是因為 Cor 的命題有說對所有的 x 屬於 R_n ， $T(x)=Ax$ ，因為 e_j 也在 R_n 的範圍內，所以可以直接套用，這裡 S4 把證明的結論誤用。後來又說，應該是因為 This shows at once that if A is the matrix described in Eq. (2)這句話提到的例題 2，讓 $Ae_j = T(e_j)$ 的等式成立，但是他有看例題 2，看不出所以然。研究者經由訪談後的對談得知，S4 把網路上看到的 Eg 誤以為是 Eq，導致他一直無法理解這句話。

- R 向量的意思。好，然後那這邊證明的第二行有 $Ae_j=T(e_j)$ 嘛這個東西你剛剛說你知道意思嘛
- S4 嗯，題目講的
- R 那你可以舉例說明什麼叫 $Ae_j=T(e_j)$ 嗎?
- S4 舉例說明喔?
- R 對，你覺得它是合理是對的?
- S4 嗯

- R 那你為什麼認為它是對的?你在舉例之前可以稍微跟我說明
- S4 為什麼它是對的?
- R 對啊，為什麼 $Ae_j = T(e_j)$?
- S4 嗯....那時候是覺得說它這邊都已經講了 $Ae_j = T(e_j)$ 嘛那它這邊就說 x 屬於 R^n 裡面的
- R 嗯
- S4 然後就是就是屬於這個 e_j 的範圍然後所以 $T(e_j) = Ae_j$
- R 所以所以是變成你套用上面的敘述 $T(x) = Ax$ 然後...
- S4 嗯，應該是先用到前面這段話，就是它的這個東西
- R 你說 this shows...
- S4 對就是...
- R 你說你覺得例題 2
- S4 然後然後就會寫這個
- R 嗯
- S4 可是我在那邊翻好像看不出什麼還是說這兩頁嗯..我是覺得應該是用前面
- R 看不出所以然
- S4 前面這個東西就可以寫到這個 對
- R OK 好那看一下好那應該沒有什麼問題了，你剛剛在
- S4 沒有我是在看
- R 再看一次，為什麼再看一次
- S4 因為看不懂
- R 為什麼突然想要再看一次?看可不可以再看懂?
- S4 對

(引自 S4 訪談 S4-24)

(六) AL_CLPH 學生：S2

認為 Cor 是定義，能陳述整個命題在講什麼，但是誤以為 T 是矩陣， T 其實是函數：

- S2 (進入閱讀) 這裡就是定義，那需要過程嗎?
- R 什麼意思?

S2 它說它把這個就是定成是這樣，那這裡需要講什麼過程嗎？就只是看過去而已。

R 所以你剛剛只是看過去，你認為它是定義？

S2 恩，就是也不算完全定義啦，就是它說是 R_n 送到 R_m ，然後 x 經過這個矩陣會變成 Ax 。

R 經過哪個矩陣？

S2 T 。

R T 這個矩陣，會變成 Ax 。

S2 對，所以它的 A 是這樣子，就是。

R 你說是？

S2 然後它就只是跟你說明這個是什麼東西而已。

R A ？就是？

S2 上面這裡；我還沒看證明。

R 你說說明哪個東西是什麼樣子？

S2 就是 A 長什麼樣子，因為 x 經過 T 會變成這個，所以它想知道這個 A ，所以它跟你說明 A 是這個樣子。

R 喔，好，你認為上面那個就是這個樣子，好。

(引自 S2 訪談 S2-02)

在 $Ae_j = T(e_j)$ 中，S2 能正確解釋這個符號的意思並舉例說明，在舉例說明時，雖然 S2 式子沒有寫得很完整，向量有的寫橫的、有的寫直的。不過，舉例是正確的：

R 可以問一下你在思考什麼嗎？你在思考第二段嗎？

S2 就是它這裡原本是先假設，就基本的這裡看的懂，但再下來這裡。

R 你已經在想第三段那邊了嗎？

S2 基本的話就是它這裡假設是。

R 你直接寫，直接寫沒關係。

S2 嗯，就是假設是第 j 個的話，怎麼乘都只有 $T(e_j)$ 會乘到。

R 喔你說這個部分是第 j 個。

S2 對，所以就是這個 Ae_j 會等於 $T(e_j)$ ，因為怎麼乘其他都是 0，只有在第 j 行才會被乘到。

R 那你可以把這個算式清楚的寫給我看嗎？你就當成我就是個很笨很

笨的人都看不懂，然後你要跟我解釋。

S2 假設這裡是第 1 列的 $T(e_1)$ 到 $T(e_n)$ 乘過來就只有第 j 行會乘到，第二列也只有第 j 行這個會乘到，因為其他都是 0，所以全部乘完了之後，他會只剩下 $T(e_j)$ 這一行，所以 Ae_j 就會是 T of e_j 。

(引自 S2 訪談 S2-04)

R 你有沒有一個具體的例子可以說明 $Ae_j = T(e_j)$ ？舉個例子的話。

S2 假設 A 是…我想一下喔…假設 A 是這樣好了(寫下例子)，然後…假設 j 是 2 的話…。等一下，先想 T 好了。(S2 擦掉例子)

R 喔好。

S2 假設 e_2 是 010，那 $T(e_2)$ 讓它從 3 變 2 好了，這樣…，然後……這個就是 A 。(邊講邊寫下來)

R 你說這一個東西是 A ？還是整個是 A ？

S2 這個，這兩個係數其實可以隨便。

R 你說 020 跟 030，前面的 0 跟後面的 0 可以是隨便的數字？

S2 就是因為，它就是…就 T 我還沒有把它設的很清楚啦，你現在的條件，這兩個可以隨便。

R 嗯，也就是說這兩個 020 030 乘 010 會得到 23，就這樣的意思？

S2 (S2 點點頭)

(引自 S2 訪談 S2-27)

在 S2 解釋 and so T and the linear transformation T_A given by $T_A(x) = Ax$ agree on the standard basis $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ of $\mathbb{R}^n$ 這段敘述中，其實已經大致上將「為何 $T(x) = Ax$ 」證明完成了，但有一些小細節沒有很清楚。

S2 因為 x 可以用標準矩陣來表示，就是可以寫成標準矩陣，比方說。

R 你直接舉個例子。

S2 $a_1e_1, a_2e_2, \dots, a_n e_n$ ，它可以用這種形式表示出來。

R 這我不太懂。

S2 就是..看 x 可以用這樣表示，然後所以 $T(x)$ 也可以把它拆開。

R 拆開？你可以拆給我看看嗎？

S2 $T(a_1e_1) + T(a_2e_2) + \dots$ 到最後 $T(a_n e_n)$ ，因為 a_1 到 a_n 是係數，然後這個定理他。

R 定理 2.7。

S2 這裡證明，因為 v 是這樣，所以 $T(v)$ 是這樣，會等於把係數提出來， $T(b_1)$ ，所以可以把係數再提出來 $a_1T(e_1)+a_2T(e_2)+$ 到最後 $a_nT(e_n)$ 。然後 $T(e_1)$ 就是這裡， a_1Ae_1 。

R 換成那個，把 $T(e_1)$ 換成 Ae_1 。

S2 a_2Ae_2 ，最後到 $a_nT(e_n)$ ，然後這樣就是 Ax_1 、 Ax_2 、 Ax_n ，所以 $T(x)$ 就是 Ax 。

R 這裡 Ax 加，等一下我看一下喔，你的 x_1 ， x_2 ， x_n 代表的是什麼？

S2 這個是 x_1 ，這個是 x_2 ，這個是 x_n 。然後這樣子就是 x_1 ，這樣子就是 x_2 。

R 喔，了解，然後最後是 Ax_1 ，從這裡到這裡， Ax_1 。

S2 可以再把 $A(x_1$ 到 $x_n)$ ， x_1 到 x_n 就是 x 。

R $A(x_1$ 到 $x_n)$ ，所以你中間還有一步，你可以寫出來給我看看嗎？

S2 (謄寫)然後這個就是 x 。

R 喔，好，所以你認為那個 2.7 是要告訴你係數可以提出來這件事情？

S2 就是係數可以提出來，然後這個可以拆開來這樣寫。

R 拆開來是指？怎麼樣拆開來？

S2 就是把 x 拆成 x_1 到 x_n 。

R 恩，喔，就是把 x 寫成 a_1e_1 、 a_2e_2 全部加起來。那 2.7 除了告訴你
可以把係數提出來，可以把 x 拆成 a_1e_1 、 a_2e_2 到 a_nen 以外，你認為它還要告訴你什麼事情嗎？

S2 就是 $T(x)$ 可以看成這樣一行一行一行。

R 你可以寫給我看看嗎？

S2 $T(x)$ 可以看成 $T(x_1)$ 、 $T(x_2)$ 到 $T(x_n)$ 。

R 可以看成這樣是什麼意思？你都單獨的寫，我都不知道什麼意思？

S2 x 是這樣子，所以 $T(x)$ 可以把它看成這樣，所以可以一次看一個，不用一次看整個。

R 好，你認為 2.7 也告訴你這件事情？那這個證明，所以剛剛你認為
從 and so T and the linear transformation TA 這邊一直到 e_1 ， e_2 ， $\dots$ ， e_n of
 R^n ，這一行的意思是在講你剛剛在算的 $T(x)$ 一直寫到 $T(x)=Ax$ 嗎？

S2 恩。

(引自 S2 訪談 S2-05)

例如：他一下子說 $x = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ ，又說 $x = \begin{bmatrix} | & & | \\ x_1 & \cdots & x_n \\ | & & | \end{bmatrix}$ 。後來研究

者有跟他確認，剛剛解釋的，是不是證明第二段的部分，他說是，表示他對這段敘述不理解。

在證明的第三段中，S2 認為證明的第二段侷限在基本矩陣 $e_1, e_2, \dots, e_n$ 底下會對，事實上他說的基本矩陣應該叫做標準基底。而證明的第三段是推廣到不管基底是不是 $e_1, e_2, \dots, e_n$ ，都會對，這裡 S2 理解錯誤。Cor 這個證明本來就只談標準基底底下的事，至於其它基底的情況，會在後面用別的定理來說明。S2 感覺講到錯亂了。

R 那我想問一下最後兩句話你認為它在說什麼？

S2 就這裡是只看基本矩陣，然後這裡是看到，不只是基本矩陣，而是整個 x 。

R 整個 x ，那你寫的是基本矩陣還是整個 x ？

S2 前面是基本矩陣，後來推到 x ，這裡是比較偏向 x 。

R 這裡是 x ，那哪邊是基本矩陣？

S2 就 e_1 到 e_n 。

就是它前面是先講基本矩陣，那可以把 x 換成類似基本矩陣乘以一個係數相加。

R 所以你認為 and so 到 of R_n 這段是在講說 x 可以拆成基本矩陣相加？

S2 這裡是先證說基本矩陣的 A 可以拆，就是 T of 基本矩陣會等於 Ax ，就是這裡是先講，這裡的 x 是基本矩陣。

(引自 S2 訪談 S2-06)

對於整個證明的命題，S2 能清楚的描述，且能把 Cor 的證明轉換成數學式子寫下來。

R 那你的證明會怎麼寫？你覺得你寫得出來，但是可能會有一些小瑕疵，那你可以寫寫看你會怎麼寫嗎？萬一考試遇到這一題，你會怎麼把它寫下來？在你開始證之前我先問一下喔，你覺得它要證什麼？

S2 就 $T(x)=Ax$ 。經過線性變換後可以找到一個矩陣 A ，把它表示出來，

只要 x 乘上它就會是這個的線性變換。 $T(x)$ 是 x 經過 T 的線性變換，那可以把 T 用一個矩陣表示出來，而那個矩陣是 A 。

(引自 S2 訪談 S2-10)

R 喔，好，那你寫一下你的證明。

S2 (34:38~37:32, S2 書寫中) 大概是這樣。

R 這個是 T ?

S2 $Te1$ 。

R (R 閱讀中)我問一下喔，這一串東西是這個嗎?

S2 嗯。

R 然後這是乘 x 是不是? 這個就是這個?

S2 嗯。

R 那接下來，這一步到這一步是什麼意思? 你只是在?

S2 $T(x)$ 可以把它換成某個東西乘以 x ，那這個東西就是 A ，所以 A 就是這個樣子。

R 那為什麼在這裡就沒有寫中括號了?

S2 喔，少寫了一個。

R 喔喔，是少寫，原來是這樣，所以你認為這個證明，就是這一個過程?

S2 嗯。

(引自 S2 訪談 S2-11)

S2 能說出 $T_A(x) = Ax$ 的用途是先假設一個函數等於 Ax ，再去證明 T 和 T_A 是一樣的，但是 S2 不清楚為何不直接證 T 就是 Ax ，還要多假設一個 T_A 。

R 好，那我想問你啊，剛剛你在讀這個證明的過程中，你有沒有曾經哪個地方是看不懂的? 後來經過什麼樣的過程後就看懂了。

S2 我一開始看不懂它 TA 在做什麼?

R 哪裡哪裡? 例如說哪裡?

S2 譬如說這個 TA 。

R 就是證明的一二三，第三行的 TA ，那你後來有看懂嗎?

S2 (思考一下子) 也還是沒有很清楚。

R 你覺得現在還是不清楚，為什麼你會覺得不懂這個?

S2 因為它是證明 $T(x)$ 會等於 $TA(x)$ 。

- R 然後呢？
- S2 就不知道為什麼要多設一個。
- R 你不知道為什麼要多設一個 $TA(x)$ ，可是但反正也就證的出來。
- S2 感覺，就可能這個就還是會有一些問題吧。
- R 那除了 TA 這個原本不懂以外，其實你現在還不是很懂，到底為什麼冒出這個，那還有沒有其它地方是你不懂的？後來有讀懂的？本來一開始開始讀的時候沒有讀懂？你第一次看的時候有沒有哪裡卡住的地方？些微卡住也算。
- S2 (思考一下下) 應該沒有了吧。
- R 所以就只有 TA 覺得它很奇怪？
- S2 TA 感覺它是先設一個 TA 這個變換，然後再證明這個變換就是 $T(x)$ 。
- R 嗯，那你覺得它先設的 TA 這個變換，是個什麼樣的變換？
- S2 它先設 $TA(x)$ 就是 Ax 。
- R 它說這兩個就是 Ax ，然後再去說？
- S2 嗯， TA 跟 T 是一樣的。
- R 然後？
- S2 然後就證出來了。
- R 證出什麼？
- S2 證出 $T(x)$ 就是 Ax ，因為這裡就指說 $TA(x)$ 是 Ax ，就是只要證明 TA 和 T 一樣，然後就證完了。

(引自 S2 訪談 S2-12)

S2 自己覺得自己對於「 x 」這個符號表徵有障礙，他不知道 x 表示的到底是

$$T(e_1) \text{ 還是 } \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} \text{ 這個，但他講一講之後突然覺得是 } \begin{bmatrix} 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \\ & 0 & 3 & 0 \\ & & 0 & 4 & 0 \\ & & & 0 & 5 & 0 \\ 0 & & & & 0 & 6 \end{bmatrix} \text{ 這種}$$

瘦長型的矩陣，他利用矩陣相乘的運算規則和 Cor 條件裡的 $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ，判斷出 x 正確的表示方式。他是有能力從命題給的資訊去思考他不確定的東西真正的意義為何的：

R 這裡的 x 是基本矩陣，那我可以問你，什麼叫基本矩陣嗎？你可以舉例給我看看嗎？

R 這個 1，這邊是？

S2 中間都是 1。

R 所以你的意思是說對角線都是 1，其他位置都是 0 的這個矩陣叫做基本矩陣，你認為它現在講的 x ，這個粗體的 x ，就是 $TAx=Ax$ 這個粗體的 x 你認為它是基本矩陣。

S2 嗯。

R 嗯好，然後？

S2 然後之後這裡是把這個都加上係數。

R 加上係數是？

S2 就假設 x 是 123456。

R 123456？

S2 這個的係數是 1，這個的係數就會 2，就 10...

R 你可以寫在這裡。(R 拿紙給 S2)

S2 其實我不太會講。

R 沒關係沒關係，你盡量寫，這樣我就可以知道你的意思。

S2 就 $10\cdots 0$ ， $010\cdots 0$ ，然後一直下去，這個的係數就會 1..2..3..4..5..6，這個乘 1，加這個乘 2，加這個乘 3，加這個乘 4，加這個乘 5，加這個乘 6，就會是這個 x 。

R 喔，你的意思是不是這樣？等我一下喔，你的意思是說 x 是 123456，然後你的意思是說這個東西可以寫成 $10\cdots 0$ 然後 $010\cdots 0$ 這樣加，然後你說 1 到 6 是前面的係數，是這樣的意思嗎？

S2 對。

R 好，再來呢？你說這個 x 是 $TA(x)=Ax$ 的那個 x 的意思？還是什麼？我不太確定。

S2 就是這樣的意思。

R 可是你剛剛不是又說 x 其實是一個矩陣，對角線數字是 1，其它位置都是 0。可是你這邊寫的 x 是 123456，是直的這樣下來，好像跟你剛剛講得不一樣，你的意思是哪一個？

S2 比較偏向這個。

R 你說 123456 那一個，所以你認為應該是 123456 這個，不是對角線都是 1 的這種，還是都可以？

S2 就可能這樣子換過來，就是 123456 其它都是零。

R 你的意思是說 123456 也等同於對角線數字是 123456。

S2 是不會相等，但可以寫成這樣，就方便看之類的。

R 所以這個直的 123456 不會等於這個？

S2 嗯。

R 但你認為可以看成這種？

S2 嗯。

(引自 S2 訪談 S2-07)

R 哪裡哪裡哪裡？你說粗體的 x？

S2 恩，就這樣的表達，表示方式。

R 本來以為你自己懂了，然後後來又覺得不懂，那為什麼後來會覺得不懂？是因為我問你嗎？

S2 對，那就拆開跟分開來就有差，不知道怎麼寫，符號跟數字寫起來感覺就會差很多。

R 符號跟數字，就這個數字跟那個符號？

S2 它有的時候直接寫一條線，有的時候是把整個都寫出來。

R 整個都寫出來，就是寬寬的矩陣的樣子。

S2 對，看了感覺就有差。

R 那你現在，目前讀到現在為止，你懂那個粗體的 x 是什麼意思了嗎？

S2 嗯

R 是什麼意思？你覺得是什麼意思？

S2 應該是寬寬的吧。

R 你說應該是長的寬寬的，不是瘦瘦長長？

S2 我想一下（思考一下下），應該是瘦的。

R 為什麼你突然又覺得是瘦的？你剛剛思考了什麼，可以跟我說嗎？

S2 就我在想說要怎麼乘？

R 哪裡哪裡？哪裡怎麼乘？

S2 我在想說如果是數字要怎麼乘。

R 跟誰乘？

S2 跟 A。

R 跟 A 乘，好，然後呢？

S2 再想一下。

R 好，你想，沒關係。

S2 (S2 思考中) 就感覺乘出來，原本是 n 乘 1 ，乘完會變成 m 乘 1 。

R 原本是 n 乘 1 ，乘出來會變成 m 乘 1 ，什麼意思？你可以寫在空白的地方。

S2 原本是 x_1 到 x_n ，乘完之後會變成 x_1 到 x_m 。

R 為什麼你會做這樣的推論？

S2 因為是 T of R_n 到 R_m 。

R 喔喔，這裡喔，一剛開始這裡，好，那然後勒？

S2 所以是直的，不是寬的。

R 所以應該是要直的跟 A 乘才會得到。

S2 應該是這樣子，有 n 個數字。

R n 個數字跟 A 乘，才會得到 m 個？

S2 恩。

(引自 S2 訪談 S2-13)

S2 自己覺得自己對於 $T(e_1)$ 這個符號有障礙，如果矩陣裡面的元是用 $T(e_1)$ 來表示，會不知道該怎麼去運算 Ax 。

R 好，那除了這個 x 的部分，還有沒有其它你原本以為懂，但後來又不太懂的？

S2 差不多是乘的順序會搞不太清楚吧。

R 矩陣在相乘的時候嗎？

S2 寫成符號後會很容易搞不清楚。

R 寫成符號，就是這種只用一個 x 代表的？

S2 像這種只有一條線的。

R 一條線，那你覺得一條線是什麼意思啊？

S2 就一行的第一個到第 n 個.....第 m 個。

R 是直的？

S2 恩

(引自 S2 訪談 S2-14)

在 $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ 此符號中，S2 理解這符號的意思是原本 $n \times 1$ 的，乘完會變成 $m \times 1$ ，沒有談到為何用 $\mathbb{R}$ 。可惜的是，研究者沒追問他，什麼東西是 $n \times 1$ 。

R 好，那我可以問你，為什麼它要寫 T 是 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^m$ 嗎？它符號的意義。

S2 原本是 n 維變 m 維。

(引自 S2 訪談 S2-20)

在 linear transformation 中，S2 認為能寫出 $T(ax_1 + x_2) = aT(x_1) + T(x_2)$ 這個式子就是線性變換，不過他寫的時候其實不太確定，而且也不瞭解這裡為何要提到線性變換，可是他在證明 $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ 時，有用到線性變換。這裡研究者其實可以追問 S2，線性變換是在形容誰，或者在他證明 $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ 時，去問他為何這一步可以推到下一步，更能確定 S2 的理解狀況。

R n 維變 m 維，那為什麼這個敘述它這邊要特別寫說 T 是 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^m$ ，而且是 linear transformation，你覺得這句話告訴你什麼？就是什麼叫做 linear transformation？為什麼它要特別這樣講？

S2 什麼是線性變換嗎？

R 嗯。

S2 是 T of ...，就是...

R 你可以寫。

S2 不確定。

R 沒關係，你就照你所想就好。

S2 (S2 把式子寫在白紙上)

R 你認為可以表示出這樣的式子的就是線性變換？

S2 恩。

R 好，那這邊為什麼要特別提到線性變換？

S2 不知道。

(引自 S2 訪談 S2-21)

在 let A be the $m \times n$ matrix whose j th column vector is $T(\mathbf{e}_j)$ 這句話中，S2 描述這句話是很簡略的說明怎麼表示 A ，算是抓重點來講，從訪談過程可以判斷他理解這個句子。

R 好，沒關係。然後，那接下來下一句話，A be the m 乘 n matrix，它

第 j 個 column 是 $T(e_j)$ ，它這句話是在講，描述什麼？

S2 怎麼表示 A。

(引自 S2 訪談 S2-22)

在 $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ 中，S2 還是認為 T 是矩陣，左邊之所以有括號，是因為小括號代表某一種變換，他還是錯誤解讀，沒發現 T 是函數。

R 最後，then $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ 。我想問一下為什麼它說 $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ 在左邊有小括號右邊沒有小括號？

S2 右邊是兩個矩陣，左邊是一個矩陣經過某一種變換。

R 所以你認為小括號代表的是某一種變換？

S2 恩。

(引自 S2 訪談 S2-23)

研究者詢問 S2 為何證明裡某些地方是粗體，例如： $\mathbf{x}$ ，某些地方不是粗體，例如： A 和 T 。

R 好，那我想要問一下，那你知道為什麼 $\mathbf{x}$ 要特別是粗體嗎？為什麼 A 跟 T 都不用？你會發現這個證明裡面有些地方是粗體，為什麼這些地方要是粗體的？

S2 不知道的嗎？就 $\mathbf{x}$ 是都，就是 $\mathbf{x}$ 是要代進去的。

R 所以要代進去的東西，你認為就要用粗體表示？

S2 恩。

(引自 S2 訪談 S2-24)

在研究者詢問的同時，S2 身體往前傾，仔細觀看證明裡的文字，研究者猜測，或許 S2 從來沒發現字體有粗細之分。後來，S2 有點不太確定的說，要代進去的東西，就要用粗體表示。顯示他不清楚 $\mathbf{x}$ 是矩陣也是向量。

在第三段最後一行的 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ，S2 能正確說出 $\mathbf{x}$ 是從 $\mathbb{R}^n$ 變成 $\mathbb{R}^m$ ，所以一開始的 $\mathbf{x}$ 在 $\mathbb{R}^n$ 裡面，講得十分正確。

R 好，那為什麼這邊會說，for each column vector $\mathbf{x}$ 屬於 $\mathbb{R}^n$ ，為什麼要寫 $\mathbf{x}$ 屬於 $\mathbb{R}^n$ ？

S2 因為 $\mathbf{x}$ 原本是 $\mathbb{R}^n$ 變 $\mathbb{R}^m$ ，所以 $\mathbf{x}$ 原本要在 $\mathbb{R}^n$ 裡，之後會變在 $\mathbb{R}^m$ 。

R 喔，它是 R^n ，它在表示這個，好。

(引自 S2 訪談 S2-25)

在 Recall that for any matrix A , Ae_j is j th column of A 這句中，S2 認為是在說明 A 是什麼東西，但此句談的是 Ae_j 是 A 的第 j 行才對，S2 理解錯誤。

R 然後，證明的第一句話 Recall that for any matrix A ，推到這裡，然後為什麼它是先講這句到這一句？

S2 它在說明 A 是怎麼樣的東西。

R 叫你再回去看一次？好，ok。

(引自 S2 訪談 S2-26)

(七) 比較

從上述結果可知，在不同先備知識學生中，敘述「let A be the $m \times n$ matrix whose j th column vector is $T(e_j)$ 」與「Recall that for any matrix A , Ae_j is j th column of A 」是所有學生都能理解的。而對於「Theorem 2.7」這個重要等式，只有 AH_CHPH 類型的學生能理解。在「 $Ae_j = T(e_j)$ 」中，只有 AL_CHPL 類型的學生不理解。在「 $T_A(x) = Ax$ 」中，只有 AH_CHPH 類型的學生 S5 不理解，其餘請見表 4-1。

表 4-1

不同先備知識學生理解與不理解之處

項目	物件	理解	不理解
專有名詞	linear transformation	AH_CHPH	AH_CHPL
		AL_CLPH	AH_CLPL
			AL_CHPL
符號	$T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$	AH_CHPH	AH_CHPL
		AL_CHPL	AH_CLPL
		AL_CLPH	
	$T(x) = Ax$	AH_CHPH	AH_CHPL
		AL_CLPH	AH_CLPL
			AL_CHPL
	$Ae_j = T(e_j)$	AH_CHPH	AL_CHPL

	AH_CHPL	
	AH_CLPL	
	AL_CLPH	
$T_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$	S5	AH_CHPL
	AL_CLPH	AH_CLPL
		AL_CHPL
		S6
$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$	AH_CHPH	AH_CHPL
	AL_CHPL	AH_CLPL
		AL_CLPH
$\mathbf{x}$	AH_CHPH	
	AH_CHPL	AH_CLPL
	AL_CHPL	AL_CLPH
$T(\mathbf{e}_1)$	AH_CHPH	
	AH_CHPL	AL_CHPL
	AH_CLPL	
	AL_CLPH	
敘述	let A be the $m \times n$ matrix whose j th column vector is $T(\mathbf{e}_j)$	所有人
	Recall that for any matrix A , $A\mathbf{e}_j$ is j th column of A	所有人
證明的第三段	AH_CHPH	AL_CHPL
	AH_CHPL	AL_CLPH
	AH_CLPL	
Theorem 2.7	AH_CHPH	AH_CHPL
		AH_CLPL
		AL_CHPL
		AL_CLPH

從表 4 - 1 歸納可知，AH_CHPH 類型的學生，除了 S5 不知道 $T_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ 是定義以外，其它物件都是理解的，這可以說明 AH_CHPH 類型的學生對於此證明題的理解程度較高。

第二節 整體理解狀態在自我與外在評估上的差異

(一) AH_CHPH 學生：S5

S5 在自評自己整體的理解狀態時，認為自己大致上應該讀懂了證明題，雖然 S5 只說大致上讀懂，但 S5 在解釋證明時，能將證明區分為兩個階段來解釋，概念非常清楚，研究者認為 S5 是理解證明題的。

R 你讀完了

S5 嗯

R 那你覺得你有讀懂嗎?

S5 哦..大致應該懂

R 大致應該懂，好那好你可以稍微跟我說明一下你覺得這個證明在說什麼嗎?

S5 欸...這個證明大致分兩階段，第一個階段，它想要把這個 Ax 當作是一種線性變換，然後就是它，首先要先證明的就是 Ax 確實是可以寫成一個線性變換，然後第二件事情它想要說的是這個線性變換剛好就會是就是你把 x 向量作線性變換之後結果

R x 向量作線性變換之後結果

S5 嗯對

(引自 S5 訪談 S5-03)

探究其原因，S5 在放聲思考的過程中，遇到不太理解的地方時，會重複讀四次，如果讀了很多次還無法理解，會嘗試把他寫下來，並且，在思緒開始混亂之後，會停下來先做整理，再繼續閱讀，非常清楚自己做了哪些事，以及要證明的目標是什麼，所以在訪談過程中都能對答如流。

and so that and so T and the linear transformation TA given that on the standard basis 所以從 T ， e_1 到 e_n 這件事情都獲得欸寫一下好了，欸所以 e_1 的話， $Ae_1=Te_1$ 、 $Ae_2=Te_2$ $Ae_n=Te_n$ 欸然後 by theorem 2.7，and the comment following this theory，we know that then $T(X)=TA(X)$ for every x 屬於 R_n ，comment following comment following this theory，we know that

$T(X)=TA(X)$ for every x 屬於 R^n that is $T(X)=AX$ for 還是翻一下好了。
(引自 S5 放聲思考 S5-02)

現在我鎖定一個 $T(X)$ 是一個 linear transformation 對所以它現在第一個是說所以第一件事情是這樣 AX 是一個 linear transformation 好，第二件事情是說這個 linear transformation 這個 linear transformation 這個很不巧地剛好跟 linear transformation TAX 剛好等於 TX 然後它用的是 e_1 它們如果要把它們送出去的線性組合，是唯一的 $TA(e_1)$ 嗎? $b_1=e_1$ that 它可以寫成它的線性組合它可寫成它的線性組合 嗎...所以這個線性組合 and the comment following this theorem. 嗎...

(引自 S5 放聲思考 S5-02)

表 4 - 2
學生 S5 自我與外在評估整體理解狀態的差異

理解狀態 \ 評估者	自我	外在
完全不理解		
偏向不理解		
理解與不理解各半		
偏向理解	大致應該懂	
完全理解		能將證明分段解釋

(二) AH_CHPH 學生：S6

S6 閱讀速度極快，只有在讀到定理 2.7 的時候有慢下來，因為不知道定理 2.7 的內容。

好，我應該不需要這個 A 是一個 m by n ，然後它的第 j 行是 Te_j 然後 T 乘這樣然後那麼 $Tx=x$ 對於說 x 在 R 裡面。然後唯一 A 跟 Ae_j 是第 j 行的 A ，這表示 at once if A is the matrix described in equation2 equation2 then are the 喔，這個喔，那麼 Ae_j 的話就是 Te_j ，對 T 來說，那麼給這個這樣由定理 2.7，定理 2.7 是什麼鬼啊？那麼 the comment following this theorem，we know that then 對、嗯就在講廢話，呵呵呵呵定理 2.7，這是第幾節的？2.3（翻書）...定理 2.7 定理 2.7，會不會是有漏的那邊啊？沒有在這裡，我現在其實已經邏輯上了解它在講什麼了耶~

（引自 S6 放聲思考 S6-02）

不過，後來他用自己的邏輯理解整個證明題，很快的就自評自己整體是理解的。研究者從 S6 能陳述這個證明題的命題在說什麼，且用自己的方式把 $T(x)=Ax$ 證明出來，判定他是理解的。

R 好，那可以用你的話告訴我這個定理在講什麼嗎？

S6 就是它說如果 T 是一個那個線性轉換嘛，然後它把它令成這個樣子的話，那 A 就會是 A 就是對應於 T 的矩陣的那個那叫什麼？standard 什麼什麼 matrix 的那個。

R standard matrix

S6 是這樣嗎？

R 沒有就你認知的。

S6 反正就看到字我認得就好了嘛哈哈哈哈哈

R 你是問讀音是不是這樣唸？還是，你是問說那個名詞是不是叫 standard？

S6 對。

R 喔好。

S6 因為如果說沒有記很熟，就是看到會知道。

R 嗯好，然後再來勒？所以你認為定理就這樣而已。

S6 沒有，定理的部分到這裡啊，證明當然不是這樣啊，我的想法證明裡面不是這樣啊。

R 好，那你說說。

S6 因為你對於任意的 x 嘛，你一定可以拆成幾倍的 e_1 幾倍的 e_2 啊，然後再 linear transformation 裏面也全部都是可以拆開啊。

R 嗯。

S6 加減法跟純量乘積全部可以拆開。

R 嗯嗯嗯。

S6 然後你就可以用這些來組成啊。

R 用那個 Te_1 、 Te_2 、 Te_n 。

S6 對，然後就結束了。

R 就結束了？

S6 對啊。

(引自 S6 訪談 S6-04)

探究原因，為何 S6 理解證明這麼迅速，S6 自己談到，因為他自己發現在結論裡，最重要的是「對所有的 x 都對」這句話。那該怎麼把陌生的 x ，這個很大的範圍縮小。S6 想到在 linear transformation 裡運作的、最熟悉的就是 e ，而且證明裡面也提到 Te_1 、 Te_2 到 Te_n ，所以自然而然會想把 x 拆成 e_1 、 e_2 …。因此，他也不需要知道定理 2.7 的內容，就可以理解證明了。

R OK，那證明的話你也是這樣一行一行的讀下來嗎？邏輯上都沒有遇到困難的地方？

S6 沒有。

R 而且你剛剛跟我分享的，你說一個 x 可以寫成某倍的 e_1 跟某倍的 e_2 。

S6 嗯。

R 這個是你其實還沒在看筆記之前就知道，大概是用到這個？

S6 嗯。

R 2.7 可能是用到這個嗎？

S6 嗯，我的想法是這樣啊。

R 為什麼你會想到這個關鍵？

S6 這個證明就是這個關鍵啊。

R 是因為你曾經讀過這個證明嗎?

S6 嗯...我有經讀過這個證明嗎?

R 不然你怎麼會有那個這個關鍵的想法跑出來?因為有些人會讀不懂,就是他可能沒有辦法聯想到這樣子的東西,他就必須要去查定理 2.7 是什麼,確確實實的知道才有辦法讀懂這個證明。

S6 應該是這樣著手,就是在這個結論裡面最重要的就是對於所有的 x 啊。

R 你說 $T(x)=Ax$?

S6 對於所有的 x ,啊你要怎麼樣把對於所有的 x 轉換到你熟悉的東西啊,就這樣。

R 那你怎麼會想到把它拆成 e_1 跟 e_2 的倍數去作相加?

S6 嗯...

R 你要處理 x 可能有很多方法嘛。

S6 但我們熟悉的能在 linear transformation 裡面運作最簡單的就是 e 啊, 嗯,應該是這樣,而且更何況定理裡面它已經提及 Te_1 、 Te_2 到 Ten 。

R 然後你自然而然就想到把它拆成 e_1 、 e_2 ? OK, 好, 那你剛剛在讀的過程中你有沒有運用哪些策略來幫助你讀懂?

S6 挑重點看吧。

R 挑重點看, 那什麼是你說的你覺得的重點?

S6 我覺得的重點嗯....

R 例如說, 你就會特別跟我說對所有的 x 就是重點, 啊這裡符號、啊名詞這麼多為什麼你認為對所有的 x 就是重點?

S6 因為它不是只是就是它已經、它已經是一個很大的範圍了, 那我們必須縮小範圍啊!

R 一個很大的範圍必須縮小範圍?

S6 縮小範圍到 e_1 、 e_2 到 e_n 然後我才能進一步作成這個證明。

R 好。

S6 你對於一個 x , 陌生的 x 來沒有 e_1 到 e_n 當然沒辦法做事啊。

(引自 S6 訪談 S6-11)

表 4 - 3

學生 S6 自我與外在評估整體理解狀態的差異

理解狀態 \ 評估者	自我	外在
完全不理解		
偏向不理解		
理解與不理解各半		
偏向理解		能用自己的邏輯證明命題 能抓到證明的核心
完全理解	我現在其實已經邏輯上了 解它在講什麼了耶	



(三) AH_CHPL 學生：S1

S1 在自評自己整體的理解狀態時，認為 Cor 的命題很顯然，但當 S1 跟研究者解釋 Cor 的內容，解釋到一半，研究者聽不太懂，向 S1 發問，S1 重看 Cor 的命題以後卻說有點困惑了，不知道 Cor 想要我們證明什麼。

R 所以妳現在在看證明嗎？還是在看這個？

S1 就剛看完證明，因為它這個有用到這個。就再看一次這個證明，是.....，恩， Ae ， A 乘以 ej 等於 $T(ej)$ (喃喃自語)

R 妳讀了差不多了嗎？

S1 我只能用前...

R 哈?妳可以說沒關係，妳有什麼想法？

S1 我就是好像那時候我讀這個的時候，我就把它感覺它有點像是...

R 有點像是什麼？

S1 像是 trivial 的感覺。

R trivial！怎麼說怎麼說？分享看看。

S1 因為那時候定理 2.7 有講到，我們假設 B 是這樣子的 basis，所以，然後他就會讓它，把這個 basis 放到這個線性變換裡面呢，一樣也會是線性，也會形成一個線性變換，然後這個就是它的 vector 這樣，所以就感覺，再把它放到一個新的 A 矩陣，然後長這樣。

R 妳的意思是說：它其實也是把很多向量放到.....是指這個嗎？我有一點不懂妳剛剛說的意思，可以再說明一下嗎？

S1 $Ax...$ (沉默)， $T...$ 。

R 妳現在是在看哪裡？看到哪裡？

S1 現在喔？

R 妳現在在看哪一塊，因為妳沒有指著哪裡，我就不太確定妳在看哪裡。

S1 因為我現在是有點困惑，這個。

R 困惑？妳困惑了什麼？可以告訴我嗎？

S1 就是有點不太懂它，它想要我們證明什麼？

R 有點不太懂要證什麼，好，所以妳現在在確認？

S1 因為它上面就給了一個矩陣 A ，然後它是，它的行是從 T 的變 $T(ej)$

形成，所以 $T(x)$ 會等於 Ax ，對所有 k 屬於 R^n ， $x \dots A \dots$ (喃喃自語)

(引自 S1 訪談 S1-05)

研究者詢問 S1 在確認什麼，S1 開始自言自語想一些東西，研究者請 S1 將思考的東西寫下來，於是，S1 開始在白紙上寫上一些式子的運算過程，檢驗他的想法。過了一陣子以後，S1 說他還是不知道該怎麼辦，他有點不懂 Cor 在講什麼。

R 我可以問一下妳剛剛有稍微比了一下，妳是比了什麼東西？妳可以把它寫下來嗎？

S1 (沉默思考)因為雖然這個 x 和這個 x 應該是代表同一個東西。

R 妳覺得它們是一樣的？

S1 對，所以這個 A 和 T 應該，就是把 T 用 A 表示。

R 所以妳目前在思考這個？

S1 恩，然後...

R 所以妳剛剛在畫東西，是畫一個 A 是不是？

S1 恩， $A \dots$ 然後 A 是長這樣， $x \dots$ 等於... (在白紙寫上式子)

R 如果不够寫的話，這邊還有。

S1 好， $T \dots A \text{ inverse } B$ 18:29... 恩，感覺就是把它展開。

R 妳感覺怎麼樣？

S1 就先把 x 寫成寫成一個向量，一個行向量。

R x 是這個粗體的 x ？

S1 對，把它寫成行向量，然後就把它乘開來，這邊就是 Ax ，然後前面如果 $T(x)$ 的話，那就應該 T 到 $T(x) \dots$ ，所以定理是說這個等於這個。

R 妳說定理是講 T ，然後把 x_1 到 x_n 會等於後面 $T(e_1 x_1)$ 到 $T(e_n x_n)$ ，是不是這樣？

S1 對。

R 就是妳覺得它在講這兩個東西是一樣的。

S1 恩。然後因為 A 又是這個， $A \dots T \dots$ (沉默)

R 妳現在在想什麼？

S1 我也不知道我該怎麼辦耶，我現在有點不懂它在講什麼。

R 有點不懂它在講什麼？妳是說證明有點不知道它在講什麼？還是整個都不知道它在講什麼？

S1 恩，應該是說，我知道這 T 的線性變換可以用 x 來表示，來呈現出來，可是現在，有點。

R 哪邊不太懂啊？

S1 (沉默)

(引自 S1 訪談 S1-06)

研究者認為在訪談的過程中，S1 有懂到不懂→自我解釋→動筆在紙上澄清證明內容→到後來還是覺得不懂的狀態改變，研究者認為 S1 其實沒有理解這個證明，為什麼自我評估與外在評估會有差異，S1 的理解狀態這麼容易被改變，研究者認為可能的原因是，S1 在閱讀的過程中，比較少使用自我提問的策略，沒有強化句子間的連結、思考邏輯關係。

表 4 - 4
學生 S1 自我與外在評估整體理解狀態的差異

理解狀態 \ 評估者	自我	外在
完全不理解		
偏向不理解		
理解與不理解各半		無法解釋內容 不知道要證什麼
偏向理解	像是 trivial 的感覺	
完全理解		

(四) AH_CLPL 學生：S3

S3 在自評自己整體的理解狀態時，認為自己讀懂了證明題，當研究者請他說明內容時，發現 S3 雖然知道命題敘述在證什麼，可以清楚說明，但在解釋證明過程時，講得很模糊，連研究者都聽不太懂。

R 你讀懂了？

S3 讀懂了。

R 你覺得你讀懂了？

S3 對阿。

R 好，那你可以跟我說一下，那你認為這個證明在講什麼嗎？

S3 就是說，他這邊有一個線性變換，

R 恩。

S3 就是從一個 R_n 送到 R_m ，

R 恩。

S3 然後它可以先從基本 1000 然後開始代到 T 裡面，

R 對。

S3 然後把它送過去，

R 恩。

S3 然後就會，就會變成是 A 的第一個 column 就可以把它寫成那個 A 矩陣的第一個 column 就是由 T 的，然後 e_1 送過去的，然後他。

R 你說 e_1 經由 T 送過去了。

S3 然後可以寫成 A 的第一個 column。

R 恩。

S3 然後再由第 2 個送過去， e_2 送過去，

R 恩。

S3 用 T 送過去，然後就可以再把它寫成 A 的第二個 column，然後一直把它送送送過去，然後所以這個 transformation 就可以寫成它的 Tx 就可以寫成一個矩陣然後乘以 x 。

R 恩。

S3 好，再來。

R 好，你認為定理的敘述在說這件事情。

S3 沒錯。

(引自 S3 訪談 S3-04)

R 好，那你可以告訴我它在證什麼嗎？

S3 它在證什麼喔？

R 恩。

S3 它在證，那個它的 Te_l ，為什麼它的，寫成的第一個 column 就會是 A 的第一個 column，應該是這樣。 Ae_j ， A 乘上，這個 A 乘上 e_j ，會等於 T 的用 e_j 送過去，它在說明這個。

R (輕笑)然後呢然後呢。你可以繼續說沒關係。

S3 然後，它，恩。然後它就可以寫成這樣子，然後它說在 2.7

R 哪樣子？哪樣子？哪樣子？

S3 怎樣子喔？

R 你剛剛說可以寫成哪樣子？(筆聲)

S3 可以寫成，我想想喔。(翻書聲)恩。

R 第幾行？

S3 這邊，它的，

R A

S3 A 的 e_j

R Ae_j

S3 然後，等於 T 的 e_j 。

R 恩。

S3 (筆聲) A 的 e_j 會寫成 T 的 e_j ，噢， A 乘上 e_j 的話，就會是那個 A 的那個第 e_j 的 column，阿那個 T_{ij} 就會，它，原本我們就是把 Te_j ，然後寫成，它的第 j 個 column。

R 恩。

S3 恩。

R 然後，再來。

S3 然後再來，再來就把它寫成一個，就可以寫出 A 來了。

R 噢，好。就，就，證明就這樣結束了嗎。

S3 對阿。

(引自 S3 訪談 S3-05)

不過 S3 有談到，如果能看到標題，就可以知道這個證明在講什麼，然後能想出他的證明怎麼證，這樣就是理解了。研究者認為 S3 還沒達到他自己認為理解的狀態。

R 那，那為什麼你會覺得你讀懂了，你是怎麼去確認你真的讀懂這個東西。

S3 就，看標題，然後它說，恩，它說這個線性變換它可以寫成由一個基本矩陣送過去，就是 Tx ，然後可以寫成一個矩陣然後乘上 x 。

R 喔，你覺得標題其實就在告訴你這個。

S3 對對對對對。

R 那。

S3 就。

R 恩你說你說。

S3 就知道標題在幹嘛就可以了。

R (笑)這麼厲害，我沒有這樣的能力。

S3 (笑)沒有啦。

(引自 S3 訪談 S3-07)

表 4 - 5
學生 S3 自我與外在評估整體理解狀態的差異

理解狀態	評估者	
	自我	外在
完全不理解		
偏向不理解		
理解與不理解各半		證明過程講得很模糊
偏向理解		
完全理解	讀懂了	

(五) AL_CHPL 學生：S4

S4 在放聲思考閱讀完以後，跟研究者分享他所看到的，而且會不自覺的詢問研究者，他的理解是否正確。

R 你讀完了?

S4 嗯

R 那你這次感覺怎麼樣?你覺得有懂它在講什麼嗎?

S4 我可以先講嗎?就是，它它題目的意思是說

R 嗯

S4 就講一講這個，然後它要證什麼?

R 講一講上面啊

S4 然後它說: $T(x)=Ax$

R 嗯

S4 然後，它說 病……

R 你現在是想要先跟我分享你看到什麼對不對?

S4 對

R 好，OK

S4 就是它，它說它這個等於 Ax 然後

R $T(x)=Ax$

S4 然後它這裡講說，講那個那個那個 T 的這個東西會等於

R $T(e)$

S4 會等於 Aj ， A 裡面的一個 j 的一個 column

R column

S4 那所以它是，所以如果我是說 T 的一個隨便

R 嗯

S4 對啊，就想說 e_1 好了。

R 好

S4 它說 e_1 嘛，啊就會等於這個，啊等於 A 的 A 的 e_1 ，是這個意思嗎? A 的 e_1 是說等於它就是說 A 的這個第一個 column 這樣嗎?

R 你現在是在問我?

S4 嗯

- R 呵呵呵但是我現在不能回答你。
- S4 好
- R 就是你告訴我你覺得的就好了。你現在猜測，你剛剛說你猜測什麼？
- S4 就是說它，它 T 的 e_1 嘛，然後會等於 Ax 然後這裡說 A 的這個會
- R A 的，欸，證明的第一行說 A 的
- S4 A 的什麼 e_j ，它是 j 的 column，那那這個是要證明什麼？我是要問這個。
- R 所以，你是覺得證明的第一行說 $A(e_j)$ 是 A 的第 j 個 column？那為什麼敘述的最後一行又說 $T(x)=Ax$ ？
- S4 嗯，就是
- R 其實你不太理解吧？還是？
- S4 就是說好那如果我今天假設是因為 x 嘛我就說它如果是 e_1 ，啊就等於 $A(e_1)$ ，然後這個是 A 的第第一個 column 嘛，對不對這個？
- R 你是在詢問是不是這樣的意思是不是？
- S4 對啊
- R 那你現在覺得是嗎？目前
- S4 是吧？我是這樣覺得。
- R 你猜測應該是這樣的意思？
- S4 嗯
- R 好，那……
- S4 大概大概大概知道它在幹嘛，因為也會算。
- R 喔~真的嗎？
- S4 不一定
- R 所以你剛剛要跟我分享的就是這個？
- S4 嗯
- R 剛剛你講的這個部分
- S4 對啊
- R 好，所以你整個讀完的感覺是你覺得大概知道在幹嘛？
- S4 嗯

(引自 S4 訪談 S4-03)

特別的是，當研究者請他自評自己整體的理解狀態時，他認為自己大概讀懂了證明題，也知道怎麼算。但當研究者細問裡面的專有名詞和敘述時，發現他有

很多誤解的地方，而會誤解，多數來自於他看錯英文單字，例如：他一直認為 Eq.(2) 是例題 2，說網路上查到的用法是這樣，研究者認為，他應該是把 Eg.(2)看錯，g 看成 q，所以一直有誤解。

R 對啊，為什麼 $Ae_j = T(e_j)$?

S4 嗯....那時候是覺得說它這邊都已經講了 $Ae_j = T(e_j)$ 嘛那它這邊就說 x 屬於 R_n 裡面的

R 嗯

S4 然後就是就是屬於這個 e_j 的範圍然後所以 $T(e_j) = Ae_j$

R 所以所以是變成你套用上面的敘述 $T(x) = Ax$ 然後...

S4 嗯，應該是先用到前面這段話，就是它的這個東西

R 你說 this shows...

S4 對就是...

R 你說你覺得例題 2

S4 然後然後就會寫這個

R 嗯

S4 可是我在那邊翻好像看不出什麼還是說這兩頁嗯..我是覺得應該是用前面

R 看不出所以然

S4 前面這個東西就可以寫到這個 對

(引自 S4 訪談 S4-24)

R 例如說你剛剛那個例題 2

S4 對啊

R 如果是例題 2 應該是 Ex 吧?

S4 對啊應該是 Ex 可是不是說可是我上次看網路上有說 Eq 才是正確的

R Eq 等下喔

S4 還是

R 沒有是 Eg 就是有另外一個寫法是 Eg

S4 啊不然這是什麼?

R Equation 方程式 2

S4 方程式 2 在哪裡?

R 你剛剛沒發現有 2 是不是?

S4 有看到可是我不知道就是...

- R 你不知道這個 2 是什麼意思
S4 它突然寫個 2 啊沒有意義 喔~OK
R 欸對啊它怎麼沒有寫 1 啊
S4 它沒有 1 它只有 J
R 有道理耶為什麼
S4 還是它 1 在前面的地方?
R 有可能喔啊有有有 143 頁
S4 喔~前面就對了?
R 不是在同一個定理裡面啦
S4 它就是好了解

(引自 S4 訪談 S4-25)

另外一個例子是證明裡出現的 denote, S4 談到這個單字曾經在遊戲上看過, 應該是代表貢獻或奉獻之意, 但這個單字出現在證明裡面覺得很奇怪。

- S4 然後這個我也不懂
R 你說...
S4 donate
R donate
S4 我知道為什麼就是 donate, 就是那個我們看那個 twitch 實況都知道 donate 就是就是貢獻、奉獻。
R 你說什麼的實況?
S4 Twitch
R Twitch 是什麼?是遊戲嗎?
S4 對
R 我怎麼沒有聽過 twitch 這個遊戲啊。
S4 真的嗎?沒有 twitch 是一個, 裡面是就是很多遊戲可以看, 它就是一個給人家開實況的一個平台, 然後裡面很多遊戲, 然後每個遊戲都會有一些人去開台, 就有 donate 就是捐贈
R 捐贈
S4 或是或是
R 所以這個單字在那個
S4 然後我們之前高中學, 我記得它還有什麼奉獻嗎?還是什麼?

R 嗯嗯

S4 對

R 但是你覺得這個單字出現在這邊很奇怪？

S4 對，然後反正我我就覺得大概應該就是它講這樣然後我們就可以把它寫成這個樣子。

（引自 S4 訪談 S4-05）

研究者根據先前 S4 看錯 Eq.(2) 的經驗，猜測 S4 應該是把單字搞混，經過研究者查詢單字以後發現，奉獻應為 devote，跟證明的 denote 不同，他把 v 看成 n。

表 4 - 6
學生 S4 自我與外在評估整體理解狀態的差異

理解狀態	評估者	
	自我	外在
完全不理解		
偏向不理解		
理解與不理解各半		專有名詞和敘述誤解 (看錯英文單字)
偏向理解	大概知道在幹嘛	
完全理解		

(六) AL_CLPH 學生：S2

S2 認為 Cor 的命題就是定義，在訪談過程中，是採用邊讀邊解釋的方式跟研究者說明證明的內容。

S2 (進入閱讀) 這裡就是定義，那需要過程嗎？

R 什麼意思？

S2 它說它把這個就是定成是這樣，那這裡需要講什麼過程嗎？就只是看過去而已。

R 所以你剛剛只是看過去，你認為它是定義？

S2 恩，就是也不算完全定義啦，就是它說是 R_n 送到 R_m ，然後 x 經過這個矩陣會變成 Ax 。

R 經過哪個矩陣？

S2 T。

R T 這個矩陣，會變成 Ax 。

S2 對，所以它的 A 是這樣子，就是。

R 你說是？

S2 然後它就只是跟你說明這個是什麼東西而已。

R A ？就是？

S2 上面這裡；我還沒看證明。

R 你說說明哪個東西是什麼樣子？

S2 就是 A 長什麼樣子，因為 x 經過 T 會變成這個，所以它想知道這個 A ，所以它跟你說明 A 是這個樣子。

R 喔，好，你認為上面那個就是這個樣子，好。

(引自 S2 訪談 S2-02)

雖然 S2 給研究者一種，他理解這個證明的感覺，但當研究者細問一些符號、定義時，會發現 S2 不太清楚，也因為符號不懂，導致運算不知道該怎麼進行。研究者認為 S2 知道這個證明的方向，但並沒有對這個證明有深入的瞭解。S2 自己也認為自己應該要弄懂，但每一次都沒有完全弄懂。

S2 第一個乘它，然後第二個乘它，到最後一個乘它，就會是每一個經過 T 的變換，所以所有的經過 T 的變換就是這個乘這個。

R 這邊有點快，我不太懂你的意思。你可以直接把你舉例的那個寫下來嗎？

S2 設 x_1 到 x_n 是 x 這個矩陣。

R x 這個矩陣？ x 這個矩陣是什麼意思？

S2 這樣，這樣。（謄寫）

R 你的意思是說有一個矩陣 x ，然後它面是 x_1 一橫一橫這樣？阿那一橫一橫是什麼意思？

S2 就很多個。

R 很多個，然後用 x_1 來代表。

S2 然後這個乘上它，這個會乘上第二個，這個會乘上最後一個。

R 為什麼這個是乘上第一個，這個是乘上第二個？

S2 我好像寫反了。

R 寫反了？什麼意思？

S2 等一下我再想一下，這裡我講錯了，我重看一次好了。

（引自 S2 訪談 S2-03）

表 4 - 7
學生 S2 自我與外在評估整體理解狀態的差異

理解狀態	評估者	自我	外在
完全不理解			
偏向不理解			
理解與不理解各半			
偏向理解			理解證明的大方向 但符號、定義不清
完全理解		能把整個證明題重述	

(七) 比較

從上述的結果可知，沒有任何類型的學生自我評估與外在評估是相符的。但有些類型的學生有相同的評估狀況。例如：AH_CHPL 和 AL_CHPL 類型的學生皆為自我評估偏向理解且外在評估理解與不理解各半；AH_CHPH 的學生 S6 和 AL_CLPH 類型的學生皆為自我評估完全理解且外在評估偏向理解，其餘類型學生的狀況可見**錯誤！找不到參照來源。**。

表 4 - 8

不同先備知識學生自我與外在評估整體理解狀態的差異

自我 外在	完全 不理解	偏向 不理解	理解與不 理解各半	偏向理解	完全理解
完全 不理解					
偏向 不理解					
理解與不 理解各半				AH_CHPL AL_CHPL	AH_CLPL
偏向理解					S6 AL_CLPH
完全理解				S5	

第三節 理解狀態改變的來源與閱讀策略的關連

(一) AH_CHPH 學生：S5

1. 閱讀狀況描述

S5 一開始先看定理的敘述，大概理解敘述之後，再繼續看底下的證明。在讀證明時，會先瞭解證明的目標，要做哪些事，然後有時候看到後來會忘記要證明的東西，就會再回去看到底要證什麼。像證明裡面有談到定理 2.7，就會先回去看定理 2.7 的敘述，看完敘述以後，再把現在 Cor 有的東西，代進去定理 2.7 的敘述裡面，看會得到什麼結論。S5 在閱讀的過程中，一開始只看到 $T(v)$ 可以寫成 $T(b_1)$ 到 $T(b_n)$ 的線性組合，然後證到後來，覺得得到一個奇怪的結論，再回頭看是不是有漏看什麼，才發現漏看了「唯一」這件事。S5 認為證明的第三段寫得很醜，沒再特別強調為什麼，就說 $T(x)=TA(x)$ ，所以在看這部分時有一點點困難。S5 在讀證明時，會把證明分段，有用到以前的定理會去想，一開始看到 n 和 m 分不太清楚時，會先在旁邊把圖畫下來。平時如果遇到比較難理解的也會先把它畫下來，以備不時之需。不過 S5 認為這個圖在後來的幫助好像也不大。

除了分段、畫圖以外，S5 在讀證明時，會邊紀錄做了哪些事，最後有哪些結論得證。例如：Cor 的證明是先說 $T_A(x)=Ax$ 再說 $T_A(x)=T(x)$ ，所以由這兩個得證 $T(x)=Ax$ 。平常 S5 在讀證明時，就會用自己的想法再寫一次，一定會記錄現在得到 1、得到 2 這樣。然後都會稍微寫一下目前做到哪裡，有哪些事情得證，這樣會比較清楚推論的過程如何，為什麼可以馬上知道他是對的，或是可以繼續往下推。

一開始找不到 equation2 時，S5 選擇先放著，用波浪標註，如果證明看不懂，再回來看。後來是因為要翻課本查定理 2.7，就順便找一下，S5 擔心可能 equation2 沒有被印在白紙上。結果 S5 在定理 2.7 發現有用到 equation1，但他也找不到 equation1 在哪裡，後來翻回 Cor 的那一頁，意外發現 equation2，有可能是因為課本的 equation2 是藍色的字，比較明顯所以有看到。但是雖然找到了 equation2，S5 認為對於理解整個證明的幫助也不大。在不懂 $T(x)=Ax$ 這個等式時，S5 會嘗試把用到的定理 2.7 的敘述寫下來，反覆操作、慢慢釐清，直到懂了為止。

S5 認為若有同學讀不懂可能有一些問題點要釐清，例如：第二段的 $Ae_j = Te_j$ ，應該會有同學不清楚 e_j 這個符號是什麼意思，還有 Ae_j 的矩陣乘法可能會不知道怎麼乘，如果他可以舉一個例子去說明為何 $Ae_j = T(e_j)$ ，表示他真的理解了。

2. 理解狀態改變的來源與閱讀策略

從研究結果第一節 S5 的理解與不理解之處可知，S5 只有在 $T_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ 發生了理解狀態改變，而這個改變的來源是外在的介入，請見表表 4-9。當研究者詢問 S5 那個 T_A 是突然冒出來的東西嗎？S5 才重新思考，利用「多讀幾次」的策略理解它。

表 4-9

學生 S5 理解狀態改變的來源

理解狀態改變	來源	
	自我	外在
理解至不理解		
不理解至理解		$T_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$

(二) AH_CHPH 學生：S6

1. 閱讀狀況描述

S6 在閱讀證明題時，是重頭開始閱讀，但沒有看標題。在兩次的放聲思考練習中，第一次沒看標題、第二次有看，S6 認為，如果他看完敘述，就知道在講什麼，就不會很注重標題，除非是有名字的定理才會去記，例如：費馬小定理。或者如果有時候，遇到敘述很冗長的，就會看一下標題，知道它在講什麼。而 S6 在閱讀的過程中，會選擇性的跳著看，例如：從 $\text{let } T:R_n \rightarrow R_m$ 開始讀，這句只是看過去、念過去而已；which we denote 這句會覺得不重要，就只會注意到 denote。S6 說通常他看過去時，只會看到自己比較熟的字，或者從動詞著手。這種閱讀方式有缺點，就像在做放聲思考練習時，有一個單字 distinct 沒注意到。因為是跳著看，只看到重要的數學代號，有些字沒看到，就變成看到後面有問題，再回來檢視自己是不是條件沒看到。

S6 認為在讀這個證明題時，會建議同學自己把英文轉成數學，這樣複習也

比較容易，例如： $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ，如果 x 屬於 $\mathbb{R}^n$ 漏寫，那就是他的問題，沒有說 x 是什麼，那是不是可以任意擺，也可以放敘述，這些都是自己必須思考過的地方。除了能把證明的語句轉換成自己理解的數學式以外，也要知道數學式是由什麼東西推論來的。萬一已經把英文轉換成數學式了還不懂，那可能是邏輯上的問題，如果還讀不懂，可能就是基礎上的問題，例如：以這個證明為例，線性變換最大的優點就是把一個複雜的東西拆開變簡單。

2. 理解狀態改變的來源與閱讀策略

從研究結果第一節 S6 的理解與不理解之處可知，S6 在 linear transformation、 $A\mathbf{e}_j = T(\mathbf{e}_j)$ 發生了理解狀態改變，改變來源請見表 4 - 10。當 S6 不確定 linear transformation 的定義時，他選擇使用「查看課本」的策略去理解它，不過因為 S6 平常沒有閱讀課本的習慣，所以後來他還是沒找到，但研究者請他說出 linear transformation 的定義時，S6 有正確說明。

在研究者詢問 S6 證明內容裡的 $A\mathbf{e}_j = T(\mathbf{e}_j)$ 為什麼會對時，一開始 S6 誤把定理的結論 $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ 拿來用，後來使用了「多讀幾次」的策略以後便理解它。

表 4 - 10

學生 S6 理解狀態改變的來源

理解狀態改變	來源		
	自我	外在	
理解至不理解			
不理解至理解	linear transformation $A\mathbf{e}_j = T(\mathbf{e}_j)$		

(三) AH_CHPL 學生：S1

1. 閱讀狀況描述

S1 在閱讀證明題的過程中，最常出現的是「多讀幾次」、「檢視相關定理」的策略。如果讀不懂的時候，會看例子，如果沒有例子可以看，就先記下定理的結論。在看定理 2.7 時，S1 是反覆地確認 Cor 和定理 2.7 的共通性，哪裡有連貫或相似處。這個策略和 S5 不太一樣，S1 只是看哪裡相似，但 S5 會去找 Cor 的

條件，看能不能代進定理 2.7 裡面。S1 會建議同學，若讀不懂，可以先去看跟這題有關的定理、理論、定義去做連結。

2. 理解狀態改變的來源與閱讀策略

從研究結果第一節 S1 的理解與不理解之處可知，S1 在證明的第三段、 $Ae_j = T(e_j)$ 發生了理解狀態改變，改變來源請見表 4 - 11。研究者請 S1 解釋證明的第三段時，S1 使用了「動筆寫」和「多讀幾次」的策略來理解。

研究者請 S1 舉例說明為何 $Ae_j = T(e_j)$ 時，S1 寫出一個奇怪的算式。當研究者對 S1 使用「外在澄清」的策略時，他才正確舉例。

表 4 - 11

學生 S1 理解狀態改變的來源

理解狀態改變	來源	
	自我	外在
理解至不理解		
不理解至理解	證明的第三段	$Ae_j = T(e_j)$

(四) AH_CLPL 學生：S3

1. 閱讀狀況描述

S3 是訪談對象裡，唯一一個遇到看不懂的單字會直接用手機查的學生。他本來不是很懂 Cor 裡面的 $T(e_1)$ 是什麼東西，後來跟定理 2.7 對照後才理解，認為 $T(e_1)$ 上下方的一槓是省略的記號。S3 平常讀書不一定會仔細理解每個定理的證明步驟，但如果遇到那種看完命題敘述，不知道怎麼下手的證明，就會特別去把它記下來、或是特別寫寫看。在 $Ae_j = T(e_j)$ 這個等式中，原本 S3 第一眼看不出來為何是對的，當他在腦海中把矩陣乘法思考過以後，就理解了。

2. 理解狀態改變的來源與閱讀策略

從研究結果第一節 S3 的理解與不理解之處可知，S3 在 $Ae_j = T(e_j)$ 、 $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ 發生了理解狀態改變，改變來源請見表 4 - 12。S3 提到他在閱讀

時，曾經對 $Ae_j = T(e_j)$ 感到疑惑，但後來使用了「檢視命題資訊」的策略以後就理解了。

S3 在訪談過程中，能說出 $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ 是 n 維送到 m 維，但當研究者使用「外在澄清」的策略請他舉例時，發現他不理解 n 維送到 m 維的含意。

表 4 - 12

學生 S3 理解狀態改變的來源

理解狀態改變 \ 來源	自我	外在
理解至不理解		$T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$
不理解至理解	$Ae_j = T(e_j)$	

(五) AL_CHPL 學生：S4

1. 閱讀狀況描述

S4 在證明題裡面遇到不懂的單字時，會去跟自身經驗連結，判斷單字的意思。但因為他都把英文看錯，所以即使有嘗試分辨單字的意思，還是無法正確理解。S4 談到他自己有很多本來以為懂，然後又不懂的地方。但在研究者細問之後發現，S4 所謂的本來懂，然後不懂的意思是說本來以為他好像看得懂整個證明題包含命題敘述，也覺得 $T(x)=Ax$ 是很理所當然的，但是在閱讀證明的過程中，遇到不知道從哪裡冒出來的 $TA(x)$ ，導致看不懂 $T(x)=Ax$ 是怎麼證出來的，所以就覺得不懂，而他也沒有策略來幫助自己弄懂。S4 覺得自己沒有從「不理解到理解」的過程，不過他其實在閱讀證明題時，本來第一次看不懂，等到讀完證明後再看一次，就知道要證明什麼了。

S4 認為當同學若讀不懂，建議他先把前面的東西看過，例如：Cor 的證明有提到定理 2.7 還有例題 2，如果把這兩個看懂了，說不定就會懂了。事實上 S4 自己也有這樣做，但他就因為單字看錯，所以即使他有去看檢視相關定理，還是無法理解。

2. 理解狀態改變的來源與閱讀策略

因為 S4 英文能力的關係，導致他在閱讀過程中沒有發生理解狀態改變。

表 4 - 13

學生 S4 理解狀態改變的來源

理解狀態改變 \ 來源	自我	外在
理解至不理解	無	無
不理解至理解	無	無

(六) AL_CLPH 學生：S2

1. 閱讀狀況描述

S2 在閱讀證明題的第二段時，對於突然出現的 TA 這個符號不是很理解，後來經由多讀幾次以後，便猜測它是先設一個變換 TA，然後再證明這個變換就是 $T(x)$ ，雖然 S2 不清楚自己理解的是否正確，但從研究者的角度來說，S2 理解了 TA 出現的意義。

2. 理解狀態改變的來源與閱讀策略

從研究結果第一節 S2 的理解與不理解之處可知，S2 只有在符號 x 發生了理解狀態改變，改變來源請見表 4 - 14。S2 提到他自己對符號 x 的表徵有障礙，不過在訪談過程中，S2 使用了「檢視命題資訊」的策略，思考矩陣相乘的運算規則，成功理解符號 x 。

表 4 - 14

學生 S2 理解狀態改變的來源

理解狀態改變 \ 來源	自我	外在
理解至不理解		
不理解至理解	符號 x	

(七) 比較

從上面的結果可知，除了 S4 以外，其它學生在閱讀過程中都有發生理解狀態改變。研究者將五位學生理解狀態改變的來源與閱讀策略的使用整理成表格，如表 4-15～表 4-19 所示。接著，再利用表 4-15～表 4-19 統整出不同先備知識學生理解狀態改變的來源與閱讀策略的使用，如表 4-20。

表 4-15

學生 S5 理解狀態改變的來源與閱讀策略的使用

理解狀態改變 \ 來源	來源	
	自我	外在
理解至不理解		
不理解至理解		多讀幾次

表 4-16

學生 S6 理解狀態改變的來源與閱讀策略的使用

理解狀態改變 \ 來源	來源	
	自我	外在
理解至不理解		
不理解至理解	查看課本 多讀幾次	

表 4-17

學生 S1 理解狀態改變的來源與閱讀策略的使用

理解狀態改變 \ 來源	來源	
	自我	外在
理解至不理解		
不理解至理解	動筆寫 多讀幾次	外在澄清

表 4 - 18

學生 S3 理解狀態改變的來源與閱讀策略的使用

理解狀態改變	來源		
	自我	外在	
理解至不理解		外在澄清	
不理解至理解	檢視命題資訊		

表 4 - 19

學生 S2 理解狀態改變的來源與閱讀策略的使用

理解狀態改變	來源		
	自我	外在	
理解至不理解			
不理解至理解	檢視命題資訊		

表 4 - 20

不同先備知識學生理解狀態改變的來源與閱讀策略的使用

狀態改變 策略使用	不理解至理解 (自我)	理解至不理解 (外在)	不理解至理解 (外在)
多讀幾次	AH_CHPH AH_CHPL		AH_CHPH
查看課本	AH_CHPH		
動筆寫	AH_CHPL		
外在澄清		AH_CLPL	AH_CHPL
檢視命題資訊	AH_CLPL AL_CLPH		

從表 4-20 可看出，除了 AL_CHPL 類型的學生因為在閱讀過程中沒有發生任何理解狀態改變因而沒有在表上以外，其餘類型的學生都有發生從「不理解至理解（自我）」的改變，這個改變與「多讀幾次」和「檢視命題資訊」這兩個策略較有關連。另外，除了 AL_CLPH 類型的學生以外，其餘類型的學生都有因為外在的介入，發生了理解狀態改變。



第伍章 討論與建議

本章共分為兩節，第一節為討論，此節將綜合第肆章的研究結果進行整理，並提出本研究的發現；第二節為建議，根據第一節的討論提供學生學習數學證明與未來研究上的建議。

第一節 結果與討論

本節根據第肆章的研究結果，分三個部分回應研究問題並描述研究發現。

一、理解與不理解之處

(一) 不同先備知識學生皆能理解敘述「let A be the $m \times n$ matrix whose j th column vector is $T(\mathbf{e}_j)$ 」與「Recall that for any matrix A , $A\mathbf{e}_j$ is j th column of A 」

(二) 只有 AH_CHPH (學期成績高、概念性知識高、程序性知識高) 類型的學生能理解敘述「Theorem 2.7」

(三) 只有 AL_CHPL (學期成績低、概念性知識高、程序性知識低) 類型的學生不理解符號「 $A\mathbf{e}_j = T(\mathbf{e}_j)$ 」

(四) 只有 AL_CHPL 類型的學生不理解符號「 $T(\mathbf{e}_1)$ 」

(五) AL_CHPL 與 AL_CLPH 類型的學生專注於證明的表面特徵

本研究發現，AL_CHPL 類型的學生因為英文能力的關係，導致基本的符號、敘述不懂；AL_CLPH (學期成績低、概念性知識低、程序性知識高) 類型的學生一直卡在符號表徵看不懂。這兩種類型的學生花了很多時間注意證明的表面特徵，導致無法去注意證明間的邏輯結構，這點與 Inglis 與 Alcock (2012) 的研究結果相符。

除了上述的研究發現以外，研究者設計檢驗閱讀理解的訪談問題時，參考了 Mejia-Ramos 等人 (2011) 提出的證明理解評量模型。但在該模型中，並沒有關

於「符號」這個項目的理解面向。而且該模型關於證明理解的七個面向無法完全套用在本研究的證明文本中。探究原因，可能是因為該研究所選用的證明題文本類型與本研究不同所致。

二、整體理解狀態在自我與外在評估上的差異

(一) 沒有任何類型的學生其整體理解狀態在自我評估與外在評估上是相符的

(二) AH_CHPL (學期成績高、概念性知識高、程序性知識低) 和 AL_CHPL 類型的學生有相同的評估狀況：自我評估偏向理解且外在評估理解與不理解各半

(三) AH_CHPH 的學生 S6 和 AL_CLPH (學期成績低、概念性知識低、程序性知識高) 類型的學生有相同的評估狀況：自我評估完全理解且外在評估偏向理解

(四) AH_CHPH 類型的學生整體理解狀態較佳

本研究發現沒有任何類型的學生其整體理解狀態在自我評估與外在評估上是相符的。但事實上，AH_CHPH 的學生 S6 應該要能得到整體理解狀態在自我評估與外在評估上是相符的結果。因為 AH_CHPH 的學生 S6，雖然外在評估被歸類為偏向理解，但其不理解之處只有 1 個，這與不理解之處有 4 個的 AL_CLPH 是有差別的。由此可知，外在評估整體理解狀態的判準較不彈性。若能再針對每一項物件在證明題中的重要程度給分累加，這樣得到的整體理解狀態的分數可能會與自我評估的較相符。

若單就理解物件的數量來說，AH_CHPH 類型的學生較其他類型學生理解的物件較多。探究原因，AH_CHPH 類型的學生除了使用研究結果第三節談到閱讀策略以外，還有自己獨到的閱讀策略。例如：AH_CHPH 學生 S5，有一套自己閱讀證明題的流程。會先瞭解證明的目標→要做哪些事→反覆回想自己要證什麼→記錄自己有了哪些條件→不清楚的地方畫成圖→要證明的命題有哪些條件可以代回欲套用的定理→用自己的想法將證明分段再寫一次。而 AH_CHPH 學生 S6 能在短時間內切中要點抓住證明的關鍵。上述研究結果與楊凱琳等人 (2006) 國高中生閱讀推論理解表現較佳學生的閱讀特徵不同。

另外，AH_CHPH 學生 S5，有一套自己閱讀證明題的流程，會用自己的想法將證明分段再寫一次；AH_CHPH 學生 S6 能在短時間內切中要點抓住證明的關

鍵。這些策略與 Weber(2001)的研究相符，專家擁有「瞭解該領域的證明技巧」、「知道哪些定理是重要的且它們何時是有用的」的策略知識。本研究也發現，AH_CHPH 類型的學生著重在證明的邏輯結構。這點與 Annie Selden 與 Selden (2003) 和 Inglis 與 Alcock (2012) 的研究相符。

三、理解狀態改變的來源與閱讀策略的關連

(一)AH_CHPH 和 AH_CHPL 類型的學生較會使用不同的閱讀策略來促使理解狀態改變

(二)「多讀幾次」和「檢視命題資訊」是大部分學生都會使用的

本研究發現 AH_CHPH 和 AH_CHPL 類型的學生較會使用不同的閱讀策略來促使理解狀態改變，這點是排除「外在澄清」所得到的結果。畢竟學習最終還是要回歸學生自己，不能靠外在一直介入。另外，學生閱讀時除了採用 Weber 與 Mejia-Ramos (2011) 研究中的微觀策略以外，本研究也發現，學生發生自我從不理解至理解的狀態改變，與其使用「多讀幾次」和「檢視命題資訊」這兩個策略較有關連。

第二節 建議

本研究在學生學習數學證明與未來研究上有幾點建議。

一、學生學習數學證明的建議

在學生學習數學證明上，本研究有四點建議：

（一）瞭解該證明題的目標

我們從 AH_CHPH 學生 S5 的閱讀狀況得知，S5 在看完證明的敘述後，會先瞭解證明的目標，要做哪些事。閱讀過程中，也會反覆確認這個證明題要證什麼，讓閱讀證明時不會失去方向，加速理解證明的時間。

（二）閱讀證明前先想想看該怎麼證

研究者從觀察 AH_CHPL、AH_CLPL、AL_CHPL 與 AL_CLPH 這四種類型學生的閱讀狀況以及訪談得知，這四類學生讀證明的方式，就是按照順序把它看懂而已。在讀的過程中，碰到不懂的才會將它釐清。而不是一開始，看到命題的時候，就去思考自己該如何證明這個命題。這點就跟 AH_CHPH 學生 S5 的閱讀狀況有所差別。如果閱讀證明前先想想看該怎麼證，可以先連結跟這個證明有關的內容、不會被證明的內容綁住（以為只能這樣證）。如果有證出來，剛好可以跟原本的證明對照，看有沒有相同。如果不相同，就多了一種方法。如果相同，就表示對這個證明確實理解了；萬一沒有證出來也沒關係，至少已經在腦袋裡提取了相關的內容，不用在閱讀時才一點一滴的抓回來。

（三）閱讀時，把已讀過的內容記錄下來

在 AH_CHPH 學生 S5 閱讀的過程中，他會利用畫圖的方式將自己比較難理解的東西記錄下來。另外，也會用筆註記，將證明內容分段，必要時還會用自己的話將分段後的內容重述，釐清自己的概念、幫助自己理解，最後順利得證。這是 AH_CHPL、AH_CLPL、AL_CHPL 與 AL_CLPH 這四類學生所沒有的。

（四）練習找出證明的關鍵

我們發現 AH_CHPH 學生 S6 用很快的速度閱讀完證明題並理解了，這點是其它類型學生所沒有的。探究原因，是因為 S6 知道證明的關鍵，所以在閱讀的過程中，會一直將讀到的內容與他認為的關鍵契合，便順利理解證明題。若要具備找出證明關鍵的能力，必須扣回到「瞭解該證明題的目標」。知道要證什麼，才能知道證明那個需要什麼條件，如果知道需要什麼條件，閱讀時就可以直接去找那個條件，就能找出證明的關鍵。

二、未來研究建議

在未來研究上，本研究有三個方向可以做延伸探討：

（一）自我評估理解的判準

目前研究上比較少去探討大學生他在自我評估理解的判準是什麼，在本研究中，只給出了整體理解狀態自我評估理解的判準，這是未來研究可以繼續延伸的。

（二）促進理解狀態改變的後設認知策略

在本研究中，學生理解狀態改變的物件不多，最多只有三個，最少一個都沒有。從研究結果可知，真正理解證明題的學生只有 AH_CHPH 類型的學生，該怎麼幫助其它類型學生的理解狀態從「不理解」至「理解」，這也是可以研究的。

（三）閱讀教學研究

目前大學數學證明的教學研究，大多只談到自我解釋。除了自我解釋之外，本研究其實有一些證據可以提供教學建議，但不夠完備。未來研究上可以再提出更多的具體教學策略供教授線性代數的教授參考。

參考文獻

一、中文部分

- Yu, H.-P.、Wu, Y.-Y.、吳育雅、于曉平 (2013)。資優女生科學文本閱讀理解歷程之探究。資優教育季刊。
- 王俊紅 (2004)。試論大學生自學能力的培養。華北電力大學學報(社會科學版), 2004(1), 頁 83-85。
- 林巧敏 (2009)。推動國中小學童數位閱讀計畫之探討。台灣圖書館管理季刊,(2), 頁 49-67。
- 秦麗花 (2006)。從數學閱讀特殊技能看兒童數學閱讀的困難與突破。
- 秦麗花 (2007)。數學閱讀指導的理論與實務。臺北：洪葉文化。
- 張景媛 (2011)。數學文字題錯誤概念分析及學生建構數學概念的研究。教育心理學報 (27)。
- 教育部 (2015)。重編國語辭典修訂本。取自 <http://dict.revised.moe.edu.tw/cgi-bin/cbdic/gswweb.cgi?o=dcbdic&searchid=Z000000061988>
- 楊凱琳 (2004)。建構中學生對幾何證明閱讀理解的模式。國立臺灣師範大學數學系博士班，台北市。
- 楊凱琳、林福來、王繹婷 (2006)。探討學生解讀證明的認知特徵。中華民國第 22 屆科學教育學術研討會(2006)。
- 蘇慧珍 (2013)。探討閱讀策略融入數學教學對高中學生的影響。國立臺灣師範大學數學系在職進修碩士班，台北市。

二、英文部分

- Cloer, T. J. (1981). Factors Affecting Comprehension of Math Word Problems--A Review of the Research.
- Dorier, J.-L. (2003). Teaching linear algebra at university.
- Dorier, J.-L., & Sierpinska, A. (2002). Research into the teaching and learning of linear algebra. In *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level* (pp. 255-273): Springer.
- Fraleigh, J. B., & Beauregard, R. A. (2013). *Linear Algebra* (3 ed.). Taiwan: Pearson.
- Hillel, J. (2000). Modes of description and the problem of representation in linear algebra. In *On the teaching of linear algebra* (pp. 191-207): Springer.
- Inglis, M., & Alcock, L. (2012). Expert and novice approaches to reading mathematical proofs. *Journal for research in mathematics education*, 43(4), 358-390.
- Kavale, K. (1982). Meta-analysis of the relationship between visual perceptual skills and reading achievement. *Journal of Learning Disabilities*, 15(1), 42-51.
- Leron, U. (1983). Structuring mathematical proofs. *The American Mathematical Monthly*, 90(3), 174-185.
- McKenna, M. C., & Robinson, R. D. (2014). *Teaching through Text: Reading and Writing in the Content Areas* (2 ed.). Boston: Pearson.
- Mejia-Ramos, J. P., Fuller, E., Weber, K., Rhoads, K., & Samkoff, A. (2011). An assessment model for proof comprehension in undergraduate mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 79(1), 3-18.
- Rosenshine, B., & Meister, C. (1994). Reciprocal teaching: A review of the research. *Review of educational research*, 64(4), 479-530.
- Selden, A., & Selden, J. (2003). Validations of proofs considered as texts: Can undergraduates tell whether an argument proves a theorem? *Journal for research in mathematics education*, 4-36.
- Selden, A. S. J. (2015). A comparison of proof comprehension, proof construction, proof validation and proof evaluation.
- Thomas, S. (2012). *An activity theory analysis of linear algebra teaching within university mathematics*. © Stephanie Thomas,
- Tuijnman, A. (2000). Literacy in the Information Age: Final Report of the International

- Adult Literacy Survey. In: OECD Paris.
- Uhlig, F. (2002). The Role of Proof in Comprehending and Teaching Elementary Linear Algebra. *Educational Studies in Mathematics*, 50(3), 335-346.
- Weber, K. (2001). Student difficulty in constructing proofs: The need for strategic knowledge. *Educational Studies in Mathematics*, 48(1), 101-119. doi:10.1023/a:1015535614355
- Weber, K. (2008). How mathematicians determine if an argument is a valid proof. *Journal for research in mathematics education*, 431-459.
- Weber, K. (2009). *Mathematics majors' evaluation of mathematical arguments and their conception of proof*. Paper presented at the Proceedings of the 12th Conference for Research in Undergraduate Mathematics Education.
- Weber, K., & Mejia-Ramos, J. P. (2011). Why and how mathematicians read proofs: an exploratory study. *Educational Studies in Mathematics*, 76(3), 329-344.
- Yang, K.-L., & Lin, F.-L. (2008). A model of reading comprehension of geometry proof. *Educational Studies in Mathematics*, 67(1), 59-76.
- Yang, K.-L., & Lin, F.-L. (2012). Effects of reading-oriented tasks on students' reading comprehension of geometry proof. *Mathematics Education Research Journal*, 24(2), 215-238. doi:10.1007/s13394-012-0039-2

附錄一 證明題文本

COROLLARY Standard Matrix Representation of a Linear Transformation

Let $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ be a linear transformation, and let A be the $m \times n$ matrix whose j th column vector is $T(\mathbf{e}_j)$, which we denote symbolically as

$$A = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ T(\mathbf{e}_1) & T(\mathbf{e}_2) & \cdots & T(\mathbf{e}_n) \\ | & | & & | \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Then $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ for each column vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

PROOF

Recall that for any matrix A , $A\mathbf{e}_j$ is j th column of A .

This shows at once that if A is the matrix described in Eq. (2), then $A\mathbf{e}_j = T(\mathbf{e}_j)$, and so T and the linear transformation T_A given by $T_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ agree on the standard basis $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ of $\mathbb{R}^n$.

By Theorem 2.7, and the comment following this theorem, we know that then $T(\mathbf{x}) = T_A(\mathbf{x})$ for every $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ —that is, $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ for every $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

此證明題文本引用的定理「Theorem 2.7」，可見附錄五。

表 3-7 中「證明的第三段」指的是此證明題文本中的「By Theorem 2.7, and the comment following this theorem, we know that then $T(\mathbf{x}) = T_A(\mathbf{x})$ for every $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ —that is, $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ for every $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.」這個段落。因為此段落較冗長，所以用「證明的第三段」來簡稱。

附錄二 先備知識測驗卷

1. Let $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ be a linear transformation, which one of the followings is correct?

(A) $T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}$

(B) $T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 \\ x_1 - x_2 \end{bmatrix}$

(C) $T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

(D) $T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

2. Which one is a 3×2 matrix?

(A) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

(B) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$

3. Write down the standard basis $\mathbf{e}_2$ in $\mathbb{R}^3$?

4. Let $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ be a linear transformation, which one of the followings may be $T(\mathbf{e}_2)$?

(A) $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

(B) $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$

(C) $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$

(D) $\begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 \end{bmatrix}$

5. Let A be a 3×2 matrix, which one of the followings may be $A\mathbf{e}_2$?

(A) $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

(B) $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$

(C) $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$

(D) $\begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 \end{bmatrix}$

6. Let $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ be a linear transformation, which one of the followings may be a standard matrix representation of T ?

(A) $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

(B) $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$

(C) $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$

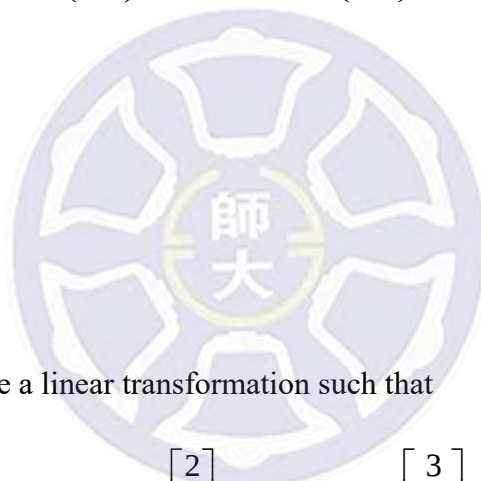
(D) $\begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$

(E) $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$

(F) $\begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 \end{bmatrix}$

7. Let $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ be a linear transformation.

If $T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ and $T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \end{bmatrix}$, then $T\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = ?$



8. Let $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ be a linear transformation such that

$$T(\mathbf{e}_1) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \text{ and } T(\mathbf{e}_2) = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

(1) Find the standard matrix representation A of T .

(2) Find a formula for $T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right)$.

附錄三 專家修改建議與修改內容

✧ 試題 2 (修改前)

2. Which of the following are 3×2 matrix ?

$$(A) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \quad (B) \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

✧ 具體目標

能瞭解 3×2 矩陣的長相。

✧ 專家修改建議

P1：are 改為 is。

P2：適當。



✧ 試題 2 (修改後)

2. Which one is a 3×2 matrix?

(A) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

(B) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$

✧ 修改內容 (談設計理念)

研究者設計此題目主要是確認學生是否知道 3×2 是 3 列 2 行的矩陣，而且不會把列和行搞混。但沒想到在題幹敘述中把 is 打成 are，變成多選題。這裡研究者參考了 P1 的建議將 are 改為 is。



✧ 試題 3 (修改前)

3. 在一般的表示法中，若 $\mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ，則何者為 $\mathbf{e}_2$ ？

- (A) $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ (E) $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ (F) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

✧ 具體目標

能瞭解 $\mathbf{e}_2$ 為三維向量，第二個位置為 1，其它位置為 0。

✧ 專家修改建議

P1：題幹敘述改為「下列那個選項可以表示標準基底中的 $\mathbf{e}_2$ ？」，試題答案應為(A)、(D)皆可。

P2： $\mathbf{e}_2$ 非斜體。



✧ 試題 3 (修改後)

3. Write down the standard basis $\mathbf{e}_2$ in $\mathbb{R}^3$?

✧ 修改內容 (談設計理念)

研究者原本是希望學生能從題幹敘述中的 $\mathbf{e}_3$ 得知，這是一個三維空間。接著，因為 $\mathbf{e}_2$ 是一個第二個位置是 1，其它位置為 0 的向量，而選出正確答案 (D)。但是 P1 建議不要有模擬兩可的空間，因此，最後加上 $\mathbb{R}^3$ 並改為英文敘述。



✧ 試題 4 (修改前)

4. Let $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ be a linear transformation, then $T(\mathbf{e}_2) = ?$

(A) $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 \end{bmatrix}$

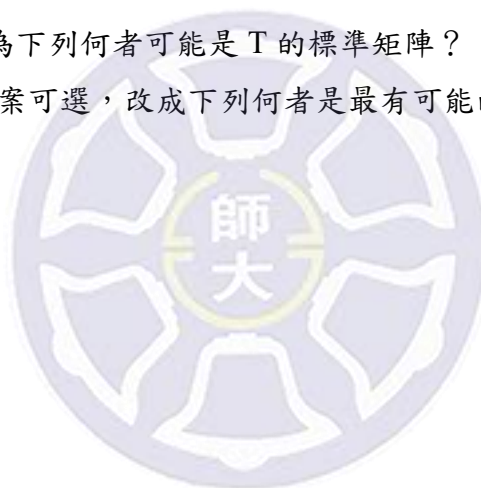
✧ 具體目標

能瞭解 $\mathbf{e}_2$ 在 T 的限制下為二維向量，經過運算以後變成三維向量。

✧ 專家修改建議

P1：此題同 #1，改為下列何者可能是 T 的標準矩陣？

P2： T 不確定，無答案可選，改成下列何者是最有可能的答案。



✧ 試題 4 (修改後)

4. Let $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ be a linear transformation, which one of the followings may be $T(\mathbf{e}_2)$?

- (A) $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 \end{bmatrix}$

✧ 修改內容

此題參考 P1 和 P2 建議修正。



✧ 試題 5 (修改前)

5. Let A be an 3×2 matrix, then $A\mathbf{e}_2 = ?$

(A) $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 \end{bmatrix}$

✧ 具體目標

能瞭解 $\mathbf{e}_2$ 在 A 的限制下為二維向量，經過運算以後變成三維向量。

✧ 專家修改建議

P1：修改。

P2：修改；同前。



✧ 試題 5 (修改後)

5. Let A be a 3×2 matrix, which one of the followings may be $A\mathbf{e}_2$?

- (A) $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 \end{bmatrix}$

✧ 修改內容

此題參考 P1 和 P2 建議修正。



✧ 試題 6 (修改前)

6. Let $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ be a linear transformation such that
 $T(\mathbf{e}_1) = [2, 1, 4]$ and $T(\mathbf{e}_2) = [3, 0, -2]$.
 Find the standard matrix representation A of T and find a formula for
 $T([x_1, x_2])$.

✧ 具體目標

能利用已知條件寫出 T 的標準矩陣表示法，並利用此矩陣求出 T 函數。

✧ 專家修改建議

P1：適當。

P2：適當。



✧ 試題 6 (修改後)

8. Let $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ be a linear transformation such that

$$T(\mathbf{e}_1) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad T(\mathbf{e}_2) = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

(1) Find the standard matrix representation A of T .

(2) Find a formula for $T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right)$.

✧ 修改內容

此題把向量改為直的。



附錄四 雙向細目表

1. Let $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ be a linear transformation, which one of the followings is correct?

$$(A) \quad T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}$$

$$(B) \quad T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 \\ x_1 - x_2 \end{bmatrix}$$

$$(C) \quad T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$(D) \quad T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

欲評量的項目與內容				適當 修改	題目修改建議
測驗內容 知識向度	線性 變換	矩陣	向量		
概念性知識	v				
程序性知識					
具體目標					
能瞭解 T 函數是把二維的向量送到三維，而不是把二送到二、三送到二，或三送到三。					
試題答案	B				

2. Which one is 3×2 matrix?

(A) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

(B) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$

欲評量的項目與內容				☐適當 ☐修改	題目修改建議
測驗內容 知識向度	線性 變換	矩陣	向量		
概念性知識		v			
程序性知識					
具體目標					
能瞭解3×2矩陣的長相。					
試題答案	B				

3. Which are the standard basis of $\mathbf{e}_2$?

(A) $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

(B) $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

(C) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

(D) $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

(E) $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$

(F) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

欲評量的項目與內容				☐適當 ☐修改	題目修改建議
測驗內容 知識向度	線性 變換	矩陣	向量		
概念性知識			v		
程序性知識					
具體目標					
能瞭解 $\mathbf{e}_2$ 為向量，第二個位置為1，其它位置為0。					
試題答案	AD				

4. Let $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ be a linear transformation, which one of the followings can be $T(\mathbf{e}_2)$?

(A) $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 \end{bmatrix}$

欲評量的項目與內容				☐適當 ☐修改	題目修改建議
測驗內容 知識向度	線性 變換	矩陣	向量		
概念性知識					
程序性知識	v				
具體目標					
能瞭解 $\mathbf{e}_2$ 在T的限制下為二維向量，經過運算以後變成三維向量。					
試題答案	B				

5. Let A be the 3×2 matrix, which one of the followings can be $A\mathbf{e}_2$?

(A) $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 \end{bmatrix}$

欲評量的項目與內容				☐適當 ☐修改	題目修改建議
測驗內容 知識向度	線性 變換	矩陣	向量		
概念性知識					
程序性知識		v			
具體目標					
能瞭解 $\mathbf{e}_2$ 在A的限制下為二維向量，經過運算以後變成三維向量。					
試題答案	B				

6. Let $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ be a linear transformation, which one of the followings is the standard matrix representation of T ?

(A) $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

(B) $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$

(C) $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$

(D) $\begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$

(E) $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$

(F) $\begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 \end{bmatrix}$

欲評量的項目與內容				☐適當 ☐修改	題目修改建議
測驗內容 知識向度	線性 變換	矩陣	向量		
概念性知識					
程序性知識	v				
具體目標					
能瞭解 T 的標準矩陣表示法為 3×2 的矩陣。					
試題答案	E				

7. Let $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ be a linear transformation.

If $T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ and $T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \end{bmatrix}$, then $T\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = ?$

欲評量的項目與內容				☐適當 ☐修改	題目修改建議
測驗內容 知識向度	線性 變換	矩陣	向量		
概念性知識					
程序性知識	v				
具體目標					
能利用線性變換的定義求值。					
試題答案	6 5				

8. Let $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ be a linear transformation such that

$$T(\mathbf{e}_1) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \text{ and } T(\mathbf{e}_2) = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

(1) Find the standard matrix representation A of T .

欲評量的項目與內容				☐適當 ☐修改	題目修改建議
測驗內容 知識向度	線性 變換	矩陣	向量		
概念性知識					
程序性知識		v			
具體目標					
能利用已知條件寫出 T 的標準矩陣表示法 A。					
試題答案	$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$				

8. Let $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ be a linear transformation such that

$$T(\mathbf{e}_1) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \text{ and } T(\mathbf{e}_2) = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

(2) Find a formula for $T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right)$.

欲評量的項目與內容				☐適當 ☐修改	題目修改建議
測驗內容 知識向度	線性 變換	矩陣	向量		
概念性知識					
程序性知識	v				
具體目標					
能利用 T 的標準矩陣表示法 A 求出 T 函數。					
試題答案	$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x_1 + 3x_2 \\ x_1 \\ 4x_1 - 2x_2 \end{bmatrix}$				

其它建議

附錄五 證明題文本引用的定理

THEOREM 2.7 Bases and Linear Transformations

Let $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ be a linear transformation, and let $B = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n\}$ be a basis for $\mathbb{R}^n$. For any vector $\mathbf{v}$ in $\mathbb{R}^n$, the vector $T(\mathbf{v})$ is uniquely determined by the vectors $T(\mathbf{b}_1), T(\mathbf{b}_2), \dots, T(\mathbf{b}_n)$.

PROOF

Let $\mathbf{v}$ be any vector in $\mathbb{R}^n$.

We know that because B is a basis, there exist *unique* scalars $r_1, r_2, \dots, r_n$ such that

$$\mathbf{v} = r_1\mathbf{b}_1 + r_2\mathbf{b}_2 + \dots + r_n\mathbf{b}_n.$$

Using Eq. (1), we see that

$$T(\mathbf{v}) = T(r_1\mathbf{b}_1 + r_2\mathbf{b}_2 + \dots + r_n\mathbf{b}_n) = r_1T(\mathbf{b}_1) + r_2T(\mathbf{b}_2) + \dots + r_nT(\mathbf{b}_n).$$

Because the coefficients r_i are *uniquely* determined by $\mathbf{v}$, it follows that $T(\mathbf{v})$ is completely determined by the vectors $T(\mathbf{b}_i)$ for $i = 1, 2, \dots, n$.

Theorem 2.7 shows that if two linear transformations have the same value at each basis vector $\mathbf{b}_i$, then the two transformations have the same value at each vector in $\mathbb{R}^n$, and thus they are the same transformation.

附錄六 第一個放聲思考練習文本

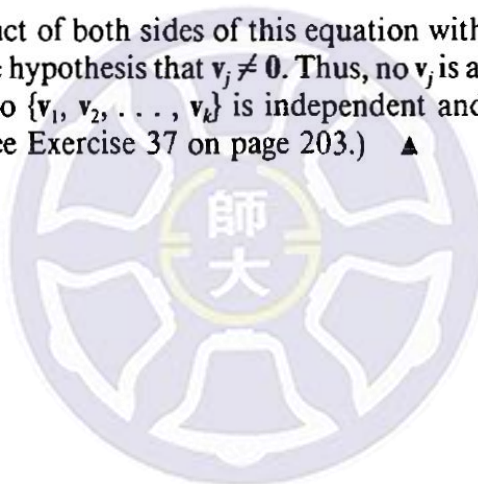
THEOREM 6.2 Orthogonal Bases

Let $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$ be an orthogonal set of nonzero vectors in $\mathbb{R}^n$. Then this set is independent and consequently is a basis for the subspace $\text{sp}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k)$.

PROOF To show that the orthogonal set $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$ is independent, let us suppose that

$$\mathbf{v}_j = s_1\mathbf{v}_1 + s_2\mathbf{v}_2 + \cdots + s_{j-1}\mathbf{v}_{j-1}$$

Taking the dot product of both sides of this equation with $\mathbf{v}_j$ yields $\mathbf{v}_j \cdot \mathbf{v}_j = 0$, which contradicts the hypothesis that $\mathbf{v}_j \neq \mathbf{0}$. Thus, no $\mathbf{v}_j$ is a linear combination of its predecessors, so $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$ is independent and thus is a basis for $\text{sp}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k)$. (See Exercise 37 on page 203.) ▲



附錄七 第二個放聲思考練習文本

THEOREM 5.3 Independence of Eigenvectors

Let A be an $n \times n$ matrix. If $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ are eigenvectors of A corresponding to *distinct* eigenvalues $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, respectively, the set $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ is linearly independent and A is diagonalizable.

PROOF Suppose that the conclusion is false, so the eigenvectors $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ are linearly dependent. Then one of them is a linear combination of its predecessors. (See Exercise 37, page 203.) Let $\mathbf{v}_k$ be the first such vector, so that

$$\mathbf{v}_k = d_1\mathbf{v}_1 + d_2\mathbf{v}_2 + \dots + d_{k-1}\mathbf{v}_{k-1} \quad (2)$$

and $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{k-1}\}$ is independent. Multiplying Eq. (2) by λ_k , we obtain

$$\lambda_k\mathbf{v}_k = d_1\lambda_k\mathbf{v}_1 + d_2\lambda_k\mathbf{v}_2 + \dots + d_{k-1}\lambda_k\mathbf{v}_{k-1}. \quad (3)$$

On the other hand, multiplying both sides of Eq. (2) on the left by the matrix A yields

$$\lambda_k\mathbf{v}_k = d_1\lambda_1\mathbf{v}_1 + d_2\lambda_2\mathbf{v}_2 + \dots + d_{k-1}\lambda_{k-1}\mathbf{v}_{k-1}, \quad (4)$$

because $A\mathbf{v}_i = \lambda_i\mathbf{v}_i$. Subtracting Eq. (4) from Eq. (3), we see that

$$0 = d_1(\lambda_k - \lambda_1)\mathbf{v}_1 + d_2(\lambda_k - \lambda_2)\mathbf{v}_2 + \dots + d_{k-1}(\lambda_k - \lambda_{k-1})\mathbf{v}_{k-1}.$$

This last equation is a dependence relation because not all the coefficients are zero. (Not all d_i are zero because of Eq. (2) and because the λ_i are distinct.) But this contradicts the linear independence of the set $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{k-1}\}$. We conclude that $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ is independent. That A is diagonalizable follows at once from Corollary 1 of Theorem 5.2. $\blacktriangle$