

負載弦振動之演示

周鑑恆

繃緊一輕質彈性弦，兩端再加以固定，使之具有張力，此弦串上若干具質量的質點，這些質點將此弦等分，這樣的振動系統 (oscillating system) 之運動，是力學中非常重要的課題，最早著手研究的學者正是力學鼻祖 -- 牛頓。以實際教具演示這個系統之運動，一方面有助於理解弦駐波、振動模式、共振等高中課程即涉及的概念，另一方面也有助於理解耦合諧振 (coupled harmonic oscillator)、以及 Lagrangian function 等較深的力學理論【註 1】。

為與教科書中常見的例題一致和簡化問題起見，本文之設計只演示負載三個質點的弦，且限制其運動為二維平面之橫向運動 (transverse motion)。一般市面上這樣的教具相當罕見，少數幾種可以購得的類似教具，往往要用到氣墊軌等笨重昂貴的器材，且引發其各種振動模式的機械裝置亦嫌複雜，實顯蕪亂而主題模糊。本文之設計相對較為簡潔，主題凸顯，花費少，自製容易，並利用一特別設計，使實際之運動逼近教科書常討論的簡化情形，演示之效果佳。

所需的材料如下：1.5 號之釣魚線（一般釣蝦場常用，兩三公尺長即綽綽有餘，老闆多願免費贈送）；延長軸充磁， $2 \times 3 \times 6\text{mm}^3$ 的稀土強磁三塊（總價不到 50 元台幣）；截面積 $4 \times 8\text{mm}^2$ 之木條一枝；滑輪一個；長約 120cm 的較粗木條若干；截面積 $5 \times 5\text{mm}^2$ ，

長 5 cm 的壓克力條 8 根；小軸承兩個（玩具行有售）；PE 塑膠棒； $80 \times 8\text{cm}^2$ 綠色珍珠板；適當之配重；直徑約 0.4mm 之漆包線 50m；軟鐵心（可從小型馬達或變壓器中拆下來，截面積約 $\times 5^2\text{mm}^2$ ，長約 5cm 即可），以及強力膠和 AB 膠等。其他用到的周邊器材包括：訊號產生器 (function generator)、功率放大器 (amplifier) 和閃光計頻器（一種氬氣閃光燈，閃光頻率可調）。

製程：

- (一)、如圖一照片所示，將漆包線以一層漆包線、一層雙面膠的方式，整齊纏繞軟鐵心約 700 匝，製成電磁鐵，最外層再以透明膠帶包覆（此工作需耐心，費時約 5-6 小時）。
- (二)、如圖一插圖所示，將截面積 $4 \times 8\text{mm}^2$ 之木條鋸成 20mm 長的小木塊，中間用美工刀和小銼刀鑿開一小長方形孔，以嵌入 $2 \times 3 \times 6\text{mm}^3$ 的稀土強磁，在距方形孔兩端約 3.5mm 處鑽兩小孔，恰容 1.5 號釣魚線穿過，兩小孔相距 1.4cm，以此作為本教具之負載質點，故須備製三個。
- (三)、以兩根間隔 1cm 的較粗木條製成長約 120cm 的平檯和必要的支架，如圖二所示。
- (四)、平檯左側安裝如圖三所示之轆轤裝置，

轆轤用 PE 棒車製而成，轆轤中央凹槽處之直徑 1.4 cm，轆轤轉軸方向與地面垂直，轆轤轉軸上下兩端裝有固定在木架上的小軸承，使同一條弦跨過此轆轤凹槽後相距 1.4cm，並且平行，且因轆轤可自由轉動而張力相同。此時將兩平行之弦穿過內嵌稀土強磁之小木塊的兩端小孔，將其一一串起。

(五)、平檯右側安裝如圖四所示之滑輪和木材製方形框架，木材製的方形框架一側鑽有相距 1.4 cm 的兩小孔，另一側只打一孔，兩股相距 1.4cm 之平行弦經方形框架兩小孔，再經另一側之小孔後束為一股，繞過滑輪，懸一配重，以調整弦之張力。

(六)、以截面積 $5 \times 5 \text{ mm}^2$ 之壓克力條製成兩相隔 1.4 cm、垂直並列的雙狹縫兩組，分別置於靠近平檯左側轆轤裝置和平檯右側滑輪處(見圖三和圖四)，兩組雙狹縫相距 80 cm，兩組雙狹縫之寬度均恰容 1.5 號釣魚線穿過，在雙弦靜止時絲毫不拉扯到弦，使弦從轆轤到方形框架完全呈直線。再以一小塊海棉稍微校正弦的水平高度，使之一致。最後，調整內嵌稀土強磁之小木塊之間距，以膠水加以固定，並於負載弦下方 7-8mm 處舖上綠色珍珠板，即大功告成。

使用兩組雙狹縫限制弦兩端點之運動，是本文設計之重點之一。若捨狹縫而以小孔取代，此負載弦之振動模式將經常與孩童玩的跳繩之運動情形相似，徒增演示教學之困擾。

根據理論【註 1】，若有 n 個負載質點在弦上，負載弦之張力為 T ，負載質點之間距為 l ，質點質量為 M ，則共有 n 個振動模式，振動模式之角頻率分別為

$$\omega_n = 2 \omega_0 \sin(N \pi / (2n+2)),$$

其中 $\omega_0 = (T/(l M))^{1/2}$ ， $N=1, 2, 3, 4, \dots, n$ 。

操作時，將電磁鐵水平對準外側某一內嵌稀土強磁之小木塊(見圖一及圖二)，以功率放大器放大訊號產生器之訊號功率，再接通電磁鐵；另外計算振動模式之頻率，因本實驗中只有三個負載質點，故 $n=3$ ，弦之張力根據配重之質量(95.2 g)可得 $T = 0.933 \text{ newton}$ ，三個負載質點之平均質量 $M = 0.6 \times 10^{-3} \text{ kg}$ ，間距 $l = 0.20 \text{ m}$ ，三個振動模式之角頻率分別為： $\omega_1 = 67.5 \text{ rad/s}$ ， $\omega_2 = 124.7 \text{ rad/s}$ ， $\omega_3 = 162.9 \text{ rad/s}$ 。角頻率和頻率的關係為 $\omega_n = 2 \pi f_n$ ，以之為參考，小心緩緩調訊號產生器之訊號頻率，即可見第一振動模式(如圖五所示)，角頻率為 69.7 rad/s，與理論計算之結果僅差 3.3%、第二振動模式(如圖六所示)，角頻率為 130.7 rad/s，與理論計算之結果僅差 4.8%、第三振動模式(如圖七所示)，角頻率為 172.2 rad/s，與理論計算之結果僅差 5.7%；輔以頻率調至與振動模式者相近之閃光計頻器來觀察，各個振動模式振動的情形更為清楚。

這項教具有下列優點：

(一)、利用磁力簡單啟動各個振動模式，無須使用任何其他複雜的機械裝置觸動振動系統，特別有助於突顯振動系統，不致有喧賓奪主的缺點；

- (二)、振動系統本身簡潔明瞭，極近乎一般教科書中所敘述的振動系統；
- (三)、不將弦的兩端完全固定，卻以垂直之縫限制弦兩端之運動，使弦兩端可以在垂直方向無拘運動，但在水平方向則被完全固定，使得垂直方向振動之能量可以傳出耗損而衰減，並且使垂直方向和水平方向振動模式的行為和頻率完全錯開。以符合水平振動模式之頻率的磁力驅動時，只有水平振動的模式會被啟動，故本教具只限於水平二維振動，正如同一般教科書中之敘述，對於教學頗有俾益。
- 誌謝：感謝源流基金贊助。

註釋：

- 1、一般物理學教科書多有相關現象和理論之探討，大專以上力學教科書則有詳盡完整的理論分析，可供教師參考。例如：Tai L. Chow, *Classical Mechanics*, John Wiley & Sons, Inc., pp. 409-415 (New York, 1995)；G. L. Cassiday, G. R. Fowles, *Analytical Mechanics*, 5th ed., Harcourt Brace & Company, pp. 403-410 (Florida, 1993)。

圖說：(請見封底相關圖片)

- 圖(一) 電磁鐵和內嵌稀土強磁之小木塊，小木塊懸於綠色珍珠板上方約 7 mm 處；插圖為內嵌稀土強磁的小木塊之俯視和側視圖。
- 圖(二) 平檯和支架(其他所有組件均已組裝完成，第二幀之照片顯示電磁鐵放置的位置)。
- 圖(三) 轆轤裝置目的在使兩側弦之張力一致，這部分讀者可自行設計，只要能使兩股弦平行和張力相同即可；右方為截面積 $5 \times 5 \text{ mm}^2$ 的四根壓克力條製的垂直雙狹縫；兩股弦穿過其中可自由上下振動。
- 圖(四) 滑輪和用木材製成的方形框架，壓克力製的雙狹縫亦可見；方形框架和雙狹縫間為海棉墊片；右下方為配重。
- 圖(五) 第一振動模式之俯視圖(長時間曝光)，兩幀橫向取景之照片顯示其幾乎在同一水平面上振動，且三者同進退。
- 圖(六) 第二振動模式。照片清楚顯示弦中間負載的小木塊幾乎不動，兩側負載的小木塊則反向運動。
- 圖(七) 第三振動模式之振幅已縮小，但照片中仍可見兩側負載的小木塊同向運動，中間小木塊與兩側小木塊之運動方向相反；肉眼目視或輔以閃光計頻器，振幅已縮小的第三振動模式，亦仍清晰可辨。