

國立臺灣師範大學數學系碩士班碩士論文

指導教授：許志農博士

艾薛爾幾何鑲嵌藝術之教學動畫設計

研 究 生：李勁緯

中 華 民 國 一 百 零 三 年 六 月

摘要

國內學生在學習數學的過程中充滿挑戰與挫折感，因而失去對數學的興趣，尤其是在學習幾何單元時常令學生陷入困境。本研究為了提升學生學習幾何的興趣，在這數位化的時代，利用荷蘭版畫家艾薛爾(M. C. Escher, 1898-1972)的 137 幅鑲嵌版畫當作題材，並為了增加趣味性，利用動畫設計軟體 Flash CS6，開發出 17 款四邊形與 3 款三角形之鑲嵌圖案動畫教材，以期提供教師生動、活潑的教學資源。

除了開發動畫教材外，為讓使用者更有效率地使用本教材，將每個動畫教材設計工作單及與之配套的著色畫、拼圖，在看過動畫教材後，能更清楚了解鑲嵌藝術中的幾何知識。更進一步藉由網路分享，提升國人的數學素養。

關鍵詞：艾薛爾（M. C. Escher）版畫、鑲嵌圖案、幾何圖形、中學數學、Flash 教學動畫

目 錄

摘要

第一章 緒論.....	1
第一節 研究背景與動機.....	1
第二節 研究目的.....	2
第三節 研究範圍與後續.....	3
第二章 文獻探討.....	4
第一節 鑲嵌圖案.....	4
第二節 艾薛爾創作背景.....	6
第三節 艾薛爾的平面鑲嵌版畫.....	7
第三章 從數學觀點看艾薛爾平面鑲嵌版畫.....	11
第一節 尋找數學骨架.....	11
第二節 如何密鋪整個平面.....	17
第四章 教材內容說明.....	23
第一節 數位教材內容說明.....	23
第二節 工作單內容說明.....	26
《E044 鳥》.....	28
《E052 青蛙與鳥》.....	34
《E057 魚》.....	42
《E061 兩個生物》.....	48
《E075 蜥蜴》.....	54
《E082 鳥與魚》.....	60
《E084 鳥與魚》.....	67
《E087 兩隻鳥》.....	73
《E090 魚》.....	79
《E092 兩隻鳥》.....	85
《E093 魚》.....	91
《E104 蜥蜴》.....	97
《E108 鳥》.....	104
《E116 魚》.....	110
《E118 蜥蜴》.....	116
《E120 兩隻魚》.....	122
《E121 兩隻魚》.....	128

《E124 蜥蜴》.....	134
《E126 魚與鳥》.....	140
《E130 魚與馬》.....	148
第五章 參考文獻.....	153

第一章 緒論

第一節 研究背景與動機

目前我國學生在各階段均配合發展以不同方式學習幾何課程，以促使其幾何層次的發展。小學時期，學生透過操作，將簡單圖形切割重組成另一已知簡單圖形，進而描述物體相對位置，並理解旋轉角的意義以及平面圖形線對稱的關係等；在國中則用切割重組來計算面積或理解線對稱圖形的幾何性質並應用於解題與推理；高中階段，學生開始使用代數表徵描述幾何，利用矩陣表示幾何中的平移、旋轉及鏡射。

即便努力提供多種面向學習，我國中學生對數學有高正向態度及具有高度學習自信心人數比例顯著低於國際平均。(李哲迪、林碧珍、張美玉、張俊彥、曹博盛, 2007)，學生在代數方面的證明表現明顯優於幾何方面(Healy & Hoyles, 1998)，加上中學畢業後的學生或是一般社會大眾再學習幾何的機會更是微乎其微。

於現今網際網路發達的社會，網路平台的上傳及分享功能具及時性，對學習來說是一個非常便利的資源，因此若能夠開發出與此領域相關的數位教材，並透過網路平台將上傳及分享所開發的數位教材，能讓更多的學子及民眾受惠。

第二節 研究目的

為了提升國人平面幾何素養，提升學生學習幾何領域的動機，及促進學生幾何層次的發展，從資訊科技協助教師提升教學品質（王全世，2000），擬將幾何知識與藝術結合，讓學生、社會大眾甚至是學齡前孩童以及銀髮族能夠欣賞幾何數學之美，同時體會到幾何數學在日常生活中的廣泛應用。

荷蘭的版畫家艾薛爾（M. C. Escher, 1898-1972）是平面幾何與鑲嵌藝術結合的靈魂人物，幾何知識與跨領域的藝術相連結。本研究將透過艾薛爾的平面鑲嵌版畫開發數位教材，以期達到提升國人平面幾何素養的目的。

第三節 研究範圍與後續

本研究著重於開發艾薛爾 17 幅四邊形與 3 幅三角形鑲嵌版畫的數位教材及工作單，目前部分數位教材及工作單已放置《非想非非想數學網》<http://www.math.ntnu.edu.tw/museum/> 網路平台上，提供各年齡層學子及社會大眾進行數位學習之用。屆時可由使用者在工作單之回饋，迅速瞭解其學習狀況，以及對數位教材或工作單所提出的建議。

本研究僅完成數個數位教材及工作單，其他的鑲嵌版畫將由艾薛爾鑲嵌版畫數位教材製作團隊陸續完成，並上傳至《非想非非想數學網》網路平台。

除了藉由網路平台立即了解使用者的使用狀況外，位於教學現場的教師們亦可運用本研究所開發的數位教材，在課堂上搭配工作單引導學生學習；課堂後可透過網路留言板或電子郵件，分享自己的教學方式、心得與建議等。

第二章 文獻探討

第一節 鑲嵌圖案

鑲嵌或密鋪 (Tessellation) 指「將具有獨立封閉外形的圖形以連續、反覆且不重疊，也不留空隙的形式在平面上展開」。鑲嵌圖案或密鋪平面稱為「平面規則分割」，並解釋為「一塊平面或龐加萊圓盤，它應是被想成有無限的邊際，可將之填滿或被分割成無數類似的幾何圖案，不留任何虛的空間。」M. C. Escher(1958)

鑲嵌圖案可以簡單分類成這兩大類多邊形和非多邊形這兩類，在多邊形這一類我們又可以分成兩類：單一種多邊形及兩種以上多邊形。下面三張圖是取自日常生活中由單一種多邊形所組成的牆壁、地板及天花板，這些磁磚的形狀分別為正方形（圖 2.1.1）、矩形（圖 2.1.2）、正三角形（圖 2.1.3）：

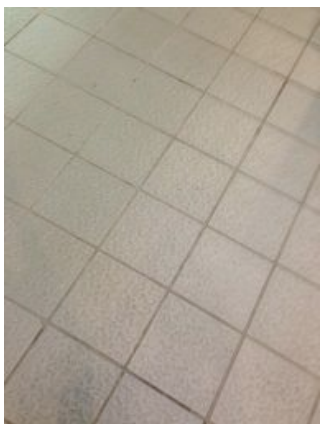


圖 2.1.1 捷運站地磚



圖 2.1.2 建築物的外牆

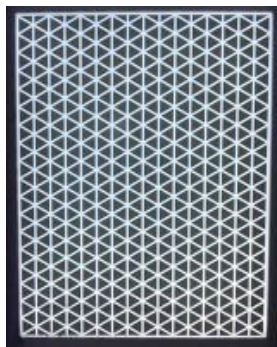


圖 2.1.3 公車站遮雨棚

下面一張圖是由兩種以上多邊形所組成的磁磚，圖 2.1.4 的地板包含了正八邊形及正方形：



圖 2.1.4 師大公館校區地磚

圖 2.1.5 的地板是由非多邊形的形狀所組成的，因為非多邊形鑲嵌圖案是由多邊形為數學骨架（lattice）發展而來，故不加以細分，如下圖：



圖 2.1.5 市府前廣場

第二節 艾薛爾創作背景

回教藝術家是鑲嵌創作的始祖。回教嚴格限制藝術作品中出現任何活著的物或像，因此藝術家們轉而向裝飾和鑲嵌發展。艾薛爾 1922 年在西班牙旅行時，參觀的格拉納達的阿爾罕布拉宮（Alhambra Palace and Garden）就是在這樣的背景下發展數學藝術的代表性例子。這座宮殿是十三、十四世紀的穆斯林建築，宮殿裡的地板、牆壁、天花板使用許多的複雜幾何圖案及反覆性圖案來裝飾，其圖案豐富，令人嘆為觀止。其中，摩爾式的棋盤形嵌石（tessellation）是最吸引艾薛爾目光的藝術作品。



圖 2.2.1 阿爾罕布拉宮的磁磚



圖 2.2.2 艾薛爾模擬的素描

艾薛爾於1936年第二次造訪阿爾罕布拉，研究過程中，發現鑲嵌與數學、結晶學的關連，於是開始研讀雜誌上此類主題的文章。此後，艾薛爾運用以數學為基礎的方法創作了多幅鑲嵌藝術作品，他一生中共創作了137幅平面鑲嵌版畫。

第三節 艾薛爾的平面鑲嵌版畫

艾薛爾在平面規則分割裡有提到主題元素（motif）、平移單位（sliding cell）及數學骨架（lattice）等概念。

一、主題元素（motif）

在鑲嵌版畫上所看到的圖案，如：鳥、魚、蜥蜴等，皆為主題元素，而數學家則稱之為磁磚（tile）。

二、平移單位（sliding cell）

一個圖案能夠以重複排列的方式密鋪整個平面，稱為平移單位。我們以艾薛爾編號《E044 鳥》（圖2.3.1）為例，其平移單位是一匹鳥，但根據主題元素設計的不同，平移單位可能不只一種。



圖 2. 3. 1 E044 鳥

三、數學骨架（lattice）

一個多邊形如果恰好包含一個平移單位且能夠以重複的排列方式密鋪整個平面，稱為數學骨架，在此以《E044 鳥》（圖2.3.2）、《E084 鳥與魚》（圖2.3.3）、《E104 蜥蜴》（圖2.3.4）及《E124 蜥蜴》（圖 2.3.5）為例。



圖 2.3.2 E044 鳥

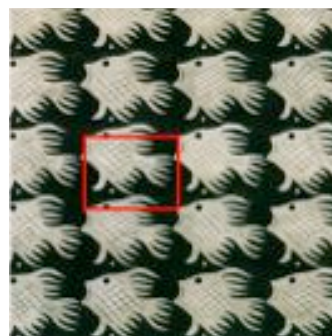


圖 2.3.3 E084 鳥與魚



圖 2.3.4 E104 蜥蜴



圖 2.3.5 E124 蜥蜴

圖 2.3.2 的紅框正三角形為鳥的數學骨架，仔細觀察可以看出正三角形裡的區塊能拼成鳥，也就是此正三角形內恰包含一個平移單位—鳥，由圖 2.3.6 可以看出此正三角形能以重複的排列方式密鋪整個平面；圖 2.3.3 的紅框矩形為鳥與魚的數學骨架，可以觀察出矩形裡的區塊能拼成一隻鳥與一隻魚，由圖 2.3.7 可以看出此矩形能以重複的排列方式密鋪整個平面；圖 2.3.4 中蜥蜴的數學骨架為紅框正方形，此正方形裡的區塊可以拼成一隻蜥蜴，由圖 2.3.8 可以看出此正方形能以重複的排列方式密鋪整個平面；而圖 2.3.5 中蜥蜴的數學骨架為綠框四邊形，此四邊形裡的區塊可以拼成一隻蜥蜴，由圖 2.3.9 可以看出此四邊形能以重複的排列方式密鋪整個平面。由上述可知，數學骨架的面積等於一個平移單位的面積。

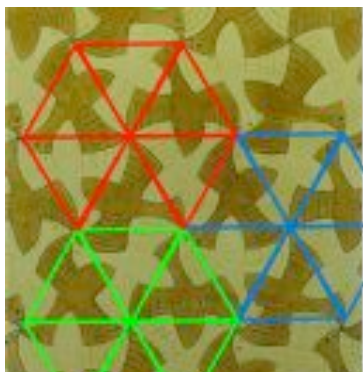


圖 2. 3. 6 E044 鳥



圖 2. 3. 7 E084 鳥與魚



圖 2. 3. 8 E104 蜥蜴



圖 2. 3. 9 E124 蜥蜴

艾薛爾將數學骨架主要分成兩大類：三角形及四邊形，其中三角形包含正三角形、銳角三角形及由六個正三角形組成的正六邊形，四邊形包含正方形、矩形、菱形、平行四邊形及鳶形（箏形），為更清楚區分，本研究將正六邊形歸類在六邊形，為求分類的完整性亦增加五邊形這一類。

對於如何密鋪平面的問題，艾薛爾整理出三種規則：平移（translation）、軸向（axes）及滑行鏡射（glide-reflection），軸向為以一個點為軸心發展圖案，滑行鏡射為平移與鏡射的合成，本研究用旋轉表示軸向，並用以下三種規則平移、旋轉及鏡射來說明如何密鋪平面。我們以艾薛爾的四幅版畫為例，分別說明其數學骨架為哪一個多邊形以及此數學骨架鋪滿整個平面的方式。

《E044 鳥》（圖 2.3.6）的數學骨架為正三角形，其密鋪方式為：以鳥的左翅膀為旋轉點一次旋轉 60 度，共六次，圍繞旋轉點的六個正三角形視為一組，形成正六邊形的數學骨架，再將正六邊形以平移鋪滿方式密鋪於平面。

《E084 鳥與魚》（圖 2.3.7）的數學骨架為矩形，其密鋪方式為：將一個矩形與另一個矩形的邊平移密合後，重複此排列方法密鋪平面。

《E104 蜥蜴》（圖 2.3.8）的數學骨架為正方形，其密鋪方式為：以蜥蜴的左腳後跟為旋轉點一次旋轉 90 度，共四次，圍繞旋轉點的四個正方形視為一組，再以一組為單位以平移鋪滿方式密鋪於平面。

《E124 蜥蜴》（圖 2.3.9）的數學骨架為四邊形，其密鋪方式為：選定一隻蜥蜴後，左、右兩隻蜥蜴是以蜥蜴的左手臂及左腳趾為旋轉點一次旋轉 180 度，而上、下兩隻蜥蜴都是蜥蜴以鉛直直線為鏡射軸鏡射後，再上下密合，重複此方式密鋪於平面。

第三章 從數學觀點看艾薛爾平面鑲嵌版畫

第一節 尋找數學骨架

數學骨架可以是三角形、四邊形、五邊形或六邊形，但要如何判斷一個鑲嵌圖案的數學骨架是什麼形狀的多邊形，我們就要由密鋪平面的三種方式平移、旋轉及鏡射來尋找線索。下面依平移、旋轉及鏡射分別說明如何由密鋪方式尋找其數學骨架。

一、平移

以《E128 鳥》為例：先觀察圖 3.1.1 的平移單位是什麼？一隻鳥，我們以綠框的鳥（圖 3.1.2）作為此鑲嵌版畫的平移單位並說明如何尋找鳥的數學骨架。此鑲嵌版畫是如何以此平移單位密鋪整個平面？觀察此平移單位與其相鄰平移單位的關係，紅框為綠框左右的平移，而藍框為綠框的上下平移，可以用此密鋪方式來密鋪平面的多邊形為四邊形中的正方形、矩形或平行四邊形。



圖 3.1.1 E128 鳥



圖 3.1.2 中央為綠框鳥

這數學骨架除須滿足兩對邊互相平行，還須滿足一個數學骨架只能有一個平移單位。如圖 3.1.3 當畫了下面那一條藍色的邊時，對邊必須是黃色的線之一，另一對邊則將藍線與黃線端點相連。此正方形即為鳥的數學骨架（圖 3.1.4），檢查是否只包含一個平移單位並仔細觀察此正方形的四個頂點有什麼特點，可以發現此正方形不僅只包含一個平移單位且四個頂點“皆為”鳥嘴（或尾巴前端點）。



圖 3.1.3 與綠邊對應之黃邊



圖 3.1.4 相連後的數學骨架

除了尋找共同點，還需探索有無其他可能性，將黃色正方形左邊兩個點往垂直方向平移一些距離，如圖 3.1.5 的紫色虛線平行四邊形，再檢查是否滿足數學骨架的定義。



圖 3.1.5 平行四邊形數學骨架

由上述可以得到下面結論：尋找密鋪方式為平移的數學骨架時，依平移單位可以選四個共同點相連，如《E074 鳥》（圖 3.1.6）的平移單位是鳥，選其鳥的頭頂為共同點，則此紅色平行四邊形即為鳥的數學骨架。將紅色平行四邊形的某條邊向平行自己的方向平移仍是鳥的數學骨架（圖 3.1.7）。因此每個人所選的頂點不同，就會有不同的數學骨架，由此可知數學骨架不唯一。



圖 3.1.6 平行四邊形骨架



圖 3.1.7 平行四邊形骨架

二、旋轉

以《E104 蜥蜴》為例：先觀察圖 3.1.7 的平移單位是什麼？一隻蜥蜴，我們以紅框的蜥蜴（圖 3.1.8）作為此鑲嵌版畫的平移單位並說明如何尋找蜥蜴的數學骨架。此鑲嵌版畫是如何以此平移單位密鋪整個平面？觀察圖 3.1.8 中紅框的平移單位與其相鄰的平移單位的關係，橘框為紅框以右手端點以及左後腳端點為旋轉點，順時針旋轉 90 度，綠框是紅框同樣是以右手端點和左後腳端點為旋轉點，逆時針旋轉 90 度。可進一步觀察到如果將紅框及綠框視為一個鑲嵌圖案，即可密鋪平面。另外兩種顏色框同理。由此可以推測這兩個旋轉點為數學骨架的其中兩個頂點，那滿足這種特性的數學骨架會是哪個多邊形呢？



圖 3.1.8 E104 蜥蜴



圖 3.1.9 中央為紅框蜥蜴

可以知道每個旋轉點的角度皆為 90 度，因此數學骨架可能為正方形，因為正方形的每個角度為 90 度，如圖 3.1.10 的正方形，檢查其是否滿足數學骨架定義？而圖 3.1.10 中有兩個黃色點及兩個綠色點，蜥蜴的數學骨架還有可能是哪個多邊形呢？圖 3.1.11 中黃色點及綠色點為平移單位鄰近的旋轉點，若選擇三個黃色點作為數學骨架的其中三個頂點，綠色點會在三個黃色點所形成的三角形之一邊上，則此數學骨架為等腰直角三角形，檢查此等腰直角三角形是否滿足數學骨架定義？



圖 3.1.10 正方形數學骨架



圖 3.1.11 等腰直角三角形骨架

由上述可以得到下面結論：尋找密鋪方式為旋轉的數學骨架時，在平移單位上挑出旋轉點，如《E118 蜥蜴》（圖 3.1.12）的平移單位是一隻蜥蜴，圖中的點為平移單位的旋轉點，選擇其中四個旋轉點為數學骨架的四個頂點，再依密鋪方式選擇正確的數學骨架。圖 3.1.13 的點為平移單位鄰近的旋轉點之其中三點，圖中的等腰直角三角形是蜥蜴另一種數學骨架。因此每個人選的旋轉點不同，就會有不同的數學骨架，由此可知數學骨架不唯一。



圖 3.1.12 正方形數學骨架



圖 3.1.13 等腰直角三角形骨架

三、鏡射

以《E108 鳥》為例：先觀察圖 3.1.14 的平移單位是什麼？一隻鳥，我們以紅框的鳥（圖 3.1.15）作為此鑲嵌版畫的平移單位並說明如何尋找鳥的數學骨架。此鑲嵌版畫是如何以此平移單位密鋪整個平面呢？觀察紅框的平移單位與其相鄰的平移單位的關係，藍框為紅框上下平移，黃框為紅框先以水平線為鏡射軸鏡射，再左右貼齊。



圖 3.1.14 E108 鳥

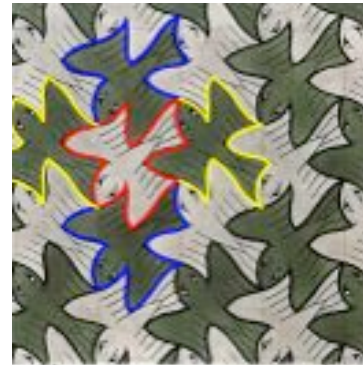


圖 3.1.15 中央為紅框鳥

可以用此密鋪方式來密鋪平面的多邊形為四邊形中的正方形、矩形、平行四邊形或鳶形，因為上下為平移，試著依平移密鋪的結論，先選共同點如選鳥嘴（圖 3.1.16），檢查所選的數學骨架是否滿足其定義，檢查後可以知道此平行四邊形即為鳥的數學骨架。在鏡射情況使用平移密鋪的結論時，必須留意左右的鳥有對水平直線鏡射的關係，如圖 3.1.17，經檢查後發現黃色平行四邊形不是鳥的數學骨架，因為黃色平行四邊形對水平直線鏡射後，無法與原黃色平行四邊形左右密合。



圖 3.1.16 平行四邊形數學骨架



圖 3.1.17 錯誤的數學骨架

除了考慮共同點，還需探索有無其他可能性，例如：如果將原本的平行四邊形數學骨架的四個頂點，右邊兩個頂點往上移，左邊兩個頂點往下移，如圖 3.1.18，數學骨架變為正方形，檢查後可以發現其滿足數學骨架的定義，也能依鳥密鋪方式密鋪平面



圖 3.1.18 正方形數學骨架

由上述可以得到下面的結論：尋找密鋪方式為鏡射的數學骨架時，在平移單位上挑出四個共同點相連，如《E019 鳥》（圖 3.1.19）的平移單位是一隻鳥，並挑鳥嘴端點為共同點，所以圖 3.1.19 的數學骨架為平行四邊形；圖 3.1.20 的共同點一樣取的是鳥嘴端點，卻有不同形狀的數學骨架。因此每個人選的共同點不同，就會有不同的數學骨架，由此可知數學骨架不唯一。



圖 3.1.19 平行四邊形數學骨架

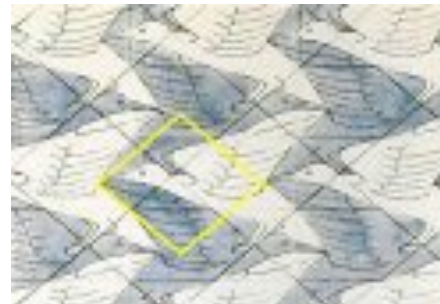


圖 3.1.20 菱形數學骨架

第二節 如何密鋪整個平面

由數學骨架的定義可以知道數學骨架的面積與平移單位的面積相同，也就是一個多邊形的數學骨架可以經由裁切與拼貼，變成一個看似更有趣的平移單位，但要如何裁切與拼貼才能密鋪又能不失生動活潑呢？接下來延續上一節的例子繼續往下探究。

一、平移

以《E128 鳥》為例：圖 3.2.1 的藍色正方形為鳥的數學骨架，也就是此正方形可以經由裁貼變成鳥的鑲嵌圖案。圖 3.2.2 為正方形裡的裁切線及拼貼後的輪廓線，裁切部分需剪掉三小塊，再拼貼至正確的位置，以大寫英文字母表示需裁切的部分，小寫英文字母表示拼貼的正確位置。在拼貼的過程中可以發現規律：裁左邊拼貼至右邊、裁右邊拼貼至左邊、裁上面拼貼至下面、裁下面拼貼至上面。這與密鋪的方式有這很大的關係，這也是為什麼如此裁貼出的鳥可以密鋪平面。



圖 3.2.1 藍色正方形數學骨架

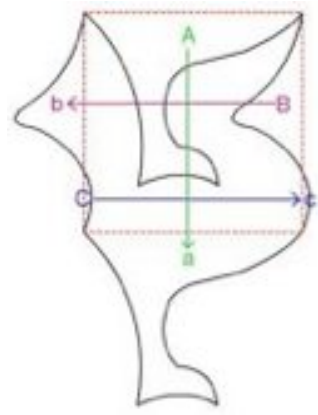


圖 3.2.2 切割、拼貼後的輪廓線

先將正方形密鋪於平面，並留下裁切線，如圖 3.2.3。將裁切線及輪廓線畫至與其相鄰的正方形，仔細觀察可以發現搬動裁切區塊相當於搬動整塊正方形，而搬動的方式就是平移單位密鋪平面的方式，如此便能裁貼出可以密鋪平面的鑲嵌圖案。將一個正方形的裁貼經由想像擴大到無窮多的正方形一起裁貼，便更能意會鑲嵌圖形的藝術。

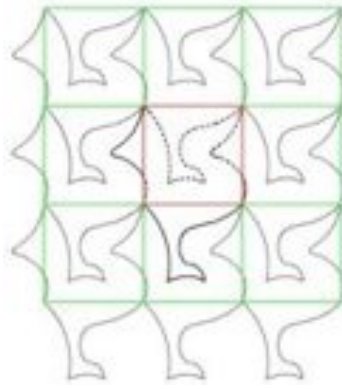


圖 3.2.3 密鋪平面的正方形與其
輪廓

二、旋轉

以《E104 蜥蜴》為例：圖 3.2.4 的紅色正方形為蜥蜴的數學骨架，也就是此正方形可以經由裁貼變成蜥蜴的鑲嵌圖案。圖 3.2.5 為正方形裡的裁切線及拼貼後的輪廓線，裁切部分需剪掉六小塊，再拼貼至正確的位置，以大寫英文字母表示需裁切的部分，小寫英文字母表示拼貼的正確位置。在拼貼的過程中可以發現：A、B 以 O 點為旋轉點拼貼至 a、b，C、D、E 以 P 點為旋轉點拼貼至 c、d、e。這與平移單位的密鋪方式有這很大的關係，這也是為什麼如此裁貼出的蜥蜴可以密鋪平面。



圖 3.2.4 紅色正方形數學骨架

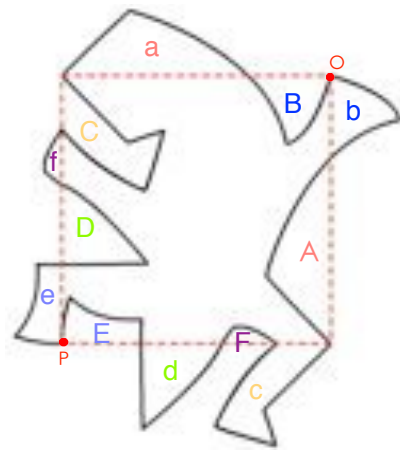


圖 3.2.5 切割、拼貼後的輪廓線

先將正方形密鋪於平面，並且留下裁切線，如圖 3.2.6。將裁切線及輪廓線畫至與其相鄰的正方形，仔細觀察可以發現搬動裁切區塊相當於搬動整塊正方形，而搬動的方式就是平移單位密鋪平面的方式，如此便能裁貼出可以密鋪於平面的鑲嵌圖案。將一個正方形的裁貼經由想像擴大到無窮多的正方形一起裁貼，便更能意會鑲嵌圖形的藝術。

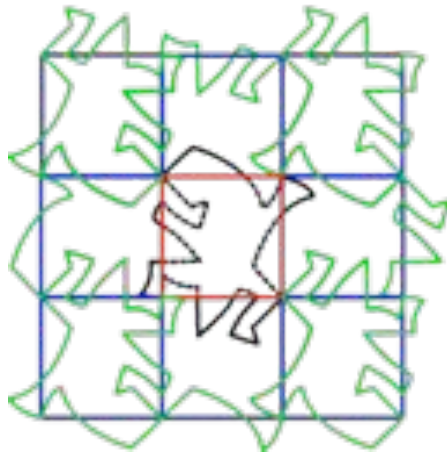


圖 3.2.6 密鋪平面的正方形與其輪廓

三、鏡射

以《E108 鳥》為例：圖 3.2.7 的紅色平行四邊形為鳥的數學骨架，也就是此平行四邊形可以經由裁貼變成鳥的鑲嵌圖案。圖 3.2.8 為平行四邊形裡的裁切線及拼貼後的輪廓線，裁切部分需剪掉五小塊，再拼貼至正確位置，以大寫英文字母表示需裁切的部分，小寫英文字母表示拼貼的正確位置。在拼貼的過程中可以發現：A、D 塊為上下平移拼貼至 a、d，而 B、C、E 三塊都是

以水平線為鏡射軸鏡射拼貼至 b 、 c 、 e 。這與平移單位的密鋪方式有這很大的關係，這也是為什麼如此裁貼出的鳥可以密鋪平面。



圖 3.2.7 紅色平行四邊形數學骨架

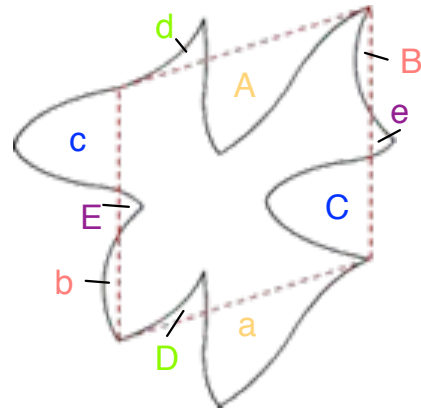


圖 3.2.8 切割、拼貼後的輪廓線

先將平行四邊形密鋪於平面，並且留下裁切線，如圖 3.2.9 。將裁切線及輪廓線畫至與其相鄰的平行四邊形，仔細觀察可以發現搬動裁切區塊相當於搬動整塊平行四邊形，而搬動的方式就是平移單位密鋪平面的方式，如此便能裁貼出可以密鋪於平面的鑲嵌圖案。將一個平行四邊形的裁貼經由想像擴大到無窮多的平行四邊形一起裁貼，便更能意會鑲嵌圖形的藝術。

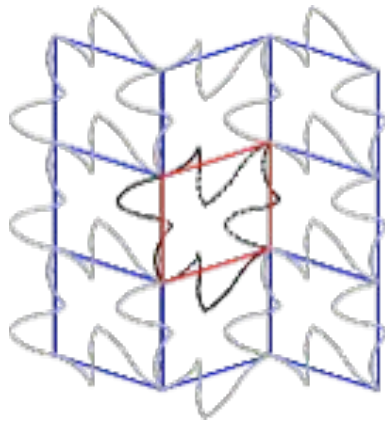


圖 3.2.9 密鋪平面的平行四邊形與其輪廓

四、合成

以《E124 蜥蜴》為例：圖 3.2.10 的紅色四邊形為蜥蜴的數學骨架，也就是此四邊形可以經由裁貼變成蜥蜴的鑲嵌圖案。圖 3.2.11 為四邊形裡的裁切線及拼貼後的輪廓線，裁切部分需剪掉六小塊，再拼貼至正確的位置，以大寫英文字母表示需裁切的部分，小寫英文字母表示拼貼的正確位置。在拼貼的過程中可以發現：A 以 O 點為旋轉點拼貼至 a，D、E 以 P 點為旋轉點分別拼貼至 d、e，B 往右上平移再翻面拼貼至 b，C 往上平移再翻面拼貼至 c，F 往右下平移再翻面拼貼至 f。這與平移單位的密鋪方式有這很大的關係，這也是為什麼如此裁貼出的蜥蜴可以密鋪平面。



圖 3.2.10 紅色四邊形數學骨架

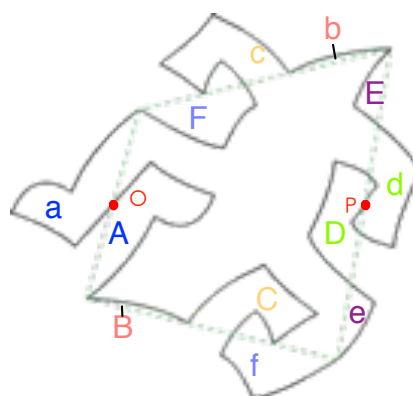


圖 3.2.11 切割、拼貼後的輪廓線

先將四邊形密鋪於平面，並且留下裁切線，如圖 3.2.12。將裁切線及輪廓線畫至與其相鄰的四邊形，仔細觀察可以發現搬動裁切區塊相當於搬動整塊四邊形，而搬動的方式就是平移單位密鋪平面的方式，如此便能裁貼出可以密鋪於平面的鑲嵌圖案。將一個四邊形的裁貼經由想像擴大到無窮多的四邊形一起裁貼，便更能意會鑲嵌圖形的藝術。

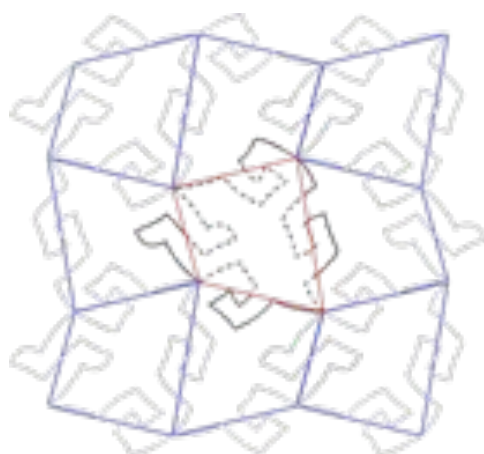


圖 3.2.12 切割、拼貼後的輪廓線

第四章 教材內容說明

第一節 數位教材內容說明

在科技日新月異的時代，數位教材不僅能讓內容更加生動，還能讓更多人欣賞鑲嵌藝術進而欣賞經由數學的平移旋轉鏡射所形成的美。本研究將艾薛爾鑲嵌版畫開發成數位教材，研究開發出的數位教材包含：鑲嵌教學影片、鑲嵌著色及拼圖，在此以編號《E104 蜥蜴》為例，一一介紹所開發出的兩種數位教材：為讓使用者欣賞鑲嵌圖案的形成過程及鋪滿方式，研究並開發教學影片並分為四段，第一段將數個數學骨架依重複的平鋪方式密鋪於整個平面（圖 4.1.1）即為數學舞台，由數學舞台中的黃色正方形為密鋪平面的起始，以正方形頂點上的紅色點為旋轉點逆時針旋轉90度，旋轉三次，第一次旋轉後的黃色正方形變成紫色，第二次旋轉後的紫色正方形變成黃色，第三次旋轉後的黃色正方形變成紫色，之後依上述的密鋪方式構成數學舞台，觀察《E014 蜥蜴》的密鋪方式（圖 4.1.2）可以發現第一段數學骨架的密鋪方式就是蜥蜴鑲嵌圖案的密鋪方式。

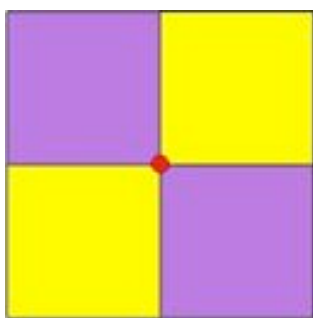


圖 4.1.1 正方形密鋪

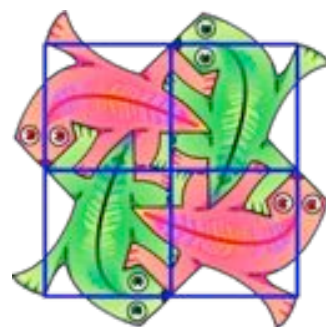


圖 4.1.2 蜥蜴的密鋪方式

第二段由第一段數學舞台的一個正方形變大拉開序幕，此變大的正方形即為蜥蜴的一個數學骨架，這裡依圖 4.1.2 綠色蜥蜴的數學骨架為例，將綠色蜥蜴數學骨架內非綠色蜥蜴身體一部份的六個區塊編號A, B, C, D, E, F，並將這六小塊依數學原理的旋轉貼到正確的位置（圖 4.1.3），即裁貼出綠色蜥蜴。

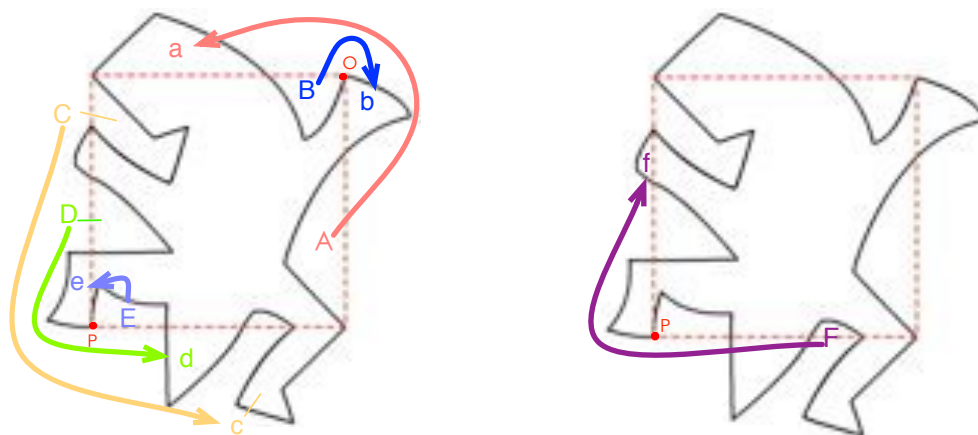


圖 4.1.3 切割、拼貼蜥蜴

第三段先將第二段所裁貼出的蜥蜴著上顏色，並將著色好的蜥蜴進行藝術表演，表演內容分為兩部分，第一部份蜥蜴展示出其主要的密合方式，因為蜥蜴有兩種顏色，所以由兩隻蜥蜴表演主要的兩種密合方式，如圖 4.1.4 ；第二部分為蜥蜴的即興演出。

(1) 頭與手的密合

(2) 尾巴與手的密合



圖 4.1.4 兩隻蜥蜴的密合方式

第四段銜接第一段的數學舞台，並留下數學舞台的虛線邊，將蜥蜴依第一段數學骨架的密鋪方式一隻隻放到數學骨架上（圖 4.1.5 ），放的時候除了需注意蜥蜴在數學骨架上的正確位置外，仍須依照第三段第一部分的表演，也就是主要的三種密合方式，這樣才能與相鄰的蜥蜴互相貼合，如圖 4.1.6 。

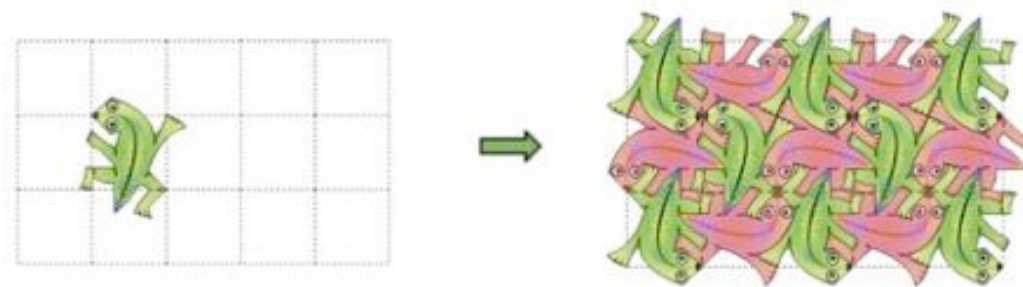


圖 4.1.5 蜥蜴密鋪

教學影片還搭配了背景音樂，除了讓使用者帶著舒適的心情欣賞鑲嵌藝術外，部分教學影片還會配合該主題的音樂。

在播放影片時的左邊有一個小標題：艾薛爾鑲嵌藝術—蜥蜴，此標題除了讓大家知道這一幅鑲嵌版畫的名字是蜥蜴外，其實此標題還是一個暫停按鈕，是為了方便讓使用者停下來欣賞或思考。

在未開始播放影片的封面除了一開始看到的封面圖外，還隱藏了兩個畫面，第一張封面圖也是艾薛爾的鑲嵌版畫，且部分影片封面圖與該鑲嵌版畫相關的，例如編號《E104 蜥蜴》影片的封面圖是艾薛爾根據這幅蜥蜴版畫所設計的磁磚柱作品（圖 4.1.6），詳細封面圖的介紹會在本研究的第四章第二節的《E104 蜥蜴》工作單上說明；按一下影片右上角的隱藏按鈕會進入第二張圖片，此圖片為當年艾薛爾畫《E104 蜥蜴》鑲嵌版畫的原圖，再按一次右上角的隱藏按鈕會在第二張的原圖上畫上數學骨架（圖 4.1.7）。



圖 4.1.6 E104 蜥蜴



圖 4.1.7 紅色正方形數學骨架

對於廣大的使用者我們亦開發了拼圖，以《E104 蜥蜴》拼圖為例（圖 4.1.8 左圖），除了增加趣味性外，也可以讓使用者更了解蜥蜴鑲嵌，遊戲規則為：相鄰兩隻蜥蜴顏色不相同且所有蜥蜴必須在紅色框內（不可重疊），即完成拼圖；

在拼圖畫面的左邊隱藏了兩個按鈕，按下「艾薛爾鑲嵌拼圖」按鈕回到主畫面，按下「蜥蜴」按鈕會在紅框內增加數學骨架，讓初學者可以按蜥蜴在數學骨架上的正確位置協助完成拼圖；此外，按下主畫面右上方的隱藏按鈕會出現解答畫面（圖 4.1.8 右圖）。

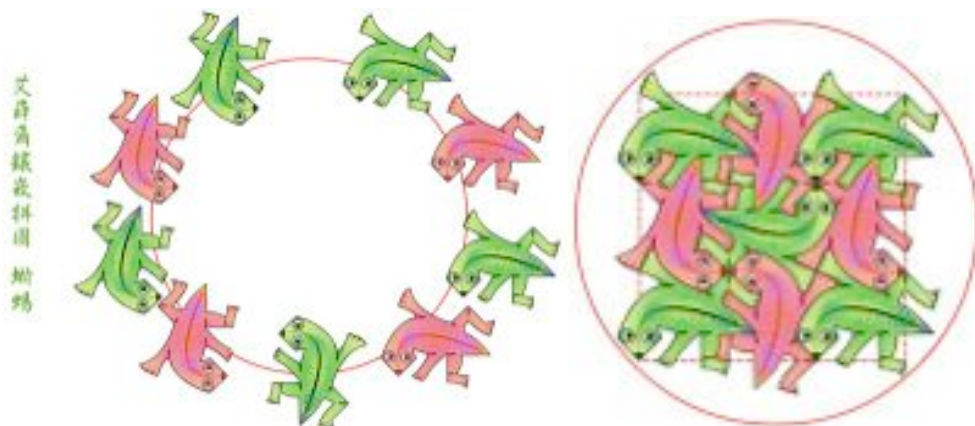


圖 4.1.8 蜥蜴拼圖

開發出鑲嵌版畫影片，能讓使用者了解鑲嵌圖案的由來及讓使用者帶著愉悅的心情欣賞鑲嵌藝術，開發著色及拼圖遊戲，能讓使用者看完影片後，可以依自己的喜好選擇遊戲，不僅能增加趣味性，還能經由親身體驗更了解鑲嵌藝術。

第二節 工作單內容說明

為讓使用者更有效率的使用這兩種數位教材，本研究亦開發出工作單，希望藉由工作單能讓數位教材的使用者更清楚了解鑲嵌藝術中的幾何數學。

工作單內容包含：引言之鑲嵌版畫創作背景與封面圖說明、影片總回顧之數學與藝術、細說影片第二段之如何由數學骨架裁貼出鑲嵌圖案、表演欣賞之主要密合方式、密鋪平面之形成鑲嵌圖，以及回饋單。

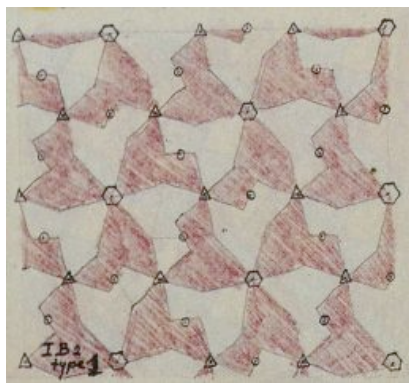
本研究為下述 20 幅版畫《E044 鳥》、《E052 青蛙與鳥》、《E057 魚》、《E061 兩個生物》、《E075 蜥蜴》、《E082 鳥與魚》、《E084 鳥與魚》、《E087 兩隻鳥》、《E090 魚》、《E092 兩隻鳥》、《E093 魚》、《E104 蜥蜴》、《E108 鳥》、《E116 魚》、《E118 蜥蜴》、《E120 魚與鳥》、《E121

魚與鳥》、《E124 蜥蜴》、《E126 魚與鳥》以及《E130 魚與馬》製作工作單
並依鑲嵌版畫編號由小到大一一排序。

E044 鳥工作單

撰稿：李勁緯

引言：《E044 鳥》是荷蘭版畫家艾薛爾在1941年12月畫的一幅版畫，每隻鳥的身體為單一顏色——淡黃色及土黃色，主要繪圖工具為墨水及水彩，而我們影片裡的封面圖是艾薛爾在自己的筆記本中為這種拼合方式所設計的數學骨架（圖一）：



圖一



圖二

觀察圖一當中，有數個紅色區塊及白色區塊，每個區塊邊界上有一個小六邊形、兩個小三角形及一個小圓形記號。不同形狀記號代表著不同種類的旋轉點，六邊形記號代表一次旋轉60度，轉6次為一圈，三角形記號代表一次旋轉120度，轉3次為一圈，而圓形記號代表一次旋轉180度，轉2次為一圈。一個小六邊形記號及兩個小三角形記號三點可以連成一個正三角形，而小圓形記號的位置恰在兩個小三角形記號連線的中點，這個正三角形就是這一個區塊的數學骨架，我們的《E044 鳥》就是利用此種拼合方式所設計出的版畫。看到這裡大家是不是覺得很有趣呢？而圖二是艾薛爾在1957年6月設計的延伸作品版畫《E099 飛魚》，圖二中的飛魚們是不是也很像鳥呢？事實上，《E099 飛魚》中的飛魚輪廓跟我們這幅《E044 鳥》版畫中鳥輪廓是完全一樣的！就讓我們觀賞影片來看看鳥是如何誕生的吧！

請在電腦上點選《E044 鳥.exe》，並仔細觀賞影片。

一、鳥的數學與藝術

我們可以把鳥的影片分成如下的四幕：

第一幕：影片由正三角形鋪滿構成數學舞台拉開序幕，而這正三角形正是鳥的數學骨架。

第二幕：將數學舞台的一個正三角形放大，從這正三角形剪下四小塊後，依數學原理的平移及旋轉貼到正確的位置，即裁貼出鳥。

第三幕：將鳥外框的內部著上顏色成為藝術品並進行藝術表演，表演過程依各種適當角度將表演的鳥們互相密合。

第四幕：銜接第一幕的數學舞台並留下數學骨架的虛線邊，將鳥一隻一隻放到數學骨架上的正確位置進而鋪滿數學舞台，而這種不互相重疊、無空隙、反覆且連續的鋪滿就是所謂的鑲嵌或密鋪。

1. 第一幕的數學骨架是哪一個多邊形呢？

☐ 正三角形 ☐ 正方形 ☐ 正六邊形

2. 第二幕裁貼的過程中，用到了哪些數學方法？

☐ 平移 ☐ 旋轉 ☐ 翻面

3. 影片中有幾種顏色的鳥？

☐ 兩種 ☐ 三種 ☐ 四種

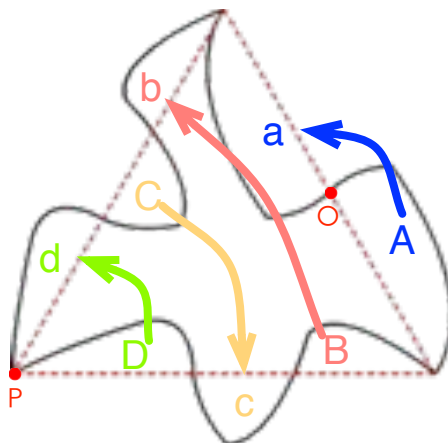
4. 鋪滿數學舞台的鳥們有哪些特色？

☐ 不重疊 ☐ 無空隙 ☐ 外形都一樣

二、如何從數學骨架裁貼出鳥

綜合下面兩個方式即可裁貼出鳥，方式如下：

甲、將正三角形剪下四個小區塊 A, B, C, D，並將這四個小區塊貼到正確的位置上，即 $A \rightarrow a$ ； $B \rightarrow b$ ； $C \rightarrow c$ ； $D \rightarrow d$



乙、如何貼到正確的位置呢？我們根據數學原理的旋轉：

- (1) $A \rightarrow a$ ：將 A 區塊以點 O 為旋轉點旋轉到 a
- (2) $B \rightarrow b$ ：將 B 區塊以點 P 為旋轉點旋轉到 b
- (3) $C \rightarrow c$ ：將 C 區塊以點 P 為旋轉點旋轉到 c
- (4) $D \rightarrow d$ ：將 D 區塊以點 P 為旋轉點旋轉到 c

裁貼出鳥後可以發現：正三角形的三個頂點分別在鳥的嘴巴及兩隻翅膀端點，這就是鳥在數學骨架上的正確位置。

三、真的是鳥磁磚嗎

由藝術表演可以知道經過數學原理形成的鳥磁磚可以互相密合，其密合方式有兩種：

(1) 鳥尾巴對鳥脖子的密合

(2) 鳥右半身對鳥右半身的密合



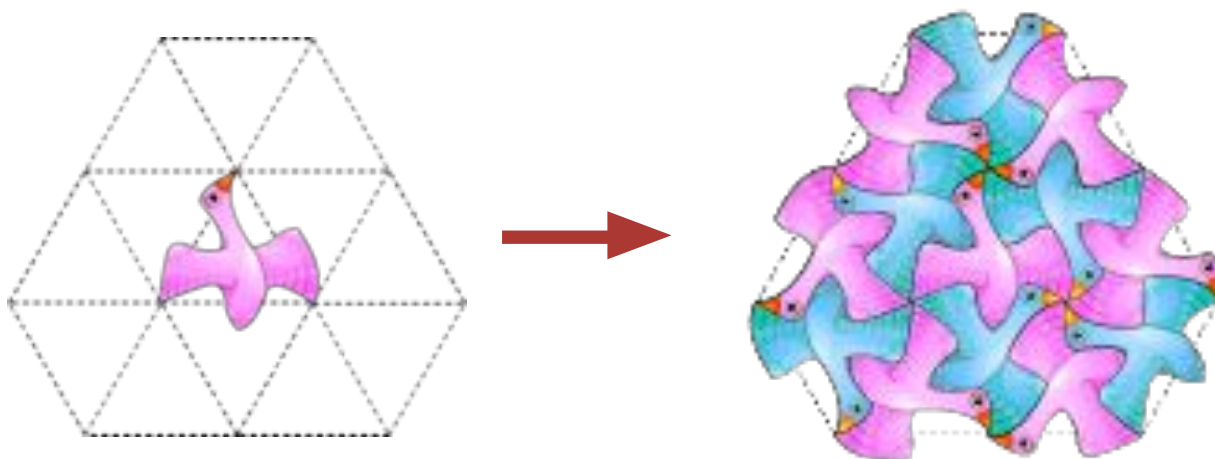


有了這兩種密合方式，就可以將鳥密鋪在平面上了。

四、鳥的鑲嵌圖

甲、鳥鑲嵌圖

透過了解鳥在數學骨架上的正確位置及兩種密合方式後，即可在數學骨架上密鋪出鳥鑲嵌圖，左下圖是先將鳥放在數學骨架上的正確位置，其他鳥除了要放在數學骨架上的正確位置外，還須一一按照兩種密合方式密鋪，如右下圖。



關於《E044 鳥》原圖，如下圖：



這幅作品是艾薛爾第一次嘗試利用一次旋轉 60 度的作品，而且他也很十分開心地發現，利用這樣的拼合方式只需要兩種顏色來區分相鄰的鳥。

請在電腦上點選《E044 鳥拼圖.exe》進入遊戲。

E044 鳥回饋單

- 根據你的經驗，下列哪一個地方最有可能用正三角形密鋪？
☐ 人行道 ☐ 家裡客廳地板 ☐ 廟宇地板
 - 請你回想一下，每一隻鳥周遭圍繞著幾隻鳥呢？(相鄰才算，只接觸一點不算)
☐ 3隻 ☐ 4隻 ☐ 5隻 ☐ 6隻
 - 鳥的表面積與其數學骨架正三角形的面積是否一樣？
☐ 是 ☐ 否
 - 一個數學骨架包含了幾隻鳥？
5. 右下圖為艾薛爾的另一幅版畫《E100 飛信》，這版畫也利用了正三角形當作數學骨架，請參考左下圖所畫的數學骨架，在右下圖畫出正確的數學骨架，並用找到的數學骨架說明如何剪貼出飛信。



6. 關於影片(含拼圖遊戲)與本工作單的教材，你給予幾分(最多10分，最少0分)

10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

又有何建議：

.....
填單人姓名：_____

填單日期：____年____月____日

e-mail：

電話：

☐ 老師

☐ 學生

☐ 社會人士

學校

班級

E044 鳥工作單

1. 第一幕的數學骨架是哪一個多邊形呢？
☒ 正三角形 ☐ 正方形 ☐ 正六邊形
2. 第二幕裁貼的過程中，用到了哪些數學方法？
☒ 平移 ☒ 旋轉 ☐ 翻面
3. 影片中有幾種顏色的鳥？
☒ 兩種 ☐ 三種 ☐ 四種
4. 鋪滿數學舞台的鳥們有哪些特色？
☒ 不重疊 ☒ 無空隙 ☒ 外形都一樣

E044 鳥回饋單

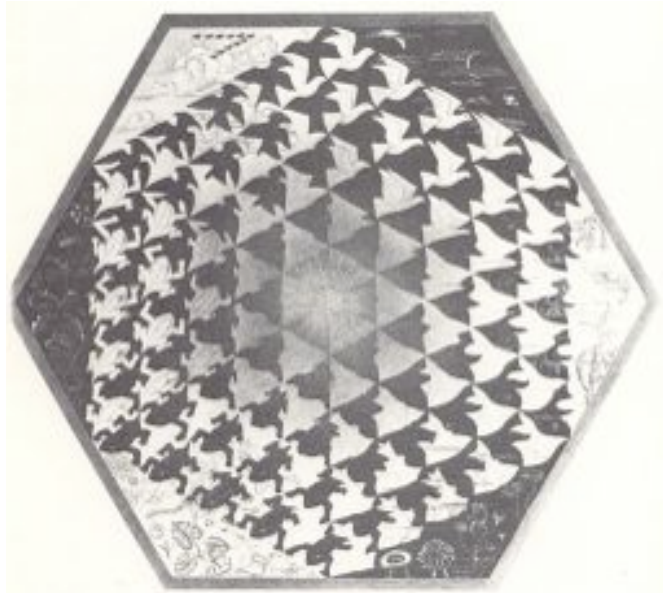
1. 根據你的經驗，下列哪一個地方最有可能用正三角形密鋪？
☒ 人行道 ☐ 家裡客廳地板 ☐ 廟宇地板
2. 請你回想一下，每一隻鳥周遭圍繞著幾隻鳥呢？(相鄰才算，只接觸一點不算)
☒ 3隻 ☐ 4隻 ☐ 5隻 ☐ 6隻
3. 鳥的表面積與其數學骨架正三角形的面積是否一樣？
☒ 是 ☐ 否
4. 一個數學骨架包含了幾隻鳥？
一隻
5. 右下圖為艾薛爾的另一幅版畫《E100 飛信》，這版畫也利用了正三角形當作數學骨架，請參考左下圖所畫的數學骨架，在右下圖畫出正確的數學骨架，並用找到的數學骨架說明如何剪貼出飛信。



E052 青蛙與鳥工作單

撰稿：李勁緯

引言：《E052 青蛙與鳥》是荷蘭版畫家艾薛爾在1942年7月畫的一幅版畫，每隻青蛙與鳥的身體為單一顏色——淺藍色及墨綠色，主要繪圖工具為墨水與水彩，而我們影片裡的封面圖是艾薛爾在同年同月所創作的，艾薛爾合併了自己的六幅不同的版畫編號47到52在《太初(Verbum)》中：



封面圖《太初》的外圍是一個大的正六邊形，六個邊的中點連線形成一個比較小的正六邊形，而內部由正三角形三個邊的方向向外逐漸變形成青蛙、魚跟鳥，這三個方向代表生活在陸地、海洋跟天空三種不同生物。這幅版畫《E052 青蛙與鳥》的輪廓出現在《太初》圖的左邊，《E052 青蛙與鳥》是這六幅中的最後一幅，代表從陸地到天空。現在就讓我們來欣賞影片吧！

請在電腦上點選《E052 青蛙與鳥.exe》進入影片的首頁，並按左上角的Q版圖開始撥放。

一、 青蛙與鳥的數學與藝術

我們可以把青蛙與鳥的影片分成如下的四幕：

第一幕：影片由菱形鋪滿構成數學舞台拉開序幕，而這菱形正是青蛙與鳥的數學骨架。

第二幕：將數學舞台的一個菱形放大，從這菱形剪下四小塊後，依數學原理的平移貼到正確的位置，即裁貼出青蛙與鳥。

第三幕：將青蛙與鳥外框的內部著上顏色成為藝術品並進行藝術表演，表演過程依各種適當角度將表演的青蛙與鳥們互相密合。

第四幕：銜接第一幕的數學舞台並留下數學骨架的虛線邊，將青蛙與鳥一隻一隻放到數學骨架上的正確位置進而鋪滿數學舞台，而這種不互相重疊、無

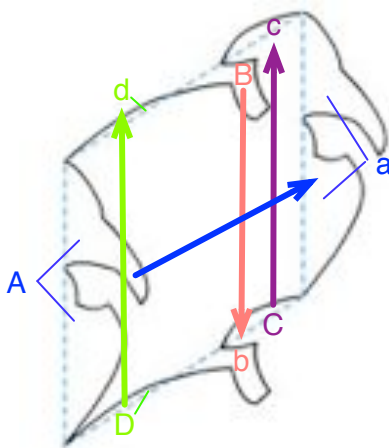
空隙、反覆且連續的鋪滿稱作鑲嵌或密鋪。

1. 第一幕的數學骨架是哪一個多邊形呢？
☐ 正方形 ☐ 菱形 ☐ 矩形
2. 第二幕裁貼的過程中，用到了哪些數學方法？
☐ 平移 ☐ 旋轉 ☐ 翻面
3. 影片中有幾種顏色的青蛙與鳥？
☐ 兩種 ☐ 三種 ☐ 四種
4. 鋪滿數學舞台的青蛙與鳥們有哪些特色？
☐ 不重疊 ☐ 無空隙 ☐ 外形都一樣

二、如何從數學骨架裁貼出青蛙與鳥

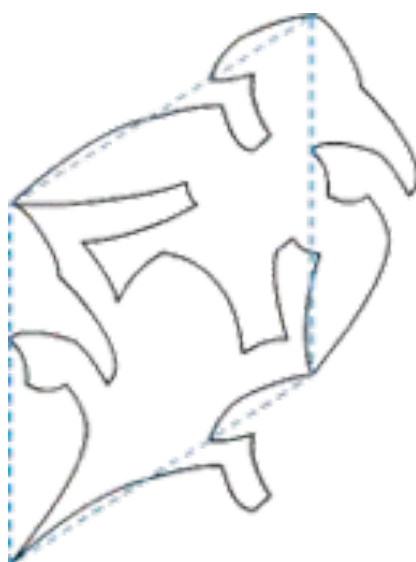
綜合下面兩個方式即可裁貼出青蛙與鳥，方式如下：

甲、將菱形剪下五個小區塊 A, B, C, D，並將這四個小區塊貼到正確的位置上，即 $A \rightarrow a$ ； $B \rightarrow b$ ； $C \rightarrow c$ ； $D \rightarrow d$



乙、如何貼到正確的位置呢？我們根據數學原理的平移：

- (1) $A \rightarrow a$ ：將 A 區塊往右上平移到 a
- (2) $B \rightarrow b$ ：將 B 區塊往下平移到 b
- (3) $C \rightarrow c$ ：將 C 區塊往上平移到 c
- (4) $D \rightarrow d$ ：將 D 區塊往上平移到 d



裁貼出青蛙與鳥後可以發現：菱形的兩個頂點分別在鳥的頭頂與青蛙的尾巴，而另外兩個頂點分別在青蛙的手與鳥的翅膀交接處，這就是青蛙與鳥在數學骨架上的正確位置。

三、 真的是青蛙與鳥磁磚嗎

經由數學原理裁貼後的青蛙與鳥有什麼令人驚艷的地方呢？我們可以由第三幕的藝術表演觀察到經數學原理形成的青蛙與鳥可以彼此互相密合，有以下三種密合方式：

(1) 青蛙腳與鳥頭部的密合

(2) 鳥右翅膀與青蛙左後腿的密合



(3) 青蛙腳與鳥左翅膀的密合

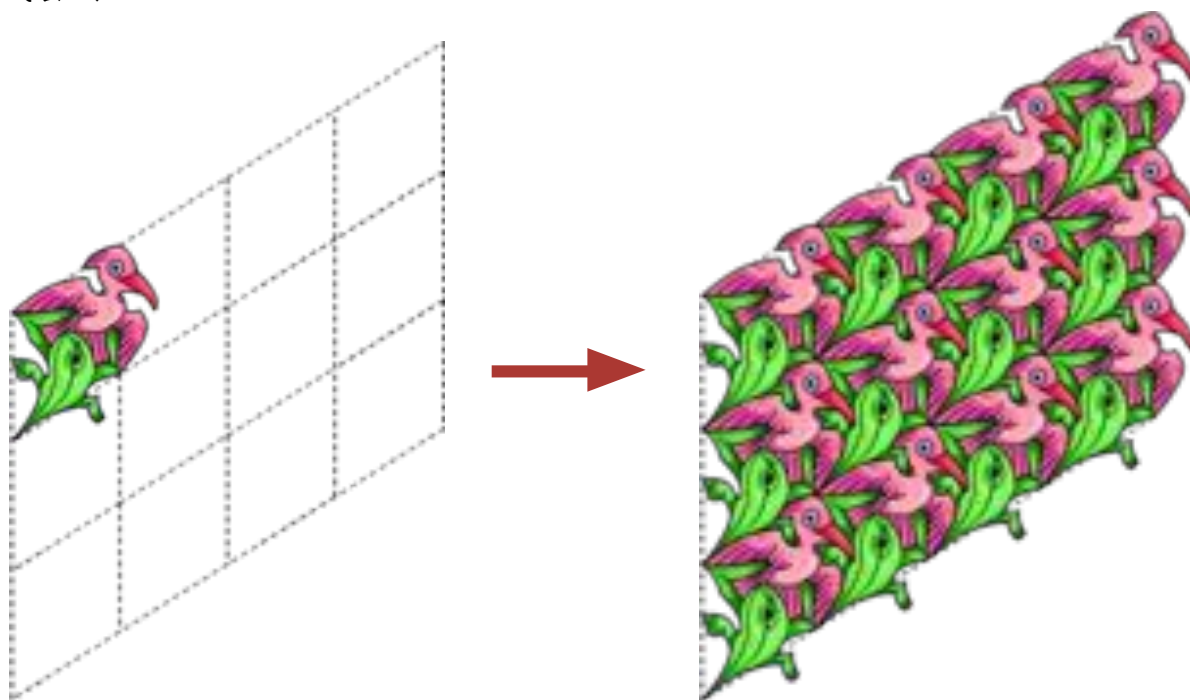


這種可以互相密合、無交疊且無空隙的青蛙與鳥圖案，我們稱之為青蛙與鳥磁磚。有了這三種密合方式後，就可以用這三種方式將很多隻青蛙與鳥磁磚密鋪在平面上了。

四、 青蛙與鳥的鑲嵌圖

青蛙與鳥鑲嵌圖

透過了解青蛙與鳥在數學骨架上的正確位置及三種密合方式後，即可在數學骨架上密鋪出青蛙與鳥鑲嵌圖，左下圖是先將青蛙與鳥放在數學骨架上的正確位置，其他的青蛙與鳥除了要放在數學骨架上的正確位置外，還須一一按照三種密合方式密鋪。

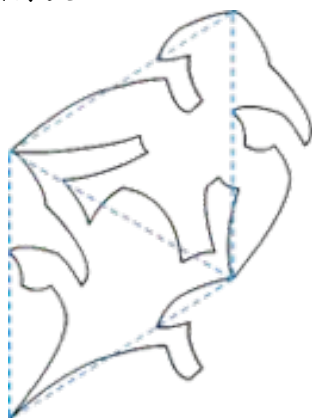


關於《E052 青蛙與鳥》原圖，如下圖：



觀察青蛙與鳥的的數學骨架菱形，把菱形中比較短的對角線連起來（如下圖所示），把菱形切割成上下兩個正三角形，青蛙位於下方的三角形，鳥位於上方的三角形，有沒有發現青蛙與鳥的形狀和三角形很類似呢？這就是為什麼在影片中

的封面圖《太初》中，中間的正三角形慢慢往外變形成青蛙與鳥會那麼的自然，而我們這幅版畫《E052 青蛙與鳥》的鳥也設計成跟青蛙輪廓類似，如此一來在從青蛙變成鳥的時候才不會顯得突兀。



E052 青蛙與鳥回饋單

1. 請你回想一下，每一隻青蛙周遭圍繞著幾隻鳥呢？（相鄰才算，只交一點不算）
☐ 2隻 ☐ 3隻 ☐ 4隻 ☐ 5隻
2. 青蛙與鳥的表面積與其數學骨架平行四邊形的表面積是否一樣？
☐ 是 ☐ 否
3. 如下圖，上面的青蛙和下面的青蛙是什麼樣的關係呢？
☐ 平移 ☐ 旋轉 ☐ 翻面



4. 右下圖為艾薛爾的另一幅版畫《E047 兩隻鳥》，這版畫也利用了菱形當作數學骨架，請參考左下圖所畫的數學骨架，在右下圖畫出正確的數學骨架，並用找到的數學骨架說明如何剪貼出兩隻鳥。



5. 青蛙與鳥的數學骨架除了是菱形外，矩形也是青蛙與鳥的數學骨架，請參考左下圖所畫的數學骨架，在右下圖畫出青蛙與鳥的矩形數學骨架，並用找到的數學骨架說明如何剪貼出青蛙與鳥。（提示：想想看一個菱形要如何剪貼出矩形？）



6. 關於影片與本工作單的教材，你給予幾分(最多10分，最少0分)

10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

又有何建議：

.....

填單人姓名：_____

填單日期：____年____月____日

e-mail：

電話：

☐ 老師

☐ 學生

☐ 社會人士

學校 _____

班級

E052 青蛙與鳥工作單

1. 第一幕的數學骨架是哪一個多邊形呢？
☐ 正方形 ☒ 菱形 ☐ 矩形
2. 第二幕裁貼的過程中，用到了哪些數學方法？
☒ 平移 ☐ 旋轉 ☐ 翻面
3. 影片中有幾種顏色的青蛙與鳥？
☒ 兩種 ☐ 三種 ☐ 四種
4. 鋪滿數學舞台的青蛙與鳥們有哪些特色？
☒ 不重疊 ☒ 無空隙 ☒ 外形都一樣

E052 青蛙與鳥回饋單

1. 請你回想一下，每一隻青蛙周遭圍繞著幾隻鳥呢？（相鄰才算，只交一點不算）
☐ 2隻 ☒ 3隻 ☐ 4隻 ☐ 5隻
2. 青蛙與鳥的表面積與其數學骨架菱形的表面積是否一樣？
☒ 是 ☐ 否
3. 如下圖，上面的青蛙和下面的青蛙是什麼樣的關係呢？
☒ 平移 ☐ 旋轉 ☐ 翻面
4. 右下圖為艾薛爾的另一幅版畫《E047 兩隻鳥》，這版畫也利用了菱形當作數學骨架，請參考左下圖所畫的數學骨架，在右下圖畫出正確的數學骨架，並用找到的數學骨架說明如何剪貼出兩隻鳥。



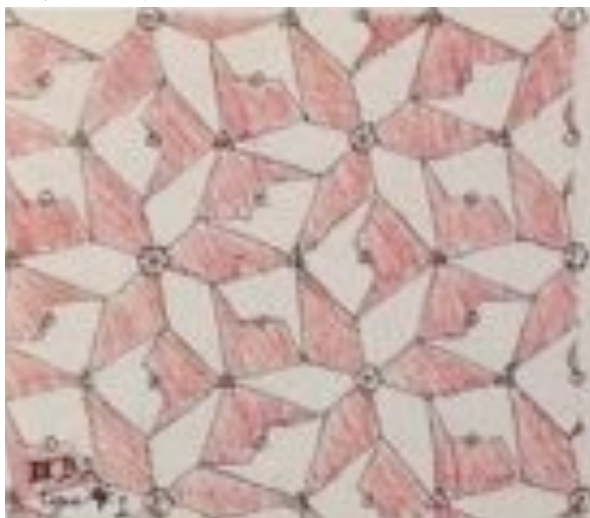
5. 青蛙與鳥的數學骨架除了是菱形外，矩形也是青蛙與鳥的數學骨架，請參考左下圖所畫的數學骨架，在右下圖畫出青蛙與鳥的矩形數學骨架，並用找到的數學骨架說明如何剪貼出青蛙與鳥。（提示：想想看一個菱形要如何剪貼出矩形？）



E057 魚工作單

撰稿：李勁緯

引言：《E057 魚》是荷蘭版畫家艾薛爾在1942年11月畫的一幅版畫，兩種魚的身體為單一顏色——非黑即白，主要繪圖工具為墨水及水彩，而我們影片中的封面圖為艾薛爾在自己的筆記本中為這種拼合方式所繪製的數學骨架：



圖中有兩個形狀不同的白色區塊、也有兩個形狀不同的紅色區塊，將同顏色的兩個不同形狀的區塊視為一組，而在圖上有數個小六邊形、小三角形及小圓形記號。不同形狀記號代表著不同種類的旋轉點，六邊形記號代表一次旋轉60度，轉6次為一圈，三角形記號代表一次旋轉120度，轉3次為一圈，而圓形記號代表一次旋轉180度，轉2次為一圈。一個小六邊形記號及兩個小三角形記號三點可以連成一個正三角形，而小圓形記號的位置恰在兩個小三角形記號連線的中點，這個正三角形就是這兩個區塊的數學骨架，我們的《E057 魚》就是利用此種拼合方式所設計出的版畫。看到這裡大家是不是覺得很有趣呢？就讓我們觀賞影片來看看魚是如何誕生的吧！

請在電腦上點選《E057 魚.exe》，並仔細觀賞影片。

一、魚的數學與藝術

我們可以把魚的影片分成如下的四幕：

第一幕：影片由正三角形鋪滿構成數學舞台拉開序幕，而這正三角形正是兩隻魚的數學骨架。

第二幕：將數學舞台的一個正三角形放大，從這正三角形剪下三個小塊後，依數學原理的旋轉貼到正確的位置，即裁貼出兩隻魚。

第三幕：將魚外框的內部著上顏色成為藝術品並進行藝術表演，表演過程依各種適當角度將表演的魚們互相密合。

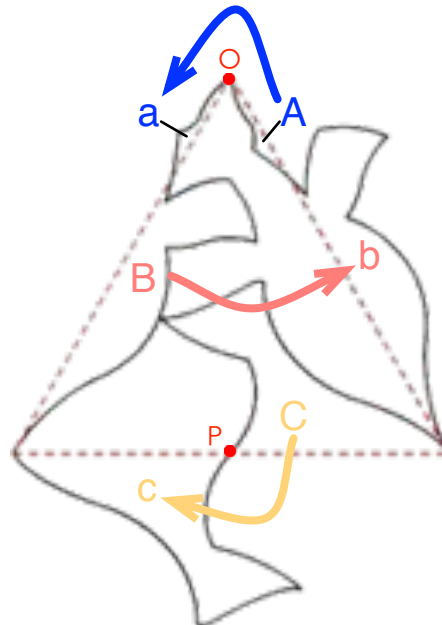
第四幕：銜接第一幕的數學舞台並留下數學骨架的虛線邊，將魚一隻一隻放到數學骨架上的正確位置進而鋪滿數學舞台，而這種不互相重疊、無空隙、反覆且連續的鋪滿就是所謂的鑲嵌或密鋪。

1. 第一幕的數學骨架是哪一個多邊形呢？
☐ 正三角形 ☐ 正方形 ☐ 正六邊形
2. 第二幕裁貼的過程中，用到了哪些數學方法？
☐ 平移 ☐ 旋轉 ☐ 翻面
3. 影片中有幾種顏色的魚？
☐ 兩種 ☐ 三種 ☐ 四種
4. 鋪滿數學舞台的魚們有哪些特色？
☐ 不重疊 ☐ 無空隙 ☐ 外形都一樣

二、如何從數學骨架裁貼出魚

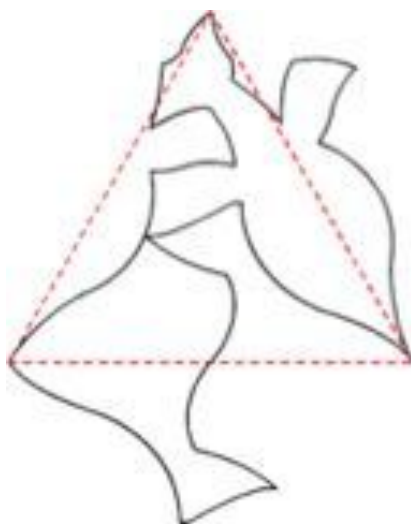
綜合下面兩個方式即可裁貼出兩隻魚，方式如下：

甲、將正角形剪下三個小區塊 A, B, C，並將這三個小區塊貼到正確的位置上，
即 $A \rightarrow a$ ； $B \rightarrow b$ ； $C \rightarrow c$



乙、如何貼到正確的位置呢？我們根據數學原理的旋轉：

- (1) $A \rightarrow a$ ：將 A 區塊以頂點 O 為旋轉點旋轉到 a
- (2) $B \rightarrow b$ ：將 B 區塊以頂點 O 為旋轉點旋轉到 b
- (3) $C \rightarrow c$ ：將 C 區塊以 P 為旋轉點旋轉到 c



裁貼出魚後可以發現：正三角形的兩個頂點分別在長嘴魚的尾巴端點及嘴巴，而第三個頂點在另一隻魚的左臉頰，這就是魚在數學骨架上的正確位置。

三、 真的是兩隻魚磁磚嗎

由藝術表演可以知道經過數學原理形成的兩隻魚磁磚可以互相密合，其密合方式有三種：

(1) 長魚尾巴的密合



(2) 長魚嘴巴尖點與短魚左臉頰的密合



(3) 短魚嘴與尾巴的密合

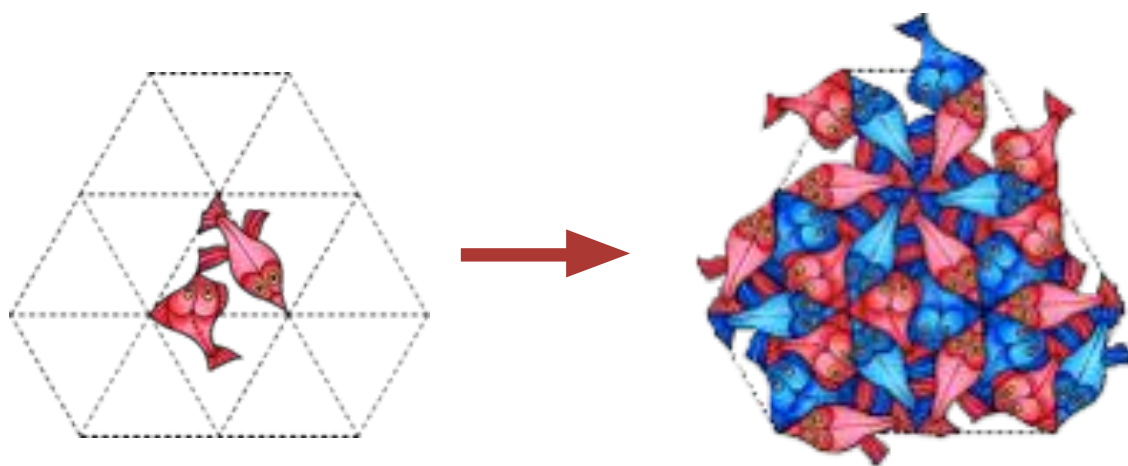


有了這三種密合方式，就可以將兩隻魚密鋪在平面上了。

四、 魚的鑲嵌圖

甲、 魚鑲嵌圖

透過了解魚在數學骨架上的正確位置及三種密合方式後，即可在數學骨架上密鋪出魚鑲嵌圖，左下圖是先將魚放在數學骨架上的正確位置，其他魚除了要放在數學骨架上的正確位置外，還須一一按照三種密合方式密鋪，如右下圖。



關於《E057 魚》原圖，如下圖：



我們在引言中提到的三種旋轉點，分別在長魚的尾巴、短魚的左臉頰及兩隻短魚右臉頰的交接處。

E057 魚回饋單

- 根據你的經驗，下列哪一個地方最有可能用正三角形密鋪
☐ 人行道 ☐ 家裡客廳地板 ☐ 廟宇地板
 - 請你回想一下，每一隻魚周遭圍繞著幾隻魚呢？(相鄰才算，只接觸一點不算)
☐ 3隻 ☐ 4隻 ☐ 5隻 ☐ 6隻
 - 兩隻魚的表面積與其數學骨架正三角形的面積是否一樣？
☐ 是 ☐ 否
 - 一個數學骨架包含了幾隻魚？
5. 右下圖為艾薛爾的另一幅版畫《E100 飛信》，這版畫也利用了正三角形當作數學骨架，請參考左下圖所畫的數學骨架，在右下圖畫出正確的數學骨架，並用找到的數學骨架說明如何剪貼出飛信。



6. 關於影片(含拼圖遊戲)與本工作單的教材，你給予幾分(最多10分，最少0分)

10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

又有何建議：

.....

填單人姓名：_____

填單日期：____年____月____日

e-mail：

電話：

☐ 老師

☐ 學生

☐ 社會人士

學校 _____

班級 _____

E057 魚工作單

1. 第一幕的數學骨架是哪一個多邊形呢？
☒ 正三角形 ☐ 正方形 ☐ 正六邊形
2. 第二幕裁貼的過程中，用到了哪些數學方法？
☒ 平移 ☒ 旋轉 ☐ 翻面
3. 影片中有幾種顏色的魚？
☒ 兩種 ☐ 三種 ☐ 四種
4. 鋪滿數學舞台的魚們有哪些特色？
☒ 不重疊 ☒ 無空隙 ☒ 外形都一樣

E057 魚回饋單

1. 根據你的經驗，下列哪一個地方最有可能用正三角形密鋪？
☒ 人行道 ☐ 家裡客廳地板 ☐ 廟宇地板
2. 請你回想一下，每一隻魚周遭圍繞著幾隻魚呢？(相鄰才算，只接觸一點不算)
☐ 3隻 ☒ 4隻 ☐ 5隻 ☐ 6隻
3. 兩隻魚的表面積與其數學骨架正三角形的面積是否一樣？
☒ 是 ☐ 否
4. 一個數學骨架包含了幾隻魚？
兩隻
5. 右下圖為艾薛爾的另一幅版畫《E100 飛信》，這版畫也利用了正三角形當作數學骨架，請參考左下圖所畫的數學骨架，在右下圖畫出正確的數學骨架，並用找到的數學骨架說明如何剪貼出飛信。



E061 兩個生物工作單

撰稿：李勁緯

引言：《E061 兩個生物》是荷蘭版畫家艾薛爾在1944年1月畫的一幅版畫，每隻生物的身體為單一顏色——紅色及白色，主要繪圖工具為墨水、水彩及鉛筆，而影片中的封面圖為艾薛爾在自己的筆記本中為這種拼合方式所繪製的數學骨架：



圖中總共使用兩個顏色來區分相鄰的區塊，將相鄰不同顏色的區塊視為一組，往右、往左皆是平移，而往上、往下則是翻面，我們這幅版畫《E061 兩個生物》就是利用這種拼合方式所創作出來的。現在就讓我們來看看這栩栩如生的兩個生物是如何利用這樣的拼合方式密鋪的吧！請在電腦上點選《E061 兩個生物.exe》進入影片的首頁，並按左上角的Q版圖開始撥放。

一、兩個生物的數學與藝術

我們可以把兩個生物의 影片分成如下的四幕：

第一幕：影片由平行四邊形鋪滿構成數學舞台拉開序幕，而這平行四邊形正是兩個生物的數學骨架。

第二幕：將數學舞台的一個平行四邊形放大，從這平行四邊形剪下兩小塊後，依數學原理的平移及翻面貼到正確的位置，即裁貼出兩個生物。

第三幕：將兩個生物外框的內部著上顏色成為藝術品並進行藝術表演，表演過程依各種適當角度將表演的兩個生物們互相密合。

第四幕：銜接第一幕的數學舞台並留下數學骨架的虛線邊，將兩個生物一隻一隻放到數學骨架上的正確位置進而鋪滿數學舞台，而這種不互相重疊、無空隙、反覆且連續的鋪滿稱作鑲嵌或密鋪。

1. 第一幕的數學骨架是哪一個多邊形呢？

☐ 正方形 ☐ 平行四邊形 ☐ 矩形

2. 第二幕裁貼的過程中，用到了哪些數學方法？

☐ 平移 ☐ 旋轉 ☐ 翻面

3. 影片中有幾種顏色的生物？

☐ 兩種 ☐ 三種 ☐ 四種

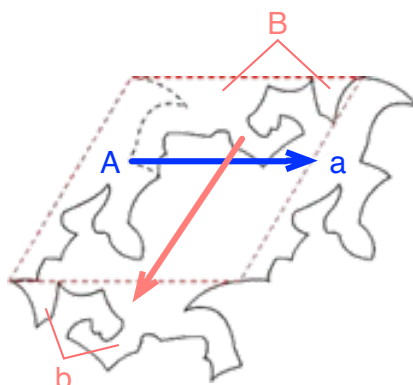
4. 鋪滿數學舞台的兩個生物們有哪些特色？

☐ 不重疊 ☐ 無空隙 ☐ 外形都一樣

二、如何從數學骨架裁貼出兩個生物

綜合下面兩個方式即可裁貼出兩個生物，方式如下：

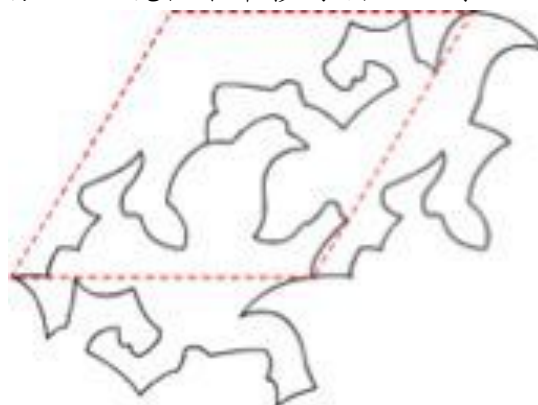
甲、將平行四邊形剪下兩個小區塊 A, B，並將這兩個小區塊貼到正確的位置上，即 $A \rightarrow a$; $B \rightarrow b$



乙、如何貼到正確的位置呢？我們根據數學原理的平移與翻面：

(1) $A \rightarrow a$: 將 A 區塊往右平移到 a

(2) $B \rightarrow b$: 先將 B 區塊往下平移再翻面貼到 b



裁貼出兩個生物後可以發現：平行四邊形的三個頂點分別在上面生物尾巴的一點、下面生物的腳後跟及上面生物的手和下面生物下巴的交接處，這就是兩個生物在數學骨架上的正確位置。

三、真的是兩個生物磁磚嗎

經由數學原理裁貼後的兩個生物有什麼令人驚艷的地方呢？我們可以由第三幕的藝術表演觀察到經數學原理形成的兩個生物可以彼此互相密合，有以下三種密合方式：

(1) 腳跟尾巴的密合

(2) 頭跟腳的密合

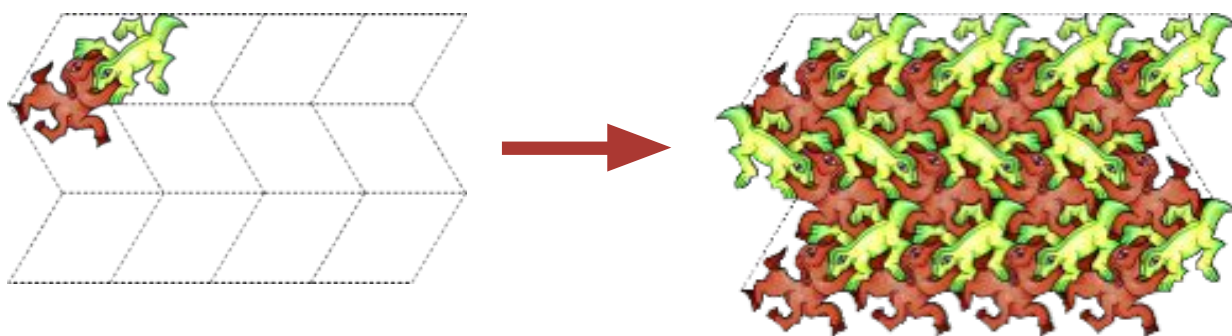


這種可以互相密合、無交疊且無空隙的兩個生物圖案，我們稱之為兩個生物磁磚。有了這兩種密合方式後，就可以用這兩種方式將很多隻兩個生物磁磚密鋪在平面上了。

四、兩個生物的鑲嵌圖

兩個生物鑲嵌圖

透過了解鳥與魚在數學骨架上的正確位置及兩種密合方式後，即可在數學骨架上密鋪出兩個生物鑲嵌圖，左下圖是先將兩個生物放在數學骨架上的正確位置，其他的兩個生物除了要放在數學骨架上的正確位置外，還須一一按照兩種密合方式密鋪。



關於《E061 兩個生物》原圖，如下圖：



觀察這幅版畫中的生物，紅色生物看起來非常凶狠，具有攻擊性，白色生物看起來很溫和，沒有侵略性，而紅色生物像惡魔正張著大嘴，咬住獵物般的白色

生物。同時德國納粹黨正吞食歐洲各國，而艾薛爾非常敬愛的老師，在一天晚上要從納粹回到他在阿姆斯特丹的家，卻沒有再回來了！艾薛爾創作這幅畫或許跟他老師的事件有關。

E061 兩個生物回饋單

1. 仔細想想，你在那個地方見過用平行四邊形磁磚鋪設的地板？

2. 請你回想一下，每一隻生物周遭圍繞著幾隻生物呢？（相鄰才算，只交一點不算）
☐ 2隻 ☐ 3隻 ☐ 4隻 ☐ 5隻
3. 兩個生物的表面積與其數學骨架平行四邊形的表面積是否一樣？
☐ 是 ☐ 否
4. 如下圖，上面的生物和下面的生物是什麼樣的關係呢？
☐ 平移 ☐ 旋轉 ☐ 翻面



5. 右下圖為艾薛爾的另一幅版畫《E066 飛獅》，這版畫也利用了平行四邊形當作數學骨架，請參考左下圖所畫的數學骨架，在右下圖畫出正確的數學骨架，並用找到的數學骨架說明如何剪貼出飛獅。



6. 關於影片與本工作單的教材，你給予幾分(最多10分，最少0分)

10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

又有何建議：

.....

填單人姓名：_____

填單日期：____年____月____日

e-mail：

電話：

☐ 老師

☐ 學生

☐ 社會人士

學校 _____

班級

E061 兩個生物工作單

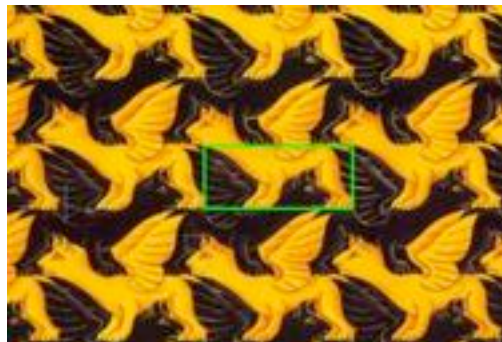
1. 第一幕的數學骨架是哪一個多邊形呢？
☐ 正方形 ☒ 平行四邊形 ☐ 矩形
2. 第二幕裁貼的過程中，用到了哪些數學方法？
☒ 平移 ☐ 旋轉 ☒ 翻面
3. 影片中有幾種顏色的生物？
☒ 兩種 ☐ 三種 ☐ 四種
4. 鋪滿數學舞台的兩個生物們有哪些特色？
☒ 不重疊 ☒ 無空隙 ☒ 外形都一樣

E061 兩個生物回饋單

1. 仔細想想，你在那個地方見過用平行四邊形磁磚鋪設的地板？
2. 請你回想一下，每一隻生物周遭圍繞著幾隻生物呢？（相鄰才算，只交一點不算）
☐ 2隻 ☐ 3隻 ☒ 4隻 ☐ 5隻
3. 兩個生物的表面積與其數學骨架平行四邊形的表面積是否一樣？
☒ 是 ☐ 否
4. 如下圖，上面的生物和下面的生物是什麼樣的關係呢？
☐ 平移 ☐ 旋轉 ☒ 翻面



5. 右下圖為艾薛爾的另一幅版畫《E066 飛獅》，這版畫也利用了平行四邊形當作數學骨架，請參考左下圖所畫的數學骨架，在右下圖畫出正確的數學骨架，並用找到的數學骨架說明如何剪貼出飛獅。



E075 蜥蜴工作單

撰稿：李勁緯

引言：《E075 蜥蜴》是荷蘭版畫家艾薛爾在1949年7月畫的一幅版畫，每隻蜥蜴的身體為單一顏色——白色及黑色，主要繪圖工具為印度墨、鉛筆與黑色和白色的廣告顏料。影片中的封面圖是由蜥蜴版畫經由影像軟體編輯所成的一幅作品：



這些蜥蜴排列得非常整齊，只有兩個方向，伸長的手與腳，使蜥蜴看似跑得十分快速，而蜥蜴身體上的線條使其看起來有立體感，這幅作品被發佈在兩本書中：Symmetry Aspects of M. C. Escher's Periodic Drawings 1965 和 M. C. Escher: Art and Science 1986。

請在電腦上點選《E075 蜥蜴.exe》進入影片的首頁，並按左上角的Q版圖開始撥放。

一、蜥蜴的數學與藝術

我們可以把蜥蜴的影片分成如下的四幕：

第一幕：影片由平行四邊形鋪滿構成數學舞台拉開序幕，而這平行四邊形正是蜥蜴的數學骨架。

第二幕：將數學舞台的一個平行四邊形放大，從這平行四邊形剪下七小塊後，依數學原理的平移及旋轉貼到正確的位置，即裁貼出蜥蜴。

第三幕：將蜥蜴外框的內部著上顏色成為藝術品並進行藝術表演，表演過程依各種適當角度將表演的蜥蜴們互相密合。

第四幕：銜接第一幕的數學舞台並留下數學骨架的虛線邊，將蜥蜴一隻一隻放到數學骨架上的正確位置進而鋪滿數學舞台，而這種不互相重疊、無空隙、反覆且連續的鋪滿稱作鑲嵌或密鋪。

1. 第一幕的數學骨架是哪一個多邊形呢？

☐ 正方形 ☐ 平行四邊形 ☐ 矩形

2. 第二幕裁貼的過程中，用到了哪些數學方法？

☐ 平移 ☐ 旋轉 ☐ 翻面

3. 影片中有幾種顏色的蜥蜴？

☐ 兩種 ☐ 三種 ☐ 四種

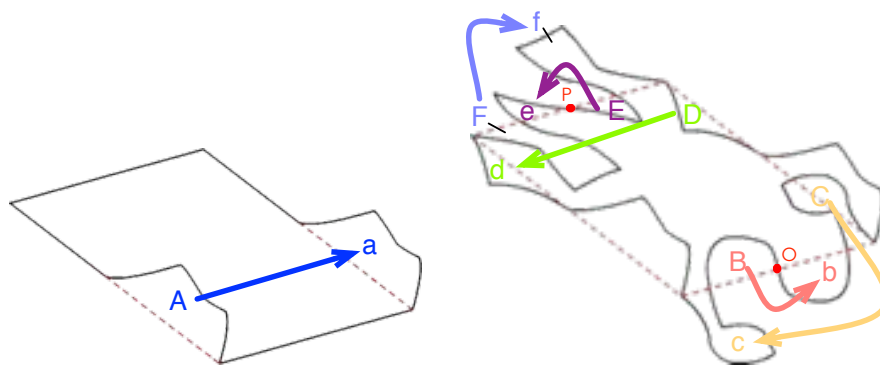
4. 鋪滿數學舞台的蜥蜴們有哪些特色？

☐ 不重疊 ☐ 無空隙 ☐ 外形都一樣

二、如何從數學骨架裁貼出蜥蜴

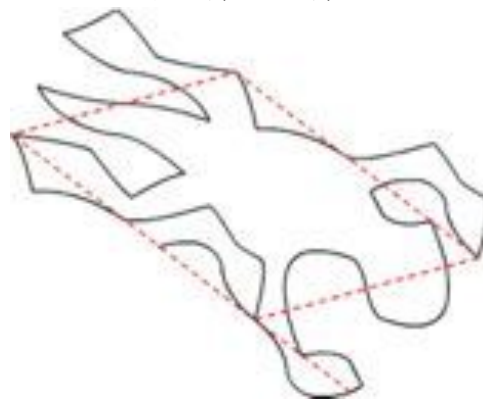
綜合下面兩個方式即可裁貼出蜥蜴，方式如下：

甲、將平行四邊形剪下七個小區塊 A, B, C, D, E, F, G，並將這七個小區塊貼到正確的位置上，即 $A \rightarrow a$; $B \rightarrow b$; $C \rightarrow c$; $D \rightarrow d$; $E \rightarrow e$; $F \rightarrow f$; $G \rightarrow g$



乙、如何貼到正確的位置呢？我們根據數學原理的平移與旋轉：

- (1) $A \rightarrow a$: 將 A 區塊往右上平移到 a
- (2) $B \rightarrow b$: 將 B 區塊以 O 為旋轉點旋轉到 b
- (3) $C \rightarrow c$: 將 C 區塊以 O 為旋轉點旋轉到 c
- (4) $D \rightarrow d$: 將 D 區塊往左下平移到 d
- (5) $E \rightarrow e$: 將 E 區塊以 P 為旋轉點旋轉到 e
- (6) $F \rightarrow f$: 將 F 區塊以 P 為旋轉點旋轉到 f



裁貼出蜥蜴後可以發現：平行四邊形的兩個頂點分別在蜥蜴的手指頭與蜥蜴的手肘，而另外兩個頂點分別在蜥蜴的膝蓋與蜥蜴的腳指頭，這就是蜥蜴在數學骨架上的正確位置。

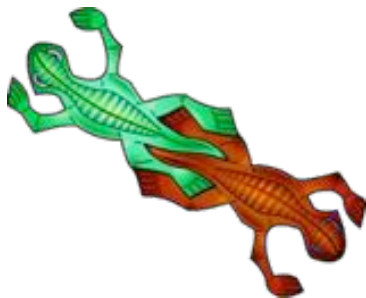
三、真的是蜥蜴磁磚嗎

經由數學原理裁貼後的蜥蜴有什麼令人驚艷的地方呢？我們可以由第三幕的藝術表演觀察到經數學原理形成的蜥蜴可以彼此互相密合，有以下三種密合方式：

- (1) 頭和頭的密合
- (2) 手和肚子的密合



(3) 腳和腳的密合

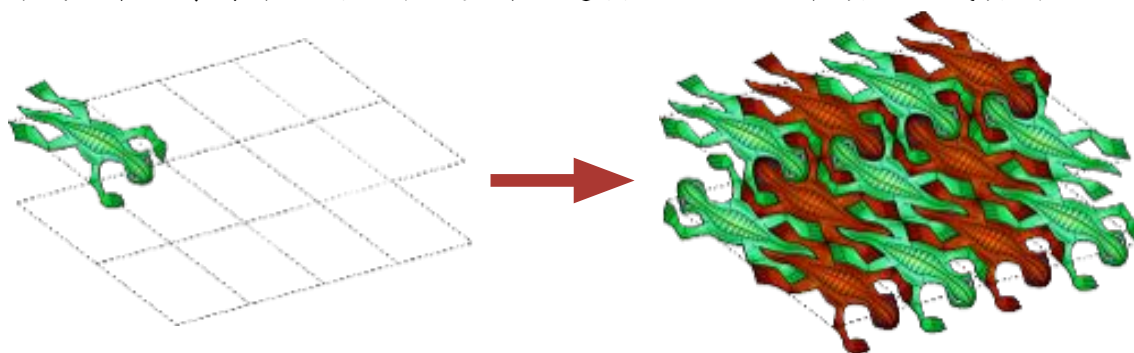


這種可以互相密合、無交疊且無空隙的蜥蜴圖案，我們稱之為蜥蜴磁磚。有了這三種密合方式後，就可以用這三種方式將很多隻蜥蜴磁磚密鋪在平面上了。

四、蜥蜴的鑲嵌圖

蜥蜴鑲嵌圖

透過了解鳥與魚在數學骨架上的正確位置及兩種密合方式後，即可在數學骨架上密鋪出蜥蜴鑲嵌圖，左下圖是先將蜥蜴放在數學骨架上的正確位置，其他的蜥蜴除了要放在數學骨架上的正確位置外，還須一一按照兩種密合方式密鋪。



關於《E075 蜥蜴》原圖，如下圖：



這幅版畫使用平移及旋轉180度混合的拼合方式，可以看到兩隻蜥蜴面對面，旋轉180度相對，尾巴對尾巴也以旋轉180度後相連著。這幅作品是艾薛爾在旋轉、平移混合的拼合方式系列版畫中，首幅只用簡單的兩個顏色—黑色及白色來區分相鄰蜥蜴的作品。

E075 蜥蜴回饋單

1. 仔細想想，你在那個地方見過用平行四邊形磁磚鋪設的地板？

2. 請你回想一下，每一隻蜥蜴周遭圍繞著幾隻蜥蜴呢？（相鄰才算，只交一點不算）
☐ 2隻 ☐ 3隻 ☐ 4隻 ☐ 5隻
3. 蜥蜴的表面積與其數學骨架平行四邊形的表面積是否一樣？
☐ 是 ☐ 否
4. 如下圖，左邊的蜥蜴和右邊的蜥蜴是什麼樣的關係呢？
☐ 平移 ☐ 旋轉 ☐ 翻面



5. 右下圖為艾薛爾的另一幅版畫《E009 鳥》，這版畫也利用了平行四邊形當作數學骨架，請參考左下圖所畫的數學骨架，在右下圖畫出正確的數學骨架，並用找到的數學骨架說明如何剪貼出鳥。



6. 關於影片與本工作單的教材，你給予幾分(最多10分，最少0分)

10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

又有何建議：

.....
填單人姓名：_____

填單日期：____年____月____日

e-mail：

電話：

☐ 老師

☐ 學生

☐ 社會人士

學校 _____

班級 _____

E075 蜥蜴工作單

1. 第一幕的數學骨架是哪一個多邊形呢？
☐ 正方形 ☒ 平行四邊形 ☐ 矩形
2. 第二幕裁貼的過程中，用到了哪些數學方法？
☒ 平移 ☐ 旋轉 ☒ 翻面
3. 影片中有幾種顏色的蜥蜴？
☒ 兩種 ☐ 三種 ☐ 四種
4. 鋪滿數學舞台的蜥蜴們有哪些特色？
☒ 不重疊 ☒ 無空隙 ☒ 外形都一樣

E075 蜥蜴回饋單

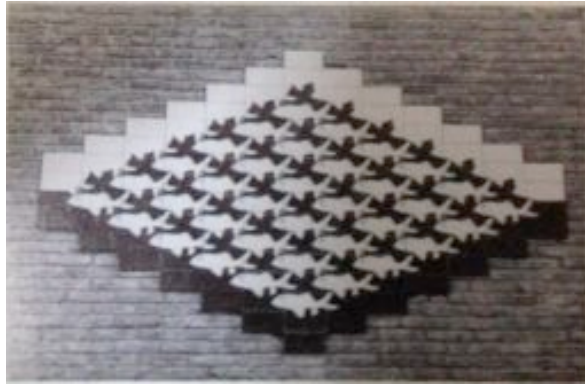
1. 仔細想想，你在那個地方見過用平行四邊形磁磚鋪設地板？
2. 請你回想一下，每一隻蜥蜴周遭圍繞著幾隻蜥蜴呢？（相鄰才算，只交一點不算）
☐ 2隻 ☐ 3隻 ☒ 4隻 ☐ 5隻
3. 蜥蜴的表面積與其數學骨架平行四邊形的表面積是否一樣？
☒ 是 ☐ 否
4. 如下圖，上面的蜥蜴和下面的蜥蜴是什麼樣的關係呢？
☐ 平移 ☒ 旋轉 ☐ 翻面
5. 右下圖為艾薛爾的另一幅版畫《E009 鳥》，這版畫也利用了平行四邊形當作數學骨架，請參考左下圖所畫的數學骨架，在右下圖畫出正確的數學骨架，並用找到的數學骨架說明如何剪貼出鳥。



E082 鳥與魚工作單

撰稿：李勁緯

引言：《E082 鳥與魚》是荷蘭版畫家艾薛爾在1951年2月畫的一幅版畫，每隻鳥與魚的身體為單一顏色—灰色及白色，主要繪圖工具為墨水與水彩，而我們影片裡的封面圖是艾薛爾在1960年為一個在阿姆斯特丹一間私人房子外觀所創作的牆壁磁磚裝飾：



封面圖內的鳥與魚輪廓都是用正方形磁磚拼貼而成的，正方形正是鳥與魚的數學骨架。而仔細看可以發現，從左邊的第一個鳥與魚開始，往右排拼貼時，為了能拼出完整的鳥與魚輪廓，所以並非只沿著邊往右平移，而是沿著邊往右平移後，再往上平移且平移距離為正方形邊長的一半，這樣這樣就拼好第2排的第一個鳥與魚，再往下平移且平移距離為正方形邊長，便完成第2排的兩個鳥與魚了！再繼續照這樣的方法，由第二排的第一個鳥與魚開始，往右拼出第3排的第一個鳥與魚，在往下平移出兩個鳥與魚，依此類推，第4排有四個、第5排有五個、第6排有六個，接著開始遞減第7排有五個、第8排有四個、一直到第11排只剩一個鳥與魚，這樣就排出一個菱形形狀。接著，再利用幾個白色、黑色的長方形磁磚裝飾出菱形的外圍。大家覺不覺得這些鳥與魚很可愛呢？現在就讓我們來看看這可愛的《E082 鳥與魚》是如何誕生的吧！

請在電腦上點選《E082 鳥與魚.exe》進入影片的首頁，並按左上角的Q版圖開始撥放。

一、 鳥與魚的數學與藝術

我們可以把鳥與魚的影片分成如下的四幕：

第一幕：影片由平行四邊形鋪滿構成數學舞台拉開序幕，而這平行四邊形正是鳥與魚的數學骨架。

第二幕：將數學舞台的一個平行四邊形放大，從這平行四邊形剪下五小塊後，依數學原理的平移貼到正確的位置，即裁貼出鳥與魚。

第三幕：將鳥與魚外框的內部著上顏色成為藝術品並進行藝術表演，表演過程依各種適當角度將表演的鳥與魚們互相密合。

第四幕：銜接第一幕的數學舞台並留下數學骨架的虛線邊，將鳥與魚一隻一隻放到數學骨架上的正確位置進而鋪滿數學舞台，而這種不互相重疊、無空隙、反覆且連續的鋪滿稱作鑲嵌或密鋪。

1. 第一幕的數學骨架是哪一個多邊形呢？

☐ 正方形 ☐ 平行四邊形 ☐ 矩形

2. 第二幕裁貼的過程中，用到了哪些數學方法？

☐ 平移 ☐ 旋轉 ☐ 翻面

3. 影片中有幾種顏色的鳥與魚？

☐ 兩種 ☐ 三種 ☐ 四種

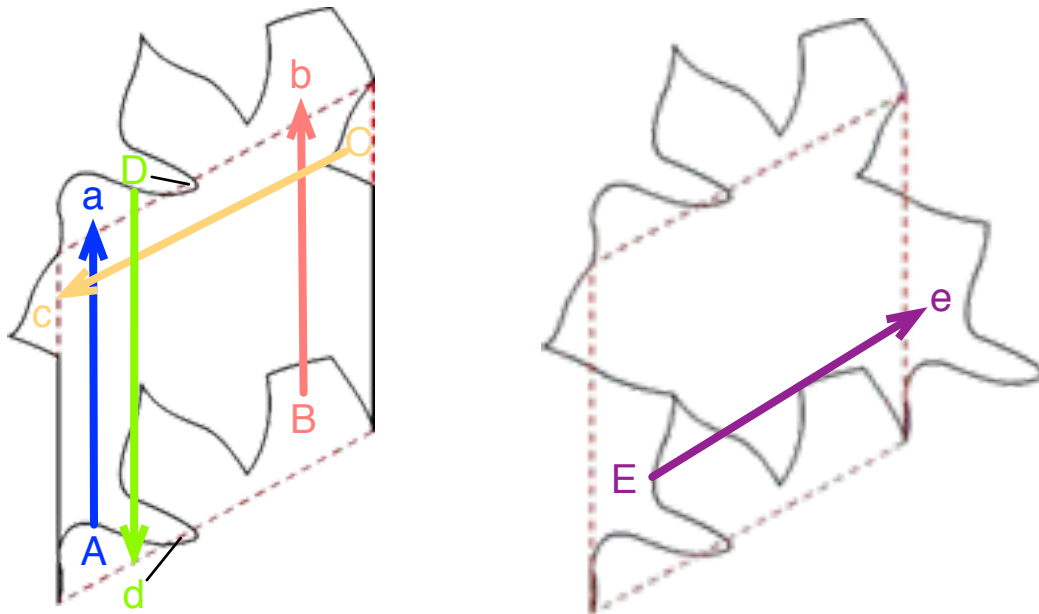
4. 鋪滿數學舞台的鳥與魚們有哪些特色？

☐ 不重疊 ☐ 無空隙 ☐ 外形都一樣

二、如何從數學骨架裁貼出鳥與魚

綜合下面兩個方式即可裁貼出鳥與魚，方式如下：

甲、將平行四邊形剪下五個小區塊 A, B, C, D, E，並將這五個小區塊貼到正確的位置上，即 $A \rightarrow a$; $B \rightarrow b$; $C \rightarrow c$; $D \rightarrow d$; $E \rightarrow e$



乙、如何貼到正確的位置呢？我們根據數學原理的平移：

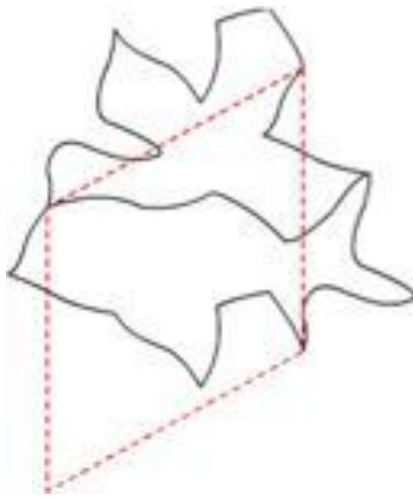
(1) $A \rightarrow a$ ：將 A 區塊往上平移到 a

(2) $B \rightarrow b$ ：將 B 區塊往上平移到 b

(3) $C \rightarrow c$ ：將 C 區塊往左平移到 c

(4) $D \rightarrow d$ ：將 D 區塊往下平移到 d

(5) $E \rightarrow e$ ：將 E 區塊往右平移到 e

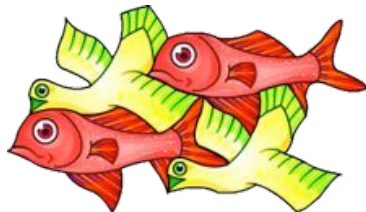


裁貼出鳥與魚後可以發現：平行四邊形的三個頂點分別在鳥的嘴巴和魚頭的交接處、鳥的翅膀與魚鰭，這就是鳥與魚在數學骨架上的正確位置。

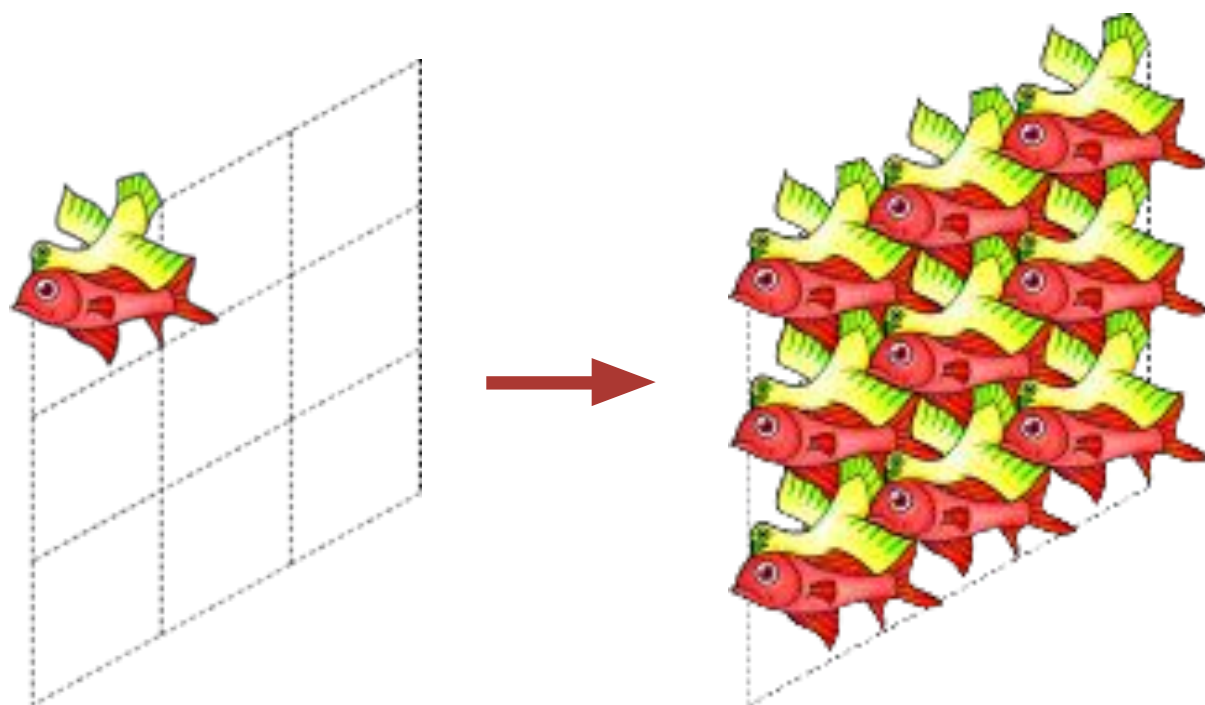
三、真的是鳥與魚磁磚嗎

經由數學原理裁貼後的鳥與魚有什麼令人驚艷的地方呢？我們可以由第三幕的藝術表演觀察到經數學原理形成的鳥與魚可以彼此互相密合，有以下一種密合方式：

(1) 鳥尾巴對魚嘴及鳥翅膀對魚尾巴的密合



這種可以互相密合、無交疊且無空隙的鳥與魚圖案，我們稱之為鳥與魚磁磚。有了這一種密合方式後，就可以用這一種方式將很多隻鳥與魚磁磚密鋪在平面上了。



四、鳥與魚的鑲嵌圖

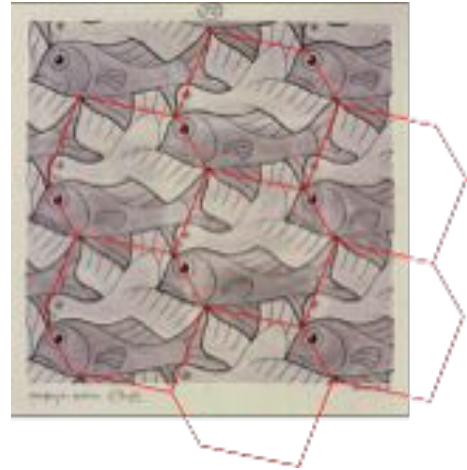
鳥與魚鑲嵌圖

透過了解鳥與魚在數學骨架上的正確位置及一種密合方式後，即可在數學骨架上密鋪出鳥與魚鑲嵌圖，左下圖是先將鳥與魚放在數學骨架上的正確位置，其他的鳥與魚除了要放在數學骨架上的正確位置外，還須一一按照一種密合方式密鋪。

關於《E082 鳥與魚》原圖，如下圖：



艾薛爾在《E082 鳥與魚》版畫上使用鉛筆描出一個六邊形（如右下圖所示），在這個六邊形中，有三組平行且等長的邊，要如何將此六邊形鋪滿平面呢？如左下圖所示，只要將六邊形中兩個平行且等長的邊對齊即可，這個六邊形也是《E082 鳥與魚》的數學骨架，而我們在引言和影片中，《E082 鳥與魚》的數學骨架是正方形和平行四邊形。事實上，這三個多邊形有著相同的面積。



E082 鳥與魚回饋單

1. 仔細想想，你在那個地方見過平行四邊形磁磚鋪設的地板？
2. 請你回想一下，每一隻鳥周遭圍繞著幾隻魚呢？（相鄰才算，只交一點不算）
☐ 2隻 ☐ 3隻 ☐ 4隻 ☐ 5隻
3. 鳥與魚的表面積與其數學骨架平行四邊形的表面積是否一樣？
☐ 是 ☐ 否
4. 如下圖，左邊的鳥和右邊的鳥是什麼樣的關係呢？
☐ 平移 ☐ 旋轉 ☐ 翻面



5. 右下圖為艾薛爾的另一幅版畫《E022 鳥與魚》，這版畫也利用了平行四邊形當作數學骨架，請參考左下圖所畫的數學骨架，在右下圖畫出正確的數學骨架，並用找到的數學骨架說明如何剪貼出鳥與魚。



6. 關於影片與本工作單的教材，你給予幾分(最多10分，最少0分)

10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

又有何建議：

.....

填單人姓名：_____

填單日期：____年____月____日

e-mail：

電話：

☐ 老師

☐ 學生

☐ 社會人士

學校 _____

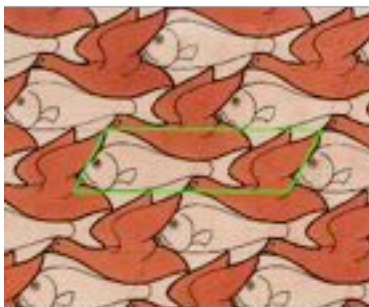
班級

E082 鳥與魚工作單

1. 第一幕的數學骨架是哪一個多邊形呢？
☐ 正方形 ☒ 平行四邊形 ☐ 矩形
2. 第二幕裁貼的過程中，用到了哪些數學方法？
☒ 平移 ☐ 旋轉 ☒ 翻面
3. 影片中有幾種顏色的鳥與魚？
☒ 兩種 ☐ 三種 ☐ 四種
4. 鋪滿數學舞台的鳥與魚們有哪些特色？
☒ 不重疊 ☒ 無空隙 ☒ 外形都一樣

E082 鳥與魚回饋單

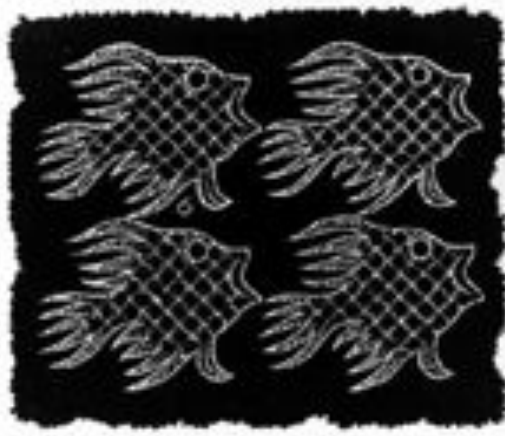
1. 仔細想想，你在那個地方見過平行四邊形磁磚鋪設的地板？
2. 請你回想一下，每一隻鳥周遭圍繞著幾隻魚呢？（相鄰才算，只交一點不算）
☐ 2隻 ☐ 3隻 ☒ 4隻 ☐ 5隻
3. 鳥與魚的表面積與其數學骨架平行四邊形的表面積是否一樣？
☒ 是 ☐ 否
4. 如下圖，左邊的鳥和右邊的鳥是什麼樣的關係呢？
☒ 平移 ☐ 旋轉 ☐ 翻面
5. 右下圖為艾薛爾的另一幅版畫《E022 鳥與魚》，這版畫也利用了平行四邊形當作數學骨架，請參考左下圖所畫的數學骨架，在右下圖畫出正確的數學骨架，並用找到的數學骨架說明如何剪貼出鳥與魚。



E084 鳥與魚工作單

撰稿：李勁緯

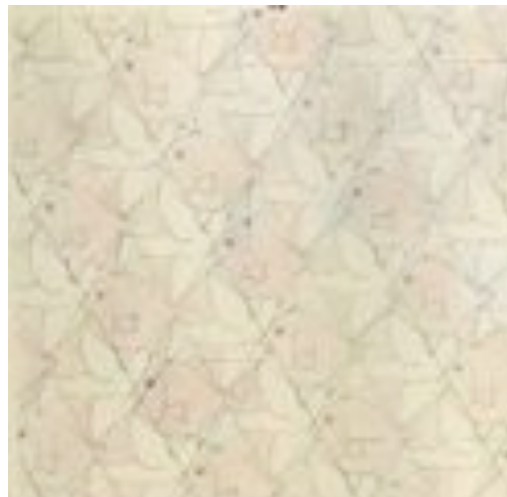
引言：《E084 鳥與魚》是荷蘭版畫家艾薛爾在1951年4月畫的一幅版畫，畫裡的鳥有兩種顏色，分別為白色及黑色，另添增紋路讓每隻鳥與魚看起來更加栩栩如生，主要繪圖工具為印度墨及色鉛筆，而我們影片裡的封面圖是艾薛爾在1951年時設計的《Plane-filling motif with Fish and Bird》（圖一）：



圖一



圖二



圖三

圖二為艾薛爾在1954年2月為當地電信局的一扇門設計的門鑲板畫，艾薛爾在1954年2月一共設計了三幅門鑲板畫，另外兩幅為《E092 兩隻鳥》及《E093 魚》。在鳥與魚版畫上艾薛爾寫下這麼一句話「2 motifs. Transitional system $I^B - I^A$ Variant of no. 29. characterized solely by contour lines」，道出《E084 鳥與魚》版畫是由他的另一幅版畫《E029 鳥與魚》（圖三）變形而成。讓我們觀賞鳥與魚的影片吧！

請在電腦上點選《E084 鳥與魚.exe》進入影片的首頁，並按左上角的Q版圖開始撥放。

一、 鳥與魚的數學與藝術

我們可以把鳥與魚的影片分成如下的四幕：

第一幕：影片由矩形鋪滿構成數學舞台拉開序幕，而這矩形正是鳥與魚的數學骨架。

第二幕：將數學舞台的一個矩形放大，從這矩形剪下五小塊後，依數學原理的平移貼到正確的位置，即裁貼出鳥與魚。

第三幕：將鳥與魚外框的內部著上顏色成為藝術品並進行藝術表演，表演過程依各種適當角度將表演的鳥與魚們互相密合。

第四幕：銜接第一幕的數學舞台並留下數學骨架的虛線邊，將鳥與魚一隻一隻放到數學骨架上的正確位置進而鋪滿數學舞台，而這種不互相重疊、無空隙、反覆且連續的鋪滿就是所謂的鑲嵌或密鋪。

1. 第一幕的數學骨架是哪一個多邊形呢？

☐ 正方形 ☐ 矩形 ☐ 梯形 ☐ 鳶形

2. 第二幕剪貼的過程中，用到了哪些數學方法？

☐ 平移 ☐ 旋轉 ☐ 翻面

3. 影片中有幾種顏色的鳥與魚？

☐ 兩種 ☐ 三種 ☐ 四種

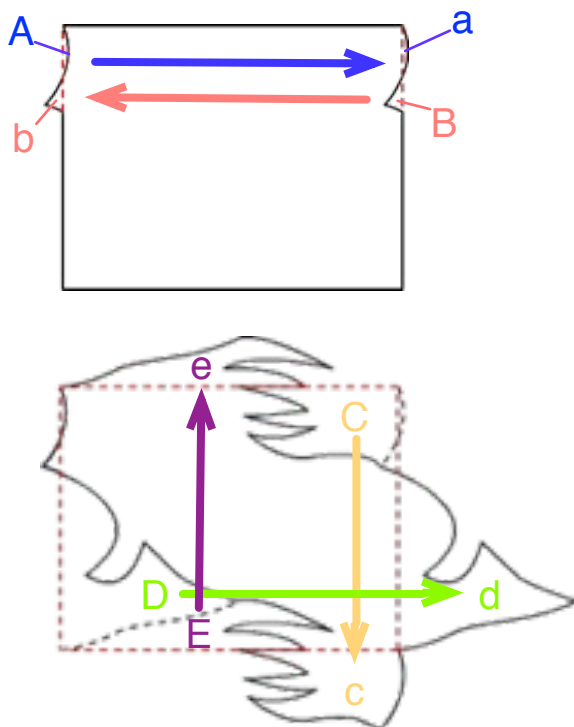
4. 鋪滿數學舞台的鳥與魚們有哪些特色？

☐ 不重疊 ☐ 無空隙 ☐ 外形都一樣

二、如何從數學骨架裁貼出鳥與魚

綜合下面兩個方式即可裁貼出鳥與魚，方式如下：

甲、將矩形剪下五個小區塊，A, B, C, D, E，並將這五個小區塊貼到正確的位置上，即 $A \rightarrow a$; $B \rightarrow b$; $C \rightarrow c$; $D \rightarrow d$; $E \rightarrow e$



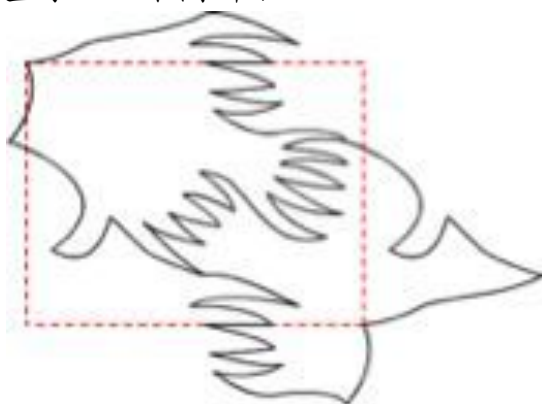
乙、如何貼到正確的位置呢？我們根據數學原理的平移：

(1) $A \rightarrow a$ ：將 A 區塊向右平移到 a

(2) $B \rightarrow b$ ：將 B 區塊向左平移到 b

- (3) $C \rightarrow c$: 將 C 區塊向下平移到 c
- (4) $D \rightarrow d$: 將 D 區塊向右平移到 d
- (5) $E \rightarrow e$: 將 E 區塊向上平移到 e

在矩形的數學骨架上經過巧妙的切割並透過平移的數學運作之後，栩栩如生的鳥與魚就誕生了，如下圖所示：



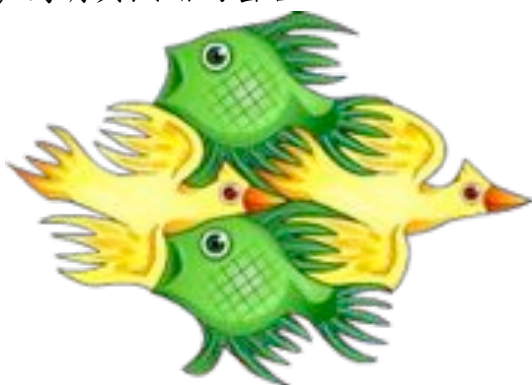
裁貼出鳥與魚後可以發現：矩形的兩個頂點分別在魚的嘴巴及鳥的翅膀跟身體的交接處，這就是鳥與魚在數學骨架上的正確位置。

三、 真的是鳥與魚磁磚嗎

由藝術表演可以知道經過數學原理形成的鳥與魚磁磚可以互相密合，其密合方式有兩種：

(1) 鳥嘴與魚鰭的密合

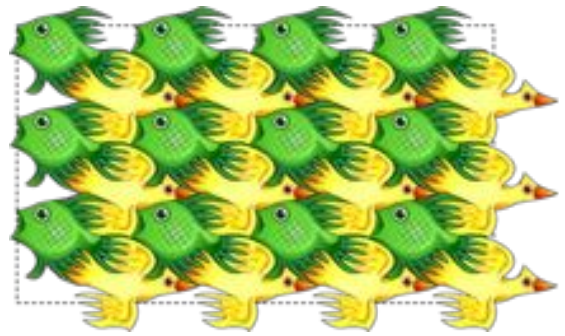
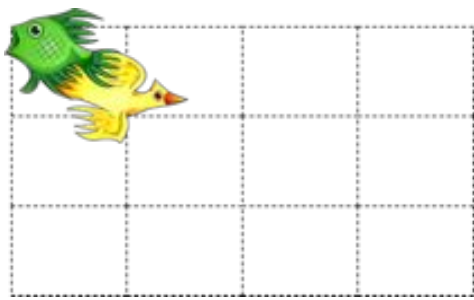
(2) 鳥翅膀與魚嘴的密合



有了這兩種密合方式，就可以將鳥與魚密鋪在平面上了。

四、 鳥與魚的鑲嵌圖

透過了解鳥與魚在數學骨架上的正確位置及兩種密合方式後，即可在數學骨架上密鋪出鳥與魚鑲嵌圖，左下圖是先將鳥與魚放在數學骨架上的正確位置，其他鳥與魚除了要放在數學骨架上的正確位置外，還須一一按照兩種密合方式密鋪，如右下圖。



關於《E084 鳥與魚》原圖，如下圖：



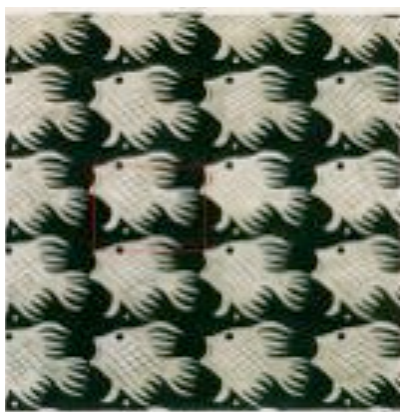
從版畫原圖中可以看出鳥跟魚的外框其實沒有用筆或鉛筆畫輪廓線，只利用分明的黑、白色來作區隔，白色底的魚配上黑溜溜的眼睛，並在魚身體上用不同的顏色畫出紋路，而黑底的鳥配上了白色的眼睛，在鳥的身體上也畫上紋路。

E084 鳥與魚回饋單

- 根據你的經驗，下列哪一個地方最有可能用矩形密鋪？
☐ 人行道 ☐ 家裡客廳地板 ☐ 廟宇地板
- 如下圖，右邊魚和左邊魚是怎麼樣的關係呢？
☐ 平移 ☐ 旋轉 ☐ 翻轉



- 鳥與魚的表面積與其數學骨架矩形的面積是否一樣？
☐ 是 ☐ 否
- 請你回頭仔細看鳥與魚鑲嵌圖，算一算每一隻鳥周遭圍繞著幾隻魚呢？
 (相鄰才算，只接觸一點不算)
☐ 3隻 ☐ 4隻 ☐ 5隻 ☐ 6隻
- 右下圖為艾薛爾的另一幅版畫《E092 兩隻鳥》，這版畫也利用了矩形當作數學骨架，請參考左下圖所畫的數學骨架，在右下圖畫出正確的數學骨架，並用找到的數學骨架說明如何剪貼出兩隻鳥。



6. 關於影片與本工作單的教材，你給予幾分(最多10分，最少0分)

10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

又有何建議：

.....

填單人姓名：_____

填單日期：____年____月____日

e-mail：

電話：

☐ 老師

☐ 學生

☐ 社會人士

學校

班級

E084 鳥與魚工作單

1. 第一幕的數學骨架是哪一個多邊形呢？
☐ 正方形 ☒ 矩形 ☐ 梯形 ☐ 鳶形
2. 第二幕剪貼的過程中，用到了哪些數學方法？
☒ 平移 ☒ 旋轉 ☐ 翻面
3. 影片中有幾種顏色的鳥與魚？
☒ 兩種 ☐ 三種 ☐ 四種
4. 鋪滿數學舞台的鳥與魚們有哪些特色？
☒ 不重疊 ☒ 無空隙 ☒ 外形都一樣

E084 鳥與魚回饋單

1. 根據你的經驗，下列哪一個地方最有可能用矩形密鋪？
☐ 人行道 ☒ 家裡客廳地板 ☐ 廟宇地板
2. 如下圖，右邊魚和左邊魚是怎麼樣的關係呢？
☒ 平移 ☐ 旋轉 ☐ 翻轉
3. 鳥與魚的表面積與其數學骨架矩形的面積是否一樣？
☒ 是 ☐ 否
4. 請你回頭仔細看鳥與魚鑲嵌圖，算一算每一隻鳥周遭圍繞著幾隻魚呢？
(相鄰才算，只接觸一點不算)
☐ 3隻 ☒ 4隻 ☐ 5隻 ☐ 6隻
5. 右下圖為艾薛爾的另一幅版畫《E092 兩隻鳥》，這版畫也利用了矩形當作數學骨架，請參考左下圖所畫的數學骨架，在右下圖畫出正確的數學骨架，並用找到的數學骨架說明如何剪貼出兩隻鳥。



E087 兩隻鳥工作單

撰稿：李勁緯

引言：《E087 兩隻鳥》是荷蘭版畫家艾薛爾在1952年7月畫的一幅版畫，畫裡的鳥有兩種顏色，分別為白色及綠色，另添增陰影讓每隻鳥看起來更加立體，主要繪圖工具為墨水及水彩，而我們影片中的封面圖為艾薛爾在同年10月設計的新年賀卡（圖一）：



圖一



圖二

艾薛爾於1952年一共設計了4張新年賀卡，代表了四個元素—土地、空氣、火、水，上面的年份依序是1953年到1956年，而我們的封面圖是1954年代表空氣。而圖二是另一幅版畫《E092 兩隻鳥》，跟《E087 兩隻鳥》中的鳥形狀相似，還有著相同的密合方式。現在就讓我們來看看在天空飛翔的鳥兒是如何鋪滿平面的吧！

請在電腦上點選《E087 兩隻鳥.exe》進入影片的首頁，並按左上角的Q版圖開始撥放。

一、兩隻鳥的數學與藝術

我們可以把兩隻鳥的影片分成如下的四幕：

- 第一幕：影片由平行四邊形鋪滿構成數學舞台拉開序幕，而這平行四邊形正是兩隻鳥的數學骨架。
- 第二幕：將數學舞台的一個平行四邊形放大，從這平行四邊形剪下六小塊後，依數學原理的平移貼到正確的位置，即裁貼出兩隻鳥。
- 第三幕：將兩隻鳥外框的內部著上顏色成為藝術品並進行藝術表演，表演過程依各種適當角度將表演的鳥們互相密合。
- 第四幕：銜接第一幕的數學舞台並留下數學骨架的虛線邊，將鳥一隻一隻放到數學骨架上的正確位置進而鋪滿數學舞台，而這種不互相重疊、無空隙、反覆且連續的鋪滿就是所謂的鑲嵌或密鋪。

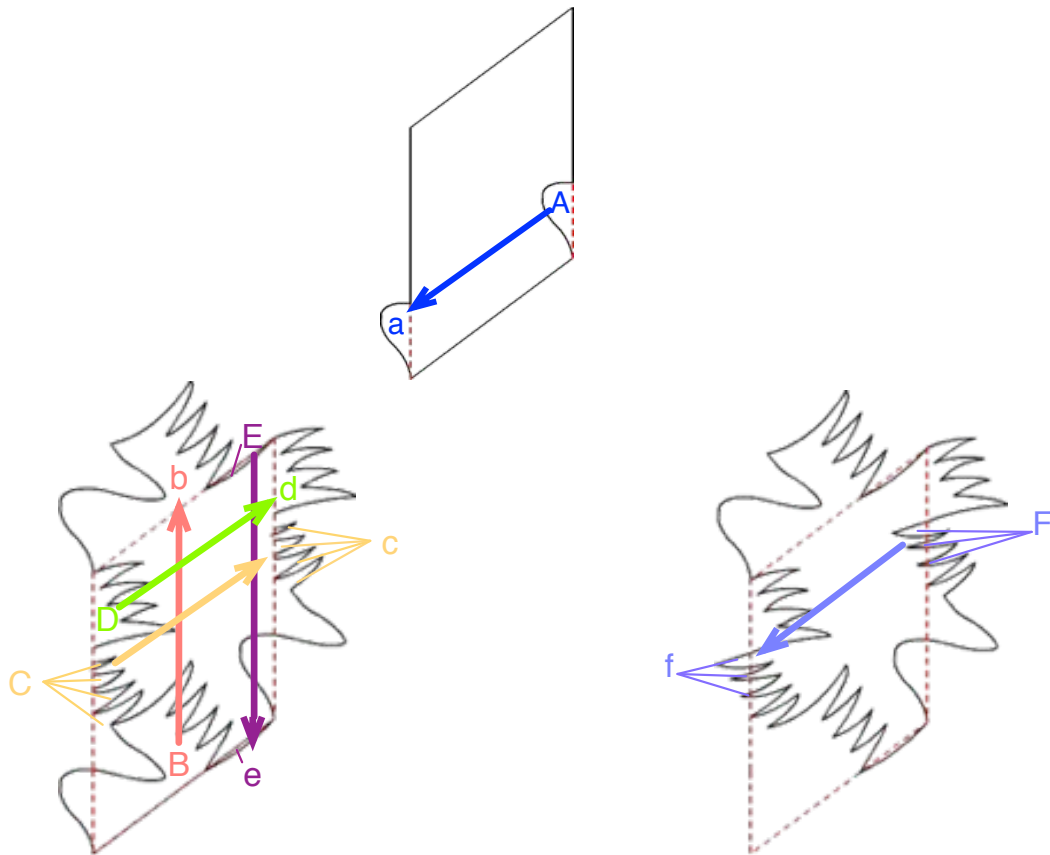
1. 第一幕的數學骨架是哪一個多邊形呢？

- ☐ 正方形 ☐ 矩形 ☐ 梯形 ☐ 平行四邊形
2. 第二幕剪貼的過程中，用到了哪些數學方法？
- ☐ 平移 ☐ 旋轉 ☐ 翻面
3. 影片中有幾種顏色的鳥？
- ☐ 兩種 ☐ 三種 ☐ 四種
4. 鋪滿數學舞台的鳥們有哪些特色？
- ☐ 不重疊 ☐ 無空隙 ☐ 外形都一樣

二、如何從數學骨架裁貼出兩隻鳥

綜合下面兩個方式即可裁貼出兩隻鳥，方式如下：

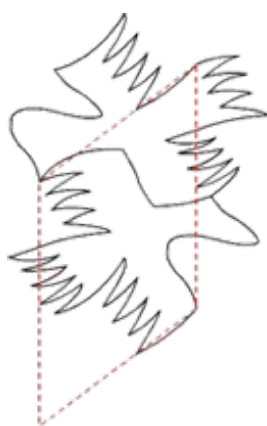
甲、將平行四邊形剪下六個小區塊，A, B, C, D, E, F，並將這六個小區塊貼到正確的位置上，即 $A \rightarrow a$; $B \rightarrow b$; $C \rightarrow c$; $D \rightarrow d$; $E \rightarrow e$; $F \rightarrow f$



乙、如何貼到正確的位置呢？我們根據數學原理的平移：

- (1) $A \rightarrow a$ ：將 A 區塊向左平移到 a
- (2) $B \rightarrow b$ ：將 B 區塊向上平移到 b
- (3) $C \rightarrow c$ ：將 C 區塊向右上平移到 c
- (4) $D \rightarrow d$ ：將 D 區塊向右上平移到 d
- (5) $E \rightarrow e$ ：將 E 區塊向下平移到 e
- (6) $F \rightarrow f$ ：將 F 區塊向左下平移到 f

在平行四邊形的數學骨架上經過巧妙的切割並透過平移的數學運作之後，兩隻鳥就誕生了，如下圖所示：



裁貼出兩隻鳥後可以發現：平行四邊形的三個頂點分別在上面那隻鳥的嘴巴、翅膀跟身體的交接處及下面那隻鳥翅膀的尖點，這就是兩隻鳥在數學骨架上的正確位置。

三、 真的是兩隻鳥磁磚嗎

由藝術表演可以知道經過數學原理形成的兩隻鳥磁磚可以互相密合，其密合方式有四種：

(1) 橘鳥下巴跟藍鳥上翅膀的密合



(2) 橘鳥脖子跟藍鳥嘴巴的密合



(3) 橘鳥上翅膀跟藍鳥下翅膀的密合



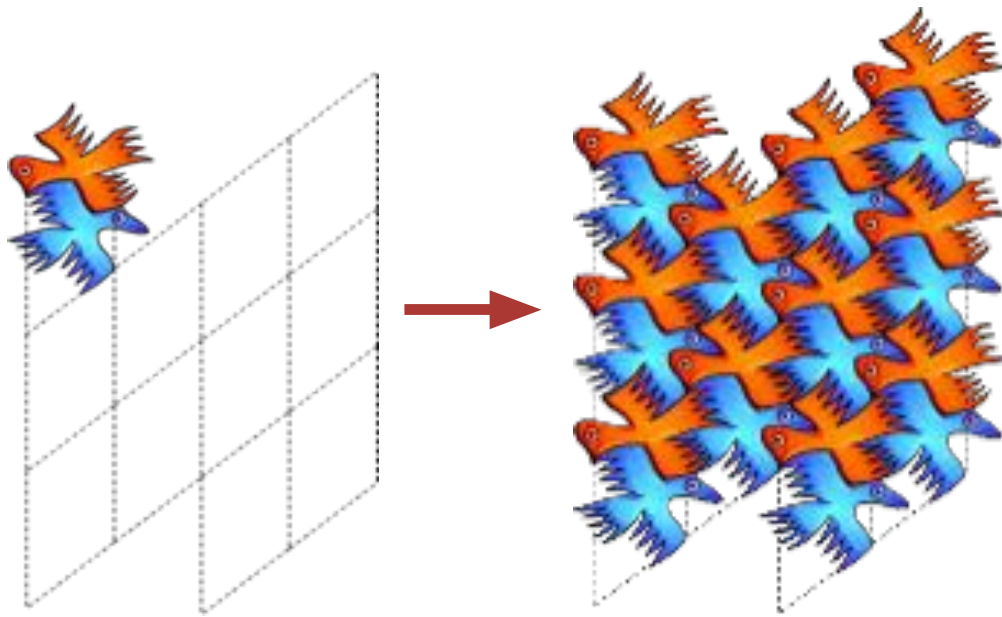
(4) 背部跟背部的密合



有了這四種密合方式，就可以將兩隻鳥密鋪在平面上了。

四、 兩隻鳥的鑲嵌圖

透過了解兩隻鳥在數學骨架上的正確位置及四種密合方式後，即可在數學骨架上密鋪出兩隻鳥鑲嵌圖，左下圖是先將鳥放在數學骨架上的正確位置，其他鳥除了要放在數學骨架上的正確位置外，還須一一按照四種密合方式密鋪，如右下圖。



關於《E087 兩隻鳥》原圖，如下圖：



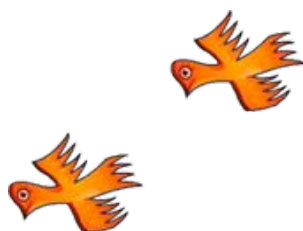
比較我們影片裡的封面圖跟版畫的原圖，各位有沒有發現鳥前進的方向不一樣了呢？如果你把紙轉 45 度，方向就會一樣了！一部份是讓封面圖中的綠色鳥跟粉紅色鳥看起來是分別往地平線的兩端飛去，另一部份是為了配合卡片的形狀，旋轉後的鳥兒比往斜的方向飛的鳥更具有視覺效果！

E087 兩隻鳥回饋單

1. 仔細想想，你在那個地方見過用平行四邊形磁磚鋪設的地板？

2. 如下圖，右上的鳥和左下的鳥是什麼樣的關係呢？

☐ 平移 ☐ 旋轉 ☐ 翻面



3. 兩隻鳥的表面積與其數學骨架矩形的面積是否一樣？

☐ 是 ☐ 否

4. 請你回頭仔細看兩隻鳥鑲嵌圖，算一算每一隻鳥周遭圍繞著幾隻鳥呢？
(相鄰才算，只接觸一點不算)

☐ 3隻 ☐ 4隻 ☐ 5隻 ☐ 6隻

5. 右下圖為艾薛爾的另一幅版畫《E061 兩個生物》，這版畫也利用了平行四邊形當作數學骨架，請參考左下圖所畫的數學骨架，在右下圖畫出正確的數學骨架，並用找到的數學骨架說明如何剪貼出兩個生物。



6. 關於影片與本工作單的教材，你給予幾分(最多10分，最少0分)

10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

又有何建議：

.....

填單人姓名：_____

填單日期：____年____月____日

e-mail：

電話：

☐ 老師

☐ 學生

☐ 社會人士

學校 _____

班級 _____

E087兩隻鳥工作單

1. 第一幕的數學骨架是哪一個多邊形呢？
☐ 正方形 ☒ 矩形 ☐ 梯形 ☒ 平行四邊形
2. 第二幕剪貼的過程中，用到了哪些數學方法？
☒ 平移 ☐ 旋轉 ☐ 翻面
3. 影片中有幾種顏色的鳥？
☒ 兩種 ☐ 三種 ☐ 四種
4. 鋪滿數學舞台的鳥們有哪些特色？
☒ 不重疊 ☒ 無空隙 ☒ 外形都一樣

E087 兩隻鳥回饋單

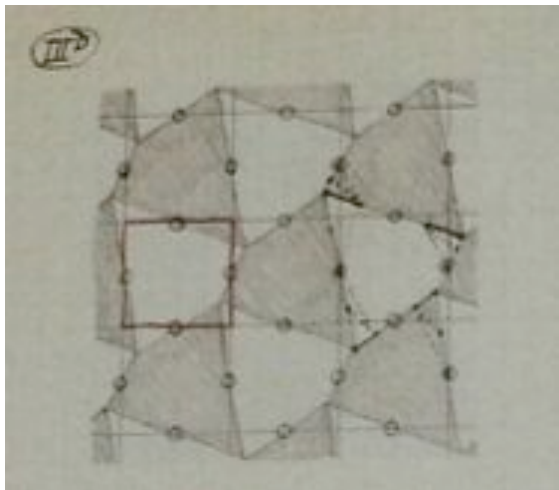
1. 仔細想想，你在那個地方見過用平行四邊形磁磚鋪設的地板？
2. 下圖，右上的鳥和左下的鳥是什麼樣的關係呢？
☒ 平移 ☐ 旋轉 ☐ 翻面
3. 兩隻鳥的表面積與其數學骨架矩形的面積是否一樣？
☒ 是 ☐ 否
4. 請你回頭仔細看兩隻鳥鑲嵌圖，算一算每一隻鳥周遭圍繞著幾隻鳥呢？
(相鄰才算，只接觸一點不算)
☐ 3隻 ☒ 4隻 ☐ 5隻 ☐ 6隻
5. 右下圖為艾薛爾的另一幅版畫《E061 兩個生物》，這版畫也利用了平行四邊形當作數學骨架，請參考左下圖所畫的數學骨架，在右下圖畫出正確的數學骨架，並用找到的數學骨架說明如何剪貼出兩個生物。



E090 魚工作單

撰稿：李勁緯

引言：《E090 魚》是荷蘭版畫家艾薛爾在1953年9月的作品，以墨水及水彩創作而成。影片中的封面圖為艾薛爾在自己的筆記本中為這種拼合方式所繪製的數學骨架：



圖中的紅色正方形和灰色框架的四邊形，都是《E090 魚》的數學骨架。再觀察圖中的小圈圈，每一個圈圈指的是一個旋轉點，每一個正方形或四邊形分別以旋轉點旋轉180度後，便可以鋪滿整個平面了，而《E090 魚》版畫正是運用此種的密鋪方式所創造出來的。此外，正方形和四邊形的面積會一樣，而且四邊形可以由正方形切割而成。現在，就讓我們一起來看魚的影片吧！

請在電腦上點選《E090 魚.exe》進入影片的首頁，並按左上角的Q版圖開始撥放。

一、 魚的數學與藝術

我們可以把魚的影片分成如下的四幕：

第一幕：影片由四邊形鋪滿構成數學舞台拉開序幕，而這四邊形正是魚的數學骨架。

第二幕：將數學舞台的一個四邊形放大，從這四邊形剪下六小塊後，依數學原理的旋轉貼到正確的位置，即裁貼出魚。

第三幕：將魚外框的內部著上顏色成為藝術品並進行藝術表演，表演過程依各種適當角度將表演的魚們互相密合。

第四幕：銜接第一幕的數學舞台並留下數學骨架的虛線邊，將魚一隻一隻放到數學骨架上的正確位置進而鋪滿數學舞台，而這種不互相重疊、無空隙、反覆且連續的鋪滿稱作鑲嵌或密鋪。

1. 第一幕的數學骨架是哪一個多邊形呢？

☐ 正方形 ☐ 四邊形 ☐ 矩形

2. 第二幕裁貼的過程中，用到了哪些數學方法？

☐ 平移 ☐ 旋轉 ☐ 翻面

3. 影片中有幾種顏色的魚？

☐ 兩種 ☐ 三種 ☐ 四種

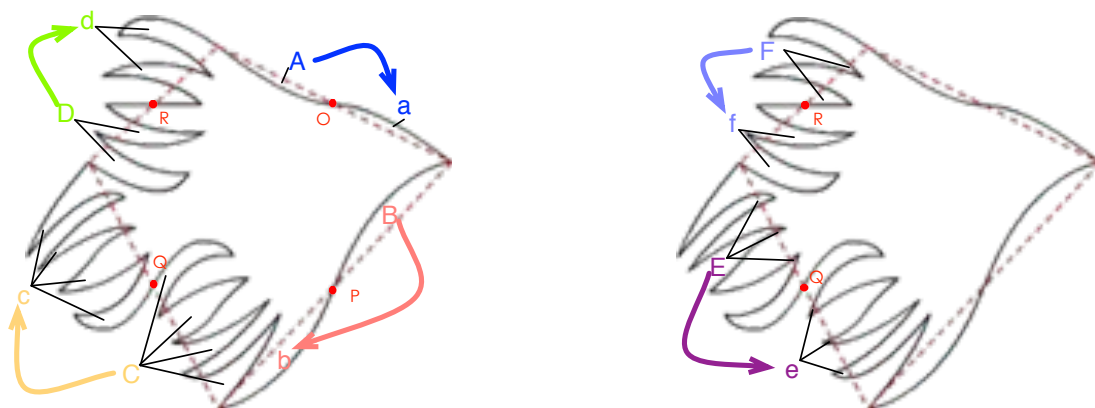
4. 鋪滿數學舞台的魚有哪些特色？

☐ 不重疊 ☐ 無空隙 ☐ 外形都一樣

二、如何從數學骨架裁貼出魚

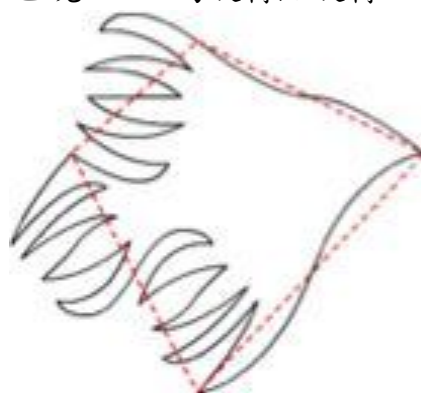
綜合下面兩個方式即可裁貼出魚，方式如下：

甲、將四邊形剪下六個小區塊 A, B, C, D, E, F，並將這六個小區塊貼到正確的位置上，即 $A \rightarrow a$; $B \rightarrow b$; $C \rightarrow c$; $D \rightarrow d$; $E \rightarrow e$; $F \rightarrow f$



乙、如何貼到正確的位置呢？我們根據數學原理的旋轉：

- (1) $A \rightarrow a$ ：將 A 區塊以 O 為旋轉點旋轉貼到 a
- (2) $B \rightarrow b$ ：將 B 區塊以 P 為旋轉點旋轉貼到 b
- (3) $C \rightarrow c$ ：將 C 區塊以 Q 為旋轉點旋轉貼到 c
- (4) $D \rightarrow d$ ：將 D 區塊以 R 為旋轉點旋轉貼到 d
- (5) $E \rightarrow e$ ：將 E 區塊以 Q 為旋轉點旋轉貼到 e
- (6) $F \rightarrow f$ ：將 F 區塊以 R 為旋轉點旋轉貼到 f



裁貼出魚後可以發現：四邊形的四個頂點分別在魚嘴、兩魚鰭尖端及尾鰭尾端，這就是魚在數學骨架上的正確位置。

三、真的是魚磁磚嗎

由藝術表演可以知道經過數學原理形成的魚磁磚可以互相密合，其密合方式有一種：

- (1) 魚嘴對魚鰭和魚鰭對魚鰭的密合

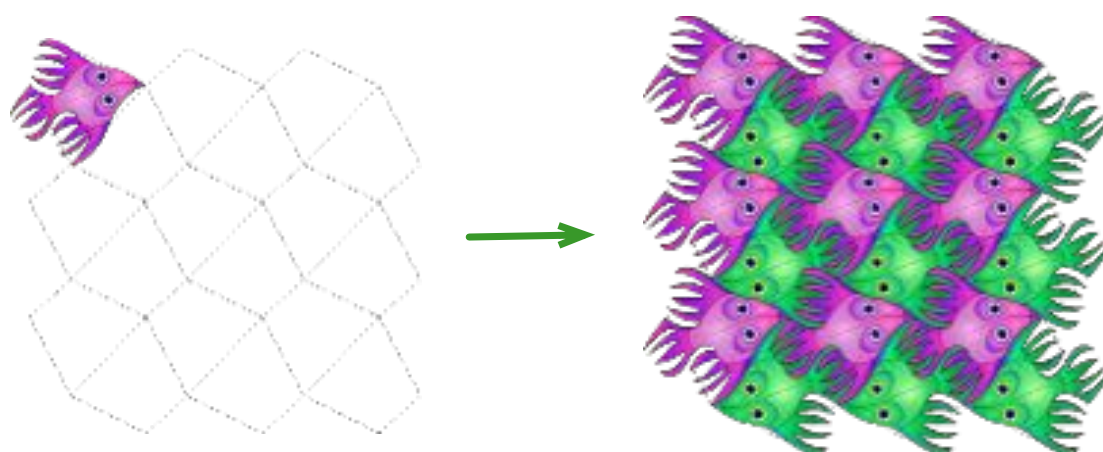


這種可以互相密合、無交疊且無空隙的魚圖案，我們稱之為魚磁磚。有了這一種密合方式後，就可以用這一種方式將很多隻魚磁磚密鋪在平面上了。

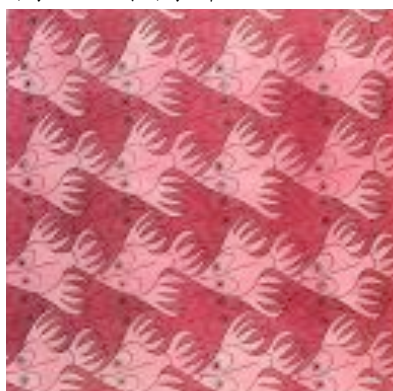
四、魚的鑲嵌圖

魚鑲嵌圖

透過了解魚在數學骨架上的正確位置及一種密合方式後，即可在數學骨架上密鋪出魚鑲嵌圖，左下圖是先將魚放在數學骨架上的正確位置，其他的魚除了要放在數學骨架上的正確位置外，還須一一按照一種密合方式密鋪。



關於艾薛爾的魚版畫原圖，如下圖所示：



在我們《E090 魚》影片中的數學骨架為四邊形，而如同引言所說，正方形也會是《E090 魚》的數學骨架。不過將正方形骨架畫在版畫原圖上，會發現這個正方形是斜的，而且正方形的頂點，不會在魚的輪廓線上。

E090 魚回饋單

1. 魚的四邊形數學骨架包含了幾隻魚？

2. 請你回想一下，每一隻魚周遭圍繞著幾隻魚呢？

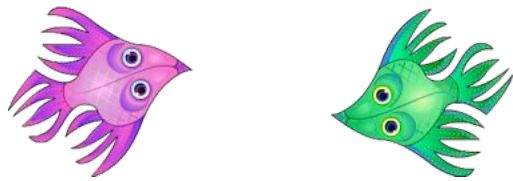
2隻 ☐ 3隻 ☐ 4隻 ☐ 5隻

3. 魚的表面積與其數學骨架四邊形的面積是否一樣？

☐ 是 ☐ 否

4. 如下圖，左邊的魚和右邊的魚是什麼樣的關係呢？

☐ 平移 ☐ 旋轉 ☐ 翻面



5. 右下圖為艾薛爾的另一幅版畫《E093 魚》，這版畫也利用了四邊形當作數學骨架，請參考左下圖所畫的數學骨架，在右下圖畫出魚的四邊形數學骨架，並用找到的數學骨架說明如何剪貼出魚。



6. 關於影片與本工作單的教材，你給予幾分(最多10分，最少0分)

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

10 9 8 7 6 5 4 3 2 1 0

又有何建議：

.....

填單人姓名：_____

填單日期：____年____月____日

e-mail：

電話：

☐ 老師

☐ 學生

☐ 社會人士

學校 _____

班級

E090 魚工作單

1. 第一幕的數學骨架是哪一個多邊形呢？
☐ 正方形 ☒ 四邊形 ☐ 矩形
2. 第二幕裁貼的過程中，用到了哪些數學方法？
☐ 平移 ☒ 旋轉 ☐ 翻面
3. 影片中有幾種顏色的魚？
☒ 兩種 ☐ 三種 ☐ 四種
4. 鋪滿數學舞台的鳥與魚們有哪些特色？
☒ 不重疊 ☒ 無空隙 ☒ 外形都一樣

E090 魚回饋單

1. 魚的四邊形數學骨架包含了幾隻魚？
1隻
2. 請你回想一下，每一隻魚周遭圍繞著幾隻魚呢？
☐ 2隻 ☐ 3隻 ☒ 4隻 ☐ 5隻
3. 魚的表面積與其數學骨架四邊形的面積是否一樣？
☒ 是 ☐ 否
4. 如下圖，左邊的魚和右邊的魚是什麼樣的關係呢？
☐ 平移 ☒ 旋轉 ☐ 翻面
5. 右下圖為艾薛爾的另一幅版畫《E093 魚》，這版畫也利用了四邊形當作數學骨架，請參考左下圖所畫的數學骨架，在右下圖畫出魚的四邊形數學骨架，並用找到的數學骨架說明如何剪貼出魚。



E092 兩隻鳥工作單

撰稿：李勁緯

引言：《E092 兩隻鳥》是荷蘭版畫家艾薛爾在1954年2月畫的一幅版畫，畫裡的鳥有兩種顏色，分別為白色及粉紅色，另添增陰影讓每隻鳥看起來更加立體，主要繪圖工具為墨水及水彩，而我們影片中的封面圖為艾薛爾在同年同月為當地電信局的一扇門設計的鑲板畫（圖一）：



圖一



圖二

艾薛爾在兩隻鳥版畫上寫下這麼一句話「2 motifs, transitional system $I^B - I^A$ variant of 87 made for commissioned intarsia work, telephone building Amsterdam, same as 93 and 84」，說明這幅版畫是另外一幅版畫《E087 兩隻鳥》（圖二）的變形。同時告訴我們這幅版畫和另外兩幅版畫《E093 魚》和《E084 鳥與魚》有相同的創作緣由，是為了製作適合鑲嵌於門面的版畫而特製的。接著讓我們一起來觀賞影片，來看看這兩隻鳥有什麼特別之處吧！

請在電腦上點選《E092 兩隻鳥.exe》進入影片的首頁，並按左上角的Q版圖開始撥放。

一、兩隻鳥的數學與藝術

我們可以把兩隻鳥的影片分成如下的四幕：

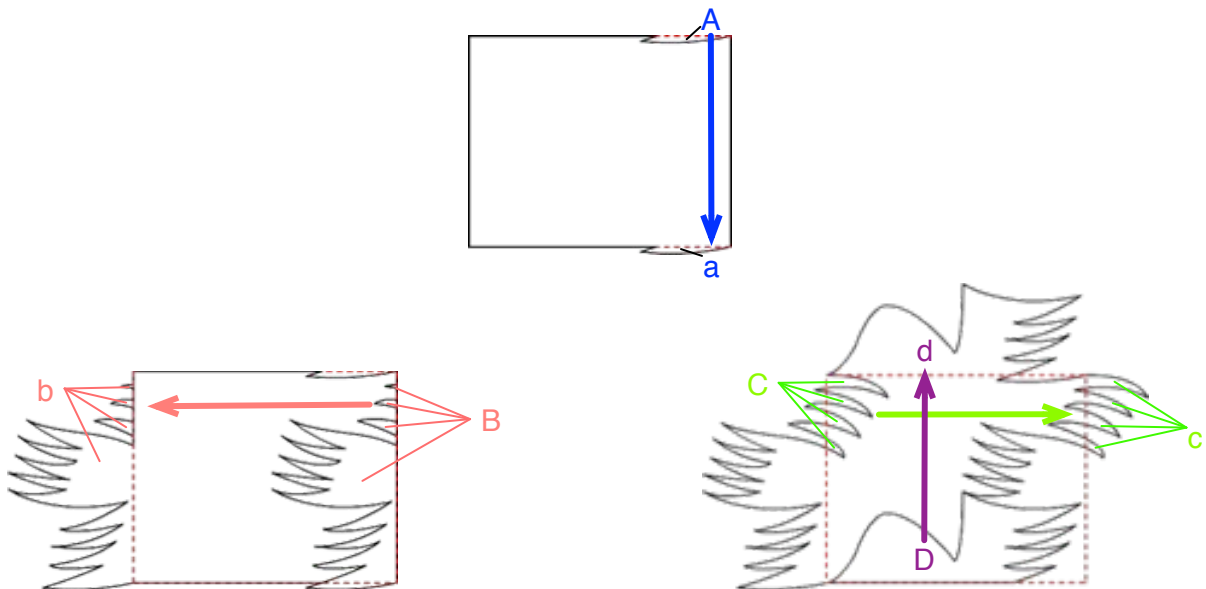
- 第一幕：影片由矩形鋪滿構成數學舞台拉開序幕，而這矩形正是兩隻鳥的數學骨架。
- 第二幕：將數學舞台的一個矩形放大，從這矩形剪下四小塊後，依數學原理的平移貼到正確的位置，即裁貼出兩隻鳥。
- 第三幕：將兩隻鳥外框的內部著上顏色成為藝術品並進行藝術表演，表演過程依各種適當角度將表演的鳥們互相密合。
- 第四幕：銜接第一幕的數學舞台並留下數學骨架的虛線邊，將鳥一隻一隻放到數學骨架上的正確位置進而鋪滿數學舞台，而這種不互相重疊、無空隙、反覆且連續的鋪滿就是所謂的鑲嵌或密鋪。

1. 第一幕的數學骨架是哪一個多邊形呢？
☐ 正方形 ☐ 矩形 ☐ 梯形 ☐ 鳶形
2. 第二幕剪貼的過程中，用到了哪些數學方法？
☐ 平移 ☐ 旋轉 ☐ 翻面
3. 影片中有幾種顏色的鳥？
☐ 兩種 ☐ 三種 ☐ 四種
4. 鋪滿數學舞台的鳥們有哪些特色？
☐ 不重疊 ☐ 無空隙 ☐ 外形都一樣

二、如何從數學骨架裁貼出兩隻鳥

綜合下面兩個方式即可裁貼出兩隻鳥，方式如下：

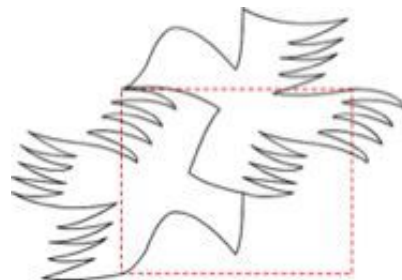
甲、將矩形剪下五個小區塊，A, B, C, D，並將這四個小區塊貼到正確的位置上，即 $A \rightarrow a$; $B \rightarrow b$; $C \rightarrow c$; $D \rightarrow d$



乙、如何貼到正確的位置呢？我們根據數學原理的平移：

- (1) $A \rightarrow a$: 將 A 區塊向下平移到 a
- (2) $B \rightarrow b$: 將 B 區塊向左平移到 b
- (3) $C \rightarrow c$: 將 C 區塊向右平移到 c
- (4) $D \rightarrow d$: 將 D 區塊向上平移到 d

在矩形的數學骨架上經過巧妙的切割並透過平移的數學運作之後，栩栩如生的兩隻鳥就誕生了，如下圖所示：



裁貼出兩隻鳥後可以發現：矩形的三個頂點分別在上面鳥的嘴巴和下面鳥翅膀交接處、上面鳥尾巴和身體交接處及下面鳥翅膀的一點，這就是兩隻鳥在數學骨架上的正確位置。

三、 真的是兩隻鳥磁磚嗎

由藝術表演可以知道經過數學原理形成的兩隻鳥磁磚可以互相密合，其密合方式有四種：

(1) 紅鳥脖子跟綠鳥下巴的密合

(2) 紅鳥上翅膀跟綠鳥下翅膀的密合



(3) 紅鳥下翅膀跟綠鳥上翅膀的密合

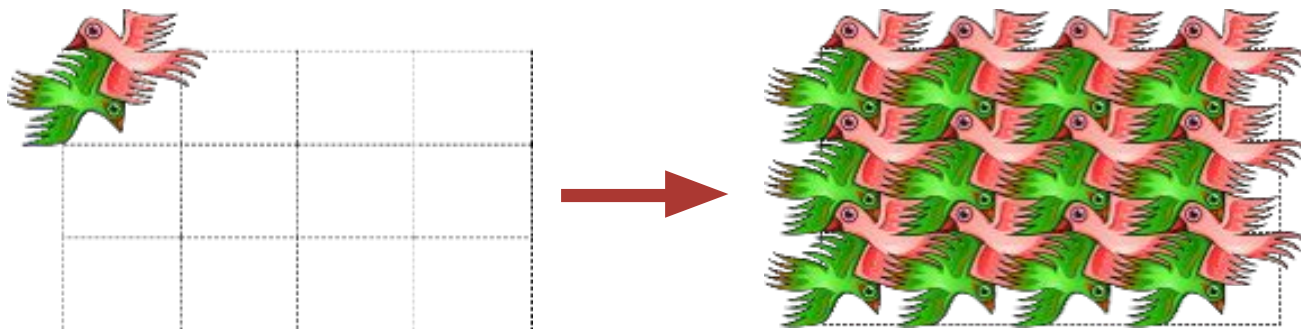
(4) 紅鳥下巴跟綠鳥脖子的密合



有了這四種密合方式，就可以將兩隻鳥密鋪在平面上了。

四、 兩隻鳥的鑲嵌圖

透過了解兩隻鳥在數學骨架上的正確位置及四種密合方式後，即可在數學骨架上密鋪出兩隻鳥鑲嵌圖，左下圖是先將鳥放在數學骨架上的正確位置，其他鳥除了要放在數學骨架上的正確位置外，還須一一按照四種密合方式密鋪，如右下圖。



關於《E092 兩隻鳥》原圖，如下圖：



各位有沒有發現這兩隻鳥的輪廓很相似呢？看兩隻鳥的翅膀部分，會讓我們誤以為：將白色鳥轉了180度後會和粉紅色鳥一樣，但其實他們是不一樣的。如果使用上述的密鋪方式，並讓白色鳥和粉紅色鳥是相同的輪廓，那麼這兩隻鳥看起來會是上下顛倒的。

E092 兩隻鳥回饋單

- 根據你的經驗，下列哪一個地方最有可能用矩形密鋪？
☐ 人行道 ☐ 家裡客廳地板 ☐ 廟宇地板
- 如下圖，右邊的鳥和左邊的鳥是什麼樣的關係呢？
☐ 平移 ☐ 旋轉 ☐ 翻面



- 兩隻鳥的表面積與其數學骨架矩形的面積是否一樣？
☐ 是 ☐ 否
- 請你回頭仔細看兩隻鳥鑲嵌圖，算一算每一隻鳥周遭圍繞著幾隻鳥呢？
 (相鄰才算，只接觸一點不算)
☐ 3隻 ☐ 4隻 ☐ 5隻 ☐ 6隻
- 右下圖為艾薛爾的另一幅版畫《E084 鳥與魚》，這版畫也利用了矩形當作數學骨架，請參考左下圖所畫的數學骨架，在右下圖畫出正確的數學骨架，並用找到的數學骨架說明如何剪貼出鳥與魚。



6. 關於影片與本工作單的教材，你給予幾分(最多10分，最少0分)

10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

又有何建議：

.....

填單人姓名：_____

填單日期：____年____月____日

e-mail：

電話：

☐ 老師

☐ 學生

☐ 社會人士

學校 _____

班級 _____

E092兩隻鳥工作單

1. 第一幕的數學骨架是哪一個多邊形呢？
☐ 正方形 ☒ 矩形 ☐ 梯形 ☐ 鳶形
2. 第二幕剪貼的過程中，用到了哪些數學方法？
☒ 平移 ☐ 旋轉 ☐ 翻面
3. 影片中有幾種顏色的鳥？
☒ 兩種 ☐ 三種 ☐ 四種
4. 鋪滿數學舞台的鳥們有哪些特色？
☒ 不重疊 ☒ 無空隙 ☒ 外形都一樣

E092 兩隻鳥回饋單

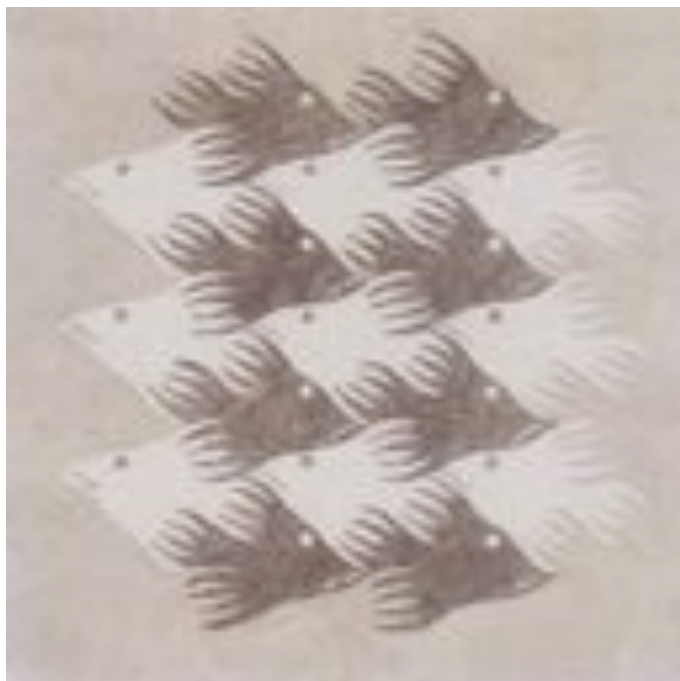
1. 根據你的經驗，下列哪一個地方最有可能用矩形密鋪？
☐ 人行道 ☒ 家裡客廳地板 ☐ 廟宇地板
2. 下圖，右邊的鳥和左邊的鳥是什麼樣的關係呢？
☒ 平移 ☐ 旋轉 ☐ 翻面
3. 兩隻鳥的表面積與其數學骨架矩形的面積是否一樣？
☒ 是 ☐ 否
4. 請你回頭仔細看兩隻鳥鑲嵌圖，算一算每一隻鳥周遭圍繞著幾隻鳥呢？
(相鄰才算，只接觸一點不算)
☐ 3隻 ☒ 4隻 ☐ 5隻 ☐ 6隻
5. 右下圖為艾薛爾的另一幅版畫《E084 鳥與魚》，這版畫也利用了矩形當作數學骨架，請參考左下圖所畫的數學骨架，在右下圖畫出正確的數學骨架，並用找到的數學骨架說明如何剪貼出鳥與魚。



E093 魚工作單

撰稿：李勁緯

引言：《E093 魚》是荷蘭版畫家艾薛爾在1954年2月的作品，每隻魚的身體為單一顏色——白色及灰色，主要繪圖工具為墨水及水彩。影片中的封面圖為艾薛爾在同年同月為當地電信局的一扇門設計的鑲板畫：



圖一

艾薛爾在魚版畫上寫下這麼一句話「contour figures one motif: III^B made for commissioned intarsia work, telephone building Amsterdam, same as 92 and 84」，說明這幅版畫創作原因是為了做門鑲版畫，和另外兩幅版畫《E092 鳥》和《E084 鳥與魚》有相同的創作緣由。讓我們一起觀賞魚的影片吧！

請在電腦上點選《E093 魚.exe》進入影片的首頁，並按左上角的Q版圖開始撥放。

一、魚的數學與藝術

我們可以把魚的影片分成如下的四幕：

第一幕：影片由四邊形鋪滿構成數學舞台拉開序幕，而這四邊形正是魚的數學骨架。

第二幕：將數學舞台的一個四邊形放大，從這四邊形剪下四小塊後，依數學原理的旋轉貼到正確的位置，即裁貼出魚。

第三幕：將魚外框的內部著上顏色成為藝術品並進行藝術表演，表演過程依各種適當角度將表演的魚們互相密合。

第四幕：銜接第一幕的數學舞台並留下數學骨架的虛線邊，將魚一隻一隻放到數學骨架上的正確位置進而鋪滿數學舞台，而這種不互相重疊、無空隙、

反覆且連續的鋪滿稱作鑲嵌或密鋪。

1. 第一幕的數學骨架是哪一個多邊形呢？

☐ 三角形 ☐ 四邊形 ☐ 五邊形

2. 第二幕裁貼的過程中，用到了哪些數學方法？

☐ 平移 ☐ 旋轉 ☐ 翻面

3. 影片中有幾種顏色的魚？

☐ 兩種 ☐ 三種 ☐ 四種

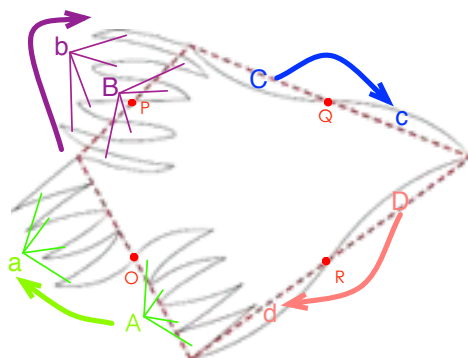
4. 鋪滿數學舞台的魚有哪些特色？

☐ 不重疊 ☐ 無空隙 ☐ 外形都一樣

二、如何從數學骨架裁貼出魚

綜合下面兩個方式即可裁貼出魚，方式如下：

甲、將四邊形剪下四個小區塊 A, B, C, D，並將這四個小區塊貼到正確的位置上，即 $A \rightarrow a$ ； $B \rightarrow b$ ； $C \rightarrow c$ ； $D \rightarrow d$



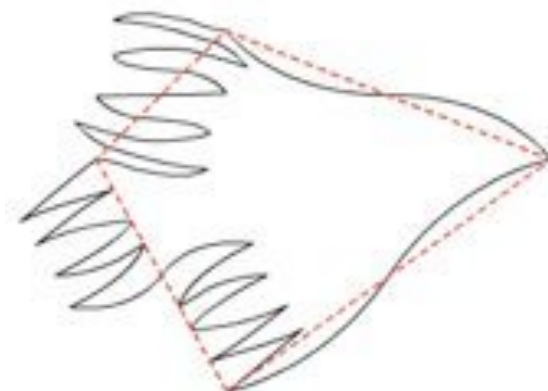
乙、如何貼到正確的位置呢？我們根據數學原理的旋轉：

(1) $A \rightarrow a$ ：將 A 區塊以 O 為旋轉點旋轉到 a

(2) $B \rightarrow b$ ：將 B 區塊以 P 為旋轉點旋轉到 b

(3) $C \rightarrow c$ ：將 C 區塊以 Q 為旋轉點旋轉到 c

(4) $D \rightarrow d$ ：將 D 區塊以 R 為旋轉點旋轉到 d



裁貼出魚後可以發現：四邊形的四個頂點分別在魚嘴、兩魚鰭尖端及尾鰭尾

端，這就是魚在數學骨架上的正確位置。

三、 真的是魚磁磚嗎

由藝術表演可以知道經過數學原理形成的魚磁磚可以互相密合，其密合方式有四種：

(1) 綠魚上鰭和紅魚下鰭的密合



(2) 綠魚尾巴和紅魚尾巴的密合



(3) 綠魚下巴和紅魚額頭的密合



(4) 紅魚嘴巴和綠魚上鰭的密合

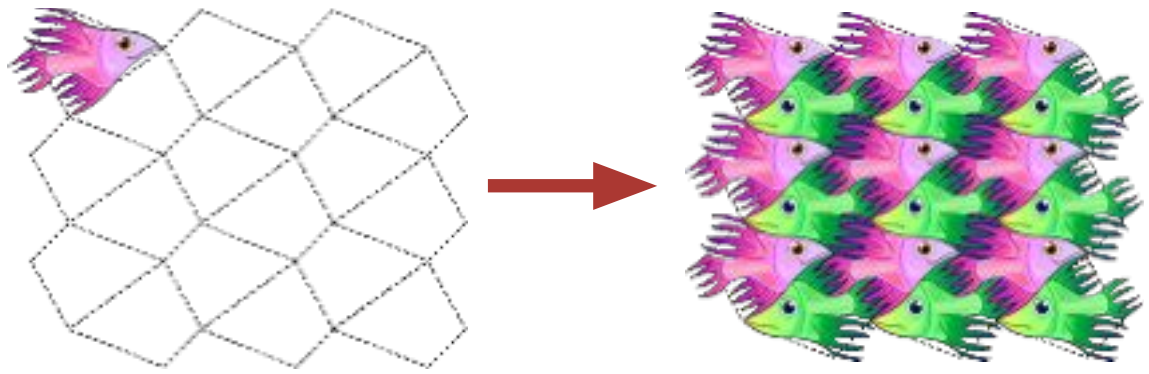


這種可以互相密合、無交疊且無空隙的魚圖案，我們稱之為魚磁磚。有了這四種密合方式後，就可以用這四種方式將很多隻魚磁磚密鋪在平面上了。

四、 魚的鑲嵌圖

魚鑲嵌圖

透過了解魚在數學骨架上的正確位置及四種密合方式後，即可在數學骨架上密鋪出魚鑲嵌圖，左下圖是先將魚放在數學骨架上的正確位置，其他的魚除了要放在數學骨架上的正確位置外，還須一一按照四種密合方式密鋪。



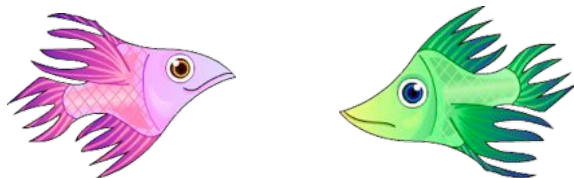
關於艾薛爾的魚版畫原圖，如下圖所示：



仔細看看魚版畫原圖上有淡淡的鉛筆標記，雖然魚版畫中看似有兩隻不同的魚，其實灰色魚是白色魚轉了180度後變成的，而原本的向下尾巴變成向上，再畫了不同位置的眼睛跟嘴巴，白色魚向右游、黑色魚向左游，各自游往不同的方向。

E093 魚回饋單

1. 魚的四邊形數學骨架包含了幾隻魚？
2隻 ☐ 3隻 ☐ 4隻 ☐ 5隻
3. 魚的表面積與其數學骨架四邊形的面積是否一樣？
☐ 是 ☐ 否
4. 如下圖，左邊的魚和右邊的魚是什麼樣的關係呢？
☐ 平移 ☐ 旋轉 ☐ 翻面



5. 右下圖為艾薛爾的另一幅版畫《E090 魚》，這版畫也利用了四邊形當作數學骨架，請參考左下圖所畫的數學骨架，在右下圖畫出魚的四邊形數學骨架，並用找到的數學骨

架說明如何剪貼出魚。



6. 關於影片與本工作單的教材，你給予幾分(最多10分，最少0分)

10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

又有何建議：

.....

填單人姓名：_____

填單日期：____年____月____日

e-mail：

電話：

☐ 老師

☐ 學生

☐ 社會人士

學校 _____

班級 _____

E093 魚工作單

1. 第一幕的數學骨架是哪一個多邊形呢？
☐ 三角形 ☒ 四邊形 ☐ 五邊形
2. 第二幕裁貼的過程中，用到了哪些數學方法？
☐ 平移 ☒ 旋轉 ☐ 翻面
3. 影片中有幾種顏色的魚？
☒ 兩種 ☐ 三種 ☐ 四種
4. 鋪滿數學舞台的魚們有哪些特色？
☒ 不重疊 ☒ 無空隙 ☒ 外形都一樣

E093 魚回饋單

1. 魚的四邊形數學骨架包含了幾隻魚？
1隻
2. 請你回想一下，每一隻魚周遭圍繞著幾隻魚呢？
☐ 2隻 ☐ 3隻 ☒ 4隻 ☐ 5隻
3. 魚的表面積與其數學骨架四邊形的面積是否一樣？
☒ 是 ☐ 否
4. 如下圖，左邊的魚和右邊的魚是什麼樣的關係呢？
☐ 平移 ☒ 旋轉 ☐ 翻面
5. 右下圖為艾薛爾的另一幅版畫《E090 魚》，這版畫也利用了四邊形當作數學骨架，請參考左下圖所畫的數學骨架，在右下圖畫出魚的四邊形數學骨架，並用找到的數學骨架說明如何剪貼出魚。



E104 蜥蜴工作單

撰稿：李勁緯

引言：《E104 蜥蜴》是荷蘭版畫家艾薛爾在1959年5月畫的一幅版畫，每隻蜥蜴的身體為單一顏色——白色及黑色，以墨水為主要繪圖工具，而我們影片裡的封面圖（圖一）：



圖一



圖二

是1959年6月艾薛爾為荷蘭的一間學校 Nieuwe Meisjesschool（現為 Johanna Westermanschool）設計直徑34公分高300公分的磁磚柱。圖二為艾薛爾的另一幅版畫《E015 蜥蜴》，艾薛爾在蜥蜴版畫上寫下這麼一句話「System IX^D variant of 15」，說明《E104 蜥蜴》是由《E015 蜥蜴》變形而來的。觀察《E015 蜥蜴》，他們有著相同的拼合方式。再觀察圖一，艾薛爾為了方便燒製以及拼貼磁磚，設計每一塊磁磚為正方形，但這個正方形磁磚跟他原先設計的骨架有所不同，磁磚裡面包含了一隻白蜥蜴及一隻黑蜥蜴，究竟他這樣設計有什麼好處呢？讓我們繼續看下去就知道了！

請在電腦上點選《E104 蜥蜴.exe》，並仔細觀賞影片。

一、蜥蜴的數學與藝術

我們可以把蜥蜴的影片分成如下的四幕：

第一幕：影片由正方形鋪滿構成數學舞台拉開序幕，而這正方形正是蜥蜴的數學骨架。

第二幕：將數學舞台的一個正方形放大，從這正方形剪下六小塊後，依數學原理的旋轉貼到正確的位置，即裁貼出蜥蜴。

第三幕：將蜥蜴外框的內部著上顏色成為藝術品並進行藝術表演，表演過程依各種適當角度將表演的蜥蜴們互相密合。

第四幕：銜接第一幕的數學舞台並留下數學骨架的虛線邊，將蜥蜴一隻一隻放到數學骨架上的正確位置進而鋪滿數學舞台，而這種不互相重疊、無空隙、反覆且連續的鋪滿就是所謂的鑲嵌或密鋪。

1. 第一幕的數學骨架是哪一個多邊形呢？

☐ 正三角形 ☐ 正方形 ☐ 正六邊形

2. 第二幕裁貼的過程中，用到了哪些數學方法？

☐ 平移 ☐ 旋轉 ☐ 翻面

3. 影片中有幾種顏色的蜥蜴？

☐ 兩種 ☐ 三種 ☐ 四種

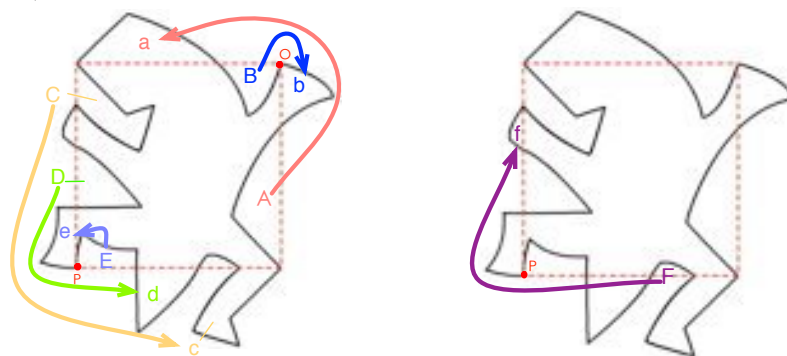
4. 鋪滿數學舞台的蜥蜴們有哪些特色？

☐ 不重疊 ☐ 無空隙 ☐ 外形都一樣

二、如何從數學骨架裁貼出蜥蜴

綜合下面兩個方式即可裁貼出蜥蜴，方式如下：

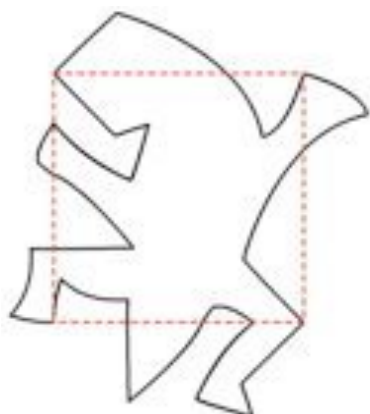
甲、將正方形剪下六個小區塊 A, B, C, D, E, F 並將這六個小區塊貼到正確的位置上，即 $A \rightarrow a$; $B \rightarrow b$; $C \rightarrow c$; $D \rightarrow d$; $E \rightarrow e$; $F \rightarrow f$



乙、如何貼到正確的位置呢？我們根據數學原理的旋轉：

- (1) $A \rightarrow a$ ：將 A 區塊以 O 點為旋轉點旋轉到 a
- (2) $B \rightarrow b$ ：將 B 區塊以 O 點為旋轉點旋轉到 b
- (3) $C \rightarrow c$ ：將 C 區塊以 P 點為旋轉點旋轉到 c
- (4) $D \rightarrow d$ ：將 D 區塊以 P 點為旋轉點旋轉到 d
- (5) $E \rightarrow e$ ：將 E 區塊以 P 點為旋轉點旋轉到 e
- (6) $F \rightarrow f$ ：將 F 區塊以 P 點為旋轉點旋轉到 f

裁貼後的蜥蜴如下圖：



由上圖可以發現：正方形的四個頂點分別在蜥蜴的嘴巴、右手、右膝蓋及左腳跟，這就是蜥蜴在數學骨架上的正確位置。

三、真的是蜥蜴磁磚嗎

由藝術表演可以知道經過數學原理形成的蜥蜴磁磚可以互相密合，其密合方式有兩種：

(1) 頭與手的密合



(2) 尾巴與手的密合

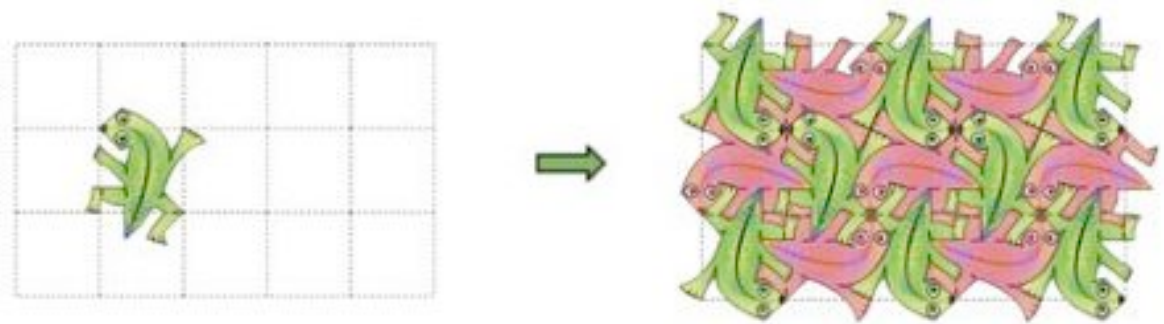


有了這兩種密合方式，就可以將蜥蜴密鋪在平面上了。

四、蜥蜴的鑲嵌圖

甲、蜥蜴鑲嵌圖

透過了解蜥蜴在數學骨架上的正確位置及兩種密合方式後，即可在數學骨架上密鋪出蜥蜴鑲嵌圖，左下圖是先將蜥蜴放在數學骨架上的正確位置，其他蜥蜴除了要放在數學骨架上的正確位置外，還須一一按照兩種密合方式密鋪，如圖一。



關於《E104 蜥蜴》原圖，如下圖：



比較我們影片裡的封面圖跟版畫的原圖，各位有沒有發現蜥蜴頭的方向不一樣了呢？如果你把紙轉 45 度，方向就會一樣了！如同我們引言所說的，為了只做一種磁磚模型和配合柱子的設計，艾薛爾把原本設計的圖轉了 45 度，找了一個比原先設計還要大的正方形，並以大正方形四個邊的中點當旋

轉點，轉 180 度就可以鋪滿整個平面，而這個大正方形就是“兩隻蜥蜴”的數學骨架！

乙、蜥蜴拼圖遊戲

看到這裡是否對蜥蜴鑲嵌有了更進一步的了解，下面是為大家精心準備好玩且有趣又可愛的蜥蜴拼圖遊戲，請再仔細觀察圖一蜥蜴的排列方式，遊戲開始囉！

請在電腦上點選《E104 蜥蜴拼圖.exe》進入遊戲。

E104 蜥蜴回饋單

1. 仔細想想，你在那個地方見過正方形磁磚鋪設的地板？
2. 請你回想一下，每一隻蜥蜴周遭圍繞著幾隻蜥蜴呢？(相鄰才算，只接觸一點不算)
☐ 3隻 ☐ 4隻 ☐ 5隻 ☐ 6隻
3. 蜥蜴的表面積與其數學骨架正方形的面積是否一樣？
☐ 是 ☐ 否
4. 請參考下列右圖並判斷左圖的蜥蜴是右邊蜥蜴旋轉幾度後的結果呢？



5. 右下圖為艾薛爾的另一幅版畫《E023 鳥》，這版畫也利用了相同的拼合方式，請參考左下圖所畫的數學骨架，在右下圖畫出正確的數學骨架，並用找到的數學骨架說明如何剪貼出鳥。



6. 關於影片(含拼圖遊戲)與本工作單的教材，你給予幾分(最多10分，最少0分)

10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

又有何建議：

.....

填單人姓名：_____

填單日期：____年____月____日

e-mail：

電話：

☐ 老師

☐ 學生

☐ 社會人士

學校 _____

班級 _____

E104 蜥蜴工作單：

1. 第一幕的數學骨架是哪一個多邊形呢？
正三角形 ☒ 正方形 ☐ 正六邊形
2. 第二幕裁貼的過程中，用到了哪些數學方法？
平移 ☒ 旋轉 ☐ 翻面 ☐
3. 影片中有幾種顏色的蜥蜴？
☒ 兩種 ☐ 三種 ☐ 四種
4. 鋪滿數學舞台的蜥蜴們有哪些特色？
☒ 不重疊 ☒ 無空隙 ☒ 外形都一樣

E104 蜥蜴回饋單：

1. 仔細想想，你在那個地方見過正方形磁磚鋪設的地板？
2. 請你回想一下，每一隻蜥蜴周遭圍繞著幾隻蜥蜴呢？(相鄰才算，只接觸一點不算)
3隻 ☒ 4隻 ☐ 5隻 ☐ 6隻
3. 蜥蜴的表面積與其數學骨架正方形的面積是否一樣？
☒ 是 ☐ 否
4. 請參考下列右圖並判斷左圖的蜥蜴是左邊蜥蜴旋轉幾度後的結果呢？



5. 右下圖為艾薛爾的另一幅版畫《E023 鳥》，這版畫也利用了相同的拼合方式，請參考左下圖所畫的數學骨架，在右下圖畫出正確的數學骨架，並用找到的數學骨架說明如何剪貼出蜥蜴。



E108 鳥工作單

撰稿：李勁緯

引言：《E108 鳥》是荷蘭版畫家艾薛爾在1961年1月畫的一幅版畫，每隻鳥的身體為單一顏色——白色及墨綠色，主要繪圖工具為墨水與水彩，在我們影片中的封面圖是由鳥版畫經由影像軟體編輯所成的一幅作品：



圖中紅色的鳥與黃色的鳥規則地鋪滿在平面上，紅黃相間，觀察一個直行中，黃色鳥與紅色鳥是上、下平移的關係，直行與直行間鳥的關係是上下翻面，這就是《E108 鳥》的密鋪方式，是不是覺得非常有趣呢？現在就讓我們來欣賞可愛的《E108 鳥》是如何誕生的吧！

請在電腦上點選《E108 鳥.exe》進入影片的首頁，並按左上角的Q版圖開始撥放。

一、鳥的數學與藝術

我們可以把鳥的影片分成如下的四幕：

第一幕：影片由平行四邊形鋪滿構成數學舞台拉開序幕，而這平行四邊形正是鳥的數學骨架。

第二幕：將數學舞台的一個平行四邊形放大，從這平行四邊形剪下五小塊後，依數學原理的平移及翻面貼到正確的位置，即裁貼出鳥。

第三幕：將鳥外框的內部著上顏色成為藝術品並進行藝術表演，表演過程依各種適當角度將表演的鳥們互相密合。

第四幕：銜接第一幕的數學舞台並留下數學骨架的虛線邊，將鳥一隻一隻放到數學骨架上的正確位置進而鋪滿數學舞台，而這種不互相重疊、無空隙、反覆且連續的鋪滿稱作鑲嵌或密鋪。

1. 第一幕的數學骨架是哪一個多邊形呢？

☐ 正方形

☐ 平行四邊形

☐ 矩形

2. 第二幕裁貼的過程中，用到了哪些數學方法？

☐ 平移 ☐ 旋轉 ☐ 翻面

3. 影片中有幾種顏色的鳥？

☐ 兩種 ☐ 三種 ☐ 四種

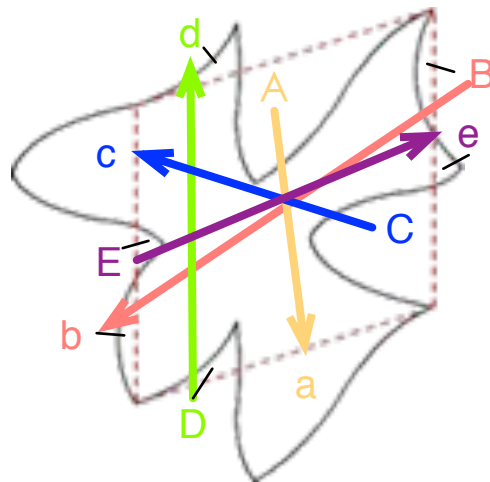
4. 鋪滿數學舞台的鳥們有哪些特色？

☐ 不重疊 ☐ 無空隙 ☐ 外形都一樣

二、如何從數學骨架裁貼出鳥

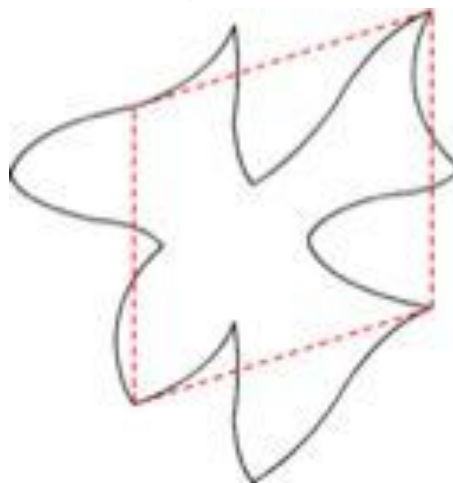
綜合下面兩個方式即可裁貼出鳥，方式如下：

甲、將平行四邊形剪下五個小區塊 A, B, C, D, E，並將這五個小區塊貼到正確的位置上，即 $A \rightarrow a$ ； $B \rightarrow b$ ； $C \rightarrow c$ ； $D \rightarrow d$ ； $E \rightarrow e$



乙、如何貼到正確的位置呢？我們根據數學原理的平移與翻面：

- (1) $A \rightarrow a$ ：先將 A 區塊往下平移到 a
- (2) $B \rightarrow b$ ：先將 B 區塊往左下平移再翻面貼到 b
- (3) $C \rightarrow c$ ：先將 C 區塊往左上平移再翻面貼到 c
- (4) $D \rightarrow d$ ：將 D 區塊往上平移到 d
- (5) $E \rightarrow e$ ：先將 E 區塊往右上平移再翻面貼到 e



裁貼出鳥後可以發現：平行四邊形的兩個頂點分別在鳥的嘴巴、翅膀的兩點及尾巴，這就是鳥在數學骨架上的正確位置。

三、 真的是鳥磁磚嗎

經由數學原理裁貼後的鳥有什麼令人驚艷的地方呢？我們可以由第三幕的藝術表演觀察到經數學原理形成的鳥可以彼此互相密合，有以下兩種密合方式：

(1) 翅膀與翅膀的密合

(2) 臉與尾巴的密合

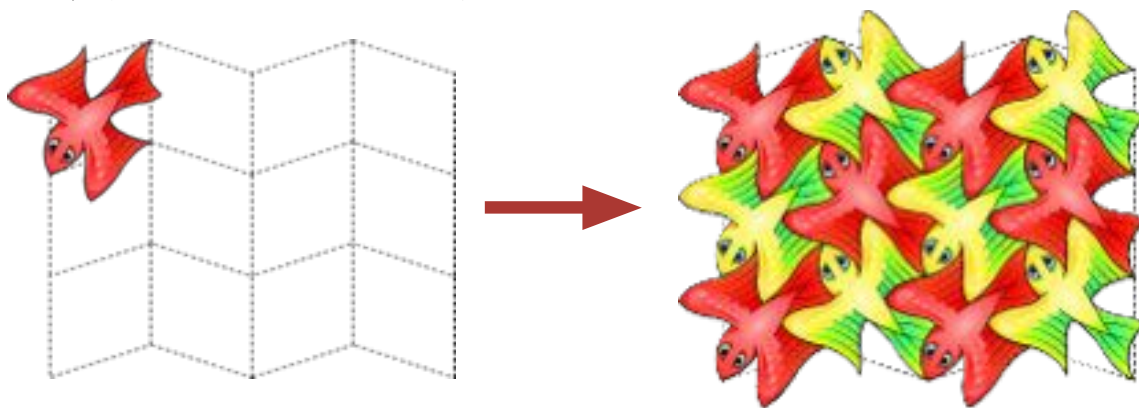


這種可以互相密合、無交疊且無空隙的鳥圖案，我們稱之為鳥磁磚。有了這兩種密合方式後，就可以用這兩種方式將很多隻鳥磁磚密鋪在平面上了。

四、 鳥的鑲嵌圖

鳥鑲嵌圖

透過了解鳥在數學骨架上的正確位置及兩種密合方式後，即可在數學骨架上密鋪出鳥鑲嵌圖，左下圖是先將鳥放在數學骨架上的正確位置，其他的鳥除了要放在數學骨架上的正確位置外，還須一一按照兩種密合方式密鋪。



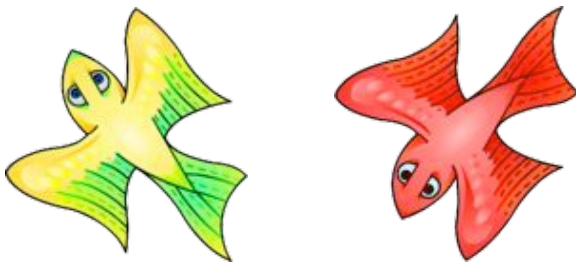
關於《E108 鳥》原圖，如下圖：



仔細觀察圖中，發現十分清楚的正方形格子，這格子正是艾薛爾所描出的正方形骨架，而我們影片中的骨架是平行四邊形，而這幅版畫《E108 鳥》是艾薛爾第一次為這種密鋪方式設計的正方形骨架。

E108 鳥回饋單

1. 仔細想想，你在那個地方見過用平行四邊形磁磚鋪設的地板？
2. 請你回想一下，每一隻鳥周遭圍繞著幾隻鳥呢？（相鄰才算，只交一點不算）
☐ 2隻 ☐ 3隻 ☐ 4隻 ☐ 5隻
3. 鳥的表面積與其數學骨架平行四邊形的表面積是否一樣？
☐ 是 ☐ 否
4. 如下圖，上面的鳥和下面的鳥是什麼樣的關係呢？
☐ 平移 ☐ 旋轉 ☐ 翻面



5. 右下圖為艾薛爾的另一幅版畫《E109 爬行動物》，這版畫也利用了平行四邊形當作數學骨架，請參考左下圖所畫的數學骨架，在右下圖畫出正確的數學骨架，並用找到的數學骨架說明如何剪貼出爬行動物。



6. 關於影片與本工作單的教材，你給予幾分(最多10分，最少0分)

10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

又有何建議：

.....

填單人姓名：_____

填單日期：____年____月____日

e-mail：

電話：

☐ 老師

☐ 學生

☐ 社會人士

學校 _____

班級

E108 鳥工作單

1. 第一幕的數學骨架是哪一個多邊形呢？
☐ 正方形 ☒ 平行四邊形 ☐ 矩形
2. 第二幕裁貼的過程中，用到了哪些數學方法？
☒ 平移 ☐ 旋轉 ☒ 翻面
3. 影片中有幾種顏色的鳥？
☒ 兩種 ☐ 三種 ☐ 四種
4. 鋪滿數學舞台的鳥們有哪些特色？
☒ 不重疊 ☒ 無空隙 ☒ 外形都一樣

E108 鳥回饋單

1. 仔細想想，你在那個地方見過用平行四邊形磁磚鋪設的地板？
2. 請你回想一下，每一隻鳥周遭圍繞著幾隻鳥呢？（相鄰才算，只交一點不算）
☐ 2隻 ☐ 3隻 ☒ 4隻 ☐ 5隻
3. 鳥的表面積與其數學骨架平行四邊形的表面積是否一樣？
☒ 是 ☐ 否
4. 如下圖，上面的鳥和下面的鳥是什麼樣的關係呢？
☐ 平移 ☐ 旋轉 ☒ 翻面
5. 右下圖為艾薛爾的另一幅版畫《E109 爬行動物》，這版畫也利用了平行四邊形當作數學骨架，請參考左下圖所畫的數學骨架，在右下圖畫出正確的數學骨架，並用找到的數學骨架說明如何剪貼出爬行動物。



E116 魚工作單

撰稿：李勁緯

引言：《E116 魚》是荷蘭版畫家艾薛爾在1963年3月的作品，每隻魚的身體為單一顏色——藍色及黃色，以墨水與水彩創作而成。在我們影片中的封面圖是由魚版畫經由影像軟體編輯所成的一幅作品：



《E116 魚》為艾薛爾為一位結晶學教授麥吉利夫雷（Carolina H. MacGillavry）用這樣的拼合方式所畫的一幅版畫，這位麥吉利夫雷教授為了寫她在1965年的一本書《艾薛爾繪畫中的週期性（Symmetry aspects of M. C. Escher's Periodic Drawings）》，而這幅畫是這種拼合方式中在視覺上比較容易分析的。

請在電腦上點選《E116 魚.exe》進入影片的首頁，並按左上角的Q版圖開始撥放。

一、魚的數學與藝術

我們可以把魚的影片分成如下的四幕：

第一幕：影片由鳶形鋪滿構成數學舞台拉開序幕，而這鳶形正是魚的數學骨架。

第二幕：將數學舞台的一個鳶形放大，從這鳶形剪下四小塊後，依數學原理的平移及翻面貼到正確的位置，即裁貼出魚。

第三幕：將魚外框的內部著上顏色成為藝術品並進行藝術表演，表演過程依各種適當角度將表演的鳥與魚們互相密合。

第四幕：銜接第一幕的數學舞台並留下數學骨架的虛線邊，將魚一隻一隻放到數學骨架上的正確位置進而鋪滿數學舞台，而這種不互相重疊、無空隙、反覆且連續的鋪滿稱作鑲嵌或密鋪。

1. 第一幕的數學骨架是哪一個多邊形呢？

☐ 正方形 ☐ 鳶形 ☐ 矩形

2. 第二幕裁貼的過程中，用到了哪些數學方法？

☐ 平移 ☐ 旋轉 ☐ 翻面

3. 影片中有幾種顏色的魚？

☐ 兩種 ☐ 三種 ☐ 四種

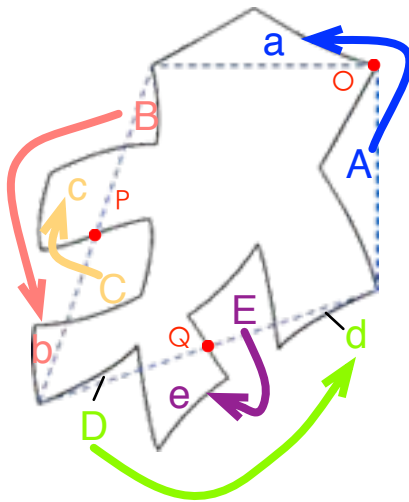
4. 鋪滿數學舞台的魚有哪些特色？

☐ 不重疊 ☐ 無空隙 ☐ 外形都一樣

二、如何從數學骨架裁貼出魚

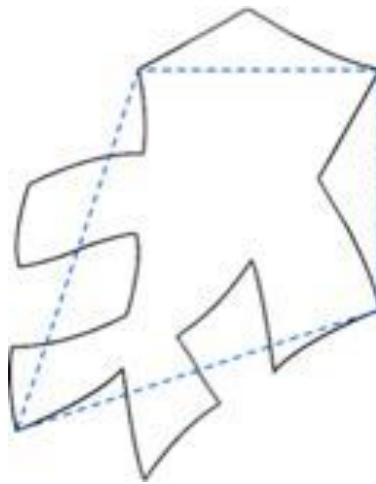
綜合下面兩個方式即可裁貼出魚，方式如下：

甲、將鳶形剪下五個小區塊 A, B, C, D, E，並將這五個小區塊貼到正確的位置上，即 $A \rightarrow a$ ； $B \rightarrow b$ ； $C \rightarrow c$ ； $D \rightarrow d$ ； $E \rightarrow e$



乙、如何貼到正確的位置呢？我們根據數學原理的旋轉：

- (1) $A \rightarrow a$ ：先將 A 區塊以 O 為旋轉點旋轉再翻面貼到 a
- (2) $B \rightarrow b$ ：將 B 區塊以 P 為旋轉點旋轉到 b
- (3) $C \rightarrow c$ ：將 C 區塊以 P 為旋轉點旋轉到 c
- (4) $D \rightarrow d$ ：將 D 區塊以 Q 為旋轉點旋轉到 d
- (5) $E \rightarrow e$ ：將 E 區塊以 Q 為旋轉點旋轉到 e



裁貼出魚後可以發現：鳶形的四個頂點分別為魚左、右臉頰、魚右鰭尖端及尾鰭尾端，這就是魚在數學骨架上的正確位置。

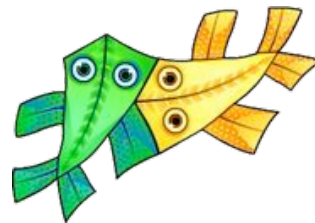
三、 真的是魚磁磚嗎

經由數學原理裁貼後的魚有什麼令人驚艷的地方呢？我們可以由第三幕的藝術表演觀察到經數學原理形成的魚分別可以彼此互相密合，共有以下兩種密合方式；

(1) 鰭與鰭的密合



(2) 嘴與臉的密合

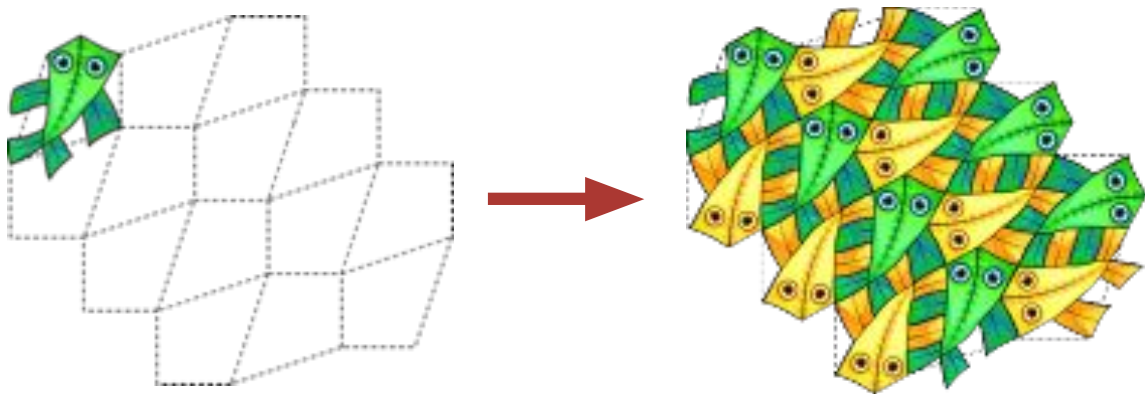


這種可以互相密合、無交疊且無空隙的魚圖案，我們稱之為魚磁磚。有了這兩種密合方式後，就可以用這兩種方式將很多隻魚磁磚密鋪在平面上了。

四、 魚的鑲嵌圖

魚鑲嵌圖

透過了解魚在數學骨架上的正確位置及兩種密合方式後，即可在數學骨架上密鋪出魚鑲嵌圖，左下圖是先將魚放在數學骨架上的正確位置，其他的魚除了要放在數學骨架上的正確位置外，還須一一按照兩種密合方式密鋪。



關於艾薛爾的魚版畫原圖，如下圖所示



在原圖中，同一個顏色和面對同一個方向的魚，沿著對角線方向排列得非常整齊，而這幅作品也被發佈在麥吉利夫雷教授的書《艾薛爾繪畫中的週期性》中。

E116 魚回饋單

1. 根據你的經驗，你比較常看到使用正方形還是鳶形磁磚密鋪？為什麼呢？

2. 請你回想一下，每一隻魚周遭圍繞著幾隻魚呢？

☐ 2隻 ☐ 3隻 ☐ 4隻 ☐ 5隻

3. 魚的表面積與其數學骨架鳶形的面積是否一樣？

☐ 是 ☐ 否

4. 如下圖，左邊的魚和右邊的魚是什麼樣的關係呢？

☐ 平移 ☐ 旋轉 ☐ 翻面



5. 右下圖為艾薛爾的另一幅版畫《E055 美妙的魚》，這版畫也利用了鳶形當作數學骨架，請參考左下圖所畫的數學骨架，在右下圖畫出魚的鳶形數學骨架，並用找到的數學骨

架說明如何剪貼出魚。



6. 關於影片與本工作單的教材，你給予幾分(最多10分，最少0分)

10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

又有何建議：

.....

填單人姓名：_____

填單日期：____年____月____日

e-mail：

電話：

☐ 老師

☐ 學生

☐ 社會人士

學校 _____

班級

E116 魚工作單

1. 第一幕的數學骨架是哪一個多邊形呢？
☐ 正方形 ☒ 鳶形 ☐ 矩形
2. 第二幕裁貼的過程中，用到了哪些數學方法？
☒ 平移 ☒ 旋轉 ☐ 翻面
3. 影片中有幾種顏色的魚？
☒ 兩種 ☐ 三種 ☐ 四種
4. 鋪滿數學舞台的鳥與魚們有哪些特色？
☒ 不重疊 ☒ 無空隙 ☒ 外形都一樣

E116 魚回饋單

1. 根據你的經驗，你比較常看到使用正方形還是鳶形磁磚密鋪？你覺得為什麼呢？
2. 請你回想一下，每一隻魚周遭圍繞著幾隻魚呢？
☐ 2隻 ☐ 3隻 ☒ 4隻 ☐ 5隻
3. 魚的表面積與其數學骨架鳶形的面積是否一樣？
☒ 是 ☐ 否
4. 如下圖，上面的魚和下面的魚是什麼樣的關係呢？
☐ 平移 ☒ 旋轉 ☐ 翻面
5. 右下圖為艾薛爾的另一幅版畫《E055 美妙的魚》，這版畫也利用了鳶形當作數學骨架，請參考左下圖所畫的數學骨架，在右下圖畫出魚的鳶形數學骨架，並用找到的數學骨架說明如何剪貼出魚。



E118 蜥蜴工作單

撰稿：李勁緯

引言：《E118 蜥蜴》是荷蘭版畫大師艾薛爾於1963年4月繪製的版畫，以粉筆、墨水及水彩為主要繪畫材料，在我們影片中的封面圖是由蜥蜴版畫經由影像軟體編輯所成的一幅作品(圖一)：



圖一



圖二

這幅色彩繽紛的作品是由紅色、黑色、綠色及黃色-四種顏色的蜥蜴，整齊地排列在平面上，而圖二是艾薛爾的另一幅版畫《E035 蜥蜴》，艾薛爾在《E118 蜥蜴》上寫下這麼一句話：「system X^E , color variant of 35」，說明原本的《E118 蜥蜴》版畫是由《E035 蜥蜴》顏色變化而來的，原本最少只需要兩種顏色即可分辨相鄰的蜥蜴，在《E118 蜥蜴》中艾薛爾增加使用了四種顏色，完成了這幅美麗的作品，現在就讓我們來欣賞美麗的蜥蜴吧！

請在電腦上點選《E118 蜥蜴.exe》進入影片的首頁，並按左上角的Q版圖開始撥放。

一、蜥蜴的數學與藝術

我們可以把蜥蜴的影片分成如下的四幕：

第一幕：影片由等腰直角三角形鋪滿構成數學舞台拉開序幕，這等腰直角三角形為蜥蜴的數學骨架。

第二幕：將數學舞台的一個等腰直角三角形放大，從這等腰直角三角形剪下六小塊後，依數學原理的旋轉貼到正確的位置，即裁貼出蜥蜴。

第三幕：將蜥蜴外框的內部著上顏色成為藝術品並進行藝術表演，表演過程依各種適當角度將表演的蜥蜴們互相密合。

第四幕：銜接第一幕的數學舞台並留下數學骨架的虛線邊，將蜥蜴一個一個放到數學骨架上的正確位置進而鋪滿數學舞台，而這種不互相重疊、無空隙、反覆且連續的鋪滿稱為鑲嵌或密鋪。

1. 第一幕的數學骨架是哪一種多邊形呢？

☐ 正方形 ☐ 等腰直角三角形 ☐ 正三角形

2. 第二幕裁貼的過程中，用到了哪些數學方法？

☐ 平移 ☐ 旋轉 ☐ 翻面

3. 影片中鋪滿平面的蜥蜴有幾種顏色？

☐ 兩種 ☐ 三種 ☐ 四種

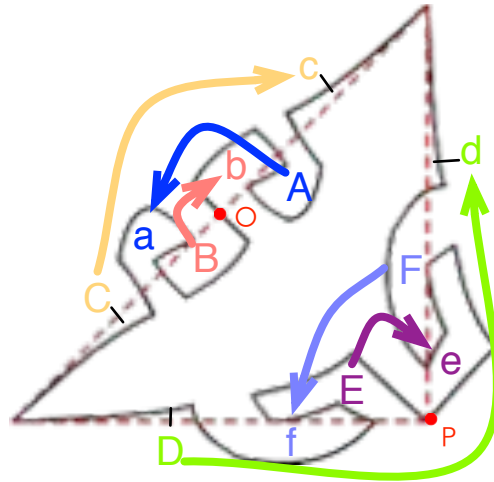
4. 鋪滿數學舞台的蜥蜴們有哪些特色？

☐ 不重疊 ☐ 無空隙 ☐ 外形都一樣

二、如何從數學骨架裁貼出蜥蜴

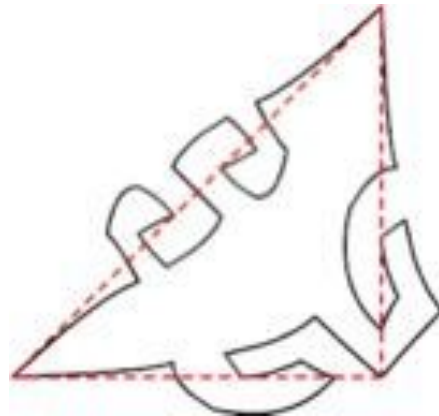
綜合下面兩個方式即可裁貼出蜥蜴，方式如下：

甲、將等腰直角三角形剪下六個小區塊，並將這六個小區塊貼到正確的位置上，
即 $A \rightarrow a$; $B \rightarrow b$; $C \rightarrow c$; $D \rightarrow d$; $E \rightarrow e$; $F \rightarrow f$



乙、如何貼到正確的位置呢？我們根據數學原理的旋轉：

- (1) $A \rightarrow a$: 將 A 區塊以點 O 為旋轉點旋轉到 a
- (2) $B \rightarrow b$: 將 B 區塊以點 O 為旋轉點旋轉到 b
- (3) $C \rightarrow c$: 將 C 區塊以點 O 為旋轉點旋轉到 c
- (4) $D \rightarrow d$: 將 D 區塊以頂點 P 為旋轉點旋轉到 d
- (5) $E \rightarrow e$: 將 E 區塊以頂點 P 為旋轉點旋轉到 e
- (6) $F \rightarrow f$: 將 F 區塊以頂點 P 為旋轉點旋轉到 f



裁貼出蜥蜴後可以發現：等腰直角三角形中，三個頂點分別在蜥蜴的嘴巴、右手肘及尾巴端點，這就是蜥蜴在數學骨架上的正確位置。

三、 真的是蜥蜴磁磚嗎

由藝術表演可以知道經過數學原理形成的蜥蜴可以互相密合，其密合方式有兩種：

(1) 左手肘的密合



(2) 右手肘的密合

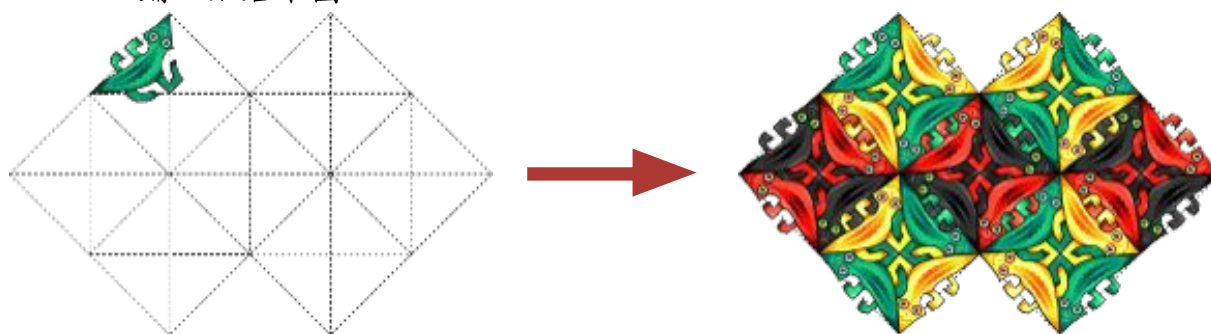


有了這兩種密合方式，就可以將蜥蜴密鋪在平面上了。

四、 蜥蜴的鑲嵌圖

甲、蜥蜴鑲嵌圖

透過了解蜥蜴在數學骨架上的正確位置及兩種密合方式後，即可在數學骨架上密鋪出蜥蜴鑲嵌圖，左下圖是先將蜥蜴放在數學骨架上的正確位置，其他蜥蜴除了要放在數學骨架上的正確位置外，還須一一按照三種密合方式密鋪，如右下圖。



圖一

關於艾薛爾的蜥蜴版畫原圖，如下圖所示：



仔細觀察同一種顏色的蜥蜴，會發現四隻相同顏色的蜥蜴，以頭接尾巴的方式，形成一個循環，艾薛爾這樣的設計凸顯了顏色對稱結構的美，使得整幅畫充滿了一個個四種顏色的色環，環環相扣在一起，看起來十分美麗！

請在電腦上點選《E118 蜥蜴拼圖.exe》進入拼圖的首頁，
並按左上角的Q版圖開始遊戲。

E118 蜥蜴回饋單

1. 請你回想一下，每一個蜥蜴周遭圍繞著幾個蜥蜴呢？
☐ 3個 ☐ 4個 ☐ 5個 ☐ 6個
2. 蜥蜴的表面積與其數學骨架等腰直角三角形的面積是否一樣？
☐ 是 ☐ 否
3. 數學骨架等腰直角三角形的內角有哪些角度？
☐ 45度 ☐ 60度 ☐ 90度 ☐ 120度
4. 請參考右下圖並判斷左下圖的右邊蜥蜴是左邊蜥蜴旋轉幾度後的結果呢？



5. 如左下圖，蜥蜴的數學骨架除了是等腰直角三角形外，正方形也是蜥蜴的數學骨架，請參考左下圖所畫的數學骨架，在右下圖畫出蜥蜴的正方形數學骨架，並用找到的數學骨架說明如何剪貼出蜥蜴。（提示：想想看一個等腰直角三角形要如何切割成正方形呢？）



6. 關於影片(含拼圖遊戲)與本工作單的教材，你給予幾分(最多10分，最少0分)

10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

又有何建議：

.....

填單人姓名：_____

填單日期：____年____月____日

e-mail：

電話：

☐ 老師

☐ 學生

☐ 社會人士

學校 _____

班級

E118 蜥蜴工作單

1. 第一幕的數學骨架是哪一個多邊形呢？
☐ 正方形 ☒ 等腰直角三角形 ☐ 正六邊形
2. 第二幕裁貼的過程中，用到了哪些數學方法？
☐ 平移 ☒ 旋轉 ☐ 翻面
3. 影片中鋪滿平面的蜥蜴有幾種顏色？
☐ 兩種 ☐ 三種 ☒ 四種
4. 鋪滿數學舞台的蜥蜴們有哪些特色？
☒ 不重疊 ☒ 無空隙 ☒ 外形都一樣

E118 蜥蜴回饋單

1. 請你回想一下，每一個蜥蜴周遭圍繞著幾個蜥蜴呢？
☒ 3個 ☐ 4個 ☐ 5個 ☐ 6個
2. 蜥蜴的表面積與其數學骨架等腰直角三角形的面積是否一樣？
☒ 是 ☐ 否
3. 數學骨架等腰直角三角形的內角有哪些角度？
☒ 45度 ☐ 60度 ☒ 90度 ☐ 120度
4. 請參考右下圖並判斷左下圖的右邊蜥蜴是左邊蜥蜴旋轉幾度後的結果呢？
180度
5. 如左下圖，蜥蜴的數學骨架除了是等腰直角三角形外，正方形也是蜥蜴的數學骨架，請參考左下圖所畫的數學骨架，在右下圖畫出蜥蜴的正方形數學骨架，並用找到的數學骨架說明如何剪貼出蜥蜴。（提示：想想看一個等腰直角三角形要如何切割成正方形呢？）



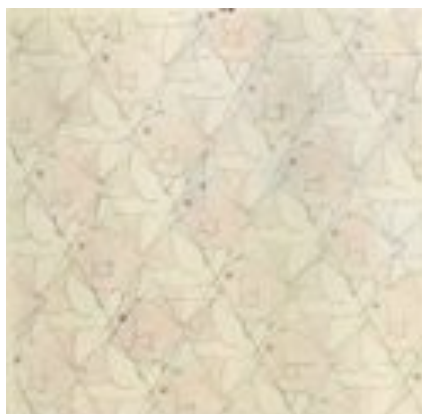
E120 魚與鳥工作單

撰稿：李勁緯

引言：《E120 魚與鳥》是荷蘭版畫家艾薛爾在1964年5月畫的一幅版畫，畫裡的鳥與魚，分別為黑色與黃色，主要繪圖工具為墨水及水彩，而我們影片裡的封面圖是由艾薛爾在1949年時設計的掛毯（圖一）：



圖一



圖二



圖三

仔細看看掛毯的上方，可以發現類似於這幅版畫《E120 魚與鳥》的輪廓形狀。而圖二及圖三分別為艾薛爾另兩幅版畫《E029 鳥與魚》及《E084 鳥與魚》，在《E120 魚與鳥》版畫上艾薛爾寫下這麼一句話「system I^c -I^c variant of no. 29 and 84」，道出《E120 魚與鳥》是《E029 鳥與魚》及《E084 鳥與魚》的變形。此外，《E084 鳥與魚》及《E120 魚與鳥》更有著相同的拼合方式，讓我們一起來觀賞魚與鳥的影片來一探究竟吧！

請在電腦上點選《E120 魚與鳥.exe》進入影片的首頁，並按左上角的Q版圖開始撥放。

一、魚與鳥的數學與藝術

我們可以把魚與鳥的影片分成如下的四幕：

第一幕：影片由矩形鋪滿構成數學舞台拉開序幕，而這矩形正是魚與鳥的數學骨架。

第二幕：將數學舞台的一個矩形放大，從這矩形剪下三個小塊後，依數學原理的平移貼到正確的位置，即裁貼出魚與鳥。

第三幕：將魚與鳥外框的內部著上顏色成為藝術品並進行藝術表演，表演過程依各種適當角度將表演的魚與鳥們互相密合。

第四幕：銜接第一幕的數學舞台並留下數學骨架的虛線邊，將魚與鳥一隻一隻放到數學骨架上的正確位置進而鋪滿數學舞台，而這種不互相重疊、無空隙、反覆且連續的鋪滿就是所謂的鑲嵌或密鋪。

1. 第一幕的數學骨架是哪一個多邊形呢？

☐ 正方形 ☐ 矩形 ☐ 梯形 ☐ 鳶形

2. 第二幕剪貼的過程中，用到了哪些數學方法？

☐ 平移 ☐ 旋轉 ☐ 翻面

3. 影片中有幾種顏色的魚與鳥？

☐ 兩種 ☐ 三種 ☐ 四種

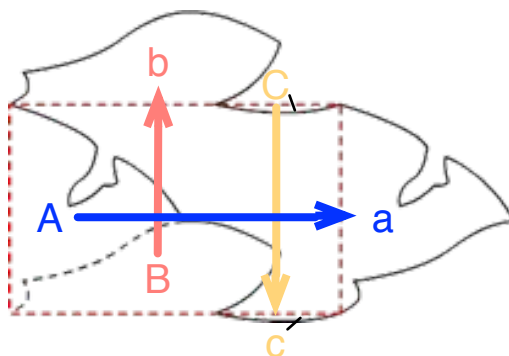
4. 鋪滿數學舞台的魚與鳥們有哪些特色？

☐ 不重疊 ☐ 無空隙 ☐ 外形都一樣

二、如何從數學骨架裁貼出魚與鳥

綜合下面兩個方式即可裁貼出魚與鳥，方式如下：

甲、將矩形剪下三個小區塊 A, B, C，並將這三個小區塊貼到正確的位置上，
即 $A \rightarrow a$ ； $B \rightarrow b$ ； $C \rightarrow c$



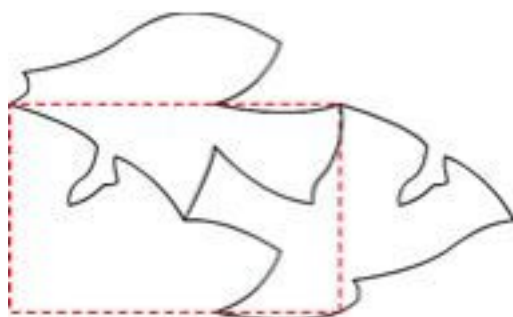
乙、如何貼到正確的位置呢？我們根據數學原理的平移：

(1) $A \rightarrow a$ ：將 A 區塊向右平移到 a

(2) $B \rightarrow b$ ：將 B 區塊向上平移到 b

(3) $C \rightarrow c$ ：將 C 區塊向下平移到 c

在矩形的數學骨架上經過巧妙的切割並透過平移的數學運作之後，栩栩如生的魚與鳥就誕生了，如下圖所示：

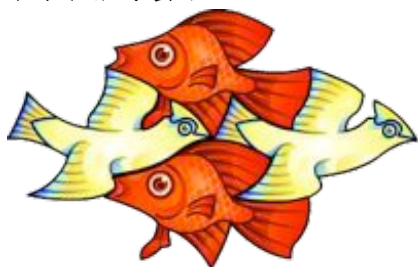


裁貼出魚與鳥後可以發現：矩形的三個頂點分別在魚的嘴巴、魚的尾巴和鳥翅膀的交接處及鳥下翅膀上的一點，這就是魚與鳥在數學骨架上的正確位置。

三、 真的是魚與鳥磁磚嗎

由藝術表演可以知道經過數學原理形成的魚與鳥磁磚可以互相密合，其密合方式有兩種：

(1) 鳥嘴和魚鰭的密合



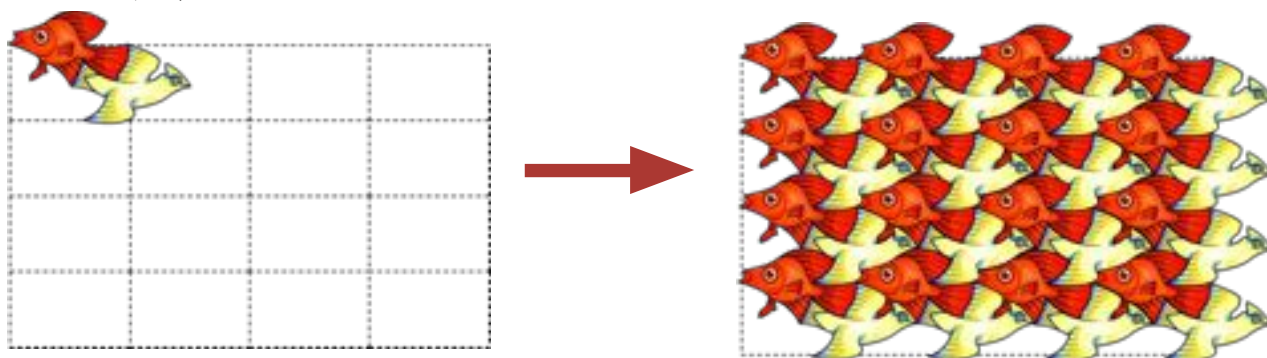
(2) 鳥翅膀和魚嘴的密合



有了這兩種密合方式，就可以將魚與鳥密鋪在平面上了。

四、 魚與鳥的鑲嵌圖

透過了解魚與鳥在數學骨架上的正確位置及兩種密合方式後，即可在數學骨架上密鋪出魚與鳥鑲嵌圖，左下圖是先將魚與鳥放在數學骨架上的正確位置，其他魚與鳥除了要放在數學骨架上的正確位置外，還須一一按照兩種密合方式密鋪，如右下圖。



關於《E120 魚與鳥》原圖，如下圖：



在原圖右下角，有一個白色的區塊，在黑色鳥的嘴巴有四個點，將這四點連線便是這魚與鳥的矩形數學骨架，而在黃色魚的嘴巴也有四個點，也將這四個點連線也是這魚與鳥的矩形數學骨架，代表可以找到不同的數學骨架，數學骨架不唯一，而且這兩個矩形的面積一樣。

E120 魚與鳥回饋單

1. 根據你的經驗，下列哪一個地方最有可能用矩形密鋪？

☐ 人行道 ☐ 家裡客廳地板 ☐ 廟宇地板

2. 如下圖，右邊鳥是左邊鳥是什麼樣的關係呢？

☐ 平移 ☐ 旋轉 ☐ 翻面



3. 魚與鳥的表面積與其數學骨架矩形的面積是否一樣？

☐ 是 ☐ 否

4. 請你回頭仔細看魚與鳥鑲嵌圖，算一算每一隻魚周遭圍繞著幾隻鳥呢？

(相鄰才算，只接觸一點不算)

☐ 3隻 ☐ 4隻 ☐ 5隻 ☐ 6隻

5. 右下圖為艾薛爾的另一幅版畫《E084 鳥與魚》，這版畫也利用了矩形當作數學骨架，請參考左下圖所畫的數學骨架，在右下圖畫出正確的數學骨架，並用找到的數學骨架說明如何剪貼出鳥與魚。



6. 關於影片與本工作單的教材，你給予幾分(最多10分，最少0分)

10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

又有何建議：

.....

填單人姓名：_____

填單日期：____年____月____日

e-mail：

電話：

☐ 老師

☐ 學生

☐ 社會人士

學校 _____

班級 _____

E120 魚與鳥工作單

1. 第一幕的數學骨架是哪一個多邊形呢？
☐ 正方形 ☒ 矩形 ☐ 梯形 ☐ 鳶形
2. 第二幕剪貼的過程中，用到了哪些數學方法？
☒ 平移 ☐ 旋轉 ☐ 翻面
3. 影片中有幾種顏色的魚與鳥？
☒ 兩種 ☐ 三種 ☐ 四種
4. 鋪滿數學舞台的魚與鳥們有哪些特色？
☒ 不重疊 ☒ 無空隙 ☒ 外形都一樣

E120 魚與鳥回饋單

1. 根據你的經驗，下列哪一個地方最有可能用矩形密鋪？
☐ 人行道 ☒ 家裡客廳地板 ☐ 廟宇地板
2. 如下圖，右邊鳥是左邊鳥是什麼樣的關係呢？
☐ 平移 ☐ 旋轉 ☐ 翻面
3. 魚與鳥的表面積與其數學骨架矩形的面積是否一樣？
☒ 是 ☐ 否
4. 請你回頭仔細看魚與鳥鑲嵌圖，算一算每一隻魚周遭圍繞著幾隻鳥呢？
(相鄰才算，只接觸一點不算)
☐ 3隻 ☒ 4隻 ☐ 5隻 ☐ 6隻
5. 右下圖為艾薛爾的另一幅版畫《E084 鳥與魚》，這版畫也利用了矩形當作數學骨架，請參考左下圖所畫的數學骨架，在右下圖畫出正確的數學骨架，並用找到的數學骨架說明如何剪貼出鳥與魚。



E121 魚與鳥工作單

撰稿：李勁緯

引言：《E121 魚與鳥》是荷蘭版畫家艾薛爾在1964年5月畫的一幅版畫，畫裡的鳥與魚，分別為黑色與黃色，主要繪圖工具為墨水及水彩，而我們影片裡的封面圖是由艾薛爾在1949年時設計的掛毯（圖一）：



圖一

觀察掛毯的下方，可以看到和這幅版畫《E121 魚與鳥》類似的輪廓，而圖二為艾薛爾的另一幅版畫《E120 魚與鳥》，和《E121 魚與鳥》一同創作在同一塊版子上。艾薛爾在兩幅版畫上都寫下這樣一句話：「system I^c -I^c」，說明了這兩幅版畫都使用相同的拼合方式。

請在電腦上點選《E121 魚與鳥.exe》進入影片的首頁，並按左上角的Q版圖開始撥放。

一、魚與鳥的數學與藝術

我們可以把魚與鳥的影片分成如下的四幕：

第一幕：影片由矩形鋪滿構成數學舞台拉開序幕，而這矩形正是魚與鳥的數學骨架。

第二幕：將數學舞台的一個矩形放大，從這矩形剪下三個小塊後，依數學原理的平移貼到正確的位置，即裁貼出魚與鳥。

第三幕：將魚與鳥外框的內部著上顏色成為藝術品並進行藝術表演，表演過程依各種適當角度將表演的魚與鳥們互相密合。

第四幕：銜接第一幕的數學舞台並留下數學骨架的虛線邊，將魚與鳥一隻一隻放

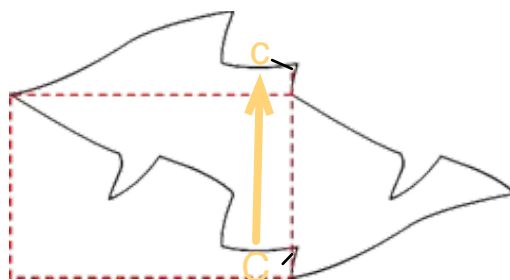
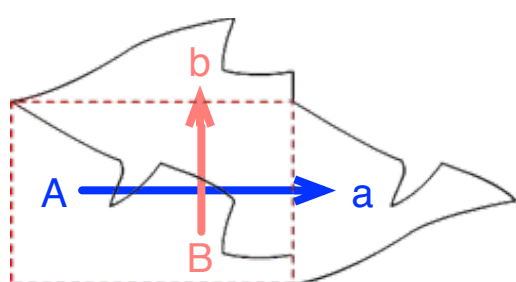
到數學骨架上的正確位置進而鋪滿數學舞台，而這種不互相重疊、無空隙、反覆且連續的鋪滿就是所謂的鑲嵌或密鋪。

1. 第一幕的數學骨架是哪一個多邊形呢？
☐ 正方形 ☐ 矩形 ☐ 梯形 ☐ 鳶形
2. 第二幕剪貼的過程中，用到了哪些數學方法？
☐ 平移 ☐ 旋轉 ☐ 翻面
3. 影片中有幾種顏色的魚與鳥？
☐ 兩種 ☐ 三種 ☐ 四種
4. 鋪滿數學舞台的魚與鳥們有哪些特色？
☐ 不重疊 ☐ 無空隙 ☐ 外形都一樣

二、如何從數學骨架裁貼出魚與鳥

綜合下面兩個方式即可裁貼出魚與鳥，方式如下：

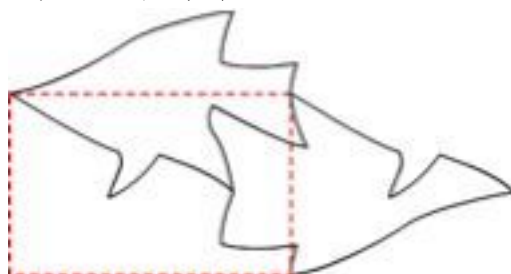
甲、將矩形剪下三個小區塊 A, B, C，並將這三個小區塊貼到正確的位置上，
即 $A \rightarrow a$ ； $B \rightarrow b$ ； $C \rightarrow c$



乙、如何貼到正確的位置呢？我們根據數學原理的平移：

- (1) $A \rightarrow a$ ：將 A 區塊向右平移到 a
- (2) $B \rightarrow b$ ：將 B 區塊向上平移到 b
- (3) $C \rightarrow c$ ：將 C 區塊向上平移到 c

在矩形的數學骨架上經過巧妙的切割並透過平移的數學運作之後，栩栩如生的魚與鳥就誕生了，如下圖所示：



裁貼出魚與鳥後可以發現：矩形的三個頂點分別在魚的嘴巴、魚的尾巴的一點和鳥下翅膀上的一點，這就是魚與鳥在數學骨架上的正確位置。

三、 真的是魚與鳥磁磚嗎

由藝術表演可以知道經過數學原理形成的魚與鳥磁磚可以互相密合，其密合方式有兩種：

(1) 鳥嘴和魚鰭的密合



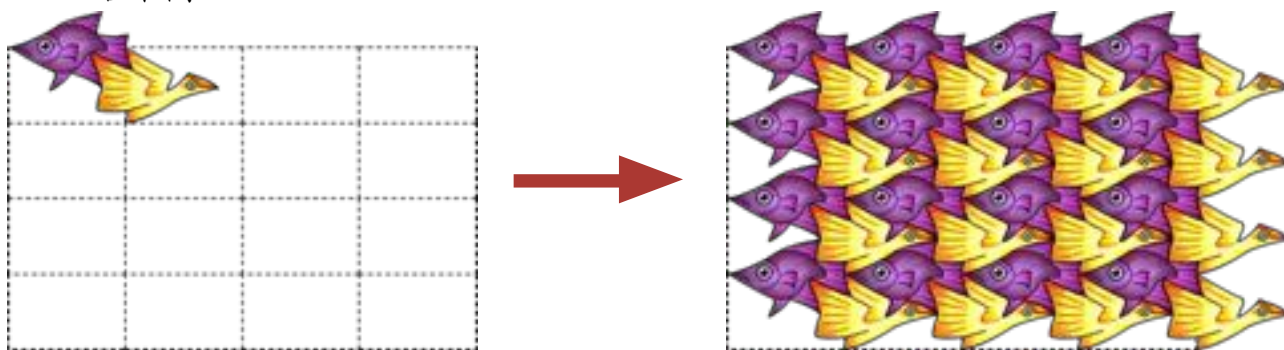
(2) 鳥翅膀和魚嘴的密合



有了這兩種密合方式，就可以將魚與鳥密鋪在平面上了。

四、 魚與鳥的鑲嵌圖

透過了解魚與鳥在數學骨架上的正確位置及兩種密合方式後，即可在數學骨架上密鋪出魚與鳥鑲嵌圖，左下圖是先將魚與鳥放在數學骨架上的正確位置，其他魚與鳥除了要放在數學骨架上的正確位置外，還須一一按照兩種密合方式密鋪，如右下圖。



關於《E121 魚與鳥》原圖，如下圖：



在原圖右下角，有一個白色的區塊，在黑色鳥的嘴巴有四個點，將這四點連線便是這魚與鳥的矩形數學骨架，而在黃色魚的嘴巴也有四個點，也將這四個點連線也是這魚與鳥的矩形數學骨架，代表可以找到不同的數學骨架，數學骨架不唯一，而且這兩個矩形的面積一樣。

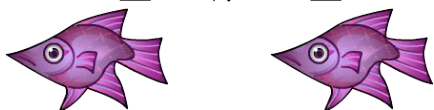
E121 魚與鳥回饋單

1. 根據你的經驗，下列哪一個地方最有可能用矩形密鋪？

☐ 人行道 ☐ 家裡客廳地板 ☐ 廟宇地板

2. 如下圖，右邊魚是左邊魚是什麼樣的關係呢？

☐ 平移 ☐ 旋轉 ☐ 翻面



3. 魚與鳥的表面積與其數學骨架矩形的面積是否一樣？

☐ 是 ☐ 否

4. 請你回頭仔細看魚與鳥鑲嵌圖，算一算每一隻鳥周遭圍繞著幾隻魚呢？

(相鄰才算，只接觸一點不算)

☐ 3隻 ☐ 4隻 ☐ 5隻 ☐ 6隻

5. 右下圖為艾薛爾的另一幅版畫《E120 魚與鳥》，這版畫也利用了矩形當作數學骨架，請參考左下圖所畫的數學骨架，在右下圖畫出正確的數學骨架，並用找到的數學骨架說明如何剪貼出鳥與魚。



6. 關於影片與本工作單的教材，你給予幾分(最多10分，最少0分)

10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

又有何建議：

.....

填單人姓名：_____

填單日期：____年____月____日

e-mail：

電話：

☐ 老師

☐ 學生

☐ 社會人士

學校

班級

E121 魚與鳥工作單

1. 第一幕的數學骨架是哪一個多邊形呢？
☐ 正方形 ☒ 矩形 ☐ 梯形 ☐ 鳶形
2. 第二幕剪貼的過程中，用到了哪些數學方法？
☒ 平移 ☐ 旋轉 ☐ 翻面
3. 影片中有幾種顏色的魚與鳥？
☒ 兩種 ☐ 三種 ☐ 四種
4. 鋪滿數學舞台的魚與鳥們有哪些特色？
☒ 不重疊 ☒ 無空隙 ☒ 外形都一樣

E121 魚與鳥回饋單

1. 根據你的經驗，下列哪一個地方最有可能用矩形密鋪？
☐ 人行道 ☒ 家裡客廳地板 ☐ 廟宇地板
2. 如下圖，右邊魚是左邊魚是什麼樣的關係呢？
☒ 平移 ☐ 旋轉 ☐ 翻面
3. 魚與鳥的表面積與其數學骨架矩形的面積是否一樣？
☒ 是 ☐ 否
4. 請你回頭仔細看魚與鳥鑲嵌圖，算一算每一隻鳥周遭圍繞著幾隻魚呢？
(相鄰才算，只接觸一點不算)
☐ 3隻 ☒ 4隻 ☐ 5隻 ☐ 6隻
5. 右下圖為艾薛爾的另一幅版畫《E120 魚與鳥》，這版畫也利用了矩形當作數學骨架，請參考左下圖所畫的數學骨架，在右下圖畫出正確的數學骨架，並用找到的數學骨架說明如何剪貼出鳥與魚。



E124 蜥蜴工作單

撰稿：李勁緯

引言：《E124 蜥蜴》是荷蘭版畫家艾薛爾在1965年9月的作品，每隻蜥蜴的身體為單一顏色——白色及黑色，以墨水創作而成。影片中的封面圖是由蜥蜴版畫經由影像軟體編輯所成的一幅作品（圖一）：



圖一



圖二

艾薛爾在蜥蜴版畫上寫下這麼一句話「System VII^D; see 33」。說明了《E124 蜥蜴》和另一幅版畫《E033 蜥蜴》（圖二）有相同的密鋪方式。讓我們一起觀賞這彎彎曲曲的蜥蜴是怎麼鋪滿平面的吧！

請在電腦上點選《E124 蜥蜴.exe》進入影片的首頁，並按左上角的Q版圖開始撥放。

一、蜥蜴的數學與藝術

我們可以把蜥蜴的影片分成如下的四幕：

第一幕：影片由四邊形鋪滿構成數學舞台拉開序幕，而這四邊形正是蜥蜴的數學骨架。

第二幕：將數學舞台的一個四邊形放大，從這四邊形剪下六小塊後，依數學原理的平移、旋轉及翻面貼到正確的位置，即裁貼出蜥蜴。

第三幕：將蜥蜴外框的內部著上顏色成為藝術品並進行藝術表演，表演過程依各種適當角度將表演的蜥蜴們互相密合。

第四幕：銜接第一幕的數學舞台並留下數學骨架的虛線邊，將蜥蜴一隻一隻放到數學骨架上的正確位置進而鋪滿數學舞台，而這種不互相重疊、無空隙、反覆且連續的鋪滿稱作鑲嵌或密鋪。

1. 第一幕的數學骨架是哪一個多邊形呢？

☐ 三角形 ☐ 四邊形 ☐ 五邊形

2. 第二幕裁貼的過程中，用到了哪些數學方法？

☐ 平移 ☐ 旋轉 ☐ 翻面

3. 影片中有幾種顏色的蜥蜴？

☐ 兩種 ☐ 三種 ☐ 四種

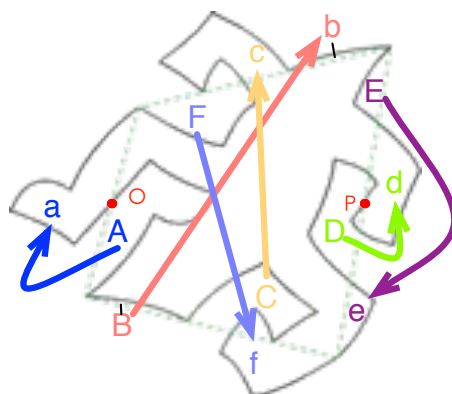
4. 鋪滿數學舞台的蜥蜴有哪些特色？

☐ 不重疊 ☐ 無空隙 ☐ 外形都一樣

二、如何從數學骨架裁貼出鳥與蜥蜴

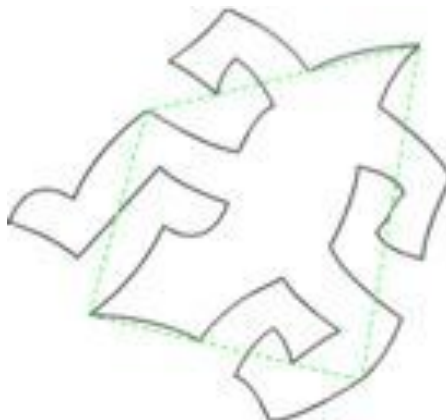
綜合下面兩個方式即可裁貼出蜥蜴，方式如下：

甲、將四邊形剪下六個小區塊 A, B, C, D, E, F，並將這六個小區塊貼到正確的位置上，即 $A \rightarrow a$ ； $B \rightarrow b$ ； $C \rightarrow c$ ； $D \rightarrow d$ ； $E \rightarrow e$ ； $F \rightarrow f$



乙、如何貼到正確的位置呢？我們根據數學原理的平移、旋轉及翻面：

- (1) $A \rightarrow a$ ：將 A 區塊以 O 為旋轉點旋轉到 a
- (2) $B \rightarrow b$ ：先將 B 區塊向右上平移再翻面貼到 b
- (3) $C \rightarrow c$ ：先將 C 區塊向上平移再翻面貼到 c
- (4) $D \rightarrow d$ ：將 D 區塊以 P 為旋轉點旋轉到 d
- (5) $E \rightarrow e$ ：將 E 區塊以 P 為旋轉點旋轉到 e
- (6) $F \rightarrow f$ ：先將 F 區塊向右下平移再翻面貼到 f



裁貼出蜥蜴後可以發現：四邊形的四個頂點分別為蜥蜴嘴、手肘、手臂的一點及尾巴，這就是蜥蜴在數學骨架上的正確位置。

三、真的是蜥蜴磁磚嗎？

經由數學原理裁貼後的蜥蜴有什麼令人驚艷的地方呢？我們可以由第三幕的藝術表演觀察到經數學原理形成的蜥蜴分別可以彼此互相密合一，共有以下三種密合方式；

(1) 手跟手的密合



(2) 手跟腳的密合



(3) 腳跟腳的密合

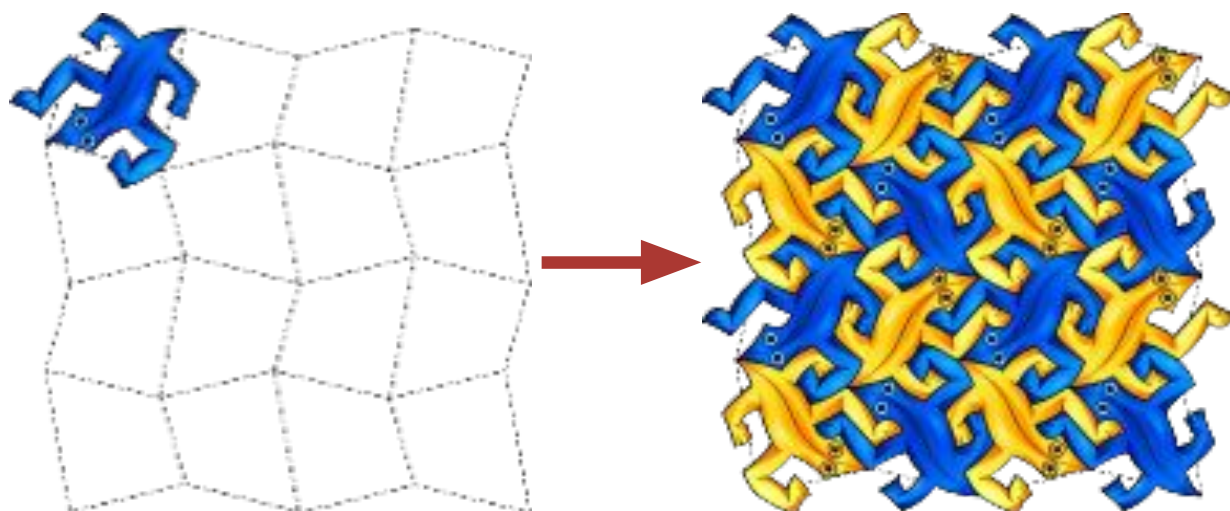


這種可以互相密合、無交疊且無空隙的蜥蜴圖案，我們稱之為蜥蜴磁磚。有了這三種密合方式後，就可以用這三種方式將很多隻蜥蜴磁磚密鋪在平面上了。

四、蜥蜴的鑲嵌圖

蜥蜴鑲嵌圖

透過了解蜥蜴在數學骨架上的正確位置及三種密合方式後，即可在數學骨架上密鋪出鳥與蜥蜴鑲嵌圖，左下圖是先將蜥蜴放在數學骨架上的正確位置，其他的蜥蜴除了要放在數學骨架上的正確位置外，還須一一按照三種密合方式密鋪。



關於艾薛爾的蜥蜴版畫原圖，如下圖所示：



仔細看版畫原圖中，有用鉛筆畫的記號，每個記號代表的是一個旋轉點，將蜥蜴往左、右兩邊以旋轉點旋轉180度，再將蜥蜴往上、下平移後翻轉，這樣就可以鋪滿整個平面了！

E124 蜥蜴回饋單

1. 根據你的經驗，你比較常看到使用正方形還是其他四邊形磁磚密鋪？為什麼呢？
2. 請你回想一下，每一隻蜥蜴周遭圍繞著幾隻蜥蜴呢？
☐ 2隻 ☐ 3隻 ☐ 4隻 ☐ 5隻
3. 蜥蜴的表面積與其數學骨架四邊形的面積是否一樣？
☐ 是 ☐ 否
4. 如下圖，左邊的蜥蜴和右邊的蜥蜴是什麼樣的關係呢？
☐ 平移 ☐ 旋轉 ☐ 翻面



5. 右下圖為艾薛爾的另一幅版畫《E090 魚》，這版畫也利用了四邊形當作數學骨架，請參考左下圖所畫的數學骨架，在右下圖畫出魚的四邊形數學骨架，並用找到的數學骨架說明如何剪貼出魚。



6. 關於影片與本工作單的教材，你給予幾分(最多10分，最少0分)

10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

又有何建議：

.....

填單人姓名：_____

填單日期：____年____月____日

e-mail：

電話：

☐ 老師

☐ 學生

☐ 社會人士

學校 _____

班級

E124 蜥蜴工作單

1. 第一幕的數學骨架是哪一個多邊形呢？
☐ 三角形 ☒ 四邊形 ☐ 五邊
2. 第二幕裁貼的過程中，用到了哪些數學方法？
☐ 平移 ☒ 旋轉 ☒ 翻面
3. 影片中有幾種顏色的蜥蜴？
☒ 兩種 ☐ 三種 ☐ 四種
4. 鋪滿數學舞台的蜥蜴們有哪些特色？
☒ 不重疊 ☒ 無空隙 ☒ 外形都一樣

E124 蜥蜴回饋單

1. 根據你的經驗，你比較常看到使用正方形還是其他四邊形磁磚密鋪？你覺得為什麼呢？
2. 請你回想一下，每一隻蜥蜴周遭圍繞著幾隻蜥蜴呢？
☐ 2隻 ☐ 3隻 ☒ 4隻 ☐ 5隻
3. 蜥蜴的表面積與其數學骨架四邊形的面積是否一樣？
☒ 是 ☐ 否
4. 如下圖，左邊的蜥蜴和右邊的蜥蜴是什麼樣的關係呢？
☐ 平移 ☐ 旋轉 ☒ 翻面
5. 右下圖為艾艾薛爾的另一幅版畫《E090 魚》，這版畫也利用了四邊形當作數學骨架，請參考左下圖所畫的數學骨架，在右下圖畫出魚的四邊形數學骨架，並用找到的數學骨架說明如何剪貼出魚。



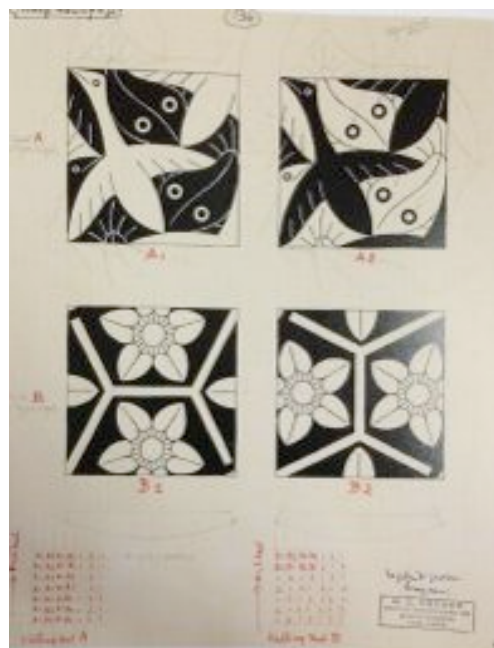
E126 鳥與魚工作單

撰稿：李勁緯

引言：《E126 鳥與魚》是荷蘭版畫家艾薛爾在1967年3月畫的一幅版畫，每隻鳥與魚的身體為單一顏色—白色及黑色，主要繪圖工具為墨水與水彩，而我們影片裡的封面圖為艾薛爾在1961年2月所創作的另一幅版畫《E109^{II} 魚；魚與鳥》(圖一)：



圖一



圖二



艾薛爾在《E109^{II} 魚；魚與鳥》版畫上寫上這一句話「design for 126」，並在《E126 鳥與魚》版畫上寫上這一句話「developed from 109^{II}」，道出這兩幅版畫有著密不可分的關係。圖二是

艾薛爾在1968年所創作的一幅版畫《E136 兩個磁磚對》，這幅版畫是為了位於巴恩的一所學校(New Lyceum) 設計柱子的磁磚，圖二中共有兩種磁磚模型，分別為編號A和B，編號A的設計原圖就是我們這幅版畫《E126 鳥與魚》，鳥與魚磁磚只需要一個磁磚模型。不過，仔細看圖中 A_1 、 A_2 雖然是同一個模型，卻被上成不同的顏色，在圖二最下方的紅字，是艾薛爾畫下這

兩個顏色不同的磁磚拼貼在柱子上的位置、順序。最後，圖三就是艾薛爾在1968年為學校(New Lyceum) 設計的磁磚柱。現在就讓我們來欣賞《E126 鳥與魚》是如何誕生的吧！

請在電腦上點選《E126 鳥與魚.exe》進入影片的首頁，並按左上角的Q版圖開始撥放。

一、 鳥與魚的數學與藝術

我們可以把鳥與魚的影片分成如下的四幕：

第一幕：影片由平行四邊形鋪滿構成數學舞台拉開序幕，而這平行四邊形正是鳥與魚的數學骨架。

第二幕：將數學舞台的一個平行四邊形放大，從這平行四邊形剪下六小塊後，依數學原理的平移及翻面貼到正確的位置，即裁貼出鳥與魚。

第三幕：將鳥與魚外框的內部著上顏色成為藝術品並進行藝術表演，表演過程依各種適當角度將表演的鳥與魚們互相密合。

第四幕：銜接第一幕的數學舞台並留下數學骨架的虛線邊，將鳥與魚一隻一隻放到數學骨架上的正確位置進而鋪滿數學舞台，而這種不互相重疊、無空隙、反覆且連續的鋪滿稱作鑲嵌或密鋪。

1. 第一幕的數學骨架是哪一個多邊形呢？

☐ 正方形 ☐ 平行四邊形 ☐ 矩形

2. 第二幕裁貼的過程中，用到了哪些數學方法？

☐ 平移 ☐ 旋轉 ☐ 翻面

3. 影片中有幾種顏色的鳥與魚？

☐ 兩種 ☐ 三種 ☐ 四種

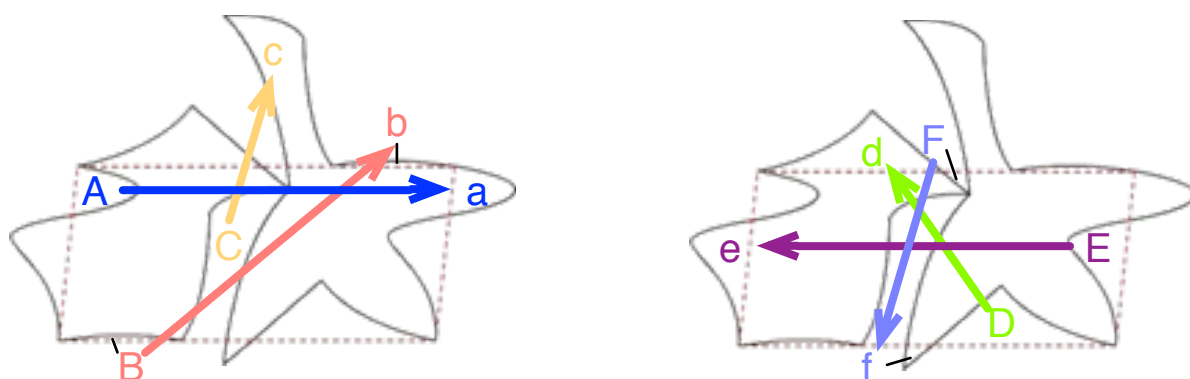
4. 鋪滿數學舞台的鳥與魚們有哪些特色？

☐ 不重疊 ☐ 無空隙 ☐ 外形都一樣

二、 如何從數學骨架裁貼出鳥與魚

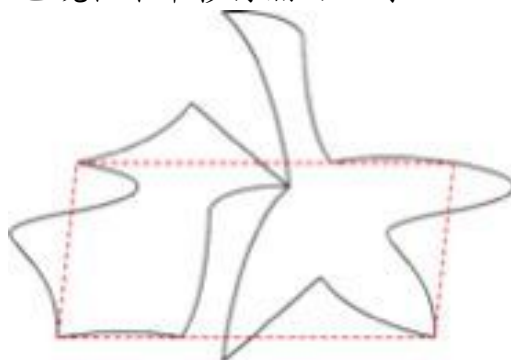
綜合下面兩個方式即可裁貼出鳥與魚，方式如下：

甲、將平行四邊形剪下六個小區塊 A, B, C, D, E, F，並將這六個小區塊貼到正確的位置上，即 $A \rightarrow a$ ； $B \rightarrow b$ ； $C \rightarrow c$ ； $D \rightarrow d$ ； $E \rightarrow e$ ； $F \rightarrow f$



乙、如何貼到正確的位置呢？我們根據數學原理的平移與翻面：

- (1) $A \rightarrow a$ ：將 A 區塊往右平移到 a
- (2) $B \rightarrow b$ ：先將 B 區塊往上平移再翻面貼到 b
- (3) $C \rightarrow c$ ：先將 C 區塊往上平移再翻面貼到 c
- (4) $D \rightarrow d$ ：先將 D 區塊往上平移再翻面貼到 d
- (5) $E \rightarrow e$ ：將 E 區塊往左平移到 e
- (6) $F \rightarrow f$ ：先將 F 區塊往下平移再翻面貼到 f



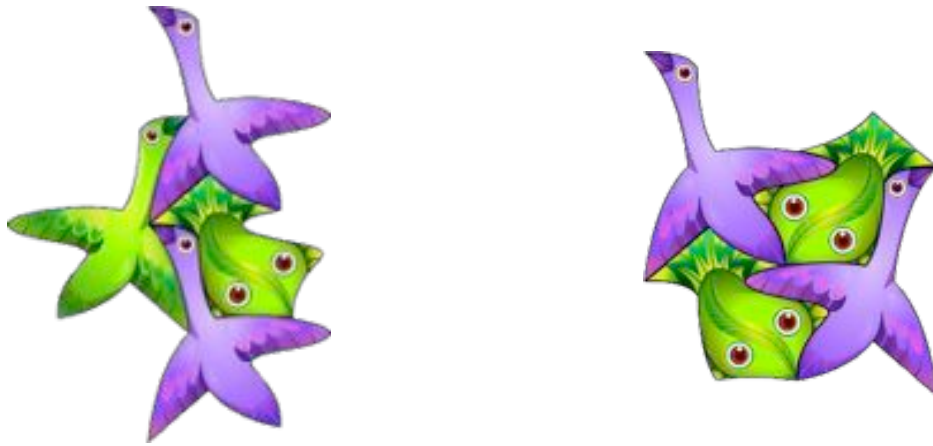
裁貼出鳥與魚後可以發現：平行四邊形的兩個頂點分別在鳥的翅膀與尾巴，而另外兩個頂點分別在魚的嘴巴與魚鰭，這就是鳥與魚在數學骨架上的正確位置。

三、真的是鳥與魚磁磚嗎

經由數學原理裁貼後的鳥與魚有什麼令人驚艷的地方呢？我們可以由第三幕的藝術表演觀察到經數學原理形成的鳥與魚可以彼此互相密合，有以下兩種密合方式：

(1) 鳥嘴與魚鰭的密合

(2) 鳥翅膀與魚嘴的密合

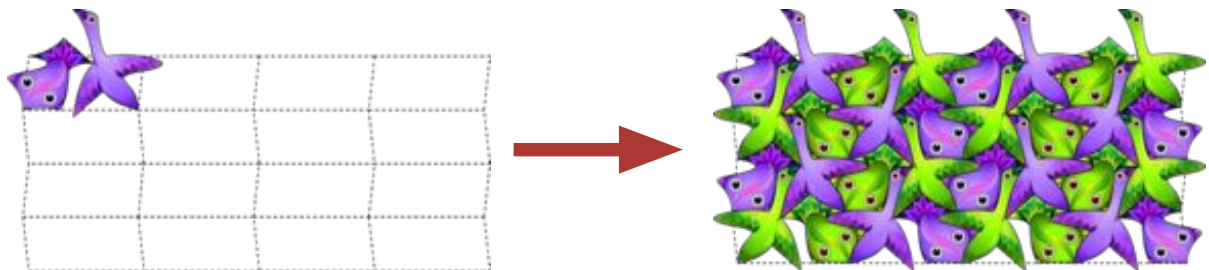


這種可以互相密合、無交疊且無空隙的鳥與魚圖案，我們稱之為鳥與魚磁磚。有了這兩種密合方式後，就可以用這兩種方式將很多隻鳥與魚磁磚密鋪在平面上了。

四、鳥與魚的鑲嵌圖

鳥與魚鑲嵌圖

透過了解鳥與魚在數學骨架上的正確位置及兩種密合方式後，即可在數學骨架上密鋪出鳥與魚鑲嵌圖，左下圖是先將鳥與魚放在數學骨架上的正確位置，其他的鳥與魚除了要放在數學骨架上的正確位置外，還須一一按照兩種密合方式密鋪。



關於《E126 鳥與魚》版畫原圖，如下圖所示：



艾薛爾在版畫原圖的上方，畫了幾個箭頭指向白色魚的眼睛，並寫下這樣一句話「these eyes are a mistake!」，翻譯成中文意思是「這些眼睛畫錯了！」。因為

原本黑色的魚配上白色的眼白、黑色的眼球，所以白色的魚也應該配上完全相反的顏色——黑色的眼白、白色的眼球，可是在這幅《E126 鳥與魚》版畫原圖中，白色魚的眼白是白色的、眼球也還是黑色的。雖然發生了錯誤，可是當艾薛爾在1968年創作版畫《E136 兩個磁磚對》，要設計柱子的磁磚時，他就記得將顏色改回來了，因此，他還在《E136 兩個磁磚對》版畫原圖上方一樣地畫上箭頭指向白色魚的眼睛，並註記「eyes good」，代表《E136 兩個磁磚對》的眼睛顏色就改回正確了！

E126 鳥與魚回饋單

1. 仔細想想，你在那個地方見過用平行四邊形磁磚鋪設的地板？
2. 請你回想一下，每一隻魚周遭圍繞著幾隻鳥呢？（相鄰才算，只交一點不算）
☐ 2隻 ☐ 3隻 ☐ 4隻 ☐ 5隻
3. 鳥與魚的表面積與其數學骨架平行四邊形的表面積是否一樣？
☐ 是 ☐ 否
4. 如下圖，左邊的鳥和右邊的鳥是什麼樣的關係呢？
☐ 平移 ☐ 旋轉 ☐ 翻面



5. 右下圖為艾薛爾的另一幅版畫《E130 魚與馬》，這版畫也利用了平行四邊形當作數學骨架，請參考左下圖所畫的數學骨架，在右下圖畫出正確的數學骨架，並用找到的數學骨架說明如何剪貼出魚與馬。



6. 關於影片與本工作單的教材，你給予幾分(最多10分，最少0分)

10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

又有何建議：

.....

填單人姓名：_____

填單日期：____年____月____日

e-mail：

電話：

☐ 老師

☐ 學生

☐ 社會人士

學校 _____

班級

E126 鳥與魚工作單

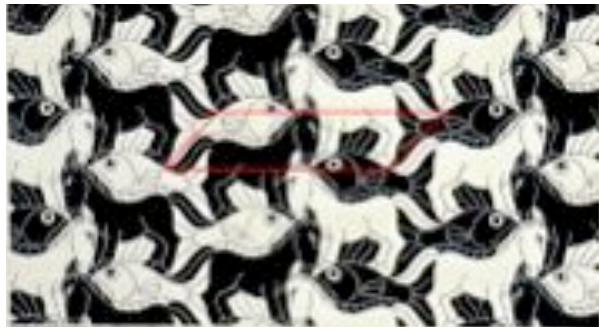
1. 第一幕的數學骨架是哪一個多邊形呢？
☐ 正方形 ☒ 平行四邊形 ☐ 矩形
2. 第二幕裁貼的過程中，用到了哪些數學方法？
☒ 平移 ☐ 旋轉 ☒ 翻面
3. 影片中有幾種顏色的鳥與魚？
☒ 兩種 ☐ 三種 ☐ 四種
4. 鋪滿數學舞台的鳥與魚們有哪些特色？
☒ 不重疊 ☒ 無空隙 ☒ 外形都一樣

E126 鳥與魚回饋單

1. 仔細想想，你在那個地方見過用平行四邊形磁磚鋪設的地板？
2. 請你回想一下，每一隻魚周遭圍繞著幾隻鳥呢？（相鄰才算，只交一點不算）
☐ 2隻 ☒ 3隻 ☐ 4隻 ☐ 5隻
3. 鳥與魚的表面積與其數學骨架平行四邊形的表面積是否一樣？
☒ 是 ☐ 否
4. 如下圖，左邊的鳥和右邊的鳥是什麼樣的關係呢？
☐ 平移 ☐ 旋轉 ☒ 翻面



5. 右下圖為艾薛爾的另一幅版畫《E130 魚與馬》，這版畫也利用了平行四邊形當作數學骨架，請參考左下圖所畫的數學骨架，在右下圖畫出正確的數學骨架，並用找到的數學骨架說明如何剪貼出魚與馬。



E130 魚與馬工作單

撰稿：李勁緯

引言：《E130 魚與馬》是荷蘭版畫家艾薛爾在1967年7月畫的一幅版畫，每隻魚與馬的身體為單一顏色——白色及黑色，主要繪圖工具為墨水，而我們影片裡的封面圖是由魚與馬版畫經由影像軟體編輯所成的一幅作品(圖一)：



圖中有兩個顏色的魚、兩個顏色的馬，將兩個同色的魚和馬視為一組，往左、往右平移，往上、往下則是翻轉，這就是這幅版畫《E130 魚與馬》的密鋪方式。接下來就讓我們來欣賞可愛的《E130 魚與馬》是如何誕生的吧！

請在電腦上點選《E130 魚與馬.exe》進入影片的首頁，並按左上角的Q版圖開始撥放。

一、魚與馬的數學與藝術

我們可以把魚與馬的影片分成如下的四幕：

第一幕：影片由平行四邊形鋪滿構成數學舞台拉開序幕，而這平行四邊形正是魚與馬的數學骨架。

第二幕：將數學舞台的一個平行四邊形放大，從這平行四邊形剪下六小塊後，依數學原理的平移及翻面貼到正確的位置，即裁貼出魚與馬。

第三幕：將魚與馬外框的內部著上顏色成為藝術品並進行藝術表演，表演過程依各種適當角度將表演的魚與馬們互相密合。

第四幕：銜接第一幕的數學舞台並留下數學骨架的虛線邊，將魚與馬一隻一隻放到數學骨架上的正確位置進而鋪滿數學舞台，而這種不互相重疊、無空隙、反覆且連續的鋪滿稱作鑲嵌或密鋪。

1. 第一幕的數學骨架是哪一個多邊形呢？
☐ 正方形 ☐ 平行四邊形 ☐ 矩形
2. 第二幕裁貼的過程中，用到了哪些數學方法？
☐ 平移 ☐ 旋轉 ☐ 翻面
3. 影片中有幾種顏色的魚與馬？
☐ 兩種 ☐ 三種 ☐ 四種

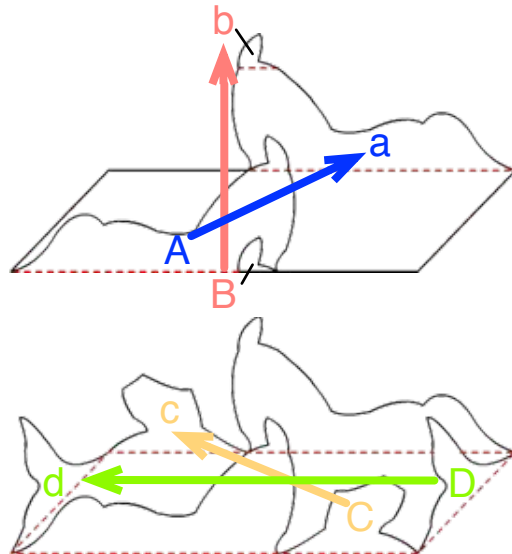
4. 鋪滿數學舞台的魚與馬們有哪些特色？

☐ 不重疊 ☐ 無空隙 ☐ 外形都一樣

二、如何從數學骨架裁貼出魚與馬

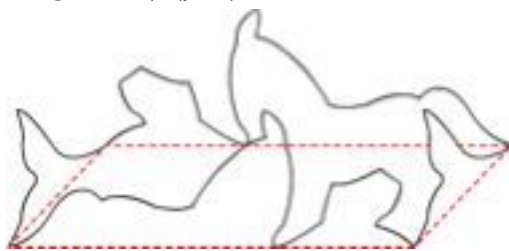
綜合下面兩個方式即可裁貼出魚與馬，方式如下：

甲、將平行四邊形剪下四個小區塊 A, B, C, D，並將這四個小區塊貼到正確的位置上，即 $A \rightarrow a$ ； $B \rightarrow b$ ； $C \rightarrow c$ ； $D \rightarrow d$



乙、如何貼到正確的位置呢？我們根據數學原理的平移與翻面：

- (1) $A \rightarrow a$ ：先將 A 區塊往上平移再翻面貼到 a
- (2) $B \rightarrow b$ ：將 B 區塊往上平移到 b
- (3) $C \rightarrow c$ ：先將 C 區塊往上平移再翻面貼到 c
- (4) $D \rightarrow d$ ：將 D 區塊往左平移到 d



裁貼出魚與馬後可以發現：平行四邊形的兩個頂點分別在馬的尾巴與後腳跟，而另外兩個頂點分別在魚的背與尾巴，這就是魚與馬在數學骨架上的正確位置。

三、真的是魚與馬磁磚嗎

經由數學原理裁貼後的魚與馬有什麼令人驚艷的地方呢？我們可以由第三幕的藝術表演觀察到經數學原理形成的魚與馬可以彼此互相密合，有以下兩種密合方式：

- (1) 馬前腳與魚嘴的密合
- (2) 馬背與魚下巴的密合

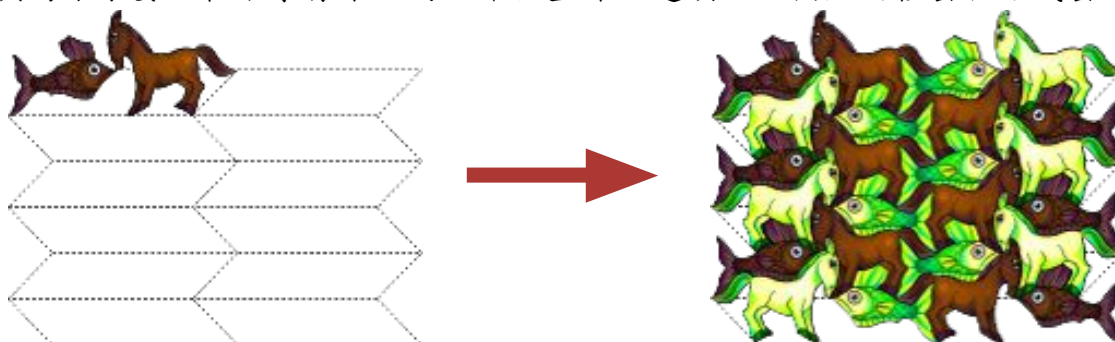


這種可以互相密合、無交疊且無空隙的魚與馬圖案，我們稱之為魚與馬磁磚。有了這三種密合方式後，就可以用這三種方式將很多隻魚與馬磁磚密鋪在平面上了。

四、魚與馬的鑲嵌圖

魚與馬鑲嵌圖

透過了解鳥與魚在數學骨架上的正確位置及兩種密合方式後，即可在數學骨架上密鋪出魚與馬鑲嵌圖，左下圖是先將魚與馬放在數學骨架上的正確位置，其他的魚與馬除了要放在數學骨架上的正確位置外，還須一一按照兩種密合方式密鋪。



關於《E130 魚與馬》原圖，如下圖：



原本艾薛爾要把這幅畫《E130 魚與馬》畫進《蛻變三 (Metamorphosis III)》中，不過為了鋪陳《蛻變三》的圖畫故事，因此艾薛爾選擇另一幅版畫《E129 魚與馬》而不使用《E130 魚與馬》，因為《E130 魚與馬》的密鋪方式為平移和鏡射，而《E129 魚與馬》的密鋪方式只有平移。

E130 魚與馬回饋單

1. 仔細想想，你在那個地方見過用平行四邊形磁磚鋪設的地板？

2. 請你回想一下，每一隻魚周遭圍繞著幾隻馬呢？（相鄰才算，只交一點不算）

☐ 2隻 ☐ 3隻 ☐ 4隻 ☐ 5隻

3. 魚與馬的表面積與其數學骨架平行四邊形的表面積是否一樣？

☐ 是 ☐ 否

4. 如下圖，左邊的魚和右邊的魚是什麼樣的關係呢？

☐ 平移 ☐ 旋轉 ☐ 翻面



5. 右下圖為艾薛爾的另一幅版畫《E126 鳥與魚》，這版畫也利用了平行四邊形當作數學骨架，請參考左下圖所畫的數學骨架，在右下圖畫出正確的數學骨架，並用找到的數學骨架說明如何剪貼出鳥與魚。



6. 關於影片與本工作單的教材，你給予幾分(最多10分，最少0分)

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

10 9 8 7 6 5 4 3 2 1 0

又有何建議：

.....

填單人姓名：_____

填單日期：____年____月____日

e-mail：

電話：

☐ 老師

☐ 學生

☐ 社會人士

學校 _____

班級 _____

E130 魚與馬工作單

1. 第一幕的數學骨架是哪一個多邊形呢？
☐ 正方形 ☒ 平行四邊形 ☐ 矩形
2. 第二幕裁貼的過程中，用到了哪些數學方法？
☒ 平移 ☐ 旋轉 ☒ 翻面
3. 影片中有幾種顏色的魚與馬？
☒ 兩種 ☐ 三種 ☐ 四種
4. 鋪滿數學舞台的魚與馬們有哪些特色？
☒ 不重疊 ☒ 無空隙 ☒ 外形都一樣

E130 魚與馬回饋單

1. 仔細想想，你在那個地方見過用平行四邊形磁磚鋪設的地板？
2. 請你回想一下，每一隻魚周遭圍繞著幾隻馬呢？（相鄰才算，只交一點不算）
☐ 2隻 ☒ 3隻 ☐ 4隻 ☐ 5隻
3. 魚與馬的表面積與其數學骨架平行四邊形的表面積是否一樣？
☒ 是 ☐ 否
4. 如下圖，左邊的魚和右邊的魚是什麼樣的關係呢？
☐ 平移 ☐ 旋轉 ☒ 翻面



5. 右下圖為艾薛爾的另一幅版畫《E126 鳥與魚》，這版畫也利用了平行四邊形當作數學骨架，請參考左下圖所畫的數學骨架，在右下圖畫出正確的數學骨架，並用找到的數學骨架說明如何剪貼出鳥與魚。



第五章 參考文獻

一、中文文獻

王全世 (2000)。資訊科技融入教學之意義與內涵。資訊與教育，80，23-31。

許志農 (2012)。數學遊戲—科學家的餘興節目。未出版手稿，國立台灣師範大學數學系。

二、英文文獻

Burger, W. F., & Shaughnessy, J. M. (1986). Characterising the van Hiele levels of development in geometry. *Journal for Research in Mathematics Education*, 17(1), 31-48.

Doris Schattschneider (2004). *M. C. Escher: Visions of Symmetry* (New Edition). New York: Harry N. Abrams.

M. C. Escher (1958). *Regelmatige Vlakverdeling*. Utrecht: Stichting De Roos. The Regular Division of the Plane. Translated by Tony Langham and Plym Peters, in M.C. Escher: His Life and complete Graphic Work, 155-173.

三、網路資源

David Bailey. (2009). Essays on Escher's 137 Periodic Drawings, from <http://www.tess-elation.co.uk/essays-on-escher-s-periodic-drawings---an-introduction/periodic-drawings-1-30>

Anneke Bart, Bryan Clair.(2006). Math and the Art of M. C. Escher, from http://euler.slu.edu/escher/index.php/Math_and_the_Art_of_M._C._Escher

The M.C. Escher Company B.V. (2000). The Official M. C. Escher Website, from <http://www.mcescher.com/>

National University of Singapore. The Mathematics Behind the Art of M. C. Escher, from

<http://www.math.nus.edu.sg/aslaksen/gem-projects/maa/0203-2-03-Escher/main.html>
#Introduction