

物理教材中非近似模型之計算與分析

徐國誠

臺北市立成淵高級中學

前言

當我們用數學在處理物理問題時，常常爲了答案的簡單與統一，而做了一些數學上的近似運算，這些近似的物理模型在高中教材中比比皆是。例如物理光學中的夫朗和斐繞射 (*Fraunhofer diffraction*)，就是在狹縫極小或距離較遠的情況下所得到的近似結果；又如觀察水面下物體的深度，其簡單的公式也是在觀察者幾乎爲俯視的情形下所得出的。在實際教學中，或許有些好奇的學生會產生疑問：如果情況不是在課堂上所套用的近似模型，那又會如何呢？本文舉了四個高中物理教材中近似運算的例子，模擬非近似情況的結果與近似模型的比較，當然近似模型不只這些，更有許多例子都很值得我們研究和討論。至於上述的夫朗和斐繞射和視深，因爲涉及的數學運算較多且較複雜，請讀者參閱光學教科書中的說明（視深在一般教科書中較少論述，可參考科學教育月刊第 228 期中有國立台灣大學蔡尚芳教授所作「觀察者所看到的水中光源的位置」一文，以及 232 期中有台北市立成淵高級中學徐世昌老師所作「視深研究」一文）。

一、直導線周圍的磁場

一條直導線的長度很長（或說趨近於無限長），則與導線距離爲 a 的磁場大小，由必歐-沙伐定律 (*Biot-Savart law*) 或安培定律 (*Ampere's law*) 的環積分很快可以求得爲

$$B_0 = \frac{\mu_0 i}{2\pi a} \quad (1)$$

此磁場大小與導線的長度是無關的，不過也只能說是距離遠小於導線長度所得出的近似結果。圖一中我們假設直導線的長度爲 L ，在導線的中垂線上且與導線距離爲 a 的 P 點，其磁場大小由必歐-沙伐定律可知爲[3]

$$B = \int_{-L/2}^{L/2} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{idx \sin \theta}{r^2} \quad (2)$$

其中 $r = \sqrt{x^2 + a^2}$ ， $\sin \theta = a/r$ 。因此上式再經過一些積分的基本運算之後得到

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi a} \cdot \frac{L/2}{\sqrt{\frac{L^2}{4} + a^2}} \quad (3)$$

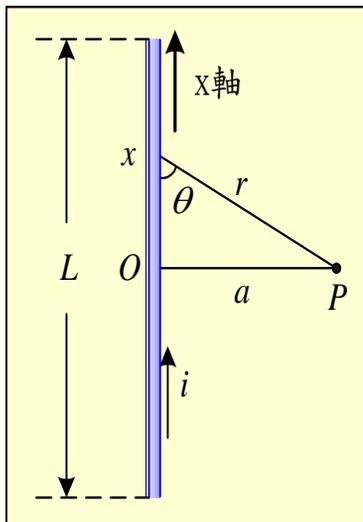
如果我們以距離與導線長度之比值爲變數，視其磁場的變化情形，則令一個新

的關係式： $a = \beta L$ ，那麼第(3)式可以改寫為

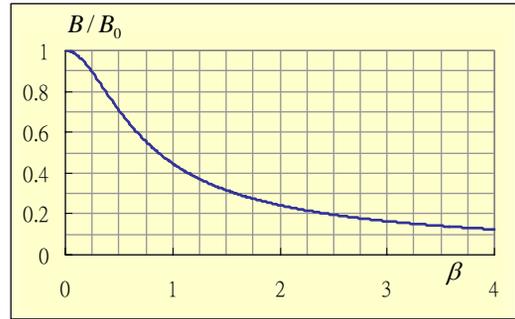
$$B = \frac{B_0}{\sqrt{1 + 4\beta^2}} \quad (4)$$

第(4)式告訴我們有限長度直導線周圍磁場的相對大小(B 與 B_0 的比值)僅與 β 有關而已，其關係曲線見圖二。其中當 $\beta = 0.07$ 時 B 與 B_0 的比值為0.99，也就是說，有限長度的直導線其周圍磁場若要用 $\frac{\mu_0 i}{2\pi a}$ 的式子去

估算，假如精確度要求在1%以內，那麼1公尺長的導線就必須在周圍7公分以內才可以使用。至於 $\beta = 0.87$ 時 B 與 B_0 的比值就只剩下0.50而已。不過這裡只計算導線中垂線上的磁場，如果要計算其他位置的磁場可由第(2)式的積分著手，改變積分的上下限即可。



圖一 直導線周圍磁場的座標示意圖。



圖二 有限長度直導線周圍磁場的相對大小(B 與 B_0 的比值)與 β 之關係曲線，其中 β 為距離與導線長度之比值。

二、螺線管的磁場

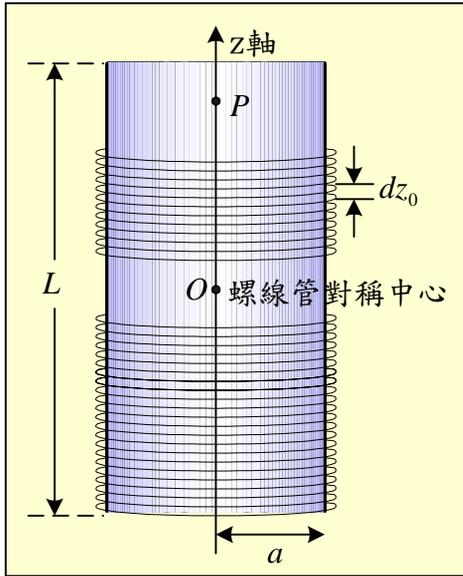
我們知道一個理想螺線管(solenoid)內部的磁場是均勻的，用安培定律的環積分可以求出此磁場為

$$B_0 = \mu_0 n i \quad (5)$$

其中 n 為螺線管每單位長度所含的線圈匝數。我們如果將螺線管視為一組緊密相接的圓形電流線圈所組合起來的，那麼螺線管內部的磁場，亦可由圓形電流線圈所產生的磁場所累加起來。於是我們利用必歐-沙伐定律和簡單的對稱先求出圓形電流中心軸上的磁場為[3]：

$$B = \frac{\mu_0 i a^2}{2(a^2 + z^2)^{3/2}} \quad (6)$$

其中 a 為圓線圈的半徑， z 是中心軸上一點與圓心的距離。



圖三 螺線管座標示意圖。

接著假設螺線管的長度為 \$L\$，截面半徑為 \$a\$，\$z\$ 軸原點定在螺線管的對稱中心點上，如圖三。由於螺線管上有許多圓形電流線圈，因此由第 (6) 式可以知道在 \$z = z_0\$ 處上的圓線圈（共有 \$n \cdot dz_0\$ 匝）在 \$P\$ 點所產生的磁場 \$dB\$ 為

$$dB = \frac{\mu_0 i a^2}{2[a^2 + (z - z_0)^2]^{3/2}} \cdot n dz_0 \quad (7)$$

上式中的 \$n\$ 就是螺線管每單位長度所含的線圈匝數（稱為匝數線密度）。再將第 (7) 式積分就可得出螺線管對稱軸上 \$P\$ 點的磁場大小為

$$B = \frac{\mu_0 n i a^2}{2} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{dz_0}{[a^2 + (z - z_0)^2]^{3/2}} \quad (8)$$

第 (8) 式利用三角函數積分（令 \$z - z_0 = a \tan \theta\$），再將第 (5) 式代入最後

得到

$$B = \frac{B_0}{2} \left(\frac{z + \frac{L}{2}}{\sqrt{a^2 + (z + \frac{L}{2})^2}} - \frac{z - \frac{L}{2}}{\sqrt{a^2 + (z - \frac{L}{2})^2}} \right) \quad (9)$$

由第 (9) 式我們可以知道，一個螺線管若要趨近於理想的螺線管，則第 (9) 式應該等於第 (5) 式，那麼必須符合以下的條件

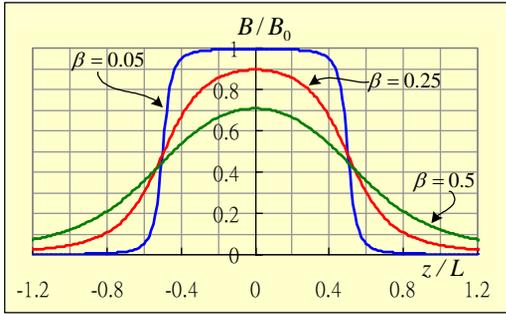
$$a \ll L \text{ 且 } z \ll L$$

也就是說螺線管的截面半徑必須遠小於螺線管的長度，以及 \$P\$ 點的位置必須靠近螺線管的對稱中心點 \$O\$。就此我們分兩方面來討論，第一是 \$O\$ 點（\$z = 0\$）的磁場大小，如同直導線的情形一般，令一個新的關係式：\$a = \beta L\$，將之代入第 (9) 式後便可以簡化為與第 (4) 式相同的形式：

$$B = \frac{B_0}{\sqrt{1 + 4\beta^2}}$$

上式也告訴我們，當螺線管對稱中心點的磁場若要與理想的螺線管相同（也就是用 \$\mu_0 n i\$ 的式子去估算），如果其精確度要求在 1% 以內，那麼 1 公尺長的螺線管其截面半徑必須小於 7 公分。第二是我們可以從第 (9) 式以 \$z/L\$ 為變數，求出螺線管對稱軸上的磁場相對大小，如圖四。由圖中可以知道，當 \$\beta\$ 值（即螺線管的截面半徑與螺線管長度的比值）愈小，則管中的磁場較大且愈均勻，不過接近管口（即 \$z/L = \pm 0.5\$ 的位置）時，其磁場大小則迅速

降低；反之當 β 值愈大時，則管中的磁場愈小且較不均勻，而接近管口時其磁場降低速率較慢，而且管外殘餘的磁場也愈多。



圖四 以 z/L 為變數，在螺線管對稱軸上的磁場相對大小，其中 $B_0 = \mu_0 ni$ 。

以上所討論的都是螺線管對稱軸上的磁場，至於螺線管橫截面上磁場的分布，其數學的運算稍微複雜一些，不過我們還是可以利用必歐-沙伐定律求出橫截面上的磁場分布。一般教科書上告訴我們，理想螺線管內的磁場不僅是均勻的，而且磁場的方向都是順著對稱軸上的方向排列，底下我們不妨做一些數值上的計算，以驗證教科書上的說法之正確性。

首先我們計算出單一圓線圈附近磁場的分布情形。將半徑為 a 、電流為 i 的圓線圈放置在 $z = z_0$ 的平面上，線圈的中心擺在 $O'(0,0, z_0)$ 點，如圖五，由必歐-沙伐定律我們知道，線圈上一小段長度 $d\ell(a \cos \theta, a \sin \theta, z_0)$ 的電流，在 P 點所產生的磁場 $d\vec{B}$ 為

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{id\vec{\ell} \times \vec{r}}{r^3} \quad (10)$$

其中 $\vec{r} = (x - a \cos \theta, y - a \sin \theta, z - z_0)$ ，

$d\vec{\ell} = (-a \sin \theta d\theta, a \cos \theta d\theta, 0)$ ，因此我們將 $d\vec{B}$ 寫成 $d\vec{B} = (dB_x, dB_y, dB_z)$ ，其中 $d\vec{B}$ 的三個分量分別為

$$dB_x = \frac{\mu_0 ia}{4\pi} \cdot \frac{(z - z_0) \cos \theta}{r^3} d\theta$$

$$dB_y = \frac{\mu_0 ia}{4\pi} \cdot \frac{(z - z_0) \sin \theta}{r^3} d\theta$$

$$dB_z = \frac{\mu_0 ia}{4\pi} \cdot \frac{a - x \cos \theta - y \sin \theta}{r^3} d\theta$$

而以上三式中的 r 為

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - z_0)^2 + a^2 - 2a(x \cos \theta + y \sin \theta)}$$

最後要計算出 P 點磁場在三個軸上的分量，必須分別對 $d\vec{B}$ 的三個分量做積分，積分的區間是 0 至 2π ，例如 P 點磁場在 x 軸上的分量 B_x 可以寫為

$$B_x = \frac{\mu_0 ia}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(z - z_0) \cos \theta d\theta}{r^3} \quad (11)$$

而 B_y 、 B_z 的表示方法亦同。

不過第 (11) 式只是單一圓線圈附近磁場的數學方程式，如果要計算螺線管產生的磁場還必須仿照第 (7) 式的做法，就是圖三中在螺線管 $z = z_0$ 處上的圓線圈（此處的圓線圈共有 $n \cdot dz_0$ 匝）在 P 點所產生的磁場在 x 軸上的分量為 dB_x ，

$$dB_x = \frac{\mu_0 ia}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(z - z_0) \cos \theta d\theta}{r^3} \cdot n dz_0$$

再將上式對 z_0 做積分，積分的區間為 $-L/2$ 至 $L/2$ ，如此就可以求得螺線管附近（包

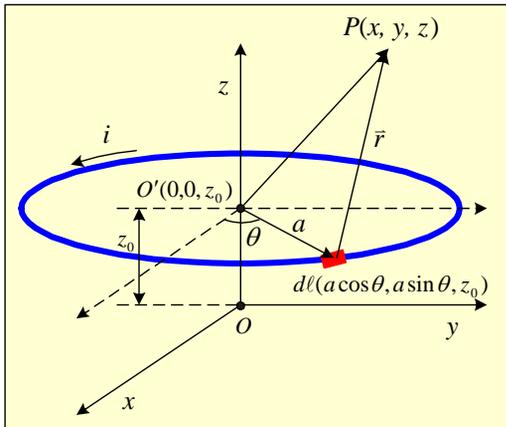
括管內與管外)產生的磁場。因此任意點P的磁場在三個軸上的分量 B_x 、 B_y 和 B_z 分別可以寫為

$$B_x = \frac{aB_0}{4\pi} \int_{-L/2}^{L/2} \int_0^{2\pi} \frac{(z-z_0)\cos\theta d\theta}{r^3} dz_0 \quad (12)$$

$$B_y = \frac{aB_0}{4\pi} \int_{-L/2}^{L/2} \int_0^{2\pi} \frac{(z-z_0)\sin\theta d\theta}{r^3} dz_0 \quad (13)$$

$$B_z = \frac{aB_0}{4\pi} \int_{-L/2}^{L/2} \int_0^{2\pi} \frac{(a-x\cos\theta - y\sin\theta) d\theta}{r^3} dz_0 \quad (14)$$

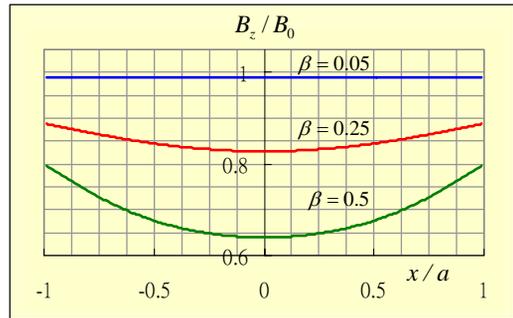
其中 $B_0 = \mu_0 ni$ 。



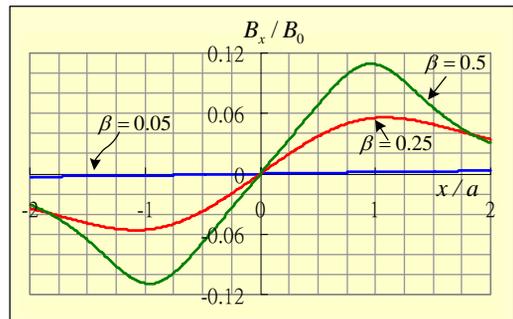
圖五 單一圓線圈的座標示意圖。

雖然由第(12)式至(14)式我們知道螺線管附近磁場的數學式,但是這些積分式實際上並不容易做,因此我們可以藉助數值積分(numerical integration)中的辛普森法則(Simpson's rule)的方式,加以適當的誤差控制,應該可以模擬出大致的

情況。由於螺線管呈現z軸對稱,因而在螺線管的橫截面上,可以選定一個軸作為計算磁場的變數,在此我們選定x軸而令 $y = 0$;如此磁場在y軸上的分量 B_y 便會等於零(這是基於第(13)式數值積分的結果),所以底下的計算就沒有出現 B_y 。



圖六 螺線管在 $z = 0.25L$ 處的橫截面上所算出磁場在z軸上的分量 B_z 的相對大小與橫軸(x/a 軸)的關係曲線,其中曲線的絕對誤差小於千分之一。



圖七 螺線管在 $z = 0.25L$ 處的橫截面上所算出磁場在x軸上的分量 B_x 的相對大小與橫軸(x/a 軸)的關係曲線,其中曲線的絕對誤差小於百萬分之一。

圖六和圖七是螺線管在 $z = 0.25L$ 處的橫截面上所計算出磁場的相對大小與橫軸(x/a 軸)的關係曲線。其中圖六告訴我們,當 β 值愈小(注意圖中 $\beta = 0.05$ 的曲線)時管中的磁場在 z 軸上的分量 B_z 是相當均勻的,而管外的磁場雖然圖中並沒有畫出來,不過經過計算結果顯示其值遠小於管內的磁場;而當 β 值愈大時管內的磁場 B_z 愈不均勻,而且磁場的最小值出現在對稱軸上($x/a = 0$ 的位置),另外管外的磁場值經計算結果顯示會大於 β 值較小的管外磁場,這也就是說螺線管的 β 值愈小愈接近為一個理想的螺線管。另外圖七也告訴我們,不論是管內或管外的磁場在 x 軸上的分量 B_x ,都隨著 β 值的增加而變大,而隨著 β 值的減少而變小;圖中 $\beta = 0.05$ 的曲線其 B_x 在螺線管內(在 $-1 < x/a < 1$ 範圍內)的相對大小已經是遠小於 0.01 了,顯示管內的磁場幾乎是順著 z 軸方向排列的。這裡雖然只舉出 $z = 0.25L$ 處橫截面上磁場分布情形的例子,不過我們有理由相信,在其他橫截面上的計算皆有類似的結果,尤其當 z 愈小,這種現象就愈顯著。基於以上的分析我們應該可以這麼說,當螺線管趨近於理想化時,其管外的磁場不論是 B_z 或 B_x 都應該趨近於零,而管內的磁場 B_x 也會趨近於零而 B_z 就會等於 B_0 ($B_0 = \mu_0 ni$)。

三、單擺

傳說中,發現單擺(simple pendulum)的「等時性」是伽利略(Galileo Galilei, 1564

—1642)在18歲那一年看到教堂風燈的擺盪,而在伽利略死後14年,荷蘭的物理學家惠更斯(Christiaan Huygens, 1629—1695),才使用單擺的「等時性」作為計時的工具。據說伽利略為了證明此「等時性」,曾經聚集許多人,花24小時的時間,以勞力密集的方式做單擺震盪的實驗,做完實驗之後,他便向世人宣告:不論單擺擺動角度的大小如何,其來回的時間依然保持固定。科學(包括數學)經過幾百年的演進之後,已經清楚了解到伽利略所看到的規律性只是個近似的現象,然而筆者相信,伽利略並非沒有察覺到大角度震盪所產生的誤差,而是希望過濾掉空氣阻力的影響,就如同其對自由落體的觀察一般。

現今教科書上告訴我們,單擺擺動的角度很小(一說小於 5° ,另一說為小於 10°)時,其週期為

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \quad (15)$$

如果擺角愈大時則週期與上式中 T_0 的差就愈大。其實我們可以利用以下的方式得到單擺擺動週期的表示法。當擺錘移動一小段弧長 dS 時, dS 可以寫成

$$dS = Ld\theta = vdt \quad (16)$$

上式中的 L 為單擺的擺長, v 為擺錘由起始角度 θ_0 擺至 θ 時的瞬時速率,利用力學能守恆定律可以得到 $v = \sqrt{2gL(\cos\theta - \cos\theta_0)}$,將之代入第(16)式後再積分, θ 的積分區間為 0 至 θ_0 ,由

此計算出的時間是週期的四分之一。所以我們可以將單擺的週期表示為

$$T = T_0 \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}} \quad (17)$$

第 (17) 式的積分我們可以將它展開為級數的表示法[1]：

$$T = T_0 \left(1 + \frac{1}{2^2} \sin^2 \frac{\theta_0}{2} + \frac{1}{2^2} \frac{3^2}{4^2} \sin^4 \frac{\theta_0}{2} + \dots \right) \quad (18)$$

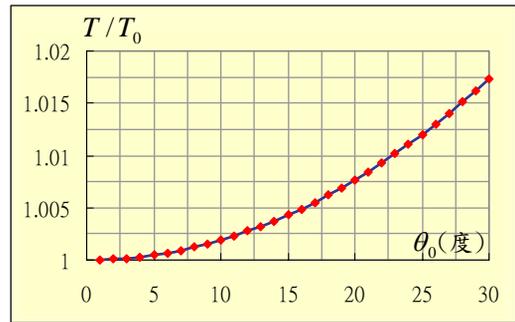
因此當 θ_0 夠大時，第 (18) 式後面的修正項是不能忽略的。圖八是單擺週期的相對大小與擺角的關係曲線，由圖中不難看出即使擺角達 30° ，其週期與 T_0 之差的百分比也只有約 1.75 %；若是如前面所述的擺角要求在 5° 或 10° 以內，那麼週期之差的百分比更只有約 0.05 % 與 0.19 %。

筆者曾經嘗試針對第 (17) 式做數值積分，所得到的曲線與圖八約略相同。不過第 (17) 式是一個瑕積分 (improper integrals)，因此該積分應該寫為

$$T = T_0 \frac{\sqrt{2}}{\pi} \lim_{\phi \rightarrow \theta_0^-} \int_0^{\phi} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}}$$

至於積分上限 θ_0^- 應該趨近至何值才能使該積分具有代表性，是在實際運算中很重要的一個問題。於是我們使用數量級的逼近方式，從 $\theta_0^- = \theta_0 - 10^{-1}$ ， $\theta_0^- = \theta_0 - 10^{-2}$ ，一直計算至 $\theta_0^- = \theta_0 - 10^{-13}$ 所得到的曲線才與 $\theta_0^- = \theta_0 - 10^{-12}$ 的曲線「非常接近」，所以就採用 $\theta_0 - 10^{-13}$ 為積分上限。最後利用一

部 CPU 為 Pentium III 450MHz 的閒置電腦做為計算工具，當數值積分的絕對誤差取至萬分之一，而只計算 1° 至 15° 的週期共 15 個數據時，所花的時間卻高達約 117 個小時。



圖八 單擺週期的相對大小 T/T_0 與擺角的關係曲線。

四、點電荷在兩固定異性電荷間的週期性運動

另外一類近似為簡諧運動 (simple harmonic motion) 的例子，是單一點電荷在兩固定異性電荷間，以庫侖力作用使其做來回週期性的運動 (與質點間以萬有引力作用的週期性運動之情形相同)。假如兩固定電荷 Q 之間的距離為 L ，在中垂線上距中垂點為 a 有另一個異性電荷 $-q$ ，如圖九，其中 Q 、 q 為其電量。若 $-q$ 由靜止釋放，當其位置在 x 時所受到庫侖力的大小可計算成爲

$$F = \frac{2KQqx}{\left(x^2 + \frac{L^2}{4}\right)^{3/2}} \quad (19)$$

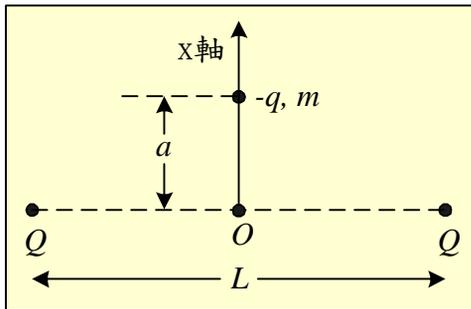
其中 K 為庫倫常數。假如 $x \ll L/2$ ，則上式可簡化為

$$F \approx \frac{16KQq}{L^3} x$$

那麼 $-q$ 受力的大小與位移大小成正比，此為簡諧運動的情況，因此 $-q$ 來回運動的週期即可近似為

$$T_0 = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{mL^3}{KQq}} \quad (20)$$

倘若 $x \ll L/2$ 的條件不成立，那麼此電荷的週期將和單擺的情形類似，就會比第 (20) 式中的 T_0 還大。



圖九 點電荷在兩固定異性電荷間之週期性運動的位置示意圖。

我們仿照單擺的做法，可以求得電荷週期的表示法。當電荷的位置在 x 時其瞬時速率為 v ，電荷移動了一小段距離 dx 可以寫成

$$dx = v dt \quad (21)$$

再利用力學能守恆計算出當時的速率應為

$$v = 2\sqrt{\frac{KQq}{m}} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + \frac{L^2}{4}}} - \frac{1}{\sqrt{a^2 + \frac{L^2}{4}}} \right)^{1/2} \quad (22)$$

將第 (22) 式代入第 (21) 式之後再積分，積分的區間為 0 至 a ，如此得到的時間間隔是週期的四分之一。因此把第 (20) 式的 T_0 代入積分後的週期，我們就可以得到此種運動型態的週期為

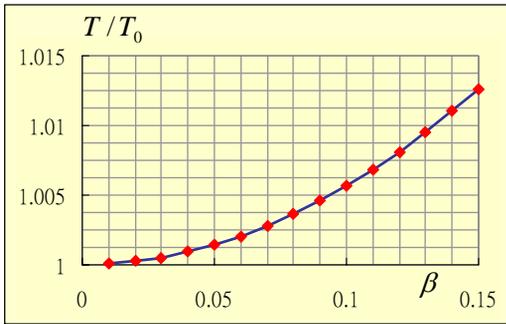
$$T = \frac{4T_0}{\pi\sqrt{L^3}} \int_0^a \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + \frac{L^2}{4}}} - \frac{1}{\sqrt{a^2 + \frac{L^2}{4}}} \right)^{-1/2} dx \quad (23)$$

而第 (23) 式仍然是一個瑕積分，如果我們採用數值積分的方式計算其週期，則必須將上式改寫為

$$T = \frac{4T_0}{\pi\sqrt{L^3}} \lim_{t \rightarrow a^-} \int_0^t \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + \frac{L^2}{4}}} - \frac{1}{\sqrt{a^2 + \frac{L^2}{4}}} \right)^{-1/2} dx$$

圖十便是我們以 $\beta (= a/L)$ 為變數，用數值積分的方式計算單一點電荷在兩固定異性電荷間的運動週期相對大小 T/T_0 的曲線，其中曲線的絕對誤差取至萬分之一以下。這條曲線看似簡單，實則花了前面所提過的那一部電腦總共 169 小時，不過如果把 CPU 換成目前市面上較為普及的速度 (約 2.7 GHz 左右)，那麼運算的時間就

會縮短為約 28 小時左右。至於積分上限 a^- 的大小，由於此處以 a/L 為變數，因此採用上述單擺的方式將 a^-/L 取至 $(a/L) - 10^{-13}$ 為計算的上限。



圖十 單一點電荷在兩固定異性電荷間的運動週期相對大小 T/T_0 與 $\beta (= a/L)$ 的關係曲線，其中曲線的絕對誤差取至萬分之一以下。

由圖十中我們可以看出電荷的運動週期相對大小之變化情形。當 $T/T_0 = 1.01$ 時

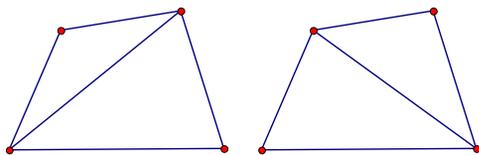
所對應的 β 值約為 0.132，這就是說電荷的運動週期如要用簡諧運動的情況做近似（第 (20) 式），假如精確度要求在 1% 以內，那麼兩固定電荷間的距離為 1 公尺的情形，單一點電荷與中垂點的距離必須在 13.2 公分以內。

參考文獻

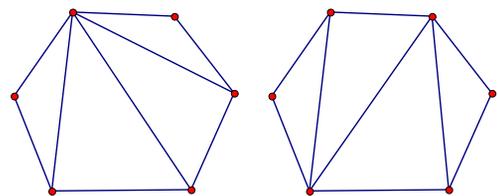
1. 李怡嚴編著，大學物理學第一冊，12 版，台北，東華書局，360-369 頁，民 84。
2. 建國中學主編，高級中學數理叢書—物理（第一輯），台北，教育部中教司，91-96 頁，民 82。
3. D. Halliday, R. Resnick and J. Walker, *Fundamentals of Physics Extended, Fifth Ed.*, New York, John Wiley & Sons, Inc., 729-742, 1997.

（上承第 53 頁）

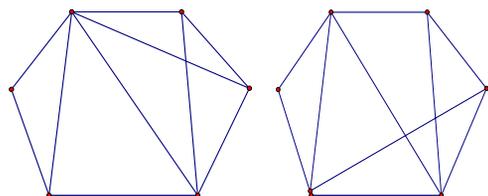
- (1) 試問對於六邊形，可以有幾種方法將其分割成小三角形？
- (2) 試問對於七邊形，可以有幾種方法將其分割成小三角形？



圖一



圖二



圖三