國立臺灣師範大學理學院數學系

碩士論文

Department of Mathematics
College of Science
National Taiwan Normal University

Master’s Thesis

重新證明十個有名的數學定理

莊智宇
Chuang, Chih-Yu

指導教授：許志農博士

中華民國 110 年 6 月
June 2021

致 謝

此篇論文能完成，首先要感謝我的指導老師許志農教授，謝謝老師多次用心的指導，論文中的題材都是經過多次討論刪改才得以完成。謝謝老師的激勵，使我在遇到瓶頸時得以堅持下去。

也要感謝夏良忠教授、紀文鎮教授、郭君逸教授與特地前來師大口試的黃森山教授，提供本論文諸多寶貴的意見，使學生獲益良多，令內容更加充實。

最後感謝我親愛的家人和朋友們，在我念研究所時與論文寫作期間給予支持和陪伴，並豐富了我的學習生活，有了他們幫助論文才能夠順利完成。

摘 要

本文整理了作者在學習數學歷程中曾遇過的，十個有名的數學定理，試圖重新給予證明，並蒐集資料擴充設計成數學文章。文章包括了知名數學家的生平故事，或是相關問題的介紹，作專題導向式的探討。條列如下：

「新月形的美麗與哀愁」分成五個定理來介紹【五種可平方化的新月形】。

「在沙地上思考的阿基米德」證明了【阿基米德定理(Sum Squares in the Sand)】。

「韋達的正切定律」證明了【韋達的正切定律】。

「笛卡兒的圓之吻定理」證明了【圓之吻定理】。

「被遺忘的費馬-尤拉勾股定理」證明了【費馬-尤拉勾股定理】。

「科茨的一道定理」證明了【科茨定理】。

「來自高斯『稀少但成熟』的洞見」證明了【高斯求圓切點定理】。

「來自印度的天才無限家」證明了【拉馬努金的三角等式】。

「丘成桐的尺規作圖題」證明了【拿破崙分圓問題】和【丘成桐的尺規作圖題】。

「日本數學愛好協會的三等分活動」證明了【圓三等分最優秀獎】。

作者在研究中亦改變了數學觀，拓展了數學視野，找回學習熱情並重新體會到數學之美。

關鍵字：數學理解、數學學習態度

目錄

第 1 章　緒論

本章節分為三節說明：第一節論述本文的研究動機；第二節提出本研究之研究目的；第三節闡述文章緣起及證明的心路歷程。

第 1.1 節　動機

過去曾經擔任助教與學生進行教學互動，發現不少學生有類似的學習障礙：「這個概念學起來卡卡的，我確定邏輯正確，但很不自然，我就是難以接受。」或是：「我上課聽懂了，也不想再碰了，太過抽象真沒意思。」我驚訝得發現自己和學生有著同樣的疑問，隨著課程的深入越來越抽象，那股空虛感就越嚴重。這迫使我認真停下來思考，到底出了甚麼問題？經過時間沉澱我才慢慢理出頭緒，長期下來我只依賴課本中的文字敘述而沒有自己想過，導致學習缺乏感受，根本談不上喜不喜歡，許多內容就是囫圇吞棗地接受了。因此儘管考試成績不差，我卻不感到快樂，內心深知自己學得空虛、很不踏實。當助教面對學生時，我知道大量定義，定理，看到問題我能立刻擬出正確的制式步驟，但我難以用自己的話來呈現。我對該科沒有感情，更抓不到學科的核心。我很感謝這次教訓，讓我有機會察覺自己學習上的不足。

第 1.2 節　研究目的

仔細回顧學習歷程，筆記抄了不少，但心裡還是感到陌生，就像看過大量海洋影片，卻從未親自到過海邊一樣。我開始聆聽內心的想法：「你有沒有真正讀過幾何原本？」「你認識數學史的發展嗎，還是完全沒概念？」「你寫證明是不是用強記的？對你而言自然嗎？」「能否把定理知識長話短說，甚至圖像化理解？」等等。原來自己心中早已滿滿都是問題，自己學習的初衷是甚麼？不就是希望能問心無愧？能自信的回答這些問題嗎？為此需要大破大立，我改變了過去的學習方法，開始接觸從來不看的數學史，希望在腦中建立一個完整的數學觀，而不是支離破碎的知識累積。此外，對於抽象的定理或概念，把它淺化最好方法就是看實例，定理證明也可照搬到實例中對照。過去曾看到純文字的証明很吃力，一旦轉成實例操作便會恍然大悟「原來只是這樣」，我就不用去背文字證明，也對定

理更了解了。還有一點就是鋪陳：看到某處覺得卡卡的，如果換一種方法講會不會比較容易明白？實驗之後發現確實如此，後來我就敢用自己的方式了。這些體驗使根基牢固，再往上延伸時才不會越學越空虛。

我試著用新方法學初等幾何，那是我過去最排斥的學科。用自己淺化、鋪陳的方式在重新學它，去感受它，剛開始看不出效果，且比過去學習法累很多，但逐漸我的興趣又被重新點燃了。比如談到三角形相似，我能回溯幾何原本的原始概念，再到現在的概念，我會關注實際應用(重差術)及解題應用。過去是被逼著學，現在則是真心樂意主動探究，更自由更快樂。

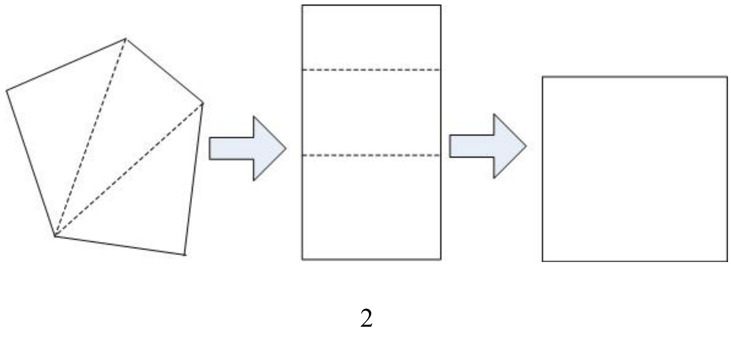
本文整理了自己在學習歷程中曾遇過的，來自不同年代的十個有名的數學定理。我試圖重新給予證明，追溯來源並蒐集資料擴充成數學文章，文章格式一致，包含名人名言、引言、背景介紹、證明、結語及參考文獻，期望達到起承轉合的作用。其中的背景介紹講述知名數學家的生平故事，或是相關問題的介紹，以作專題導向式的探討。對我而言定理本身就像十粒種子，每當探索過程中我吸取了經驗，增加了認知，這些種子便在我心中開始發芽長大，不斷交織茁壯，並散發學習的正能量。

第 1.3 節　文章緣起與感想

第 1.3.1 節　新月形的美麗與哀愁

過去曾聽老師提過，國中三年所學的幾何內容全都來自於歐幾里得的《幾何原本》，但一直等到大學時期，為了建立自己的數學觀，想對數學演變有更深入的理解，這才燃起閱讀《幾何原本》，及通曉古希臘人貢獻的欲望，本文即從幾何三大作圖中的化圓為方問題衍生而來。

古希臘人很依賴看得見的圖形，對他們而言數只有正整數，角、線段、面積等幾何量的大小都必須透過圖形上的直接比較來確認。比如面積就代表圖形大小，他們嚴格限用尺規建立一套等積變換的方法，而不像現在全部轉換成實數計算。



如圖，《幾何原本》中的Ⅰ-45(第一卷，命題 45)說任直線形可轉為給定角的平行四邊形，理由是根據Ⅰ-42 任三角形可轉為給定角的平行四邊形，以及Ⅰ-43 平行四邊形可維持角度不變轉為給定底長。此為左邊箭頭，Ⅱ-5 乃至Ⅱ-14 則為右邊箭頭，內文有提到具體作圖。因此直線形化為正方形用尺規完全解決了，那圓是否能化為正方形呢？這裡要強調，古希臘的等積轉化手段和最直接的幾何分割不同，骨子裡還是間接的，比如Ⅰ-43 中運用了平行四邊形的補形面積相等，是透過特殊形狀達到幾何形體的變換，因此當時數學家都在尋求恰當的圖形變換。

雖然原始目標沒達成，但並非一籌莫展，若放開尺規限制，Dinostratus 已利用三等分角的求方曲線解決了方圓問題，而與圓相關的新月形則找到三種特例。後來尤拉又發現兩種，這宗懸案直到二十世紀才運用代數理論解決，僅有這五種新月形。由於蒐集的資料中對這五種新月形都是簡單描述，我在文中共分成五個定理來專門介紹這些新月形，包括兩個扇形半徑比為何，要如何擺放才形成新月形等等。

事實上，國中幾何都是精簡整理過的，真正的「幾何原本」並不好讀，我把古希臘和現代方法對照如下：

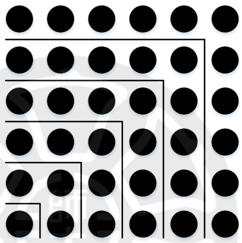
	證明	思考模式	表示	問題處理
古希臘	根據圖形操作，具有幾何意義，如乘方須轉為三次以下，處處受限。	尺規作圖、圖形轉換、圖像證明、窮竭法等。	文字和簡圖，須對照著看，難讀。	看一題解一題，個別沒系統。
現代	可完全脫離圖形，不受限制。	可用代數操作、解析幾何、微積分。	概念歸結成代數式，方便理解。	系統性的方法論。

有了這層認識，我們知道古希臘人總是從圖像進行思考，被幾何意義限制只能做粗淺的代數操作，便能理解當時能發現三種新月形已是很了不起的成就了，文中是後見之明用到三角函數和多重根式描述才能說明清楚，用古希臘的標準真是想都不敢想。

第 1.3.2 節　在沙地上思考的阿基米德

記得自己在小學求平均時便發現等差數列若以中間值為基準，往大小兩邊觀察則多的可補給少的，使其全變成中間值，即等差級數公式。當時也發現以多補少的方法套用到平方和、立方和就不靈了，這是我首次嘗試推廣問題並留下很深的印象，後來高中學數學歸納法時才知道早在兩千年前阿基米德便找出平方和公式，他在沙地上留下簡圖，其中蘊含的模式對任意平方和皆正確。本文便是介紹此類簡捷的圖像證明，並論證阿基米德藏於圖中的道理，最後運用其另一創舉「重心方法」來說明平方和公式的正確性。

經過實驗後我還發現文中的無字證明模式可推廣到一般次方和，比如下圖將平方數像剝洋蔥似的一層層剝開，每層為一次，可求得等差級數。



$$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$$

同理，若將立方數一層層剝開則每層會是二次。可列式表為

$$(n+1)^3-n^3=3n^2+3n+1 \text{ ，}$$

將每層合起來看，得立方數中含有平方和，即

$$(n+1)^3=\sum_{i=0}^{n}(i+1)^3-i^3=\sum_{i=0}^{n}3i^2+3i+1=3\sum_{i=0}^{n}i^2+3\sum_{i=0}^{n}i+\sum_{i=0}^{n}1 \text{ ，}$$

如此便可導出公式，將立方差、平方差等作線性組合更是能直接湊出公式係數。

另一種方法是用對稱性將平方數分成兩塊，即

$$n^2+n=\sum_{i=1}^{n}(i+n-i)+n=2\sum_{i=1}^{n}i \text{ ，}$$

但這回往高次類推就沒那麼順利了，對立方數而言會多出一項，

$$n^3+n^2=\sum_{i=1}^{n}\left(i+n-i\right)^2+n^2=2\sum_{i=1}^{n}i^2+2\sum_{i=1}^{n-1}i\left(n-i\right)$$

把最後一項乘開則平方和會抵消，等於沒有做。我思考良久才克服，原來特別項 $\sum_{i=1}^{n-1}i\left(n-i\right)$ 能夠變形。如果逐項表示如下：第一列有 $n-1$ 個 1，第二列有 $n-2$ 個 2，依此類推如下圖。

$$\begin{array}{ccccc}
1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\
 & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 & & n-3 & n-3 & n-3 \\
 & & & n-2 & n-2 \\
 & & & & n-1
\end{array}$$

則每行皆為等差級數，用公式加總可表為

$$\frac{1\cdot 2}{2}+\frac{2\cdot 3}{2}+\cdots+\frac{\left(n-1\right)\cdot n}{2}=\frac{1}{2}\left[\left(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2\right)-\left(1+2+3+\cdots+n\right)\right]，$$

代回原式可得平方和公式。令我驚訝的是，阿基米德圖解也隱藏此關鍵，即 $\sum_{i=1}^{n-1}i\left(n-i\right)$ 的兩種表示法。其中

$$\sum_{i=1}^{n-1}i\left(n-i\right)=n\sum_{i=1}^{n-1}i-\sum_{i=1}^{n-1}i^2$$

恰好對應到圖解下半部最上排的長方形，而

$$\frac{1}{2}\left[\left(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2\right)-\left(1+2+3+\cdots+n\right)\right]$$

則對應到上半部最上排的長方形。運用此法類推，對立方和考慮 $\sum_{i=1}^{n-1}i^2\left(n-i\right)$ 的兩種表示法。可得

$$n\sum_{i=1}^{n-1}i^2-\sum_{i=1}^{n-1}i^3=\sum_{i=1}^{n-1}\frac{i\left(i+1\right)\left(2i+1\right)}{6}，$$

對照下圖，左式為先填補再扣除，右式為每行用平方和公式加總。

$$
\begin{array}{cccc}
1^2 \;\cdots & 1^2 & 1^2 & 1^2 \\
\ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 & (n-3)^2 & (n-3)^2 & (n-3)^2 \\
 & & (n-2)^2 & (n-2)^2 \\
 & & & (n-1)^2
\end{array}
$$

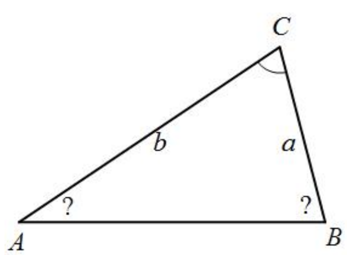
整理可推得立方和公式，但四次方以上沒有對應的幾何實體。如前所述，古希臘數學僅依靠看得見的圖像，阿基米德僅憑一幅圖獲得了當時最好的成果。有了這層認識，次方和公式便不僅是練習數學歸納法的習題，而是有趣的事物了。

第 1.3.3 節　韋達的正切定律

早在巴比倫時期，人們就跨越單純的計算，開始考慮已知關係求原數的問題，並發展出一些巧妙的解法，以問題、列式、答案、解法、驗算等五個步驟記錄下來，希臘亦發展出幾何的代數，其共同點就是純文字記錄。然而閱讀文字敘述會產生很大的干擾，以我自己為例，看到第五句就忘記第一句的步驟，需要反覆檢查且開始感到煩躁，邊理解還要邊記憶太耗神了。這使得數學討論變得很繁瑣(以現在的標準)，而且停留在很淺的層次，直到十六世紀韋達的出現。本文主旨便是介紹韋達的貢獻，他系統性地使用字母來表示已知數、未知數及其乘冪，創造了數學式的語言。從此冗長的敘述可藉由符號化成簡短的式子，閱讀快且易於表達。韋達也將此法應用於三角學，具體地給出了正弦、餘弦的倍角表達式，和差化積公式及正切定律

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{\tan\left(\dfrac{A-B}{2}\right)}{\tan\left(\dfrac{A+B}{2}\right)}\text{。}$$

此定律的形式只涉及邊長與對角正切值的「乘除」關係，提供了便利的解三角形方法：如圖所示，給定三角形兩邊 a,b 及其夾角 $\angle C$ ，欲求得 $\angle A,\angle B$ 的值。



這問題當然能用餘弦定理求出，但在沒有計算機的年代，一切只能靠手算。當時最好的辦法是運用納皮爾(Napier, 1550-1617)的對數表，把正切定律變形為

$$\frac{a-b}{a+b}\cot\frac{C}{2}=\tan\left(\frac{A-B}{2}\right),$$

將等號兩邊同時取對數，得

$$\log(a-b)-\log(a+b)+\log\cot\frac{C}{2}=\log\tan\left(\frac{A-B}{2}\right),$$

已知 $a,b,\angle C$ ，可先查對數表算出左式，再由數值查表得 $\angle A-\angle B$ ，搭配 $\angle A+\angle B=180°-\angle C$ 便可求出 $\angle A,\angle B$ ，避開相乘、平方、開方等繁雜的計算。

文中我運用幾何重證正切定律，並和代數方法做對照，後者幾乎不用思考，將等式代入換一下就出來了。這也帶出韋達創見的真正威力：從操作數進展到操作等式。仔細想想，每個恆等式就意味著殊途同歸，代表不同程序甚至不同概念間的一座橋樑。多虧有韋達，我們才能輕鬆操作複雜概念，在其他文章中能看到，現在我們可以解決希臘人無法想像的問題，將等式操作運用到出神入化的程度。

第 1.3.4 節　笛卡兒的圓之吻定理

笛卡兒繼承了韋達的想法，並認為希臘幾何太過抽象，淪為使想像力疲勞的工具。而代數又過於遵守原則公式，不是一門改良心智的科學。因此致力將代數跟幾何融會貫通，截長補短，終於發明了坐標幾何。本文意圖重證笛卡兒發現的圓之吻定理，定理揭示了四個彼此互切之圓的半徑關係，多年後也被日本和算家發現，可謂英雄所見略同。

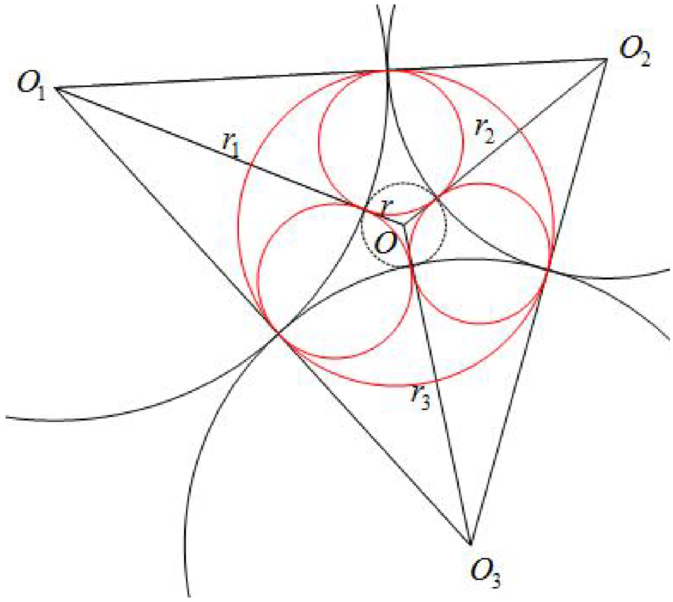
若將四個圓心兩兩連線，則圓心 O 把三角形 $O_1O_2O_3$ 分割成三個更小的三角形。由於三個小三角形面積和為三角形 $O_1O_2O_3$ 面積，我最初的想法是將面積全部以海倫公式代入，可得根式方程式

$$\sqrt{(r_1+r_2+r_3)r_1r_2r_3}=\sqrt{(r+r_2+r_3)rr_2r_3}+\sqrt{(r_1+r+r_3)r_1rr_3}+\sqrt{(r_1+r_2+r)r_1r_2r},$$

經過反覆移項與平方便得 r 的 8 次方程式。然而太過複雜根本解不了，必須另闢蹊徑，於是我的研究目標轉到三角形的角度上，運用餘弦定理並且查閱餘弦的相關恆等式，歷經幾輪代數轉換後終於推導出結果。

後來我查閱專書希望找到較簡易的證明，發現全部避不開大量的代數轉換。

比如以下不用三角函數的方法：如下圖，每三個互切圓的三個切點決定一圓(四個紅圓)，容易證明此圓恰為對應三角形的內切圓。



又根據海倫公式有

$$\frac{1}{r^2}=\frac{s}{(s-a)(s-b)(s-c)}=\frac{1}{(s-a)(s-b)}+\frac{1}{(s-b)(s-c)}+\frac{1}{(s-c)(s-a)} ,$$

將圖中符號代入三角形得$O_1O_2O_3$內切圓半徑的平方倒數為

$$\frac{1}{r_1r_2}+\frac{1}{r_2r_3}+\frac{1}{r_3r_1} 。$$

依此類推，設r_1,r_2,r_3,r的倒數與對應內切圓半徑的倒數分別以ε,η等符號表示，則有如下關係

$$\begin{cases}\varepsilon_1\varepsilon_2+\varepsilon_2\varepsilon_3+\varepsilon_1\varepsilon_3=\eta_4^2\\ \varepsilon_1\varepsilon_2+\varepsilon_2\varepsilon_4+\varepsilon_1\varepsilon_4=\eta_3^2\\ \varepsilon_1\varepsilon_3+\varepsilon_3\varepsilon_4+\varepsilon_1\varepsilon_4=\eta_2^2\\ \varepsilon_2\varepsilon_3+\varepsilon_3\varepsilon_4+\varepsilon_2\varepsilon_4=\eta_1^2\end{cases} ,$$

類似方法可證，原本的四圓也會是四個紅圓對應三角形的內切圓(傍切圓)，而有

$$\begin{cases}\eta_1\eta_2+\eta_2\eta_3+\eta_1\eta_3=\varepsilon_4^2\\ \eta_1\eta_2-\eta_2\eta_4-\eta_1\eta_4=\varepsilon_3^2\\ \eta_1\eta_3-\eta_3\eta_4-\eta_1\eta_4=\varepsilon_2^2\\ \eta_2\eta_3-\eta_3\eta_4-\eta_2\eta_4=\varepsilon_1^2\end{cases} ,$$

最後經由複雜的代數轉換得到

$$\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\varepsilon_3^2+\varepsilon_4^2=2\left(\varepsilon_1\varepsilon_2+\varepsilon_1\varepsilon_3+\varepsilon_1\varepsilon_4+\varepsilon_2\varepsilon_3+\varepsilon_2\varepsilon_4+\varepsilon_3\varepsilon_4\right)。$$

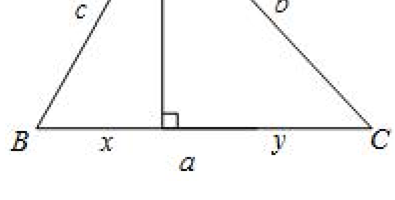
這裡可以看到，代數式除了方便記憶表達還彰顯了形式，我們才能夠做換元等更高級的操作，融合幾何與代數導出這般美麗的定理。

第 1.3.5 節　被遺忘的費馬-尤拉勾股定理

小時候大概是解固定模式的應用問題習慣了，總認為解題方法是單一的，有固定流程的，長大後才發現並非如此。人們發展了不同的數學方法和工具，就像荒蕪中開墾的一條條道路，面對一個新問題常不知走哪條路好，往往輪番嘗試卻一無所獲。而有的問題對特定道路有捷徑，選其他路會繞很遠甚至永遠到不了。例如證明不等式有時用代數變形，有時用數學歸納法，或是用到微積分，視問題而定，並沒有一招通吃的完美方法。幾何問題更是變化多端，本文即介紹一道由費馬提出，尤拉證明的幾何構造問題。

我的幾何感覺很弱，看了半天不得要領，便想列代數式來解決。我當時想試試能不能以純代數操作避開幾何得出結果，恰好成功得到證明一(附錄 1)。但過程比較繁瑣，過幾天又開始尋找更好的方法，便運用三角函數輔助得到證明二(附錄 1)。我深知這絕非尤拉當時的證明，一定有更簡單的方法，為此我從一些幾何題型中找靈感，終於找出滿意的證明三(本文)。經過比較我總結出一些想法：證明一中我沒有透過圖形去深入思考，而是希望全交給代數的程序化運算來解決，和圖形的關聯最小。證明二用三角函數表示幾何量，仍然是代數方法，卻能更順暢而直觀地融入圖形。證明三則完全從圖形角度來思考，所有步驟都有幾何意義，代數含量最少，卻是我認為最困難的方法。當條件很少時往往需要自行創造條件(添加輔助線、輔助圖形)，需要經驗、洞察力和運氣。最後附上海倫公式的不同證明和我的想法做對照。

證明一：設未知量做代數運算，如圖



根據畢氏定理可得以下聯立方程式，解得

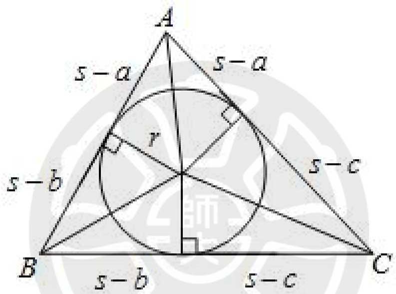
$$\begin{cases} x+y=a \\ c^2-x^2=b^2-y^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=a \\ x-y=\dfrac{c^2-b^2}{a} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2a} \\ y=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2a} \end{cases},$$

再代入$\Delta=\dfrac{a\sqrt{c^2-x^2}}{2}$，用平方差公式操作整理可得

$$\Delta=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\text{。}$$

注意列式後的運算就和圖形完全無關了。

證明二：運用三角函數做代數運算(尤拉證明)，尤拉發現$s-a,s-b,s-c$和內切圓相關，如圖



欲證

$$s(s-a)(s-b)(s-c)=\Delta^2=s^2r^2\text{，}$$

可由圖觀察到

$$\tan\frac{A}{2}=\frac{r}{s-a},\tan\frac{B}{2}=\frac{r}{s-b},\tan\frac{C}{2}=\frac{r}{s-c}\text{，}$$

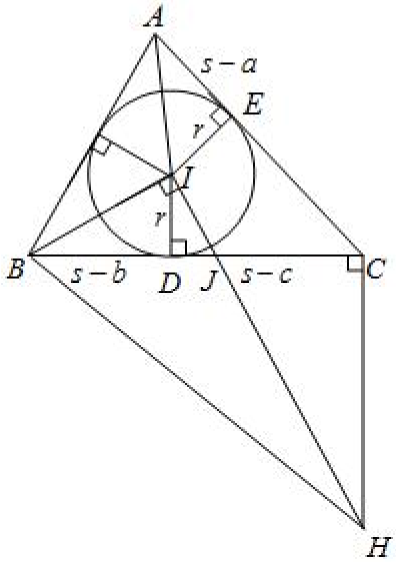
並代入三角形正切恆等式

$$\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}=1\text{，}$$

得

$$(s-a)(s-b)(s-c)=sr^2\text{。}$$

證明三：純幾何證明(海倫證明)，分別過I點和C點作$\overline{BI}$和$\overline{BC}$的垂線，設交於H點如圖，



則可證明$\Delta AEI \sim \Delta BCH$，得

$$\frac{a}{s-a}=\frac{\overline{CH}}{r}=\frac{\overline{CJ}}{\overline{JD}}\Rightarrow\frac{s}{s-a}=\frac{\overline{CD}}{\overline{JD}}=\frac{(s-c)\cdot(s-b)}{\overline{JD}\cdot(s-b)}=\frac{(s-c)\cdot(s-b)}{r^2}，$$

即$(s-a)(s-b)(s-c)=sr^2$。我一直很好奇這種作法是有跡可循還是偶然找到的？

第 1.3.6 節　科茨的一道定理

許多新概念剛誕生時都不是立刻就被世人所接受，人們從各種疑慮到坦然接受會有一段適應的過程，學習數學概念也是如此。我過去學複數只是作解題訓練，心裡並沒有接受它，而是當作外來者看待，本文的科茨定理是我發現複數好處的一個例子。

由餘弦定理可知，科茨定理的本質是整數多項式的因式分解，卻都使用複數來證明，記得當時的疑問很直接：「不用複數沒法證嗎？原式和因式全有了不是乘開檢查就知道了嗎？」這勾起我的好奇心想弄個明白，開始嘗試非複數證明。果然直接乘開太過複雜看不出模式，需要使用間接曲折的手段。於是我將目標轉為證明整除性：

$$x^2-2\cos\frac{2k\pi}{n}x+1\,\Big|\,x^n-1, k=1,2,3...，$$

但怎麼都想不出來，直到我把原式改為

$$x^2-2\cos\theta x+1\,\big|\,x^{2n}-2\cos n\theta x^n+1, n=1,2,3,...。$$

才找到途徑成功證明(附錄 2)。數學結構真的很奇妙，按照小學除法概念不是要盡力把次數降低嗎？但有時刻意繞遠路反而有數學結構能更快達到目的。數論中很多這種情況，例如說明整除性

$$43 \mid 7^p - 6^p - 1, p > 3 \text{ ，}$$

我們會把 7 變大，再乘上另一數來獲得結構

$$7^p - 6^p - 1 \equiv -\left(6^{2p} + 6^p + 1\right)\left(\bmod 43\right) \Rightarrow \left(6^{2p} + 6^p + 1\right) = \frac{6^{3p} - 1}{6^p - 1} = \frac{\left(6^3 - 1\right) \cdot n}{6^p - 1} \text{ ，}$$

其中 $43 = 6^2 + 6 + 1$ 整除分子但不整除分母，便輾轉得整除性成立。這個證明當然複雜且冗長，若是運用複數說明

$$x - z_k \mid x^n - 1, k = 1,2,3... \text{ ，}$$

則由因式定理得證，根本毫不費勁，接受它便提升到更方便的代數結構。但它到底是甚麼呢？我突然想起複數和某種二階矩陣同構，於是靈光一閃：這不就是平面的平移搭配旋轉，簡化成數來看嗎！我終於說服自己接受複數了。

複數具備的結構使我們能突破舊結構的難點，在文末舉了組合數恆等式為例，但 $i = \sqrt{-1}$ ，我發現同樣的道理，根號數也能解決類似問題。比如和 Mersenne 質數相關的兩數列

$$U_n = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} \cdot 3 + \binom{n}{5} \cdot 3^2 + ..., V_n = 2\left(1 + \binom{n}{2} \cdot 3 + \binom{n}{4} \cdot 3^2 + ...\right)$$

滿足以下關係式

$$V_k^2 - 12U_k^2 = (-2)^{k+2}, (-2)^{l+1} V_{k-l} = 12U_k U_l - V_k V_l$$

直接證明很麻煩，但若接受 $\sqrt{3}$ 這個概念，便可表示為

$$U_n = \frac{a^n - b^n}{a - b}, V_n = a^n + b^n, a = 1 + \sqrt{3}, b = 1 - \sqrt{3} \text{ ，}$$

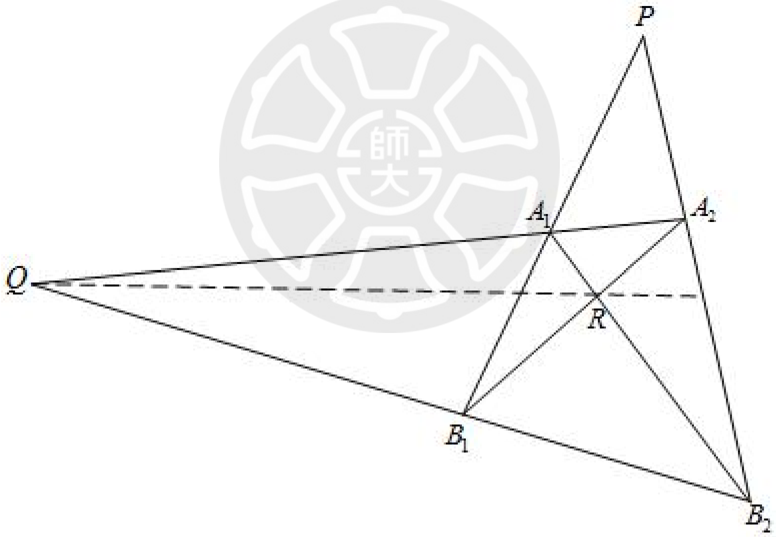
進而輕鬆證明關係式，經過思考我可以從更多面向看待這些概念。

第 1.3.7 節　來自高斯「稀少但成熟」的洞見

高中時曾經和愛做數獨等邏輯遊戲的文科生閒聊，他好奇數學家是不是從公理出發一路制式化的推導出各種結果？像機器人一樣？我現在知道並非如此，邏輯遊戲的推演過程確實非常單純，所有可能性都攤在桌上。數學世界則深入複雜

多了，存在各種不可預見的現象、模式和結構。比如三角形按邊長來分有皆不等長、兩邊等長、三邊等長這三種可能，按角度如此來分也有三種可能，但搭配起來只有三種而非九種，若角度按銳角、直角、鈍角三角形來分，和邊長搭配也不是九種而是七種，邊或角暗藏的結構讓一些情況不會發生或重疊了。本文便介紹了由高斯發現，關於圓切點幾何結構的定理。

我首先延續先前費馬尤拉勾股定理的作法，想在線段間建立代數關係式來推導，隨即發現很難入手。主要是過圓外P點的直線在圓內的移動條件太過寬鬆，和圓相交的四個點全在變動，但連線對應的Q, R兩點卻牢牢的鎖死在切點連線上，這是甚麼道理？我去查閱下圖這種將四邊形$A_1B_1B_2A_2$連線所構成的特殊形狀，發現虛線$\overline{QR}$會和過P直線形成調和點列。至此我已經看到熟悉的形狀了，同時運用 Menelaus 定理及 Ceva 定理，便成功證明了調和性(兩條線我採用不同的三角形來看)。之後我又證明在圓內割線的分比性質，得到證明一(附錄 3)。



對於圓內割線的分比性質我是曉得的，過去曾根據正交圓的性質推導得出此性質(附錄 3)，這裡用更基本的方法重證。後來我想起老師說過調和性可以用交比不變性來證明，便去查定義並再次獲得證明二(本文)。過了一段日子，我想到自己都是用上圖為基礎作證明，但舒馬赫提出時卻只考慮圓內的R點，在高斯之前是沒人注意到Q點的。這促使我想分別證明R點與Q點都在線上，同樣利用交比不變性但換個模式，得到證明三(附錄 3)。最後我想再用別的方式來論證圓內割線的分比性質，以特殊情形來說明一般情形而得證明四(附錄 3)。

過去談幾何證明總會設法從角度或長度來考慮，射影現象算是獨立出來的新結構，

比如上圖，隨便怎麼畫都具有調和性，把線段及角度的大小因素全都抽離了，共線性與共點性有這樣優雅的結構，真是幾何中出人意料的的驚喜。

第 1.3.8 節　來自印度的天才無限家

本文介紹數學天才拉馬努金發現的三角恆等式，並接觸代數類的數學結構。我覺得代數結構很有意思，例如從整數擴張到分數，可能有人說：「這不就是平分引出來的概念而已嗎？」我曾想過以下問題，任意給定n，能不能證明存在無窮多組平方數a^2,b^2，使得$2nb^2<na^2<(2n+1)b^2$？純粹從整數的角度看這一點都不直觀，但如果轉換形態為$2<\frac{a^2}{b^2}<2+\frac{1}{n}$，你就能馬上得出，因為相近的分數平方差可以非常小，足夠小時便能擠進 2 的細縫中。為什麼單用整數完全沒有頭緒？如果求a^2,b^2使得$a^2=2b^2$，改成分數就完全沒有幫助。可見整數和分數的運算結構各有利弊，都能解答某類問題。

方程式的近似求根就和分數的思考模式較雷同，著重大小的相對概念，只要誤差夠小便可以忽略不計，不會影響結果。然而很多牽涉到代數結構的問題是沒有這種直觀的，例 1：兩個分子分母質因數結構完全不同的有理數，可以要多近有多近。例 2：你可以很容易想像多項式或指數函數圖形，但你畫不出$\phi(n)$的圖形，因為前者只牽涉到量，後者則是每個數的質因數結構。例 3：你不可能畫出頂點坐標皆整數的正五邊形，但能畫出冒牌貨騙過任何精密測量。例 4：兩個次數係數差很多的代數數，可能靠得非常近。所謂失之毫釐，差之千里，代數數間的運算模式自成一格，說明代數恆等式的成立考慮近似值是完全沒用的。

對於一個代數數，唯一的連結便是其滿足的整係數多項式，四則運算及開根號都在不同多項式間搭起橋樑。比如文中的等式，

$$\sqrt[3]{\cos 40^\circ}+\sqrt[3]{\cos 80^\circ}-\sqrt[3]{\cos 20^\circ}=\sqrt[3]{\frac{3\left(\sqrt[3]{9}-2\right)}{2}}\ ,$$

因為$\cos 40^\circ,\cos 80^\circ,-\cos 20^\circ$恰為某三次多項式的根，我們要做的便是倒回來，由三元三次式間的關係抽絲剝繭推得一次式的值，即

$$\begin{cases} a^3+b^3+c^3=0; \\ a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3=-\dfrac{3}{4}; \Rightarrow a+b+c=? \\ abc=-\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

證明流程可分為

$$\begin{cases} f\left(a^3+b^3+c^3, a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3, abc\right)=S^3-3ST \\ g\left(a^3+b^3+c^3, a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3, abc\right)=S^3+2T^3 \end{cases},$$

進而得出

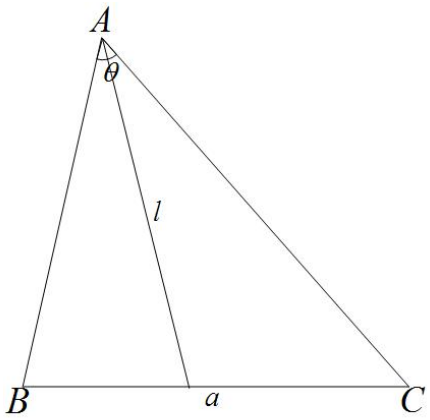
$$h\left(S^3-3ST, S^3+2T^3, S\right)=S^9+9S^6+27S^3 \text{。}$$

其中 f,g,h 為有理函數，最後套入數字剛好能夠配出立方式，輾轉得出拉馬努金的三角等式。然而證明是一回事，發現它又是另一回事了，拉馬努金神一樣的數學感官似乎總能引領他看出驚人的結構關係。

第 1.3.9 節　丘成桐的尺規作圖題

回想就讀國中時，幾何大概是我最不擅長的科目了，它不像解二次方程式或求等比級數那樣目標明確，而是多種概念混雜其中。我不知道何時該關注線段，角度或是面積，因此給我的受挫感很重，習題往往沒有頭緒被我擺到一邊。一晃眼到了現在，發現自己已經在挑戰著名數學家丘成桐的幾何難題了，可見聚沙成塔，透過豐富的幾何基礎知識和解題經驗是真的能由量的改變引發質的改變。丘成桐院士透露他成功的秘訣是「用苦工而非天才。」應該也是同個道理。

尺規作圖只能畫直線跟圓，意味著我要設法將目標編排成一堆子目標(較為容易)的序列，繼續分解下去直到成為基本目標：作單一直線或圓。因此反過來說，作圖題的基本功就是熟知哪些固定條件的點，其軌跡是直線或圓的？比如題目中的給定角 $\angle A=\theta$ 條件，其軌跡就是圓。也有非常重要的子目標，比如作線外一點垂線、線上一點垂線、中點、中垂線、角平分線都用到同一個圖形：「箏形」。



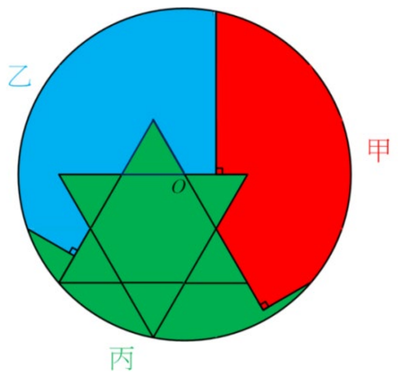
有些問題只需要簡單套用，比如作三角形的外心即為兩中垂線的交點。而丘院士問題的另一條件：$\angle A$ 的角平分線長度為 l 則是毫不明顯的，需要對圖形進行深入探究。我們可以把待作的幾何形體當作已知，作相似形等輔助線來回頭推敲，也可以融入代數，透過相關條件列式，先得出一次或二次方程式再回頭構思作圖。本文證明中兩者兼具，將角平分線延伸後發現並構造代數關係，解出根式後恰好能運用畢氏定理得出簡捷的作法，中途經歷的艱難和最後獲得的成就感實在難以言喻。此外我思考了其他有明的作圖問題，包括正五邊形的作圖，拿破崙分圓問題等(附錄 4)，使我對幾何的信心恢復不少。我還查到圓的反演變換可用來探究單用圓規的作圖，而先前介紹高斯的文章則提到射影幾何的知識可用來思考單用直尺的作圖。要是在其中發現感興趣的問題，對我而言就是良好的學習動機。

面對一個具挑戰性的難題，經過很多嘗試而沒有結果是正常的，關鍵時刻每當獲得一點進展都會帶來深刻的思想，當下感到格外清醒且滿足。長期堅持下去便能養成豐富的經驗，創造力，以及不輕易言敗的意志力。

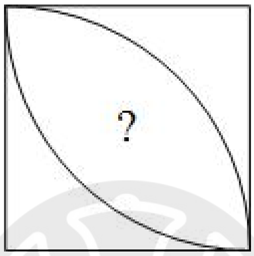
第 1.3.10 節　日本數學愛好協會的三等分活動

時至今日，數學已不再是極少數專家的課題，各種數學普及讀物，以及數學遊戲和謎題的出現，已逐漸把數學推向大眾。只要有心探索，不需太高深的數學知識也能體驗到豐富的樂趣，更能有所收穫。本文介紹「日本數學愛好協會」提出的三等分圓挑戰及分享自己的經驗。

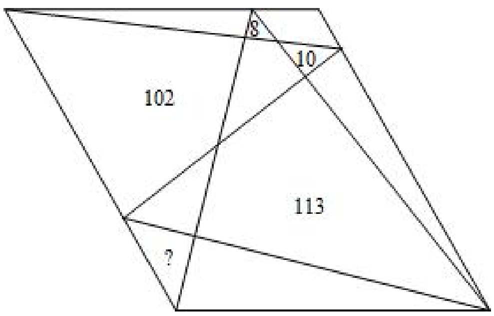
如果要你發揮創意把一個圓三等分，你會怎麼分？基於好奇我點進愛好協會網站，隨即被這個最優秀獎吸引，如圖分成很不規則的三塊，要說明面積各占圓的三分之一。



我的初步想法是用已知的形狀：圓形(扇形)、長方形、三角形來拼湊出未知的形狀。比如欲求下圖中的橄欖形面積，觀察得正方形及右上左下的90°扇形，便可用其位置關係湊出橄欖形，最後分別算出面積代入即可。



然而仔細一想發現沒那麼單純，我將圓弧線部分對應至扇形，其他直線部分則畫出對應三角形。結果要是120°扇形，代表這些三角形面積運算後會和π有關？除非長度涉及π或角度很特殊，否則根本不合理。我一度以為自己畫錯又檢查幾遍，最後突然領悟，關鍵是「抵消」。很多問題只給你片面的訊息，請你求交互作用後的結果，照理說結果會是變量，但在特殊情境下結果反而是確定的，因為各路變量神奇的互相抵消了。比如下方的平行四邊形，只有打問號的三角形面積是確定的，未知中居然藏著已知。



「抵消」這種思考模式不限於幾何，例如求所有小於n並和其互質的數a之和，從分布多寡或質因數來看都是完全隨機的，直到你發現a和$n-a$總是成對出現。

我是猜出模式後才投入計算得出證明一(本文)，甲塊最容易處理而乙塊較難，須要用餘弦定理解三角形。後來我去看官方的解答草圖，卻是以完全不同的思路

做構造拼貼，真的好有意思，我理解後擴充成證明二(附錄 5)。

圖形都是有結構的，透過猜測與實驗將形體拓展或變動，便能讓特徵凸顯出來變成我們更熟悉的形體。和原先的幾何圖形便會形成新的結構效應，看出原圖形中隱含的層次。我認為這種解題後進行反思的活動對自己是極為有益的。

第 2 章　幾何類文章

本章共分六節，依時間順序列出了六篇幾何類的文章。內容包括：和勾股定理相關的構造定理、化圓為方延伸出的新月形定理、圓和直線搭配的作圖問題、單用直尺的求圓切點定理、圓作為實體的三等分問題、涉及多圓相切的圓之吻定理。

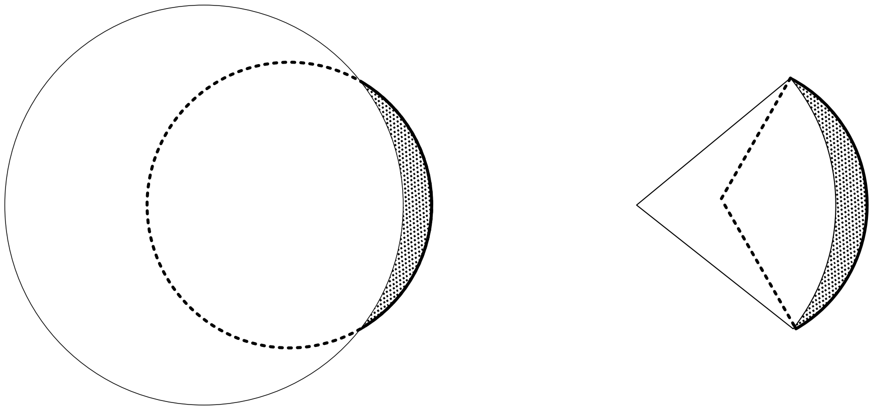
第 2.1 節　新月形的美麗與哀愁

> 「希波克拉底作出了新月形的等面積正方形，並在幾何學中做出過許多其它發現，可以說是空前絕後之富有原創性的作圖天才。」
>
> ——普羅克洛斯（Proclus, 410~485）

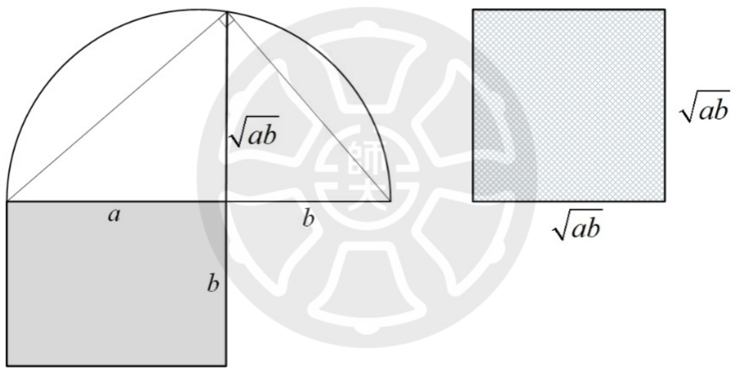
1. 引言

晚上看月亮，經常會看到月亮形如眉毛狀的「新月」。這是因為太陽照射月亮時，地球擋住了大部份月亮的區域，如下圖所示：

在數學上，有一種幾何圖形——新月形，它的命名應該來至於月亮的形狀。在下圖中，當一圓（粗線圓）被另一圓（細線圓）擋住大部分時，其沒有被遮住的眉毛狀區域就是所謂的新月形。新月形也可以看成兩個不完全重疊的扇形，它們的兩個圓弧所圍成的區域。



新月形的研究可追溯到古希臘時期，那時的幾何學家熱衷於研究「化圓為方」的作圖問題——即「給定一圓，用直尺與圓規作出跟此圓面積相等的正方形。」事實上，古希臘數學家首先碰到的是「化多邊形為方」問題，即「給定一多邊形，用直尺與圓規作出跟此多邊形面積相等的正方形。」舉例來說，給定長、寬分別為 a 與 b 的矩形，如下圖所示。

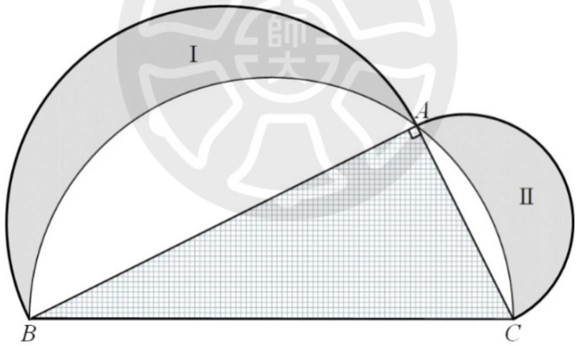


希臘數學家會先作直徑為 $a+b$ 的半圓，然後在半圓內再作一直角三角形，而此直角三角形的高為 $\sqrt{ab}$ 。以此高為邊的正方形，它的面積剛好與給定的矩形一樣。仿照這樣的做法，古希臘數學家知道：給定任意三角形或任意多邊形，「用直尺與圓規作出跟此多邊形面積相等的正方形」是沒問題的。

「化多邊形為方」問題解決之後，嘗試解決「化圓為方」問題是再自然不過的了。可惜的是，「化圓為方」問題在當時一直沒有被解決，希波克拉底(Hippocrates of Chios，約 460~380 B.C.)退而求其次去研究：有哪些類型的新月形，可以用直尺跟圓規做出跟此新月形面積相等的正方形，即所謂的「化新月為方」問題。事實上，並不是每個新月形都可以平方化，希

波克拉底一生中只找到三種可平方化的新月形。雖然只發現三種，但這也說明了曲線圖形是有可能平方化的(在當時,大多數人認為這是不可能的)。然而，這三個特例對「化圓為方」問題沒有甚麼幫助，這種可平方化的新月形研究就被擱置了好長一段時間。一直到兩千年後的 1771 年，偉大的數學家歐拉才又重新考慮「化新月為方」問題，並找出另外兩種可平方化的新月形。到了二十世紀，兩位俄國數學家柴巴特羅（Tschebatorew）和德羅諾（Dorodnow）證明只有以上五種新月形可平方化(請參閱[3])，這為「化新月為方」問題畫下了終點，也成為探索「化圓為方」問題過程中的一段有趣插曲。

在探討希波克拉底及歐拉發現的五種新月形之前，我們來介紹希波克拉底發現的另一個和新月形有關的傑作——月牙定理。如下圖所示，在以 $\overline{BC}$ 為直徑的半圓上作一直角三角形 ABC，再分別以 $\overline{AB}$ 及 $\overline{AC}$ 為直徑作兩個半圓，這兩個半圓與原來的半圓會交出兩個新月形 I 與 II 。



希波克拉底的月牙定理是說：

新月形 I 的面積+新月形 II 的面積＝直角三角形 ABC 的面積。

在此探索一下月牙定理的証明，根據勾股定理，直角三角形 ABC 對應的三邊長 a,b,c 會滿足

$$a^2 = c^2 + b^2 ，$$

即

$$\frac{\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2}{2} = \frac{\pi\left(\frac{c}{2}\right)^2}{2} + \frac{\pi\left(\frac{b}{2}\right)^2}{2} 。$$

配合上圖，上述等式是說：

以$\overline{BC}$為直徑的半圓面積＝以$\overline{AB}$及$\overline{AC}$為直徑的兩個半圓面積和。

如圖所示，這三個半圓有重疊的部分——即兩個小圓弧。將等式兩邊分別扣掉這兩個小圓弧，就得到

新月形Ⅰ的面積+新月形Ⅱ的面積＝直角三角形ABC的面積，

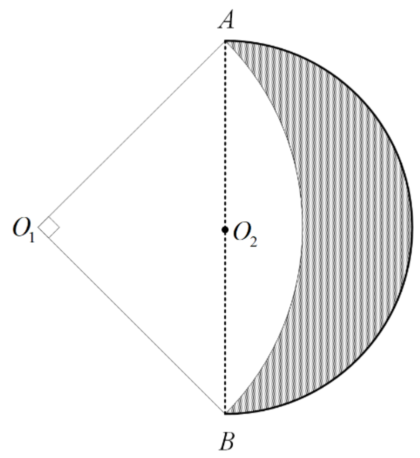
即證得月牙定理。■

或許是受到畢氏定理的啟發，希波克拉底才想到這道月牙定理——在面積上，將兩個特別的新月形融合成一個直角三角形。透過古希臘時代所解決的「化多邊形為方」問題，月牙定理也告訴我們：可以作出一個正方形，讓正方形的面積與那兩個新月形的面積和相等。月牙定理的成功讓希波克拉底相信：某些特殊類型的新月形或許真的有機會平方化。這些特殊類型的新月形也是接下來要討論的重點。

2. 希波克拉底的三種可平方化新月形

在這節裡，我們將介紹希波克拉底所發現的三種可平方化的新月形，除了證明面積相等外，也一併提出如何作圖的方法。因為新月形是兩個不完全重疊的扇形之圓弧所圍成的區域，所以從圓弧的圓心角為直角或平角（即兩扇形為四分之一圓或半圓）找起，是一種合理的嘗試。希波克拉底所發現的第一種可平方化新月形正是這種類型，讓我們介紹如下。

【定理一】下圖的灰色區域，是以O_1為圓心，A和B為端點的扇形O_1AB（四分之一圓）和以$\overline{AB}$的中點O_2為圓心，A和B為端點的扇形O_2AB（半圓）所圍出的新月形。



特別地，若$\overline{O_2A}=1$，即$\overline{O_1A}=\sqrt{2}$，則

新月形的面積＝三角形O_1AB的面積，

即該新月形可以平方化。

【證明】因為扇形O_1AB（四分之一圓）的面積為

$$\frac{\pi\cdot\sqrt{2}^2}{4}=\frac{\pi}{2}$$

與半圓O_2AB的面積

$$\frac{\pi\cdot 1^2}{2}=\frac{\pi}{2}$$

相等，所以扣除重疊的部分後，得到

新月形的面積＝等腰直角三角形O_1AB的面積，

得證。■

從定理一中，讀者不難發現這個可平方化的新月形滿足以下兩個條件：

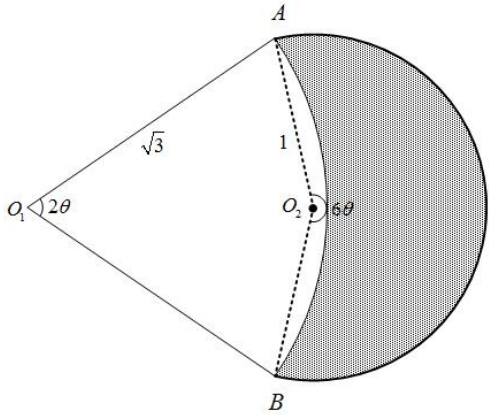
(1) 兩扇形的圓心角比值是有理數，或兩扇形的半徑比是這有理數的開根號。

(2) 圍出新月形的兩扇形面積相等。

這兩個條件一直是數學家找尋可平方化新月形的明燈，讓我們繼續介紹希波克拉底所發現的第二種可平方化的新月形。

【定理二】下圖的灰色區域，是以O_1為圓心，A和B為端點的扇形O_1AB（圓心角為2θ）和以O_2為圓心，A和B為端點的扇形O_2AB（圓心角為6θ）所

圍出的新月形。



特別地，若再要求$\overline{O_1A}=\sqrt{3}$，$\overline{O_2A}=1$，則此時的θ(弧度)恰有一個解且滿足

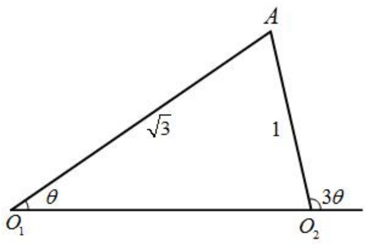
$$\sin\theta=\frac{\sqrt{3-\sqrt{3}}}{2}$$

及

新月形的面積＝箏形O_1AO_2B的面積，

即該新月形可以平方化。

【證明】為了證明$\sin\theta=\frac{\sqrt{3-\sqrt{3}}}{2}$，我們把注意力放在箏形$O_1AO_2B$的一半，即三角形$O_1AO_2$上，如下圖所示。



根據正弦定理，得

$$\frac{1}{\sin\theta}=\frac{\sqrt{3}}{\sin(\pi-3\theta)}=\frac{\sqrt{3}}{\sin 3\theta}\text{ ，}$$

再利用三倍角公式展開得

$$\frac{1}{\sin\theta}=\frac{\sqrt{3}}{3\sin\theta-4\sin^3\theta}\text{ ，}$$

將上式交叉相乘且等號兩邊同時消去$\sin\theta$，得

$$3-4\sin^2\theta=\sqrt{3}\text{ ，}$$

解得

$$\sin\theta=\pm\frac{\sqrt{3-\sqrt{3}}}{2}\text{ 。}$$

因為$0°<\theta<180°$，所以$\sin\theta>0$，即

$$\sin\theta=\frac{\sqrt{3-\sqrt{3}}}{2}\text{ 。}$$

接著證明新月形的面積＝箏形O_1AO_2B的面積，因為扇形O_1AB的面積為

$$\pi\cdot\sqrt{3}^2\cdot\frac{2\theta}{2\pi}=3\theta$$

與扇形O_2AB的面積

$$\pi\cdot 1^2\cdot\frac{6\theta}{2\pi}=3\theta$$

相等，所以扣除重疊的部分後，得到

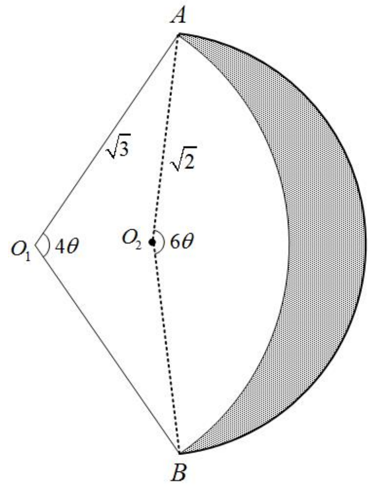
新月形的面積＝箏形O_1AO_2B的面積，

得證。■

從定理二的圖形中可以看出此新月形是由左邊的「瘦」扇形O_1AB及右邊的「胖」扇形O_2AB所圍出來的。因為$\sin\theta=\dfrac{\sqrt{3-\sqrt{3}}}{2}\approx 0.5630$，所以$\theta$近似於$34.2°$，即瘦扇形$O_1AB$的圓心角約為$68.4°$，而胖扇形$O_2AB$的圓心角約為$205.2°$。

最後介紹希波克拉底所發現的第三種可平方化的新月形。

【定理三】下圖的灰色區域，是以O_1為圓心，A和B為端點的扇形O_1AB（圓心角為4θ）和以O_2為圓心，A和B為端點的扇形O_2AB（圓心角為6θ）所圍出的新月形。



特別地，若再要求$\overline{O_1A}=\sqrt{3}$，$\overline{O_2A}=\sqrt{2}$，則此時的θ(弧度)恰有一個解且滿足

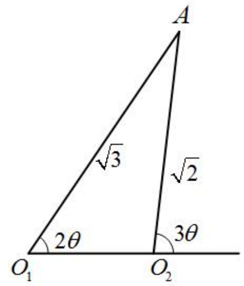
$$\sin 2\theta=\frac{\sqrt{30+2\sqrt{33}}}{8}$$

及

新月形的面積＝鏢形O_1AO_2B的面積，

即該新月形可以平方化。

【證明】為了證明$\sin 2\theta=\dfrac{\sqrt{30+2\sqrt{33}}}{8}$，我們把注意力放在鏢形$O_1AO_2B$的一半，即三角形$O_1AO_2$上，如下圖所示。



根據正弦定理，得

$$\frac{\sqrt{2}}{\sin 2\theta}=\frac{\sqrt{3}}{\sin(\pi-3\theta)}=\frac{\sqrt{3}}{\sin 3\theta}\ ,$$

再利用正弦的二倍角及三倍角公式展開得

$$\frac{\sqrt{2}}{2\sin\theta\cos\theta}=\frac{\sqrt{3}}{3\sin\theta-4\sin^3\theta}\ ,$$

將上式交叉相乘且等號兩邊同時消去$\sin\theta$，得

$$2\sqrt{3}\cos\theta=\sqrt{2}(3-4\sin^2\theta)\text{ 。}$$

把兩邊同時平方，得

$$12\cos^2\theta=12(1-\sin^2\theta)=2(3-4\sin^2\theta)^2\text{ ，}$$

用$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta$全部轉換成$\sin\theta$，並把$\sin\theta$簡寫成$x$，得

$$12(1-x^2)=2(3-4x^2)^2\text{ ，}$$

化簡得

$$32x^4-36x^2+6=0\text{ ，}$$

解得

$$\sin^2\theta=x^2=\frac{9\pm\sqrt{33}}{16}\text{ 。}$$

根據倍角公式得

$$\cos 2\theta=1-2\sin^2\theta=\frac{-1\mp\sqrt{33}}{8}\text{ ，}$$

當$\sin^2\theta=\dfrac{9+\sqrt{33}}{16}$時，因為

$$\cos 2\theta=\frac{-1-\sqrt{33}}{8}<-\frac{1}{2}=\cos 120^\circ\text{ ，}$$

所以$120^\circ<2\theta<180^\circ$，即$180^\circ<3\theta$，矛盾。故$\sin^2\theta=\dfrac{9-\sqrt{33}}{16}$，也就是說

$$\cos 2\theta=\frac{-1+\sqrt{33}}{8}\text{ ，}\sin 2\theta=\frac{\sqrt{30+2\sqrt{33}}}{8}\text{ 。}$$

接著證明新月形的面積＝鏢形O_1AO_2B的面積，因為扇形O_1AB的面積為

$$\pi\cdot\sqrt{3}^2\cdot\frac{4\theta}{2\pi}=6\theta$$

與扇形O_2AB的面積

$$\pi\cdot\sqrt{2}^2\cdot\frac{6\theta}{2\pi}=6\theta$$

相等，所以，扣除重疊的部分後，得到

新月形的面積＝鏢形O_1AO_2B的面積

得證。■

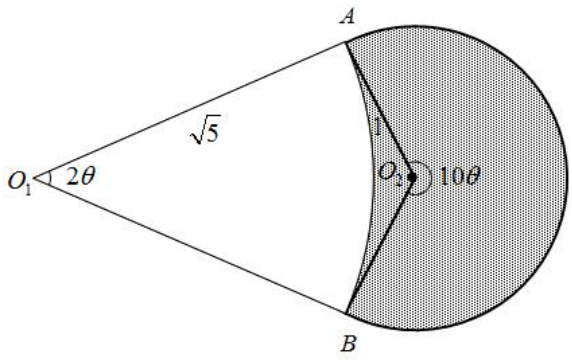
從定理三的圖形中可以看出此新月形是由左邊的扇形 O_1AB 及右邊的扇形 O_2AB 所圍出來的。因為 $\sin 2\theta = \frac{\sqrt{30+2\sqrt{33}}}{8} \approx 0.8052$，所以 2θ 近似於 53.6°，即扇形 O_1AB 的圓心角約為 107.2°，而扇形 O_2AB 的圓心角約為 160.8°。

對於以上三種可平方化的新月形，希波克拉底都有給出尺規作圖方法，作圖步驟十分複雜，有興趣的讀者可以參考[1]中第 6.3 節的習題。希波克拉底的成就在當時是非常驚人的，歷史也證明直到兩千年後的 1771 年，才有另一位天才數學家歐拉能夠超越他，並找出新的兩種可平方化的新月形。

3. 歐拉的兩種可平方化新月形

歐拉是 18 世紀傑出的數學家，同時也是有史以來最偉大的數學家之一，他涉足許多不同的數學領域且都做出巨大貢獻。拉普拉斯曾這樣評價歐拉對於數學的貢獻：「讀歐拉的著作吧，在任何意義上，他都是我們的大師。」在這節裡，我們將介紹歐拉所發現的另外兩種可平方化的新月形，當然今日我們已經知道歐拉其實找全了所有可平方化的新月形，大師真是獨具慧眼。

【定理四】下圖的灰色區域，是以 O_1 為圓心，A 和 B 為端點的扇形 O_1AB（圓心角為 2θ）和以 O_2 為圓心，A 和 B 為端點的扇形 O_2AB（圓心角為 10θ）所圍出的新月形。



特別地，若再要求$\overline{O_1A}=\sqrt{5}$，$\overline{O_2A}=1$，則此時的θ(弧度)恰有一個解且滿足

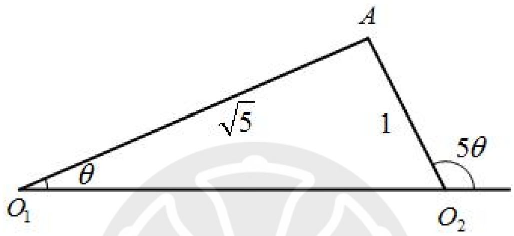
$$\sin\theta=\sqrt{\frac{5-\sqrt{5+4\sqrt{5}}}{8}}$$

及

新月形的面積＝箏形O_1AO_2B的面積，

即該新月形可以平方化。

【證明】為了證明$\sin\theta=\sqrt{\frac{5-\sqrt{5+4\sqrt{5}}}{8}}$，我們把注意力放在箏形$O_1AO_2B$的一半，也就是三角形$O_1AO_2$上，如下圖所示。



根據正弦定理，得

$$\frac{1}{\sin\theta}=\frac{\sqrt{5}}{\sin(\pi-5\theta)}=\frac{\sqrt{5}}{\sin 5\theta}\text{。}$$

這裡的五倍角要如何展開呢？利用正弦的和角公式

$$\sin 5\theta=\sin 2\theta\cos 3\theta+\cos 2\theta\sin 3\theta\text{，}$$

再代入二倍角及三倍角公式，得

$$\frac{1}{\sin\theta}=\frac{\sqrt{5}}{2\sin\theta\cos\theta\left(4\cos^3\theta-3\cos\theta\right)+\left(1-2\sin^2\theta\right)\left(3-4\sin^2\theta\right)\sin\theta}\text{。}$$

將上式交叉相乘且等號兩邊同時消去$\sin\theta$，得

$$\sqrt{5}=\left(8\cos^4\theta-6\cos^2\theta\right)+\left(1-2\sin^2\theta\right)\left(3-4\sin^2\theta\right)\text{。}$$

將上式中的$\cos^2\theta$全部換成$1-\sin^2\theta$，並令$x=\sin\theta$，得

$$\sqrt{5}=8\left(1-x^2\right)^2-6\left(1-x^2\right)+\left(1-2x^2\right)\left(3-4x^2\right)\text{，}$$

化簡得

$$16x^4-20x^2+\left(5-\sqrt{5}\right)=0\text{，}$$

解得

$$\sin^2\theta = x^2 = \frac{5\pm\sqrt{5+4\sqrt{5}}}{8}\ 。$$

因為$0<\sin^2\theta<1$且$\dfrac{5+\sqrt{5+4\sqrt{5}}}{8}>1$，所以

$$\sin\theta = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5+4\sqrt{5}}}{8}}\ 。$$

接著證明新月形的面積＝箏形O_1AO_2B的面積，因為扇形O_1AB的面積為

$$\pi\cdot\sqrt{5}^2\cdot\frac{2\theta}{2\pi}=5\theta$$

與扇形O_2AB的面積

$$\pi\cdot 1^2\cdot\frac{10\theta}{2\pi}=5\theta$$

相等，所以補上兩扇形所夾的空隙後，得到

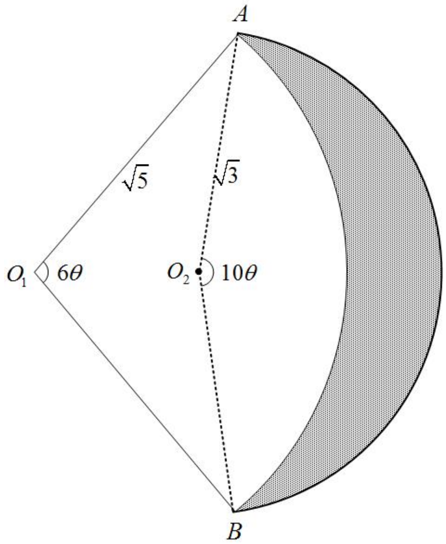
新月形的面積＝箏形O_1AO_2B的面積

得證。■

從定理四的圖形中可以看出此新月形是由左邊的「瘦」扇形O_1AB及右邊的「胖」扇形O_2AB所圍出來的。因為$\sin\theta=\sqrt{\dfrac{5-\sqrt{5+4\sqrt{5}}}{8}}\approx 0.3978$，所以$\theta$近似於$23.4°$，即瘦扇形$O_1AB$的圓心角約為$46.8°$，而胖扇形$O_2AB$的圓心角約為$234°$。

以下介紹歐拉所發現的最後一種可平方化的新月形。

【定理五】下圖的灰色區域，是以O_1為圓心，A和B為端點的扇形O_1AB（圓心角為6θ）和以O_2為圓心，A和B為端點的扇形O_2AB（圓心角為10θ）所圍出的新月形。



特別地，若再要求$\overline{O_1A}=\sqrt{5}$，$\overline{O_2A}=\sqrt{3}$，則此時的θ(弧度)恰有一個解且滿足

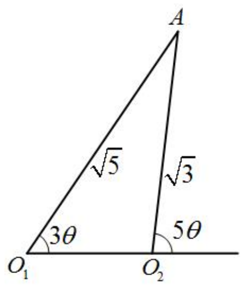
$$\sin 3\theta=\frac{3+\sqrt{15}+\sqrt{60+6\sqrt{15}}}{6}\sqrt{\frac{15-\sqrt{15}-\sqrt{60+6\sqrt{15}}}{24}}$$

及

新月形的面積＝鏢形O_1AO_2B的面積，

即該新月形可以平方化。

【證明】為了證明$\sin 3\theta=\frac{3+\sqrt{15}+\sqrt{60+6\sqrt{15}}}{6}\sqrt{\frac{15-\sqrt{15}-\sqrt{60+6\sqrt{15}}}{24}}$，我們把注意力放在鏢形$O_1AO_2B$的一半，也就是三角形$O_1AO_2$上，如下圖所示。



根據正弦定理，得

$$\frac{\sqrt{3}}{\sin 3\theta}=\frac{\sqrt{5}}{\sin(\pi-5\theta)}=\frac{\sqrt{5}}{\sin 5\theta}\ ,$$

再利用正弦的三倍角及五倍角公式展開，得

$$\frac{\sqrt{3}}{3\sin\theta-4\sin^3\theta}=\frac{\sqrt{5}}{2\sin\theta\cos\theta\left(4\cos^3\theta-3\cos\theta\right)+\left(1-2\sin^2\theta\right)\left(3\sin\theta-4\sin^3\theta\right)}$$ 。

將上式交叉相乘且等號兩邊同時消去$\sin\theta$，得

$$\sqrt{3}\left(8\cos^4\theta-6\cos^2\theta+\left(1-2\sin^2\theta\right)\left(3-4\sin^2\theta\right)\right)=\sqrt{5}\left(3-4\sin^2\theta\right)$$ 。

將上式中的$\cos^2\theta$全部換成$1-\sin^2\theta$，並令$x=\sin\theta$，得

$$\sqrt{3}\left(8\left(1-x^2\right)^2-6\left(1-x^2\right)+\left(1-2x^2\right)\left(3-4x^2\right)\right)=\sqrt{5}\left(3-4x^2\right)$$ ，

化簡，得

$$48x^4+\left(4\sqrt{15}-60\right)x^2+\left(15-3\sqrt{15}\right)=0$$ ，

解得

$$\sin^2\theta=x^2=\frac{15-\sqrt{15}\pm\sqrt{60+6\sqrt{15}}}{24}$$ 。

根據正弦三倍角公式$\sin 3\theta=\left(3-4\sin^2\theta\right)\sin\theta$，得

$$\sin 3\theta=\frac{3+\sqrt{15}\mp\sqrt{60+6\sqrt{15}}}{6}\sqrt{\frac{15-\sqrt{15}\pm\sqrt{60+6\sqrt{15}}}{24}}$$ 。

當$\sin^2\theta=\frac{15-\sqrt{15}+\sqrt{60+6\sqrt{15}}}{24}$時，因為

$$3-4\sin^2\theta=\frac{3+\sqrt{15}-\sqrt{60+6\sqrt{15}}}{6}<0$$ ，

所以$\sin 3\theta<0$，此與$0<3\theta<\pi$矛盾。因此

$$\sin^2\theta=\frac{15-\sqrt{15}-\sqrt{60+6\sqrt{15}}}{24},\quad 3-4\sin^2\theta=\frac{3+\sqrt{15}+\sqrt{60+6\sqrt{15}}}{6}$$ ，

即

$$\sin 3\theta=\frac{3+\sqrt{15}+\sqrt{60+6\sqrt{15}}}{6}\sqrt{\frac{15-\sqrt{15}-\sqrt{60+6\sqrt{15}}}{24}}$$ 。

接著證明新月形的面積＝鏢形O_1AO_2B的面積，因為扇形O_1AB的面積為

$$\pi\cdot\sqrt{5}^2\cdot\frac{6\theta}{2\pi}=15\theta$$

與扇形O_2AB的面積

$$\pi\cdot\sqrt{3}^2\cdot\frac{10\theta}{2\pi}=15\theta$$

相等，所以扣除重疊的部分後，得到

新月形的面積＝鏢形O_1AO_2B的面積，

得證。■

從定理五的圖形中可以看出此新月形是由左邊的扇形O_1AB及右邊的扇形O_2AB所圍出來的。因為$\sin 3\theta=\frac{3+\sqrt{15}+\sqrt{60+6\sqrt{15}}}{6}\sqrt{\frac{15-\sqrt{15}-\sqrt{60+6\sqrt{15}}}{24}}$ ≈ 0.7703，所以3θ近似於$50.4°$，即扇形O_1AB的圓心角約為$100.8°$，而扇形O_2AB的圓心角約為$168°$。

以上便是五種可平方化的新月形，包括定理一的四分之一圓在內，在五種扇形O_1AB中，其$\frac{1}{2}\angle AO_1B$的正弦值分別為

$$\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{3-\sqrt{3}}}{2},\frac{\sqrt{30+2\sqrt{33}}}{8},\sqrt{\frac{5-\sqrt{5+4\sqrt{5}}}{8}},\frac{3+\sqrt{15}+\sqrt{60+6\sqrt{15}}}{6}\sqrt{\frac{15-\sqrt{15}-\sqrt{60+6\sqrt{15}}}{24}}$$

它們都是由平方根所組成的。又根據引言的作圖方法，給定單位長度1，只要長度a可以尺規作出，則長度$\sqrt{a}$也可以尺規作出，這告訴我們：此五種正弦值都可以尺規作出，即五種新月形都可以尺規作圖。

4. 結論

我們在幾何作圖方面的能力遠不如古希臘的數學家，由於掌握了現代的三角函數知識作為工具才能使我們飛越作圖方面的困難而了解這五種新月形。古希臘的數學概念完全是圖像式的，一切以圖形思考，再用純文字敘述。不像現在有抽象符號幫助我們描述、記錄複雜的概念，甚至變形式子。當時連根號都沒有呢！認識到這點，希波克拉底等人的成就便顯得更加難能可貴了。晚上看月亮的時候，彷彿可以想像古希臘的學者反覆畫著新月形的身影，究竟經過多少嘗試？多少挫敗？這新月中有美麗也有哀

愁…… 。

參考文獻

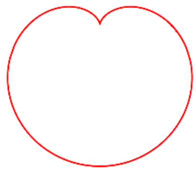
[1] A. Meskens, P. Tytgat, Exploring Classical Greek Construction Problems with Interactive Geometry Software, Birkhäuser, 2017.

[2] W. Dunham, Journey Through Genius:The Great Theorems of Mathematics, London, Penguin Books, 1990.

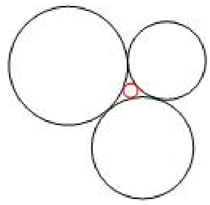
[3] Shenitzer, A., & Steprans, J. The Evolution of Integration. *Amer. Math. Monthly* 101, 66-72, 1994.

[4] 林傑斌, 天才之旅：偉大數學定理的創立, 牛頓出版社, 1995.

第 2.2 節　笛卡兒的圓之吻定理



「雙唇彼此之吻，
或與三角無關，
四圓兩兩互吻，
絕非如此簡單。」

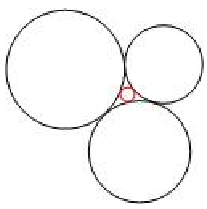


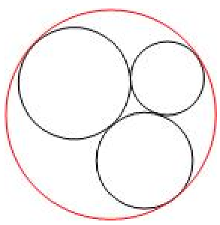
——索迪（1921 年諾貝爾化學獎得主）

1.　引言

相傳笛卡兒寄給瑞典克里斯汀女皇的第十三封信，也是最後一封，是一道簡短的數學方程式「$r = a(1-\sin\theta)$」，而這方程式的圖形就是有名的心形線，如下圖所示。

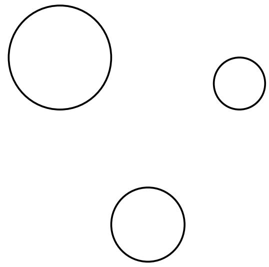
雖然這是則杜撰的故事，但是也引伸出「用數學講愛情故事」的模式——透過方程式的密碼來傳遞愛情。在笛卡兒從荷蘭出發，去瑞典當克里斯汀女皇的數學教師之前，笛卡兒與日耳曼伊莉莎白公主的愛情故事可能較為真實，而且她們的愛情故事也與幾何圖形相關。這個幾何圖形是四個兩兩「互吻」的圓，如下圖所示。在圖中，三個黑色圓與兩紅色圓中的任一個，共四個圓，他們彼此兩兩互吻。



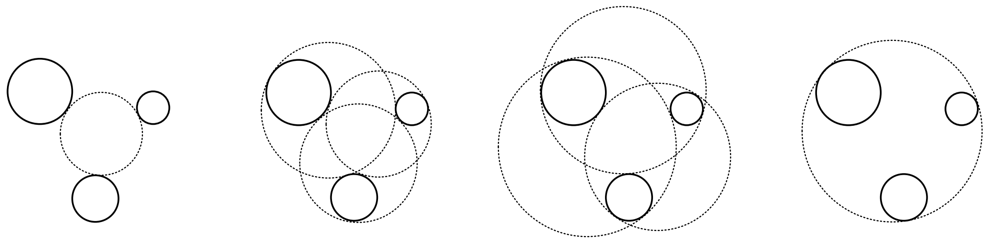


「互吻」是愛情用語，用幾何學的標準說法，應該是「相切」。在 1643 年，笛卡兒將他所發現的圓之吻定理，寫信告訴伊莉莎白公主，藉「圓之吻」這個圖形來傳遞對她的思念。

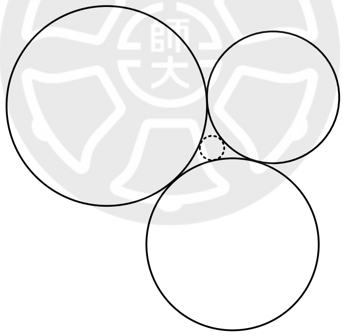
究竟笛卡兒所發現的「圓之吻定理」是在講什麼呢？這需要從阿波羅尼斯問題說起。在平面上，給定三個相離的圓，如下圖所示。



有多少個圓會同時與這三個圓相切（內切與外切都算）呢？應該有八個，如下圖的虛線圓。



阿波羅尼斯問題是歷史上的名題，特別地，當三個相離的圓互相靠近，變成兩兩相切時，那個與三圓都相外切的圓叫「笛卡兒之圓」，如下圖的虛線圓。



而且，若原三圓的半徑為r_1, r_2, r_3時，則笛卡兒之圓的半徑r會滿足二次方程式

$$\frac{1}{r^2}-2\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}\right)\frac{1}{r}+\left(\left(\frac{1}{r_1^{\,2}}+\frac{1}{r_2^{\,2}}+\frac{1}{r_3^{\,2}}\right)-2\left(\frac{1}{r_1r_2}+\frac{1}{r_2r_3}+\frac{1}{r_3r_1}\right)\right)=0 \text{ 。}$$

這種四圓互吻情形被 1921 年諾貝爾化學獎得主索迪(F. Soddy, 1877-1956)稱為「精確之吻」，並題詩如下

「雙唇彼此之吻，或與三角無關，四圓兩兩互吻，絕非如此簡單。」

2. 來自日本寺廟的算額繪馬

日本江戶時代(1603~1867)的算額，是懸掛在神社、寺廟廊簷或“繪

馬堂”中的數學問題匾額，起源於日本傳統宗教信仰中向神佛祈願的“繪馬”，在江戶世俗文化環境中作為一種特殊藝能而風行。同時，作為一種特殊類型的數學傳播載體，奉揭算額也是世界數學文化史上獨特的文化現象，這一歷史遺物今天在日本數學教育中仍然發揮著特殊作用。

根據歷史記載，日本德川幕府由於害怕西方文化影響自己的統治，於1639年宣布鎖國，日本自始與西方文化接近完全隔絕。這也導致笛卡兒的坐標幾何與他在 1643 年發現的「圓之吻定理」無法傳播至日本。有趣的是，日本 1830 年的數學教科書中的題目，竟然是笛卡兒「圓之吻定理」的特例！

上圖就是一道四圓相切的題目與答案，收錄在和算家 HasimotoMasataka 於 1830 年所寫的《算法點竄初學》中，類似的問題在各種算額繪馬中時常出現。題目是說「今有兩兩相切的甲、乙、丙三圓，其半徑分別為69, 46, 23吋，求圖中跟甲、乙、丙三圓都相切的圓之半徑。」所附的答案是6吋。我們不清楚設計這道題目的人是如何算出答案的，但顯然地，這就是笛卡兒所發現的「圓之吻定理」的特例。這種在不同地方（日本與荷蘭）同時發現類似數學結果的事件，在數學發展史上屢見不鮮，甚至引起了「數學定理是被發現，還是被發明」的論戰。事實上，當甲、乙、丙三圓及跟它們都外切的圓之半徑分別為r_1, r_2, r_3及r_4時，日本當時的和算家似乎已經知道：這些半徑會滿足以下的方程式

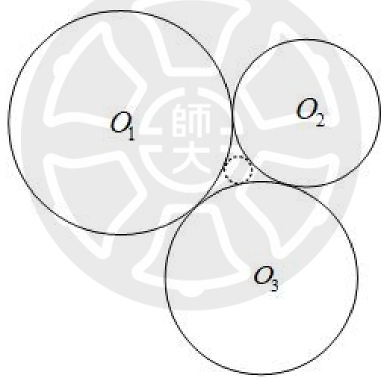
$$\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}+\frac{1}{r_4}\right)^2=2\left(\frac{1}{r_1{}^2}+\frac{1}{r_2{}^2}+\frac{1}{r_3{}^2}+\frac{1}{r_4{}^2}\right).$$

細心的讀者可能會發現：將$r_1=69, r_2=46, r_3=23$代入上述方程式，r_4除了6之外，還會有另一個負數解-138。這個負數解該作何解釋呢？讀者不妨思考笛卡兒「圓之吻」的幾何圖形，想想看！最後，還是忍不住地要讚美一下，設計這數據的和算家，真的超會兜數字的，太漂亮了！

3. 笛卡兒的圓之吻定理與證明

雖然笛卡兒被認為是坐標幾何的創始者，但是他與伊莉莎白公主的愛情密碼——圓之吻定理，卻不適合用坐標幾何的方法來處理。

【圓之吻定理】如下圖所示，設三圓O_1, O_2, O_3兩兩外切且其半徑分別為r_1, r_2, r_3，並令圓O（圖中虛線圓）和這三圓都外切，其半徑為r。



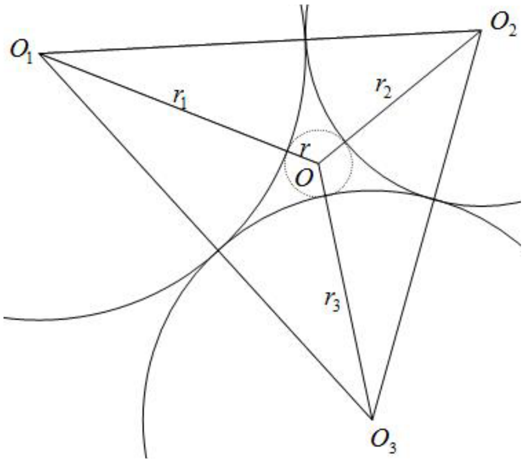
這四個互吻之圓的半徑r_1, r_2, r_3與r滿足關係式

$$\frac{1}{r_1^2}+\frac{1}{r_2^2}+\frac{1}{r_3^2}+\frac{1}{r^2}=2\left(\frac{1}{r_1r_2}+\frac{1}{r_2r_3}+\frac{1}{r_3r_1}+\frac{1}{r_1r}+\frac{1}{r_2r}+\frac{1}{r_3r}\right)\text{。}$$

若分別用k_1, k_2, k_3, k來代表半徑之倒數$\frac{1}{r_1}, \frac{1}{r_2}, \frac{1}{r_3}, \frac{1}{r}$，則上述關係式可以改寫成$k$的二次多項式的形式

$$k^2-2(k_1+k_2+k_3)k+\left(k_1^2+k_2^2+k_3^2-2(k_1k_2+k_2k_3+k_3k_1)\right)=0\text{。}$$

【證明】將四個圓心兩兩連線，三圓心O_1, O_2, O_3連線所成的三角形$O_1O_2O_3$，其邊長分別為$r_1+r_2, r_2+r_3, r_3+r_1$，如下圖所示：



因為圓心O把三角形$O_1O_2O_3$分割成三個更小的三角形

$$O_1OO_2, O_2OO_3, O_3OO_1 \text{，}$$

所以可知道：

(1) 這三個小三角形的邊長皆可用半徑表示，例如三角形O_1OO_2的另兩邊為r_1+r, r_2+r，以此類推。

(2) 這三個小三角形共用頂點O，如果假設$\angle O_1OO_2=\alpha$，$\angle O_2OO_3=\beta$，$\angle O_3OO_1=\gamma$，那麼$\alpha+\beta+\gamma=2\pi$。

首先，對三角形O_1OO_2中的$\angle O_1OO_2$運用餘弦定理，可得

$$\cos\alpha=\frac{\overline{OO_1}^2+\overline{OO_2}^2-\overline{O_1O_2}^2}{2\overline{OO_1}\cdot\overline{OO_2}} \text{，}$$

即

$$\cos\alpha=\frac{(r_1+r)^2+(r_2+r)^2-(r_1+r_2)^2}{2(r_1+r)(r_2+r)}=1-\frac{2r_1r_2}{(r_1+r)(r_2+r)} \text{。}$$

同理，再對三角形O_2OO_3及O_3OO_1運用餘弦定理，共可得

$$\begin{cases}\cos\alpha=1-\dfrac{2r_1r_2}{(r_1+r)(r_2+r)},\\ \cos\beta=1-\dfrac{2r_2r_3}{(r_2+r)(r_3+r)},\\ \cos\gamma=1-\dfrac{2r_3r_1}{(r_3+r)(r_1+r)}.\end{cases} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

接著，還記得餘弦的和差化積公式嗎？該公式可以把餘弦的和差轉化成餘弦的乘積，也可以倒過來把餘弦的乘積表示為餘弦的和差，簡稱積化和差

公式，比如

$$2\cos\alpha\cos\beta=\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\text{ 。}$$

在這裡，因為$\alpha+\beta+\gamma=2\pi$，所以$2\cos\alpha\cos\beta=\cos\gamma+\cos(\alpha-\beta)$，將兩邊同乘$2\cos\gamma$，得

$$4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma=2\cos^2\gamma+2\cos(\alpha-\beta)\cos\gamma\text{ 。}$$

將$2\cos\gamma\cos(\alpha-\beta)$再做一次積化和差，並由$\alpha+\beta+\gamma=2\pi$得到

$$\begin{aligned}2\cos(\alpha-\beta)\cos\gamma&=\cos(\alpha-\beta+\gamma)+\cos(\alpha-\beta-\gamma)\\&=\cos 2\beta+\cos 2\alpha\\&=\left(2\cos^2\beta-1\right)+\left(2\cos^2\alpha-1\right)\\&=2\cos^2\alpha+2\cos^2\beta-2.\end{aligned}$$

綜合兩個等式，得到

$$4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma=2\cos^2\gamma+\left(2\cos^2\alpha+2\cos^2\beta-2\right).$$

整理，得到很對稱的三角恆等式

$$2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma=\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma-1.\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

最後，將①式代入②式便可得到圓半徑之間的特殊關係，但為了方便起見，我們令新的①式為

$$\begin{cases}\cos\alpha=1-\dfrac{2r_1r_2}{(r_1+r)(r_2+r)}=1-u,\\\cos\beta=1-\dfrac{2r_2r_3}{(r_2+r)(r_3+r)}=1-v,\\\cos\gamma=1-\dfrac{2r_3r_1}{(r_3+r)(r_1+r)}=1-w,\end{cases}$$

並代入②式，得

$$2(1-u)(1-v)(1-w)=(1-u)^2+(1-v)^2+(1-w)^2-1\text{ ，}$$

將左、右兩邊展開並整理，得$u^2+v^2+w^2+2uvw=2(uv+vw+wu)$，再將兩邊同除以$uvw$，得

$$\frac{u}{vw}+\frac{v}{wu}+\frac{w}{uv}+2=2\left(\frac{1}{u}+\frac{1}{v}+\frac{1}{w}\right)\text{ 。}$$

此時，分別用$u=\dfrac{2r_1r_2}{(r_1+r)(r_2+r)},v=\dfrac{2r_2r_3}{(r_2+r)(r_3+r)},w=\dfrac{2r_3r_1}{(r_3+r)(r_1+r)}$，代回剛才

假設的u,v,w，例如

$$\frac{u}{vw}=\frac{\dfrac{2r_1r_2}{(r_1+r)(r_2+r)}}{\dfrac{2r_2r_3}{(r_2+r)(r_3+r)}\cdot\dfrac{2r_3r_1}{(r_3+r)(r_1+r)}}=\frac{(r+r_3)^2}{2r_3^2}$$

等等，則上式變成

$$\frac{(r+r_1)^2}{2r_1^2}+\frac{(r+r_2)^2}{2r_2^2}+\frac{(r+r_3)^2}{2r_3^2}+2=\frac{(r+r_1)(r+r_2)}{r_1r_2}+\frac{(r+r_2)(r+r_3)}{r_2r_3}+\frac{(r+r_3)(r+r_1)}{r_3r_1}.\cdots③$$

將上式中的r_1,r_2,r_3,r轉換成k_1,k_2,k_3,k，例如左式中

$$\frac{(r+r_1)^2}{2r_1^2}=\frac{\left(\dfrac{1}{r_1}+\dfrac{1}{r}\right)^2}{\dfrac{2}{r^2}}=\frac{(k+k_1)^2}{2k^2}\ ,$$

右式中

$$\frac{(r+r_1)(r+r_2)}{r_1r_2}=\frac{\left(\dfrac{1}{r_1}+\dfrac{1}{r}\right)\left(\dfrac{1}{r_2}+\dfrac{1}{r}\right)}{\dfrac{1}{r^2}}=\frac{(k_1+k)(k_2+k)}{k^2}$$

等等，③式變成

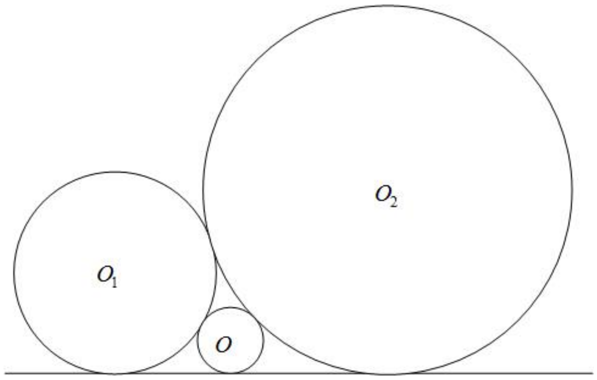
$$\frac{(k+k_1)^2}{2k^2}+\frac{(k+k_2)^2}{2k^2}+\frac{(k+k_3)^2}{2k^2}+2=\frac{(k+k_1)(k+k_2)}{k^2}+\frac{(k+k_2)(k+k_3)}{k^2}+\frac{(k+k_3)(k+k_1)}{k^2}\ ,$$

展開整理，得

$$k^2-2(k_1+k_2+k_3)k+\left(k_1^2+k_2^2+k_3^2-2(k_1k_2+k_2k_3+k_3k_1)\right)=0\ ,$$

得證。■

實在難以相信，簡單的兩個形狀——三角形與圓，組合起來卻千變萬化，能從古希臘研究至今，而且不同的切入點常常誕生不同的解法。比如圓之吻定理就有不用三角恆等式的證法，可以透過切點連線段或者參考[4]中第 1.5 節的證明方法。再比如以下問題：下圖中三圓切於一直線且彼此外切，半徑分別為r_1,r_2,r，證明關係式$\dfrac{1}{\sqrt{r}}=\dfrac{1}{\sqrt{r_1}}+\dfrac{1}{\sqrt{r_2}}$。



如果一次只看兩外切圓及其公切線，不難發現三圓位置恰好使得兩條短公切線長度之和為最長公切線長度，由畢氏定理得公切線長，化簡後即為關係式。把此結果和圓之吻定理做對照可以發現，這正是圓之吻定理的退化情況——如果把圓之吻定理中圓 O_3 的半徑 r_3 不斷放大，則圓 O_3 會變成一條直線，$k_3=\dfrac{1}{r_3}$ 趨近於 0 ，而 k 滿足的二次方程式變成

$$k^2-2(k_1+k_2)k+\left(k_1-k_2\right)^2=0 \text{ ，}$$

其兩根為

$$k=\left(\sqrt{k_1}+\sqrt{k_2}\right)^2,\left(\sqrt{k_1}-\sqrt{k_2}\right)^2 \text{ ，}$$

即

$$\frac{1}{\sqrt{r}}=\frac{1}{\sqrt{r_1}}+\frac{1}{\sqrt{r_2}} \text{ 或 } \frac{1}{\sqrt{r}}=\left|\frac{1}{\sqrt{r_1}}-\frac{1}{\sqrt{r_2}}\right| \text{ 。}$$

此時滿足 $\dfrac{1}{\sqrt{r}}=\dfrac{1}{\sqrt{r_1}}+\dfrac{1}{\sqrt{r_2}}$ 的 r 是該圓之半徑。讀者不妨想想，滿足 $\dfrac{1}{\sqrt{r}}=\left|\dfrac{1}{\sqrt{r_1}}-\dfrac{1}{\sqrt{r_2}}\right|$ 的 r 是那個圓的半徑呢？

4. 結語

在國中幾何學部分，我們學過許多歐幾里德的傳統幾何方法，它經常需要透過智巧才能解決幾何問題，畢氏定理或許是這個階段所學較具體與制式化的方法。但正如引言中，索迪「精確之吻」的詩所說**「雙唇彼此之吻，或與三角無關，四圓兩兩互吻，絕非如此簡單。」**圓之吻定理的複雜程度需要更多直角三角形之間長度與角度的靈活轉換，這也就是高中時期所學的正弦定理與餘弦定理等三角學，它可以更廣泛的處理一般三角形或

幾何問題。以上這些處理幾何方法都是綜合幾何的範圍。另外，中學所介紹的坐標幾何則是笛卡兒所開創的另一種處理幾何的方法，它是在平面上安放互相垂直的軸，對每一個幾何點指定一對坐標，用適當的代數方程式來代替直線、圓或其它曲線。笛卡兒企圖在幾何與代數這兩大主流之間挖一條運河將他們貫通。很多幾何問題透過坐標幾何得以輕鬆解決，但也有不少問題用坐標反而更複雜了，圓之吻定理坐標化似乎沒有多少簡化，因此這裡附的證明是用綜合幾何而非坐標幾何，令人好奇笛卡兒當時是否有用坐標法來解題？

小時候，笛卡兒的身體並不好，學校允許他可以睡晚一點，直到覺得好些才到教室跟其它同學一起上課。這個特別的安排讓笛卡兒養成一個終身的習慣：在早上他總是會睡晚一點，醒來後就躺在床上想想事情、做做功課，直到他覺得差不多了，他才會下床梳洗，開始一天的生活。「心形線」與「四圓互吻」的定理也許是笛卡兒賴床的產物，而眾所周知的「我思，故我在」更是他的哲學思想，這肯定與笛卡兒小時候就愛思考相關。

參考文獻

[1] 汪曉勤, 張小明, 圓之吻：阿波羅尼斯問題的歷史, 數學傳播季刊, 2006 年, 第 118 期.

[2] 徐澤林, 江戶時代的算額與日本中學數學教育, 數學傳播季刊, 2007 年, 第 123 期.

[3] A. 艾克塞爾, 笛卡兒的祕密手記, 商周出版, 2009.

[4] H. S.M.Coxeter, Introduction to Geometry Second Edition, WILEY, 1989.

[5] Fukagawa Hidetoshi, T. Rothman, Sacred Mathematics: Japanese Temple Geometry,Princeton University Press, 2008.

第 2.3 節　被遺忘的費馬- 尤拉勾股定理

「讀尤拉，讀尤拉，他是我們大家的老師。」

——拉普拉斯(P. S.Laplace,1749~1827)

「沒有一個人像尤拉那樣多產，像他那樣巧妙地把握數學；也沒有一個人能收集和利用代數、幾何、分析的手段去產生那麼多令人欽佩的成果。他是頂呱呱的方法發明家，又是一個熟練的巨匠。」

——美國數學史家克萊因(Felix Klein,1849~1925)

「不要輕易地把觀察所發現的和僅以歸納為旁證的一些性質信以為真。」

——尤拉(L. Euler,1707~1783)

「你進入大樓的第一個房間，裡面一片漆黑。你在家具之間跌跌撞撞，但是逐漸地你記住了每一件家具所在的位置。最後，經過大約六個月左右，你找到了電燈開關，打開了燈。突然，整個房間充滿了光明，你能確切地明白你在何處。然後，你又進入下一個房間，在黑暗中度過另一個六個月。因此，每一次這樣的突破，儘管有時候，只是瞬息間的，有時候要一兩天的時間，但它們實際上是這之前的許多個月裡在黑暗中跌跌撞撞的成就。沒有前面的跌跌撞撞，突破是不能夠出現的。」

——安德魯・懷爾斯(A. J. Wiles,1953~)

1. 引言

畢氏定理(Pythagorean Theorem)，又稱勾股定理，是幾何學中一個非常重要的定理，其揭示了直角三角形邊長的代數關係：

「對任意勾長a、股長b、弦長c的直角三角形，a,b,c會滿足恆等式$a^2+b^2=c^2$，即兩直角邊邊長的平方和等於斜邊長的平方。」

古希臘數學家在證明此定理後，更發展出了造直角三角形的代數方法：若$m,n\,(m>n)$為兩正整數，則$m^2-n^2, 2mn, m^2+n^2$恰好可構成直角三角形的三邊邊長，讀者可驗證恆等式

$$\left(m^2-n^2\right)^2+\left(2mn\right)^2=\left(m^2+n^2\right)^2 。$$

此法隱含在<u>丟番圖</u>（Diophantus，約 246~330 B.C.）的著作《算術》中，直到 17 世紀，才被<u>費馬</u>（Pierre de Fermat，1601~1665）翻出來研究，並將平方和問題推廣到高次方和的猜想，也就是著名的<u>費馬</u>大定理：

「當正整數$n>2$時，方程式$x^n+y^n=z^n$沒有正整數解$\boldsymbol{x,y,z}$。」

這個費馬大定理直到 1994 年才被英國數學家安德魯・懷爾斯證明成立。除了費馬大定理，費馬在書信來往中曾提過上百個各式各樣的數學問題，本文將介紹費馬其中一道被遺忘的與勾股定理相關的幾何構造問題。費馬當時僅提出此問題而未加以證明，是瑞士大數學家尤拉給出證明才使之成為一道定理。

尤拉被稱為「數學界的莎士比亞」，是那時代的數學通才，研究幾乎涉及所有數學領域，尤其善於運用歸納法，憑藉觀察、大膽猜測和巧妙的證明得出了許多重要的發現。除了學術的成就，尤拉還編寫過大量中小學教科書，這些書既嚴密又易於理解。例如尤拉首先用比值來給出三角函數的定義，而在他以前是一直以線段的長作為定義的。再如尤拉意識到符號的簡化和規則化，既有助於學生的學習，又有助於數學的發展，因此創立了許多新的符號。包括用$\sin,\cos$等表示三角函數，用e表示自然對數的底，用$f(x)$表示函數，用Σ表示求和，用i表示虛數等。圓周率π雖然不是尤拉首創，但卻是經過他的倡導才得以廣泛流行。尤拉還把$0,1,\pi,i,e$這五個常數統一在一個令人叫絕的關係式——尤拉等式中，這也是數學史上最美麗的數學公式之一：

$$e^{\pi i}+1=0\text{。}$$

接下來讓我們來欣賞這道由費馬所提出，被尤拉證明的與勾股定理相關的幾何構造問題。

2. 費馬- 尤拉勾股定理

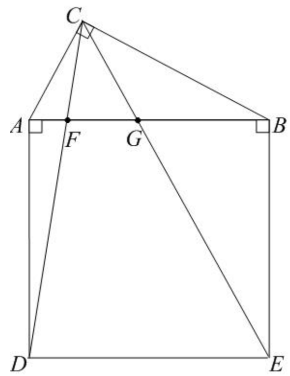
數學發展是由歷代數學家逐步推進的，從古希臘發現畢氏定理作為開端，再到費馬偶然間發現並提出的幾何猜想，以及最後尤拉的證明而成為定理。這三者缺少任何一個，這個定理都不會誕生。

【費馬-尤拉勾股定理】

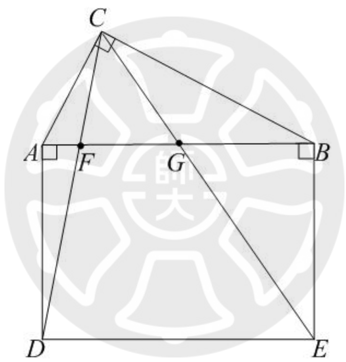
在三角形ABC中，$\angle C$為直角，以斜邊$\overline{AB}$為底向外作一矩形$ABED$，連接

線段$\overline{CD},\overline{CE}$，並假設兩線段和斜邊$\overline{AB}$分別交於$F,G$兩點。試證

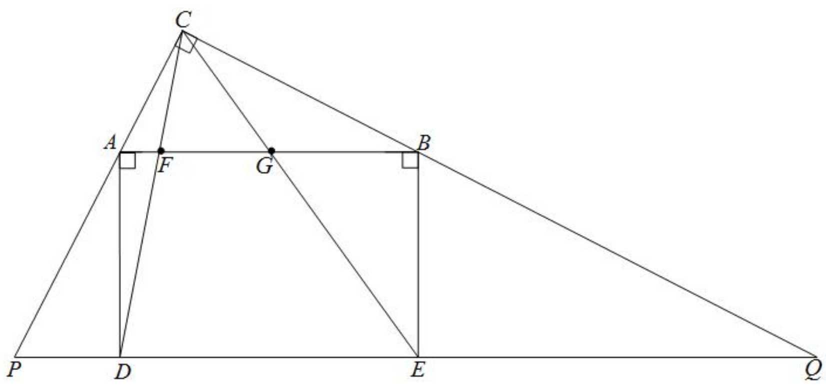
(1) 若$\overline{AB}=\overline{AD}$，則$\overline{AF}\cdot\overline{GB}=\overline{FG}^2$。



(2) 若$\overline{AB}=\sqrt{2}\,\overline{AD}$，則$\overline{AG}^2+\overline{FB}^2=\overline{AB}^2$。



【證明】延長線段$\overline{CA},\overline{CB}$，並假設它們分別和直線$\overleftrightarrow{DE}$交於$P,Q$兩點，如下圖所示。



由$\Delta ADP \sim \Delta QCP \sim \Delta QEB$，得比例式$\dfrac{\overline{AD}}{\overline{PD}}=\dfrac{\overline{QE}}{\overline{BE}}$成立，即

$$\overline{PD}\cdot\overline{EQ}=\overline{AD}^2 \text{。}$$

另外，觀察到共用平行邊的三組相似三角形：$\Delta ACF \sim \Delta PCD$, $\Delta FCG \sim \Delta DCE$, $\Delta GCB \sim \Delta ECQ$。為了方便，假設其比例為

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{PD}}=\frac{\overline{FG}}{\overline{DE}}=\frac{\overline{GB}}{\overline{EQ}}=r \text{。}$$

(1) 若 $\overline{AB}=\overline{AD}$，則

$$\overline{PD}\cdot\overline{EQ}=\overline{AD}^2=\overline{DE}^2 \text{，}$$

得

$$\overline{AF}\cdot\overline{GB}=r\overline{PD}\cdot r\overline{EQ}=\left(r\overline{DE}\right)^2=\overline{FG}^2 \text{。}$$

(2) 若 $\overline{AB}=\sqrt{2}\,\overline{AD}$，則

$$\overline{PD}\cdot\overline{EQ}=\overline{AD}^2=\left(\frac{\overline{AB}}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{\overline{AB}^2}{2} \text{，}$$

得

$$2\overline{AF}\cdot\overline{GB}=2\left(r\overline{PD}\cdot r\overline{EQ}\right)=\left(r\overline{DE}\right)^2=\overline{FG}^2 \text{。}$$

因此

$$\overline{AB}^2=\left(\overline{AG}+\overline{GB}\right)^2=\overline{AG}^2+2\overline{AG}\cdot\overline{GB}+\overline{GB}^2=\overline{AG}^2+2\left(\overline{AF}+\overline{FG}\right)\cdot\overline{GB}+\overline{GB}^2 \text{，}$$

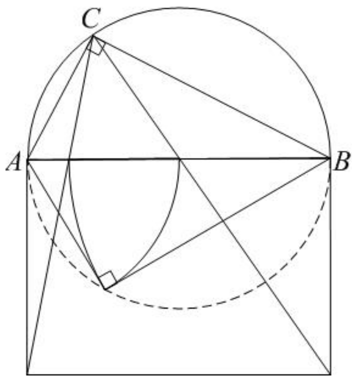
展開後將上式代入得到

$$\overline{AG}^2+\overline{FG}^2+2\overline{FG}\cdot\overline{GB}+\overline{GB}^2=\overline{AG}^2+\left(\overline{FG}+\overline{GB}\right)^2=\overline{AG}^2+\overline{FB}^2 \text{，}$$

即

$$\overline{AG}^2+\overline{FB}^2=\overline{AB}^2 \text{。} \blacksquare$$

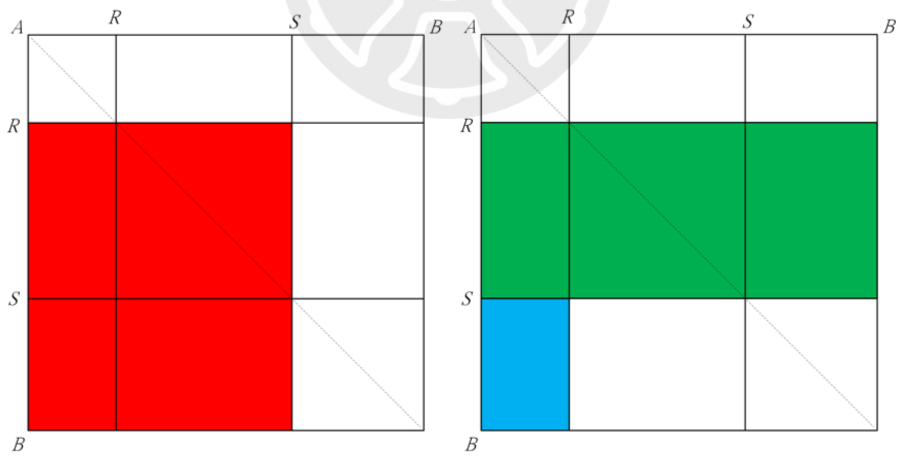
在題目中我們對任意直角三角形的斜邊作矩形，其實只是為了方便描述，並不是原始的定理版本。真正的版本是從邊長比$\sqrt{2}:1$的矩形出發，在長邊上作一半圓並在上半圓選定一點C，則從C連接頂點所得線段都會滿足平方和的關係，分別以A, B為圓心作兩圓弧，它們的交點剛好落在下半圓上，便得直角三角形，如下圖所示。



可以看出，當點C在半圓上不同位置時，所連線段都會產生相對應的直角三角形。

3. 結語

先前的勾股定理證明中運用了乘法公式將線段拆解，而在尤拉的時代還是習慣用幾何圖形來思考，比如把線段相乘看作面積，這習慣增加了問題的複雜程度，然而尤拉還是洞察出一條捷徑。他是先提出一個引理並附上面積（今日稱為「無字證明」）解釋：$\overline{AS}\cdot\overline{BR}=\overline{AB}\cdot\overline{RS}+\overline{AR}\cdot\overline{BS}$，再用此引理作為輔助證明，用現在的眼光來看，這反而是不容易想到的。



費馬與笛卡兒也是同時代的數學家，若笛卡兒知道費馬提出的勾股構造問題，不知他是否會用他首創的座標方法來處理這道幾何問題？

參考文獻

[1] Paul Yiu,The Elementary Mathematical Works of Leonhard Euler(1707–1783),Department of Mathematics Florida Atlantic University, Summer 1999（http://math.fau.edu/yiu/eulernotes99.pdf）.

[2] Ed Sandifer, How Euler Did It─A Forgotten Fermat Problem, December 2008, MAA Online.

第 2.4 節　來自高斯「稀少但成熟」的洞見

「如果沒用最少的字講出最多的意思，我就絕對不會滿意。寫得精簡遠比寫得冗長更耗時間。」

——高斯(C.F.Gauss,1777-1855)

「高斯就像雪地中的一隻*狐狸*，總是用尾巴抹去地上的痕跡。」

——阿貝爾(N.H.Abel, 1802-1829)

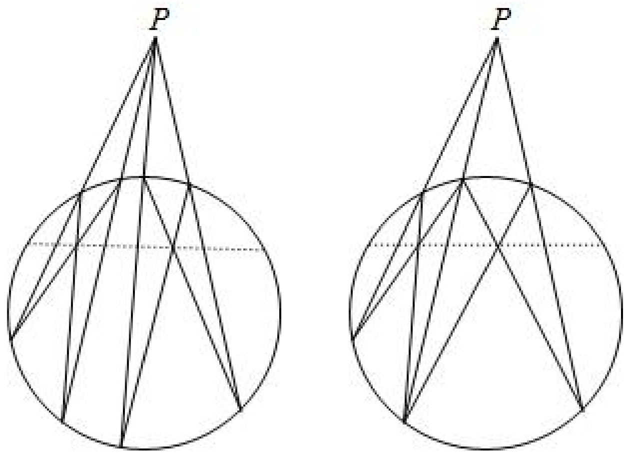
1. 引言

高斯被世人譽為「數學王子」，是 18 至 19 世紀德國最傑出的數學家，很少有數學分支沒用到高斯的研究成果。和許多數學家一樣，他從小便展現極高的數學天賦，據說他三歲時便由觀察學會算術，在小學便看出規律巧算出

$$1+2+3+\cdots+99+100=5050 \text{ 。}$$

十八歲時，高斯更提出了正 17 邊形的尺規作圖法，他非常高興，將此結果列為《科學日誌》的第一條，並因此決定終生研究數學。高斯是個嚴格認真的完美主義者，在滿意之前拒絕發布他認為不完整和有瑕疵的作品。且和尤拉作品的娓娓道來相反，高斯傾向於消除所有數學原理的動機、直覺等痕跡，也許他不喜歡自己想法被窺見吧。本文將舉一例說明高斯看待問題的態度。

在 1836 年，高斯的學生兼好友舒馬赫(H. C.Schumocher)和他討論一個天文學定位的難題，可簡化成：如何單用一把直尺來作圓外一點 P 對該圓的兩條切線？當時作法如左圖，需畫四條割線並將割點交叉連線，其交點連線(虛線)和圓會交於 P 對該圓的兩切線之切點。舒馬赫看出若將中間兩條割線合併，則只需作三條割線即可，如右圖所示。

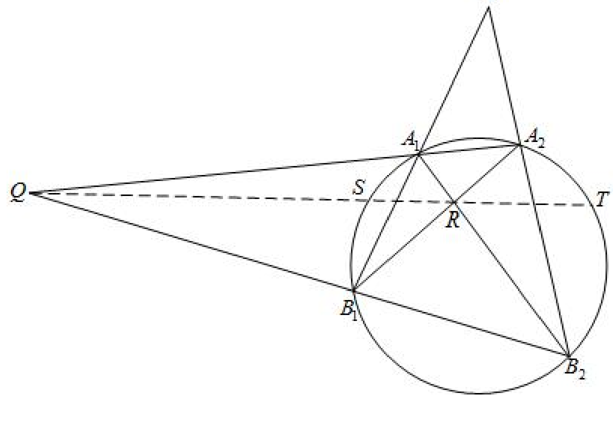


原本舒馬赫以為這個話題已經結束，沒想到六天後高斯說他發現了更簡化的作法，僅需兩條割線就可辦到。以下就讓我們來欣賞高斯想到的作法。

2. 高斯求圓切點定理

如果讀者仔細觀察引言中的圖或許能猜出：若將兩條割線之割點交叉連線，其交點正好會在P的切點連線上。又因為兩點才能決定一條直線，所以原來作圖才需要四條割線來得出切點連線。兩條割線只能決定一點，怎麼可能作出切點連線呢？高斯的作法如下。

【高斯求圓切點定理】過圓外一點P作兩條割線分別交圓於A_1,B_1與A_2,B_2，並作兩直線$\overleftrightarrow{A_1A_2},\overleftrightarrow{B_1B_2}$的交點$Q$以及兩直線$\overleftrightarrow{A_1B_2},\overleftrightarrow{A_2B_1}$的交點$R$，如下圖所示。



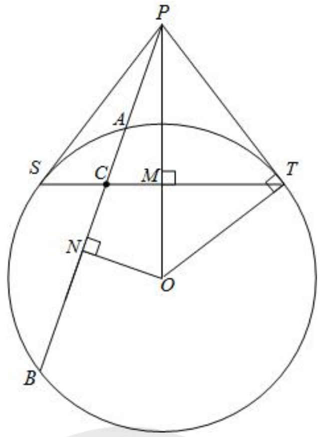
試證：直線$\overleftrightarrow{QR}$與圓的交點S,T，正好是P對圓的兩切線之切點。

【證明】我們分兩階段來證明這個定理，第一階段說明割線具備的分比性

質，第二階段運用交比概念證明Q,R點都在$\overleftrightarrow{ST}$上。

(1) 割線的分比性質：如下圖所示，過點P的一條割線交圓於A,B兩點，且交兩切點S,T的連線$\overleftrightarrow{ST}$於C點。我們有

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}=\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}\text{。}$$



證明如下：利用AA相似性質$\Delta PMC\cong\Delta PNO,\Delta PMT\cong\Delta PTO$，得比例式

$$\begin{cases}\dfrac{\overline{PC}}{\overline{PM}}=\dfrac{\overline{PO}}{\overline{PN}}\\[2ex]\dfrac{\overline{PT}}{\overline{PM}}=\dfrac{\overline{PO}}{\overline{PT}}\end{cases}\Rightarrow\overline{PC}\cdot\overline{PN}=\overline{PM}\cdot\overline{PO}=\overline{PT}^2=\overline{PA}\cdot\overline{PB}\text{(圓冪性質)。}$$

由於N為$\overline{AB}$中點，可將上式代換為

$$\overline{PC}\cdot\left(\frac{\overline{PA}+\overline{PB}}{2}\right)=\overline{PA}\cdot\overline{PB}\Rightarrow\overline{PC}\cdot\overline{PA}+\overline{PC}\cdot\overline{PB}=2\overline{PA}\cdot\overline{PB}\text{，}$$

移項，得

$$\overline{PB}\cdot\left(\overline{PC}-\overline{PA}\right)=\overline{PA}\cdot\left(\overline{PB}-\overline{PC}\right)\text{，}$$

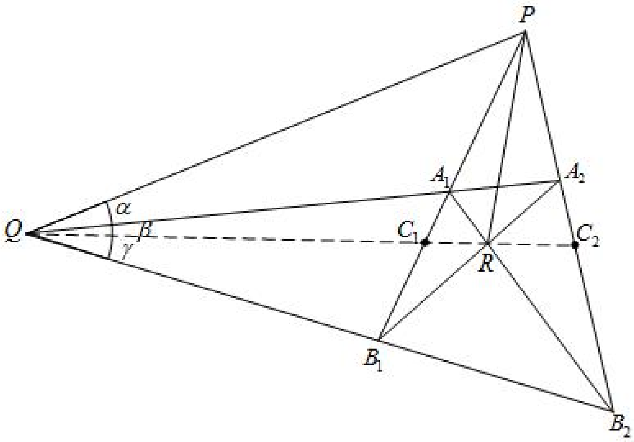
即

$$\overline{PB}\cdot\overline{CA}=\overline{PA}\cdot\overline{CB}\Rightarrow\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}=\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}\text{。}$$

容易看出，在線段$\overline{AB}$中滿足$\dfrac{\overline{CA}}{\overline{CB}}=\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$的$C$點恰只有一點，也就是說，在割線上和$\overline{ST}$的交點$C$是由此比例式唯一決定的。

(2) 交比的概念：現在忘掉定理中的圓，連接$\overline{PQ}$與$\overline{PR}$，且令$\overleftrightarrow{QR}$和$\overleftrightarrow{PA_1}$交

於C_1，和$\overleftrightarrow{PA_2}$交於$C_2$，如下圖所示。



從(1)的性質知道：當比例式

$$\frac{\overline{C_1A_1}}{\overline{C_1B_1}}=\frac{\overline{PA_1}}{\overline{PB_1}},\quad \frac{\overline{C_2A_2}}{\overline{C_2B_2}}=\frac{\overline{PA_2}}{\overline{PB_2}}$$

成立時，C_1,C_2在切點S,T的連線$\overleftrightarrow{ST}$上，也就是說，直線$\overleftrightarrow{QR}$通過P對圓的兩切線之切點S,T。因此，我們只需證明線段乘積的比值（稱為交比）

$$\omega_1=\frac{\overline{C_1A_1}\cdot\overline{PB_1}}{\overline{C_1B_1}\cdot\overline{PA_1}},\quad \omega_2=\frac{\overline{C_2A_2}\cdot\overline{PB_2}}{\overline{C_2B_2}\cdot\overline{PA_2}}$$

都是 1 即可。

為了計算ω_1的值，可以透過外部的點Q及面積的轉換，得

$$\begin{aligned}\omega_1&=\frac{\overline{C_1A_1}\cdot\overline{PB_1}}{\overline{C_1B_1}\cdot\overline{PA_1}}\\&=\frac{\Delta QC_1A_1\cdot\Delta QPB_1}{\Delta QC_1B_1\cdot\Delta QPA_1}\\&=\frac{\left(\overline{QC_1}\cdot\overline{QA_1}\cdot\sin\angle C_1QA_1\right)\cdot\left(\overline{QP}\cdot\overline{QB_1}\cdot\sin\angle PQB_1\right)}{\left(\overline{QC_1}\cdot\overline{QB_1}\cdot\sin\angle C_1QB_1\right)\cdot\left(\overline{QP}\cdot\overline{QA_1}\cdot\sin\angle PQA_1\right)}\\&=\frac{\sin\beta\sin(\alpha+\beta+\gamma)}{\sin\gamma\sin\alpha}.\end{aligned}$$

同理可得

$$\omega_2=\frac{\sin\beta\sin(\alpha+\beta+\gamma)}{\sin\gamma\sin\alpha}=\omega_1\text{。}$$

同樣地，我們也可以從點 R 及面積的轉換來推導 ω_1, ω_2 的關係如下。

$$\begin{aligned}\omega_2 &= \frac{\sin\angle C_2RA_2 \cdot \sin\angle PRB_2}{\sin\angle C_2RB_2 \cdot \sin\angle PRA_2}\\ &= \frac{\sin\angle C_1RB_1 \cdot \sin\angle PRA_1}{\sin\angle C_1RA_1 \cdot \sin\angle PRB_1}\\ &= \frac{1}{\omega_1}.\end{aligned}$$

綜合上述，可得 $\omega_1 = \omega_2 = 1$，即

$$\frac{\overline{C_1A_1}}{\overline{C_1B_1}} = \frac{\overline{PA_1}}{\overline{PB_1}},\quad \frac{\overline{C_2A_2}}{\overline{C_2B_2}} = \frac{\overline{PA_2}}{\overline{PB_2}}\ 。$$

由此得 $\overleftrightarrow{QR}$ 和兩割線的交點 C_1, C_2 會在 $\overleftrightarrow{ST}$ 上，即

$$\overleftrightarrow{QR} = \overleftrightarrow{ST}\ ，$$

故得證。■

僅用直尺找出圓外一點的切線之切點，這道作圖題在舒馬赫看來已經解決，但只有高斯不滿意現狀，想將割線數量降到最低，才因此誕生這個定理，這也完全解釋了他的座右銘：「寫得精簡遠比寫得冗長更耗時間。」

3. 結語

可以想像，高斯是以原定理的圖形為基礎，以過人的毅力進行了多方嘗試，才終於由圓內探到了圓外，發現這個漂亮的作法，只為了少畫一條割線。高斯的《科學日誌》也是同樣的模式，146 條定理證明，每條描述都十分精簡，精雕細琢。見微知著，相信高斯就是長期在對精簡如此要求下養成深思熟慮的習慣，才能獲得許多別人未曾想過的真知灼見。

參考文獻

[1] 托德・霍爾,高斯：偉大數學家的一生,凡異出版社,1977.

[2] 高斯(潘承洞、張明尧譯), 算術探索, 哈爾濱工業大學出版社,2011.

[3] 趙文敏, 幾何學概論, 九章出版社, 1992.

第 2.5 節　丘成桐的尺規作圖題

「幾何提供的不單是重要的幾何定理，更重要的是它提供了上學期間唯一的邏輯訓練。」

——“數學皇帝”丘成桐

尺為什麼可以畫直線？
因為堅持正直，永往向前。
人為什麼常繞遠路？
因為心猿意馬，容易妥協。

圓規為什麼可以畫圓？
因為腳在走，心不變。
人為什麼不能圓夢？
因為心不定，腳不動。

——數學詩

1. 引言

第一位獲得菲爾茲獎（Fields Medal）的華人數學家丘成桐教授，在 2001 年接受香港沙田官立中學邀請，主講〈互聯網的數學〉中，提出一道他讀培正中學時研究過的尺規作圖問題——製作一個滿足某些特定條件的三角形。在數學發展史中，尺規作圖有何重要，青少年時的丘成桐探討的幾何問題是什麼，有多難，且讓我們來介紹。

我們從小學的數學課就開始學習使用直尺和圓規，有沒有好奇過它們的由來？其實這兩樣工具來源非常古老，距今 2500 年前的古希臘已經出現，誰發明的已不可考，只知道當時的學者研究圖形已習慣用直尺及圓規進行作圖。這裡的直尺是形狀筆直、足夠長且沒有刻度的，而圓規的兩條腿是足夠長且開合自如的，又尺規作圖的基本原則是

(1) 已知兩個不同點，可以用直尺畫一條通過這兩點的直線。

(2) 已知一點及一條線段，可以用圓規作以此已知點為圓心及以已知線段長度為半徑的圓。

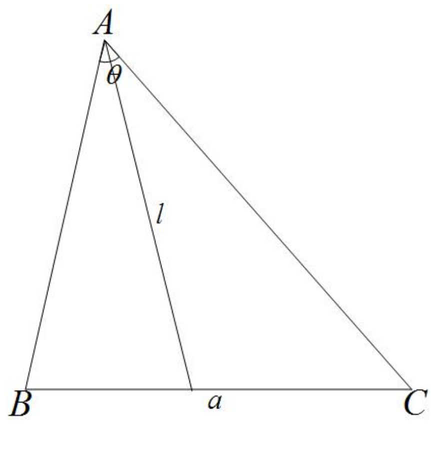
也就是說，用尺規可以不斷的在平面上做直線跟圓，而這些直線或圓所相

交的點就稱為「可尺規作圖的點」，兩個可尺規作圖的點之距離稱為「可尺規作圖的長度。」這個基本原則最先是由恩諾皮德斯（Oenopides，約 465B.C.）所提出，他認為平面幾何的對象只能通過這兩種方法建立起來。後來受到哲學家柏拉圖（Plato，約 427~347 B.C.）的大力提倡，柏拉圖主張對作圖工具要有限制，反對使用其他機械工具作圖。之後，歐幾里得（Euclid，约 330~275B.C.）在他的《幾何原本》的公設中，便是按照直尺與圓規的作用設定的。這麼做其實很自然，畢竟當時的研究對象只有直線、圓和它們組成的圖形，原本當中命題的圖形皆可用尺規作出，也就不需要增添其他工具。因此，限用尺規進行作圖就成為古希臘幾何學的的特色和準則。在此回憶與統整一下中學所學的尺規作圖知識：給定長度為 a 與 b 的線段，我們可以用直尺與圓規作出長度

$$a+b, |a-b|, a\times b, a\div b \text{ 及 } \sqrt{ab}$$

的線段。

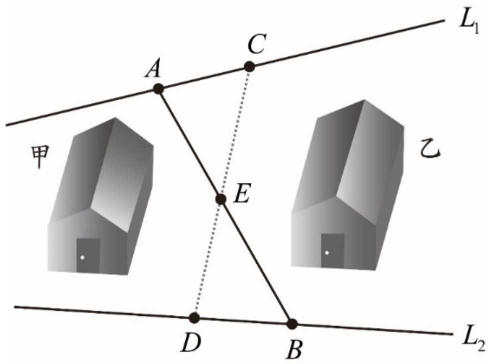
丘成桐教授在中學時所探討的作圖問題：「是否可以作出三角形 ABC，讓 $\angle A$ 是給定的 θ，而邊長 $\overline{BC}$ 及 $\angle A$ 的角平分線長分別為已知的 a 與 l。」這顯然是一道不容易的尺規作圖問題，該如何調動直尺與圓規來完成這個三角形的作圖呢？



尺規作圖不僅僅是一種數學遊戲，實際上它刺激並引領了數學發展，並跟日常生活息息相關。在探討丘成桐的尺規作圖題之前，我們先來看一個生活應用問題〈土地鑑界〉以及另一個古典的作圖問題「拿破崙分圓」。

2. 土地鑑界問題

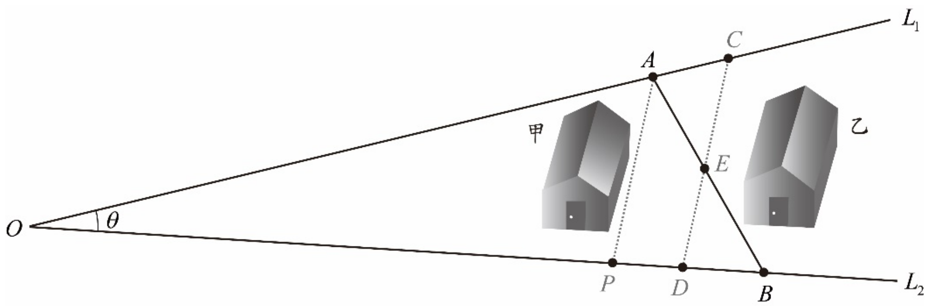
地政事務所有個關於「土地鑑界」的服務項目，其問題如下：甲、乙兩戶人家的土地介於兩條直線 L_1 與 L_2 之間，線段 $\overline{AB}$ 是他們的分界線，又這兩戶人家的房子門口朝同一方向，如圖所示。



為了方便，甲、乙兩家協議，重畫一條分界線 $\overline{CD}$ ，但要求此分界線必須與房子的側邊平行，而且土地交換之後，是公平的。你可以辦到嗎？可以的話，又該如何作圖呢？〈土地鑑界〉問題就是一道典型的尺規作圖問題，我們可以分析並作圖如下。

在下圖中，設 $\overline{CD}$ 為所要的分割線段，作 $\overline{AP}$ 平行 $\overline{CD}$ ，得

$$\overline{OA}\cdot\overline{OD}=\overline{OC}\cdot\overline{OP}.$$



再由三角形 OAB 的面積與三角形 OCD 的面積相等，得

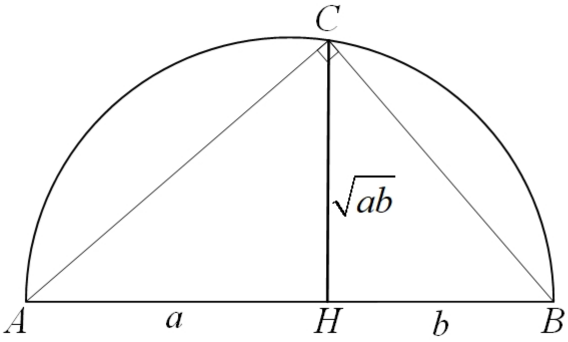
$$\frac{1}{2}\overline{OA}\cdot\overline{OB}\sin\theta=\frac{1}{2}\overline{OC}\cdot\overline{OD}\sin\theta\Rightarrow\overline{OA}\cdot\overline{OB}=\overline{OC}\cdot\overline{OD}.$$

將所得兩式相除，得

$$\overline{OD}^2=\overline{OP}\cdot\overline{OB}\Rightarrow\overline{OD}=\sqrt{\overline{OP}\cdot\overline{OB}}\ ,$$

即$\overline{OD}$是$\overline{OP}\cdot\overline{OB}$的平方根。因為$\overline{OP}$與$\overline{OB}$都是可以尺規作圖，所以$\overline{OD}$也可以尺規作圖。在作出點$D$後，分界線$\overline{CD}$也就可以作出了。■

在上述的解答中，需要用到一個中學學過的作圖原理：「給定已知長度a與b的線段，如何作出長度為$\sqrt{ab}$的線段。」作法是這樣。



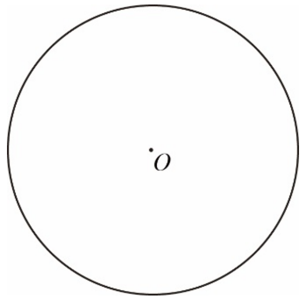
1. 作出長度為$a+b$的線段$\overline{AB}$。
2. 作出以$\overline{AB}$為直徑的圓。
3. 過H點作垂線，交圓於C點。
4. 此時$\overline{HC}=\sqrt{ab}$。

接下來介紹另一道兩百年前拿破崙研究過，有趣的尺規作圖問題。

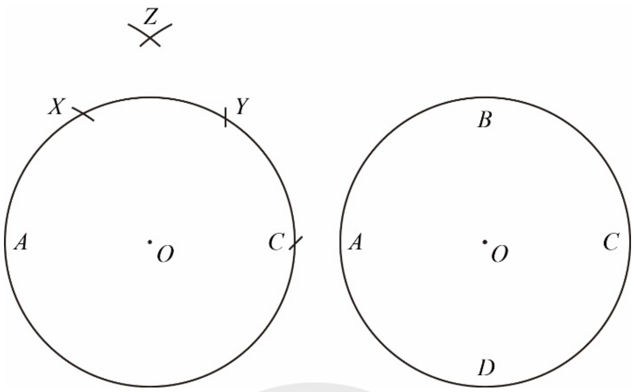
3.拿破崙的尺規作圖題

《紐約時報》曾稱丘成桐教授為「數學王國的皇帝」，事實上，歷代有許多皇帝是熱愛數學的，例如清朝的康熙熱衷於學習《幾何原本》；而法國的拿破崙更重視科學，他研究過一道與圓有關的尺規作圖問題，稱為「拿破崙分圓」。

【拿破崙分圓問題】給定一圓及其圓心O，只許用圓規的要求下，將此圓四等分。



【作法與證明】假設此圓的半徑為r，將作法分成五部分。



1. 在圓周上任取一點A，並以A為圓心，$\overline{AO}=r$為半徑畫一弧（如上圖左圖所示）交圓周於X點；再以X點為圓心，$\overline{AO}=r$為半徑畫一弧交圓周於Y點；再以Y點為圓心，$\overline{AO}=r$為半徑畫一弧交圓周於C點。顯然，A,O,C三點共線（因為只有用圓規，所以這條直徑的線是無法畫出來）。
2. 考慮三角形AXY：因為$\overline{AX}=\overline{XY}=r,\angle XAY=30^{\circ}$，所以$\overline{AY}=\sqrt{3}r$。同理，$\overline{CX}=\sqrt{3}r$。
3. 分別以A,C為圓心，$\overline{AY}=\sqrt{3}r=\overline{CX}$為半徑畫一弧，設兩弧相交於$Z$點。
4. 因為Z點在線段$\overline{AC}$的中垂線上，所以三角形AOZ是直角三角形。利用畢氏定理得到

$$\overline{AO}^2+\overline{OZ}^2=\overline{AZ}^2\Rightarrow\overline{OZ}=\sqrt{2}r.$$

5. 考慮下圖的右圖：以A為圓心，$\overline{OZ}=\sqrt{2}r$為半徑畫一圓交此圓於B,D兩點；再以B為圓心，$\overline{OZ}=\sqrt{2}r$為半徑畫一弧交此圓於C點。容易

推得 A,B,C,D 剛好將此圓周四等分。■

如果允許尺規併用，分圓問題其實是很容易的。但是只用圓規很多原本用到直尺的路就走不通，因此作圖的技巧難度也更高了。其實分圓問題有更為困難的版本：「給定一圓（不包括圓心），只許用圓規的要求下，將此圓四等分。」要如何用圓規巧妙的找出圓心呢？有興趣的讀者可以挑戰看看！透過「土地鑑界」和「拿破崙分圓」問題作範例，了解尺規作圖問題是怎麼回事後，我們來看那道曾令丘院士印象深刻的尺規作圖題。

4. 丘成桐院士的尺規作圖題

丘成桐教授曾經說過：「幾何不好的孩子，數學再好都是自我麻痺。」並且在 2001 年播出的一輯數學教育電視特輯「丘成桐教授專訪」中提出用圓規直尺作三角形的問題。由此可見，丘院士把幾何視為很重要的數學學習課程，不像代數題的模式比較固定，解幾何題需要的實驗猜測更多，更能培養學生綜合性的思考。

以下是丘成桐院士在讀香港培正中學時，所研究過的尺規作圖題。

【丘成桐的尺規作圖題】給長度分別為 a 與 l 的線段及定角度 θ，求作滿足以下三條件的三角形 ABC。

(1) $\overline{BC}=a$.

(2) $\angle A=\theta$.

(3) $\angle A$ 的角平分線長度為 l.

【作法與證明】依照下列步驟作圖：

1. 作線段長 $\overline{BC}=a$。
2. 作 $\overline{BC}$ 的中垂線 L_1，並令 L_1 交 $\overline{BC}$ 於中點 E。
3. 過 C 點作 $\overline{BC}$ 的垂直線 L_2。
4. 在直線 L_1 上取一點 O 使得兩平行線 L_1 與 L_2 跟 $\overline{OC}$ 的夾角為 θ。

5. 以O為圓心，$\overline{OB}=\overline{OC}$為半徑作圓$O$，並交直線$L_1$於$D$及$F$兩點。

6. 連接$\overline{BD}$及$\overline{BF}$。

7. 以B為圓心，$\dfrac{l}{2}$為半徑畫弧，交$\overline{BD}$於K點。

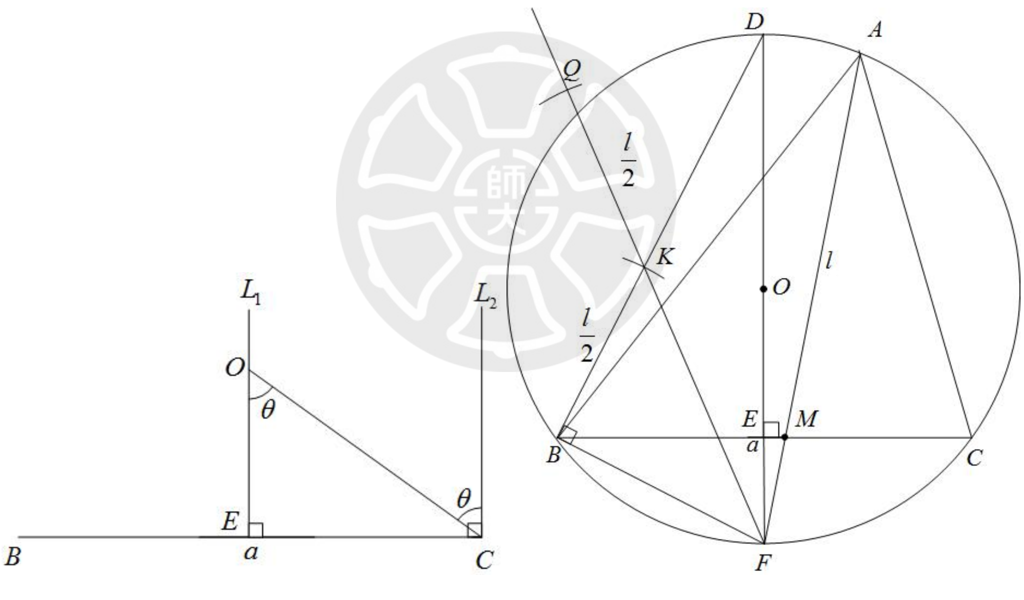
8. 連接直線$\overline{KF}$。

9. 在射線$\overrightarrow{FK}$上取一點Q，使得$\overline{KQ}=\dfrac{l}{2}$。

10. 以F為圓心，$\overline{FQ}$為半徑畫弧，交圓O於A點。

11. 連接線段$\overline{AB},\overline{AC},\overline{AF}$，並假設$\overline{AF}$交$\overline{BC}$於$M$點。

所作參考圖如下：



在作圖中，三角形ABC會滿足「$\overline{BC}=a$，$\angle A=\theta$及線段$\overline{AM}$為$\angle A$的角平分線且其長度為l。」但乍看之下，除了條件$\overline{BC}=a$顯然成立外，另兩個條件

$$\angle A=\theta \text{ 及 } \overline{AM}=l$$

並不容易看出來（特別是後者）。這是我們接下來要驗證的事情。

(1) 驗證$\overline{BC}=a$：

由作圖步驟 1 得知。

(2) 驗證$\angle A=\theta$：

在圓O中，因為$\overset{\frown}{BC}$的圓心角為$\angle BOC=2\angle FOC=2\theta$，所以$\overset{\frown}{BC}$的圓周角為$\angle BAC=\theta$，即$\angle A=\theta$。

(3) 驗證$\angle A$的角平分線$\overline{AM}$的長度為l：

在圓O中，因為F點為$\overset{\frown}{BC}$的中點，所以$\overline{AF}$（或$\overline{AM}$）為$\angle A$的角平分線。又因為$\angle AFB=\angle BFM$及$\angle FAB=\angle FAC=\angle FBC=\angle FBM$，所以由三角形$AA$相似性質知：$\Delta AFB\sim\Delta BFM$，得比例式$\dfrac{\overline{AF}}{\overline{BF}}=\dfrac{\overline{BF}}{\overline{MF}}$成立，即

$$\begin{aligned}\overline{AF}\cdot\overline{MF}=\overline{BF}^2 &\Rightarrow \overline{AF}\left(\overline{AF}-\overline{AM}\right)=\overline{BF}^2\\ &\Rightarrow \overline{AF}^2-\overline{AM}\cdot\overline{AF}-\overline{BF}^2=0.\end{aligned}$$

要注意的是：在作圖步驟 1~6 中，只要A點是圓O上的點，上式都會成立。若要讓角平分線$\overline{AM}=l$，則可解得

$$\overline{AF}^2-l\cdot\overline{AF}-\overline{BF}^2=0\Rightarrow\overline{AF}=\frac{l\pm\sqrt{l^2+4\overline{BF}^2}}{2}\text{（負不合），}$$

也就是說，當圓O上的A點滿足$\overline{AF}=\dfrac{l+\sqrt{l^2+4\overline{BF}^2}}{2}$時，可得角平分線$\overline{AM}=l$。

現在回到作圖部分（作圖步驟 7~11 中），因為$\overline{DF}$為圓O直徑，所以$\angle DBF$為直角，即三角形KBF為直角三角形，由畢氏定理知

$$\overline{FK}=\sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2+\overline{BF}^2}\text{。}$$

根據步驟 9，得

$$\overline{FQ}=\frac{l}{2}+\sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2+\overline{BF}^2}=\overline{AF}\text{。}$$

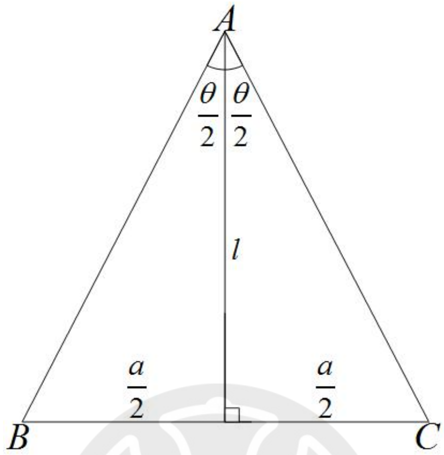
綜合上述，所作三角形ABC滿足題目的三條件。■

在「<u>丘成桐</u>教授專訪」中，並沒有提出有關「a，l及角度θ」的限制。事

實上，當分角線長度l比邊長a大很多時，應該是不存在這樣的三角形ABC（作圖中的A點不在圓O上）。那究竟“存在”的條件為何呢？會否是底下的條件呢？

$$\tan\frac{\theta}{2} \le \frac{a}{2l}\text{。}$$

這個不等式猜想來自當分角線與對邊垂直時，即下圖所示的情形。



5. 結語

誠如丘成桐院士所透露，他成功的秘訣是「用苦工而非天才。」思考與解決尺規作圖問題也同樣要花相當的苦工及面對許多次的挫折。當你面對丘成桐少年時期所研究的作圖題時，「頓失方向，毫無頭緒，不知如何下手」算是正常的反應，完全不必灰心喪志。只要你有認真推敲過，翻看答案時才知道自己不足在哪裡，比起直接硬記，解題方法才更能和你的舊經驗有機的連結在一起，逐漸變成自己能掌握的東西。另一方面，擁有獨立解難題的經驗能養成強大的心理素質，不會輕易言敗。這正如丘院士所說「你沒有挫折過，你不曉得問題的中心在哪裡，最重要是挫折裡面學到很重要的經驗，這些經驗會轉變成幫忙你走向成功最重要的因素」，或許對你有幫助。

參考文獻

[1] 孔德偉,尺規作圖實例、題解和證明,香港特別行政區政府教育局,2014.

[2] 班雅明‧波爾德, 著名幾何問題及其解法：尺規作圖的歷史, 高等教育出版社, 2008.

[3] 洪萬生, 摺摺稱奇：初登大雅之堂的摺紙數學, 三民書局, 2014.

[4] 「丘成桐教授專訪」連結:https://www.youtube.com/watch?v=elPt0BfU_bA.

第 2.6 節　日本數學愛好協會的三等分活動

「別強迫孩子學習，以娛樂的方式指引他們，讓他們的天賦得以被發掘。」

—柏拉圖(Plato,427-347 B.C.)《理想國》

「喚醒學生的最好辦法是向他們提供有吸引力的數學遊戲、智力題、魔術、笑話、悖論、打油詩或那些呆板的教師認為無意義而避開的其他東西。」

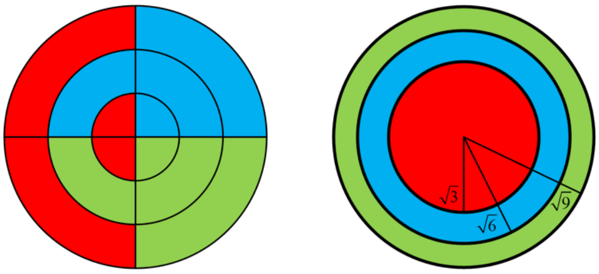
—馬丁・加德納(M. Gardner, 1914-2010)

1. 引言

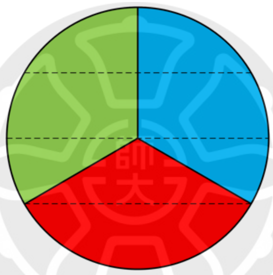
給一條繩子,將頭尾對齊,兩手拉直可以輕易知道繩子的中點在何處，但有辦法知道繩子的三等分點嗎？國中數學課可以使用直尺及圓規，在平面上，任意給定的線段及角，都可以將它們二等分，而且線段也可以三等分（想想看，如何辦到！）但是，給定一個角，古希臘人始終無法找到三等分的有效方法，這是有名的「三等分難題」，而且後來的數學家知道：這是辦不到的事情。如果把問題從「繩子」，平面上的「線段」，「角」跳脫出來，而是考慮最常碰到的「圓形物」呢？例如披薩或蛋糕之類的東西，我們可有好的辦法將其三等分嗎？日本社團「數學愛好協會」就以「如何將圓形蛋糕三等分」為題，向社會大眾徵求答案，並公布了幾個賞心悅目的民眾解答。從這些有趣的分割答案中，可以欣賞到日本民眾的數學素養。

協會在推特上發布各民眾的成果，以下兩種就是用「同心圓」切法而入選的作品，其差異點在：同心圓半徑比為等差「1:2:3」或特殊

比「$\sqrt{3}:\sqrt{6}:\sqrt{9}$」的分別。特殊比的切法被評審笑說「分到最外圈的也太可憐」。



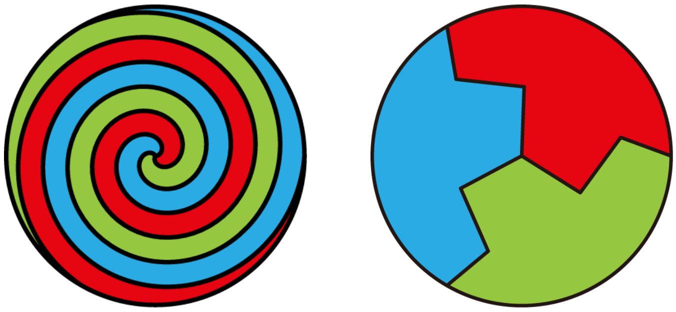
另一個有趣的切法是：畫三條水平線將鉛直的直徑四等分，其中第二條水平線剛好通過圓心，再從圓心畫出三條半徑，這三個扇形就可以將圓三等分了。原因很簡單，以下方扇形來看，它與第三條水平線所圍成的三角形是特別角 $30°-30°-120°$ 的等腰三角形，故左右兩扇形圓心角均為 $30°+90°=120°$。



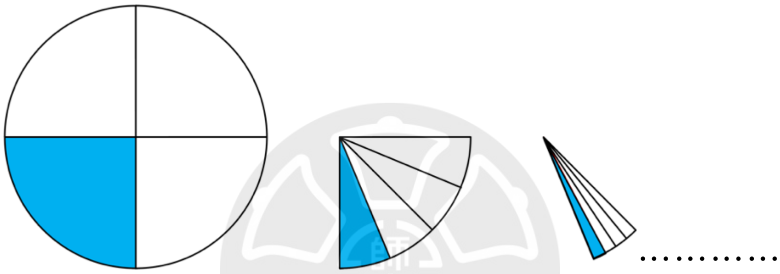
除了上述三種切法外，我們將介紹幾個有趣，又有特色的切法，特別是最優秀獎的「六芒星」切法。

2. 幾個入賞切法

「水果削皮器」切法是另一個入選的切法，圖形看似複雜，但其原理卻極為簡單。在右圖中，從圓心出發，畫一條折線至圓周上，然後將此折線以圓心為旋轉點，分別旋轉 $120°$ 及 $240°$，共得到三條一模一樣的折線，而這三條折線將圓分割成三塊一模一樣的圖形。當我們將折線換成複雜一點的螺線時，所得到的切法就是左圖的「水果削皮器」了。



「無限四等分」切法獲得優秀獎，這種運用無限趨近的概念，讓評審無奈的說「切幾年也不會到三等分吧！」這切法是這樣的：將圓切四等分，取其中一份，再將隔壁那份切四等分，也取其中一小份，繼續將那小份的隔壁再切四等分，仍然取其中一小份，…，如此一直進行下去，所取的總和會是圓面積的三分之一，如下圖所示。



關於「無限四等分」切法，我們也可以這樣來解釋：將圓切四等分，讓甲、乙、丙三人各取一份，再把剩下的第四份切成四等分，仍讓甲、乙、丙三人各取其中一小份，繼續將剩下的第四小份切成四等分，一樣讓甲、乙、丙三人各取一份，…，如此一直進行下去，顯然，甲、乙、丙三人最後各分得圓面積的三分之一。若要用數學來表達，這切法的想法也許是來自有名的阿基米德無窮等比級數和公式

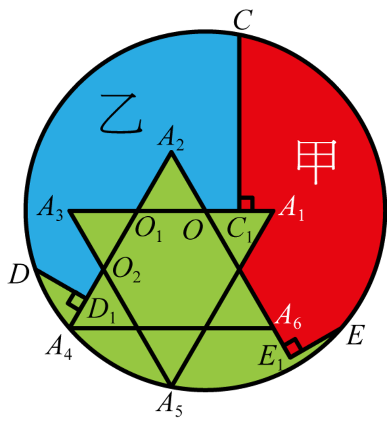
$$\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\cdots=\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{3}\text{。}$$

3. 三等分最優秀賞–六芒星切法

這壓軸的是第一名最優秀獎，由奇特的「六芒星」切法奪下，神秘的圖騰讓評審及網友全都驚呆，評審對此感到不可思議，點評表示

「到底怎麼想出來的」，還說「用這方法切蛋糕絕對能 hold 住全場。」

【圓三等分最優秀獎】設圓O的半徑為$2\sqrt{7}$，並切法如下：



①在水平直徑上找兩點A_1, A_3，分別在圓心O右邊和左邊，使得$\overline{OA_1}=2$

$\overline{OA_3}=4$。再以$\overline{A_1A_3}$為底向下作正三角形$A_1A_3A_5$（此時A_5在圓上）。

②將正三角形$A_1A_3A_5$的邊分別三等分，並將六個三等分點依序連起來，形成另一個正三角形$A_2A_4A_6$，（同樣地，此時A_4在圓上）。這兩個正三角形恰好形成六芒星的形狀。

③過$\overline{OA_1}$中點C_1向上作垂線，並交圓於C點。

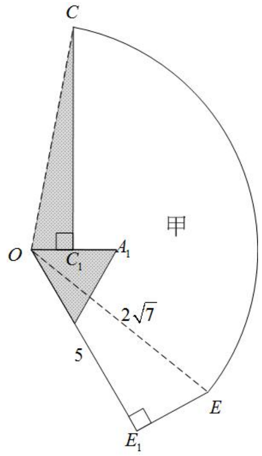
④過$\overline{A_4O_2}$中點D_1向左側作垂線，並交圓於D點。

⑤在射線$\overrightarrow{OA_6}$上取一點E_1，使得$\overline{A_6E_1}=1$，再過E_1點向右側作垂線交圓於E點。

求證：圓弧上的點C, D, E及其連線段將圓分割成甲，乙兩塊及剩餘的丙塊（又稱六芒星塊），此三塊將圓面積三等分。

【證明】以下分別就甲，乙兩塊，說明其面積各占圓的三分之一。關於甲塊，從下圖的兩條補助線（虛線），可以知道：

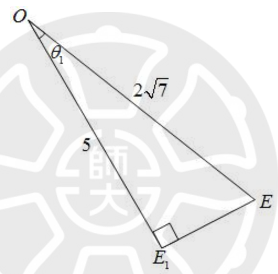
$$甲塊＝扇形\overset{\frown}{CE}+\Delta OEE_1-（\Delta OCC_1+小正三角形）。$$



接著，求各小塊面積如下：

(1) 三角形面積會互相抵消：

因為ΔOEE_1為



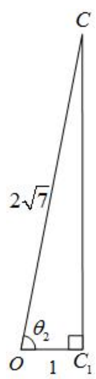
所以，由畢氏定理，得

$$\overline{EE_1}=\sqrt{\left(2\sqrt{7}\right)^2-5^2}=\sqrt{3}\ ，$$

即其面積為

$$\frac{1}{2}\cdot 5\cdot\sqrt{3}=\frac{5\sqrt{3}}{2}\ 。$$

又因為ΔOCC_1為



所以，由畢氏定理，得

$$\overline{CC_1}=\sqrt{\left(2\sqrt{7}\right)^2-1^2}=3\sqrt{3}\ ，$$

即其面積為

$$\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 3\sqrt{3}=\frac{3\sqrt{3}}{2}\ 。$$

小正三角形面積為

$$\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 2^2=\sqrt{3}\ 。$$

因此

$$\Delta OEE_1 -（\Delta OCC_1 + 小正三角形）=\frac{5\sqrt{3}}{2}-\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}+\sqrt{3}\right)=0\ 。$$

(2) 扇形 $\overset{\frown}{CE}$ 恰為三分之一大圓：

扇形 $\overset{\frown}{CE}$ 的圓心角可表為

$$\left(\theta_2+60^\circ\right)-\theta_1=60^\circ+\left(\theta_2-\theta_1\right)\ 。$$

因為

$$\tan\theta_1=\frac{\sqrt{3}}{5},\tan\theta_2=3\sqrt{3}\ ，$$

又由正切和角公式，得

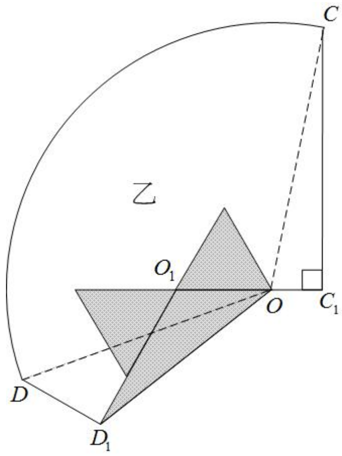
$$\tan\left(\theta_2-\theta_1\right)=\frac{3\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{5}}{1+3\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{5}}=\sqrt{3}=\tan 60^\circ\Rightarrow\left(\theta_2-\theta_1\right)=60^\circ\ ，$$

所以

$$60^\circ+\left(\theta_2-\theta_1\right)=60^\circ+60^\circ=120^\circ\ 。$$

因此，扇形 $\overset{\frown}{CE}$ 恰為三分之一大圓，即甲塊與三分之一大圓同面積。接著，考慮乙塊，從下圖分割，可以知道：

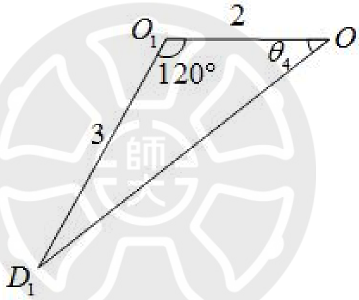
乙塊＝扇形 $\overset{\frown}{CD}$ ＋ $\Delta OCC_1+\Delta ODD_1$ －（ ΔOO_1D_1 ＋兩個小正三角形）。



求各小塊面積如下：

(1) 三角形面積會互相抵消：

因為ΔOO_1D_1為



所以其面積為

$$\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 3\cdot \sin 120^\circ = \frac{3\sqrt{3}}{2}\text{ 。}$$

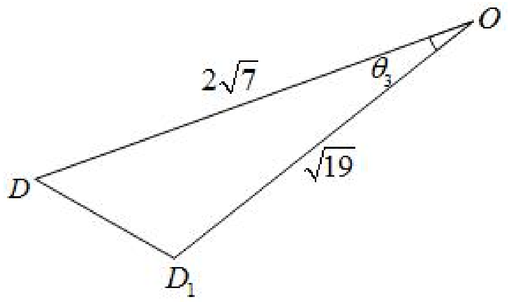
根據餘弦定理，得

$$\overline{OD_1}^2 = 2^2 + 3^2 - 2\cdot 2\cdot 3\cdot \cos 120^\circ = 19 \Rightarrow \overline{OD_1} = \sqrt{19}\text{ ，}$$

再根據正弦定理，得

$$\begin{aligned}&\frac{\sqrt{19}}{\sin 120^\circ} = \frac{2}{\sin \angle OD_1O_1} \Rightarrow \sin \angle OD_1O_1 = \sqrt{\frac{3}{19}} \\ &\Rightarrow \cos \angle OD_1D = \cos\left(\angle OD_1O_1 + 90^\circ\right) = -\sqrt{\frac{3}{19}}\end{aligned}\text{ 。}$$

因為ΔODD_1為



根據餘弦定理，得

$$\overline{DD_1}^2-2\cdot\left(-\sqrt{\frac{3}{19}}\right)\cdot\sqrt{19}\cdot\overline{DD_1}+\left(\sqrt{19}\right)^2=\left(2\sqrt{7}\right)^2 \text{，}$$

整理得

$$\overline{DD_1}^2+2\sqrt{3}\cdot\overline{DD_1}-9=0$$

解得 $\overline{DD_1}=\sqrt{3},-3\sqrt{3}$ (負不合)，所以其面積為

$$\frac{1}{2}\cdot\overline{D_1D}\cdot\overline{D_1O}\cdot\sin\angle DD_1O=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{19}\cdot\frac{4}{\sqrt{19}}=2\sqrt{3} \text{。}$$

因此，$\Delta OCC_1+\Delta ODD_1$ －（ ΔOO_1D_1 ＋兩個小正三角形）為

$$\frac{3\sqrt{3}}{2}+2\sqrt{3}-\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}+2\times\sqrt{3}\right)=0 \text{。}$$

(2) 扇形 $\overset{\frown}{CD}$ 恰為三分之一大圓：

扇形 $\overset{\frown}{CD}$ 的圓心角可表為

$$\left(180^\circ-\theta_2\right)+\left(\theta_4-\theta_3\right) \text{。}$$

根據正弦定理，得

$$\frac{2\sqrt{7}}{\sin\angle OD_1D}=\frac{\sqrt{3}}{\sin\theta_3},\sin\theta_3=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{133}}\Rightarrow\tan\theta_3=\frac{2\sqrt{3}}{11}$$

及

$$\frac{\sqrt{19}}{\sin 120^\circ}=\frac{3}{\sin\theta_4},\sin\theta_4=\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{19}}\Rightarrow\tan\theta_4=\frac{3\sqrt{3}}{7} \text{，}$$

由正切和角公式，得

$$\tan(\theta_4-\theta_3)=\frac{\frac{3\sqrt{3}}{7}-\frac{2\sqrt{3}}{11}}{1+\frac{3\sqrt{3}}{7}\cdot\frac{2\sqrt{3}}{11}}=\frac{\sqrt{3}}{5}=\tan\theta_1\Rightarrow(\theta_4-\theta_3)=\theta_1\text{，}$$

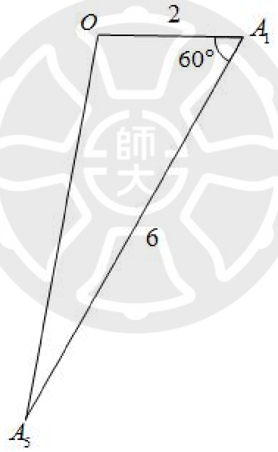
可得

$$(180^\circ-\theta_2)+(\theta_4-\theta_3)=(180^\circ-\theta_2)+\theta_1=180^\circ-(\theta_2-\theta_1)=180^\circ-60^\circ=120^\circ\text{。}$$

因此，扇形$\overset{\frown}{CD}$恰為三分之一大圓，即乙塊與三分之一大圓同面積。綜合上述知道：丙塊（六芒星塊）也與三分之一大圓同面積。■

在「六芒星」切法中，不僅甲，乙，丙（六芒星塊）將圓形三等份，而且從證明中也可以發現：圓弧上的C,D,E三點也將圓周三等分。另外在切法構圖中我們宣稱A_4,A_5在圓周上，這並非顯然而是需要證明的。

如圖所示，由ΔOA_1A_5



根據餘弦定理得

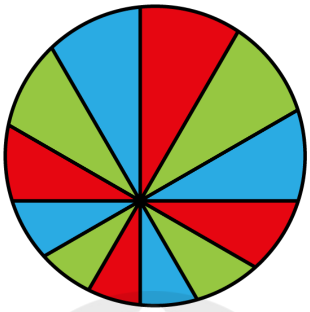
$$\overline{OA_5}^2=2^2+6^2-2\cdot2\cdot6\cdot\cos60^\circ=28\Rightarrow\overline{OA_5}=2\sqrt{7}\text{，}$$

故A_5在圓上，A_4為對稱圖形也會在圓上。

4. 結語

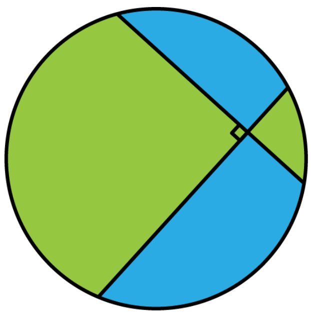
大眾普遍不喜歡數學或對數學比較冷漠，很可能是學生時期大量的考試和測驗卷，扼殺了數學學習的樂趣，或因受挫折而產生排拒心理。日本社團「數學愛好協會」經常透過有趣的數學活動，讓大家腦力

激盪，互相學習交流。像這次的圓形蛋糕三等分活動，沒有什麼唯一的標準答案，更沒有限定範圍，需要活用既有的數學知識進行探究，這和固定形式考試的感受是截然不同的，能真正增進彼此的數學素養。看看這些解答，已經囊括了國中和高中的數學知識，其實入賞當中還有個較為困難的解法：圓內任取一點，過該點畫出間隔30°的六條線並將圓分成 12 塊，如左圖所示。將每間隔三塊的部分歸為同一類，則恰分成三類，且將圓三等分，而這其實是「披薩定理」最新成果的一個特例。



讀者有沒有興趣動手想出自己的「蛋糕三等分」切法呢？或是做做以下兩道趣題。

(1) 將圓形蛋糕以刀子切割兩刀，這兩刀互相垂直，蛋糕被分成四塊，如下圖所示。甲先取其中不相鄰的兩塊，乙再取剩下不相鄰的兩塊。問：有哪些切法會讓甲、乙兩人所取得的蛋糕面積一樣大？



(2) 拿條繩子操作，找找看三等分點在何處？

顯然地，數學不僅躲在書本裡，它在我們生活周遭到處都是。

參考文獻

[1] 「數學愛好協會」社團網址：https://twitter.com/mathlava

第 3 章　代數類文章

本章共分四節，依時間順序列出了四篇代數類的文章。內容包括：阿基米德的平方和定理、韋達的正切定律、科茨的線段乘積定理、拉馬努金的根號恆等式。

第 3.1 節　在沙地上思考的阿基米德

「像顯可徵，雖愚不惑；形潛莫覩，在智猶迷。」

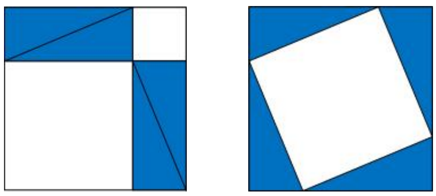
——《聖教序》

「身為一位老師，我時常教導學生用幾何圖形來捕捉重要數理關係或是數學概念的精華。大部分的人在背誦證明的步驟時，使用視覺記憶的效果遠比線性記憶來得好。再者，一個好的圖形所包含的數理關係代表了「等待發掘與將其文字化的真實數理概念」。因此，以一個幫助學生記憶的工具來說，無字證明常比容易記錯的文字證明更為準確。」

——史汀（L.A. Steen）

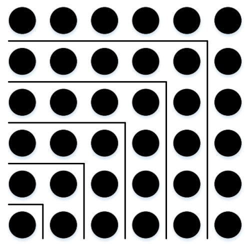
1.　引言

隨著科學的進步，人們探究的事物越來越複雜，便發展出各種數學符號來描述抽象的概念及步驟。隨便翻閱一本數學專書，證明都塞滿了文字及符號。可曾想過還有一類證明是盡量避免使用文字的？這在數學上有個專有名詞，叫做「無字證明」。無字證明的起源可追溯到中國最早的數學著作—《周髀算經》，書中對勾股定理的圖示：



比較上述兩圖，將左圖中的直角三角形移動至右圖的位置，顯然移動前後的空白面積相同，便可得到勾、股所對應的正方形面積之和等於弦所對應的正方形面積，即勾股定理成立。這個圖示證明一步到位，簡單到幾乎不用文字解釋！

再舉個非幾何學的例子，費波那契(L.Fibonacci,1175~1250)於 1225 年出版的《平方數之書》，也使用圖示來說明正奇數的求和公式：



$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$

如上圖，將黑棋排成正方形，由左下角往右上角做「角形」分割，當我們順著右上角看過去時，便能直接辨認出對應的數學等式

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2 \text{ ，}$$

這圖示也成為該公式最經典的一幅無字證明。

透過以上兩個例子可以發現：無字證明其實是作為一個證明最理想的形態，追求用最少的文字，符號及單純的圖像說明道理，以達到「圖說一體，不證自明」的目的。一個冗長的純文字或符號的證明，一旦透過圖形來類比，將變得單純而易於接受，這對學習者而言，沒有甚麼比無字證明印象更深刻，更能記憶及引發興趣了。本文將介紹兩個有趣的，和大數學家阿基米德相關的無字證明。

2. 阿基米德的無字證明

早在古希臘時代，阿基米德在《論螺線》的命題 10 中，便得到底下的等式

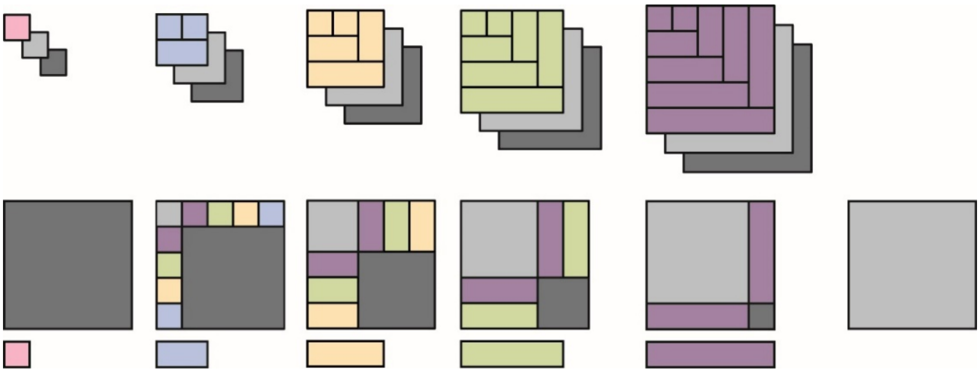
$$3\left(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2\right)=(n+1)n^2+\left(1+2+3+\cdots+n\right).$$

從這等式可以很快推得平方數的求和公式

$$1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \text{ 。}$$

但是，這等式又是如何想到的呢？據傳阿基米德將平方數以正方形展示在沙地上，經過巧妙的安排而得出此結論，這或許是第一個在西方世界出現的無字證明。

【阿基米德定理（Sum Squares in the Sand）】如圖所示，上半部是三層正方形的疊放，而下半部是一層呈現：



經過圖中的分割與著色，可以將上半部的各種長方形，透過有序的搬移，轉換成下半部分的圖形。這種有序的搬遷過程，可以證明等式

$$3\left(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2\right)=(n+1)n^2+\left(1+2+3+\cdots+n\right)$$

恆成立。

【證明】因為上半部的三層構造是由底層黑色正方形，中層灰色正方形及上層已經有規律分割及著色的長方形所組成，所以將「數量」與「有序搬遷過程」細說如下。

(1) 上半部的總數量：若將上層所分割的最小正方形邊長設為 1（單位），則上半部三層的總面積為

$$3\left(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2\right)\text{（平方單位）。}$$

(2) 將上半部最底層黑色正方形由大至小依序搬移至下半部。

(3) 將上半部中層灰色正方形由小至大，依序搬移至下半部，但每塊都與黑色正方形共用一個頂點，如下半圖所示。

(4) 將上半部頂層每組分割中的最後一塊獨立出來，且置於下半部的最下面，而剩下的每組彩色長方形都會成雙，剛好可以魚貫而入的填補下半部空缺部分。

(5) 下半部的總數量：可以將下半部的面積表為

$$6\times5^2+(1+2+3+4+5)\text{（平方單位）。}$$

因為搬遷不會損失面積，所以從上述過程可以得到等式

$$3(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2)=6\times5^2+(1+2+3+4+5)\text{。}$$

想想看，阿基米德為何只在沙地上巧畫這個特例（最大正方形的邊長為 5 單位）呢？事實上，仿照上述的切割，著色及搬遷，我們可以延伸至最大正方形的邊長為 n 單位的情形，而此時所得的恆等式為

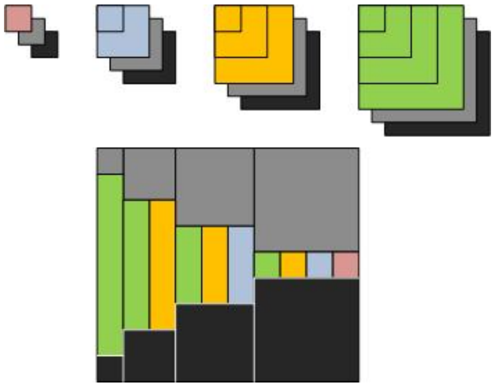
$$3(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)=(n+1)n^2+(1+2+3+\cdots+n)\text{。}\blacksquare$$

可能有人以為此圖只是特例，就像數學歸納法中的示意圖一樣。實際上是有分別的，數學歸納法的證明關鍵是顯示前項條件如何遞推到下一項條件，由於需要前項條件來幫忙，這方法其實是間接的，必須透過逐步檢驗。相較之下無字證明的方法完全是直接的，不存在遞推而是運用了一貫的、普遍的法則來說明，因此可延伸推廣到一般的情形。

阿基米德在沙地上，透過對正方形的分割，著色與有秩序的搬遷，引導人們看到一般等式

$$3(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)=(n+1)n^2+(1+2+3+\cdots+n)$$

的成立，可謂是空前絕後的一種創見，也為西方的無字證明開創先河，後人也對此等式提出了不同版本、精妙的無字證明。



上圖同樣是上半部的三層正方形轉換成下半部分的大長方形。首先，分別將中層灰色正方形和底層黑色正方形由小至大依序搬移至大長方形的上下兩側，接著將上層正方形作引言所介紹的「角形」分割，再把「角形」拉直成長方形，剛好可以依序填補中間的空缺部分。上半部的總面積為

$$3\left(1^2+2^2+3^2+4^2\right)，$$

而下半部分的大長方形之底等於$(1+2+3+4)$，高等於$(2\cdot 4+1)$，因搬移面積不變，得

$$3\left(1^2+2^2+3^2+4^2\right)=(1+2+3+4)(2\cdot 4+1)，$$

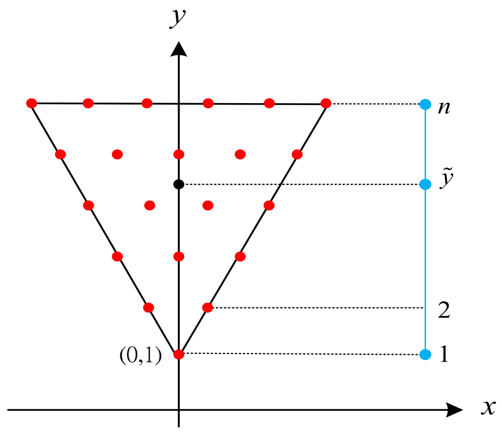
上述操作同樣可延伸至一般等式

$$3\left(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2\right)=(1+2+3+\cdots+n)(2n+1)。$$

3. 利用重心妙證平方和公式

阿基米德經常設計一些「物理模型」，透過力矩或重心來得出一些幾何形體的面積與體積公式，比如他證得「球體體積是外接圓柱體積的三分之二。」這種觸類旁通，運用物理原理來幫助解數學題的手法，阿基米德算是史上第一人。本節將延續上節的定理，說明如何用阿基米德的重心方法得到「平方數的求和公式」。

【重心妙證平方和公式】如圖所示，將高長度$n-1$的正三角形倒放在坐標平面的點$(0,1)$上，分別用正三角形三邊的平行線將對應高$n-1$等分(三方向各n條)，得這些平行線的交點如下。（此圖是$n=6$的情形）



$$\frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{1+2+\cdots+n} = \frac{2n+1}{3}$$

若由下往上，則第一排點的y坐標為 1，第二排兩個點的y坐標都是 2，⋯，第n排n個點的y坐標都是n，而剩下一個深色點為正三角形的重心，其y坐標記為$\tilde{y}$。試以此圖推得「平方數求和公式」，即

$$1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\text{。}$$

在此對重心的y坐標作個分析：因為y軸是正三角形的一條中線，而重心會將中線分割成$2:1$的兩條線段，所以由分點公式，得

$$\tilde{y}=\frac{1\times1+2\times n}{2+1}=\frac{2n+1}{3}.$$

另一方面，$\tilde{y}$也是所有其他點的y坐標之平均值，即

$$\tilde{y}=\frac{1\times1+2\times2+\cdots+n\times n}{1+2+\cdots+n}=\frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{1+2+\cdots+n}.$$

綜合得到

$$\tilde{y} = \frac{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2}{\frac{n(n+1)}{2}} = \frac{2n+1}{3},$$

整理即得平方數求和公式。■

這個（無字）證明直到近代才被發現，可算是阿基米德的漏網之魚，其直觀只要看圖便知，因此也屬於一種無字證明，就和純數學的證明一樣美麗。

4. 結語

在唐太宗為玄奘所賜的序文《聖教序》中有這麼一段話：「像顯可徵，雖愚不惑；形潛莫覩，在智猶迷。」若是用數學來類比，可以這樣解讀：「幾何形體比較有跡可循，就算再怎麼平庸的人，也能掌握一些；而代數結構就抽象許多，沒有形體可參考，即使再怎麼聰明的人，也會迷惑或懷疑它的正確性。」可不是嗎？文字符號透過眼睛還要經大腦解讀，當然不如感受圖像來得直接，生動有趣的圖像更是令人印象深刻，難以忘記。無字證明正是想做到這一點，所附圖像不能太複雜，而且要能精準的描述，將證明的關鍵傳遞給讀者，其實是非常困難的。也因此每個無字證明都像一幅畫，在教學與欣賞的層次都具有極高的價值。

參考文獻

[1] 許志農,無字證明淺介, 數學多元選修+第五刊, 龍騰文化.

[2] David Pengelley,Sums of Powers in Discrete Mathematics: Archimedes Sums Squares in the Sand, Loci: Convergence (July 2013), Mathematical Association of America.

第 3.2 節　韋達的正切定律

「沒有不能解決的問題。」

——韋達（F. Viète, 1540-1603）

1.　引言

現在的高中生可能對韋達這個名字並不熟悉，事實上一元二次方程式

$$ax^2+bx+c=0$$

的兩根α,β之和與積的公式

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a};\quad \alpha\beta=\frac{c}{a}$$

便是韋達發現的，這種根與係數之間的關係稱為韋達公式。韋達是法國十六世紀最有影響力的數學家之一，曾經學習法律當過律師，後來在法國宮廷擔任密碼專家並曾在對西班牙的戰爭中破譯敵軍的密碼。或許是長期解碼帶來了靈感，韋達開始系統性地使用字母來表示已知數、未知數及其乘冪。在此之前人們還是以文字描述數量間的關係，如「立方與 7 個物，再少掉 5 個平方，等於此物多 6 的方根」，可以想像情境稍微變複雜點就很難讀，能解決的問題也十分有限。韋達的做法突破了這種困局，帶來了代數學理論研究的重大進步。今日在數學書寫上，用a,b,c表示已知量，x,y,z表示未知量的習慣用法便是笛卡兒繼承與改良韋達的想法而來。也因為如此，韋達被稱為「代數學之父。」

韋達也將這個強大的方法應用於三角學，在他的著作《應用於三角形的數學定律》中具體地給出了正弦、餘弦與正切的許多倍角的表達公式，以及正弦定律與餘弦定律

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R,\quad \cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\text{。}$$

同時，他也發現關於三角形的正切定律

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{\tan\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\tan\left(\frac{A+B}{2}\right)}，$$

本文就是向讀者介紹這個教科書甚少提及的正切定律。

2. 韋達的正切定律

十六世紀晚期由於天文及航海的發展，需要測量求解三角形的形狀，這涉及大量計算，而韋達的正切定律提供了便利的解三角形方法，讓我們介紹如下。

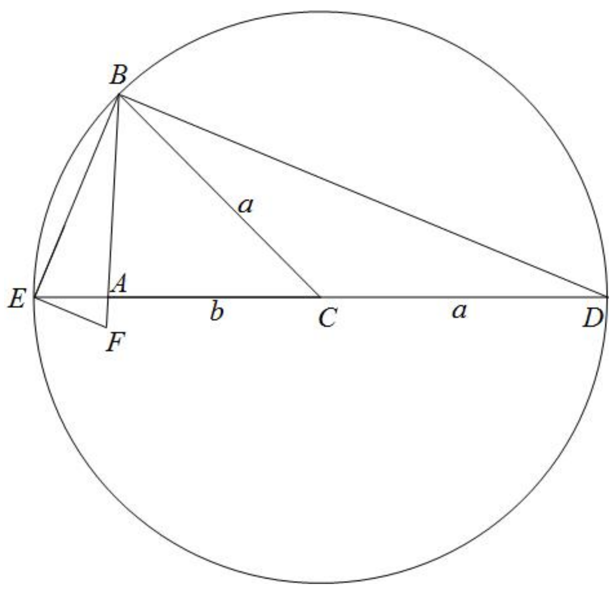
【韋達的正切定律】

若a,b為三角形的兩邊之邊長，且A,B為其對應角，則

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{\tan\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\tan\left(\frac{A+B}{2}\right)}。$$

【證明】在這個證明中，我們使用傳統證明方法，證明如下。

當$a=b$時，有$\angle A=\angle B$，此時等號兩邊皆為 0，顯然成立。現假設$a>b$，在三角形ABC中，先以C點為圓心，a為半徑作圓，交$\overleftrightarrow{AC}$於D,E兩點，連接$\overline{BD},\overline{BE}$，再過$E$點作$\overline{BD}$平行線交$\overleftrightarrow{AB}$於$F$點，如下圖所示。



由三角形 AA 相似性質知：$\Delta ABD \sim \Delta AFE$，得比例式 $\dfrac{\overline{AE}}{\overline{AD}}=\dfrac{\overline{EF}}{\overline{BD}}$ 成立，而左式為

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{AD}}=\frac{a-b}{a+b}，$$

又由圓周角性質得 $\angle EBD=90^\circ$，$\overline{EF}\perp\overline{BD}$ 得 $\angle BEF=90^\circ$，故右式可表為

$$\frac{\overline{EF}}{\overline{BD}}=\frac{\overline{BE}\tan\angle EBF}{\overline{BE}\tan\angle BED}=\frac{\tan\angle EBF}{\tan\angle BED}。$$

觀察 ΔCBE 得

$$\tan\angle BED=\tan\angle BEC=\tan\left(\frac{1}{2}\angle BCD\right)=\tan\left(\frac{A+B}{2}\right)$$

及

$$\tan\angle EBF=\tan\left(\angle EBC-\angle ABC\right)=\tan\left(\frac{A+B}{2}-B\right)=\tan\left(\frac{A-B}{2}\right)，$$

得

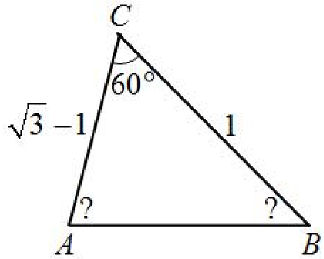
$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{\tan\angle EBF}{\tan\angle BED}=\frac{\tan\left(\dfrac{A-B}{2}\right)}{\tan\left(\dfrac{A+B}{2}\right)}。$$

當 $a<b$ 時，有

$$\frac{a-b}{a+b}=-\frac{b-a}{b+a}=-\frac{\tan\left(\dfrac{B-A}{2}\right)}{\tan\left(\dfrac{B+A}{2}\right)}=\frac{\tan\left(\dfrac{A-B}{2}\right)}{\tan\left(\dfrac{A+B}{2}\right)}，$$

故得證。■

這個定律在當時被應用來解三角形：如下圖所示，給定三角形兩邊 $a=1$，$b=\sqrt{3}-1$ 及 $\angle C=60^\circ$，欲求 $\angle A=?$，$\angle B=?$



根據正切定律，

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{\tan\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\tan\left(\frac{A+B}{2}\right)} ,$$

代入數值，得

$$\frac{1-\left(\sqrt{3}-1\right)}{1+\left(\sqrt{3}-1\right)}=\frac{\tan\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\tan 60^\circ}=\frac{\tan\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\sqrt{3}} ,$$

化簡，得

$$\tan\left(\frac{A-B}{2}\right)=2-\sqrt{3} ,$$

利用正切倍角公式，得

$$\tan\left(A-B\right)=\frac{2\left(2-\sqrt{3}\right)}{1-\left(2-\sqrt{3}\right)^2}=\frac{1}{\sqrt{3}} 。$$

因為$\angle C=60^\circ$，所以$0^\circ<\angle B<\angle A<120^\circ$，即

$$\angle A-\angle B=30^\circ ,$$

搭配$\angle A+\angle B=120^\circ$，得

$$\angle A=75^\circ, \angle B=45^\circ 。$$

讀者可以嘗試用餘弦定理來解這道題，比較一下兩者的差異。

3. 結語

很多人認為數學是數學家的創造，如果說計算操作是無意識的、單純的，那麼數學研究就是一種有意識的、逆流而上去挖掘的過程，最終把背後龐大的運作模式濃縮為一句威力強大的咒語，也就是定理。奇妙的是，許多定理形式的「漂亮」是作者都始料未及的，令人懷疑究竟算是人的作品，還是本來就存在，而被數學家重新發現呢？以正切定律為例：

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{\tan\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\tan\left(\frac{A+B}{2}\right)}\text{。}$$

邊長比值和角正切值之比，兩種不同出發點的計算值神秘的相等了，形式對稱又簡單，剛好是一加一減，此外再也找不到類似形式的正切性質了，這會是巧合嗎？你覺得呢？

最後，關於韋達的正切定律，這裡提供一個補充證明。

【補充證明】等號左邊涉及邊長，右邊涉及角度，因此需要把邊長轉換成角度的恆等式。根據正弦定理，

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R\text{，}$$

得

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{2R\sin A-2R\sin B}{2R\sin A+2R\sin B}=\frac{\sin A-\sin B}{\sin A+\sin B}\text{。}$$

再利用和差化積公式，得

$$\frac{\sin A-\sin B}{\sin A+\sin B}=\frac{2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)}=\frac{\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)}\div\frac{\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)}{\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)}=\frac{\tan\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\tan\left(\frac{A+B}{2}\right)}.$$

得證。■

參考文獻

[1] 比爾・柏林霍夫, 佛南度・辜維亞（洪萬生、英家銘等譯）, 溫柔數學史：從古埃及到超級電腦, 五南, 2014.

第 3.3 節　科茨的一道定理

「虛數是奇妙的人類精神寄託，它好像是存在與不存在之間的一種兩棲動物。」

——萊布尼茲(G.W.Leibniz, 1646-1716)

「在實數領域中，兩個事實之間的最短路徑，會通過複數領域。」

——哈德蒙(J. Hadamard, 1865-1963)

1. 引言

縱觀歷史，人們對於數的概念並非一成不變，而是從計物產生的自然數開始不斷演化出如今的數系。比如為描述每人取得的部分創造了分數，為描述盈虧現象創造了負數。其運算使我們解一次方程式時可以自由的除或移項，也才能有一套一般的解題方法。而後更在數線上由分數拓展到了實數，至此每個生活中的量都對應一個確定的數，數系擴充應該已經山窮水盡。如何能想像，一個觀念的轉變竟帶來了新的大江大海——複數。

其實從實數進到複數只需要一小步：「承認並引入平方為負的數」，但這一小步卻走很久的時間，甚至一直到十七世紀，笛卡兒還稱負數方根為虛數，「子虛烏有的數」，表達對此數的無奈和不忿。早在古希臘人解二次方程時就寫過$\sqrt{81-144}$的式子，但都當做無解處理，畢竟平方怎麼能是負的值呢？於是二次方程式可能有兩個根、一個根和沒有根三種情況，更高次的方程式就更複雜了。但如果引進複數會發現，所有情況都合併成一種：任一個n次方程式恆有n個(複數)根，這便是著名的代數基本定理。再比如複雜的正弦與餘弦的和角公式：

$$\begin{cases}\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta \\ \sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta\end{cases},$$

運用複數運算便能合併為單純的形式

$$(\cos\alpha+i\sin\alpha)(\cos\beta+i\sin\beta)=\cos(\alpha+\beta)+i\sin(\alpha+\beta)\text{ 。}$$

儘管之後越來越多複數的好處被發現，許多人還是抱著觀望的態度，例如高斯在 1799 年的代數基本定理的證明中（他的博士論文），仍然盡可能的避掉複數的使用，畢竟先前的拓展都是取材於自然或生活需求，只有複數沒有可以類比的實體對象，是人類腦中違反直覺的產物。

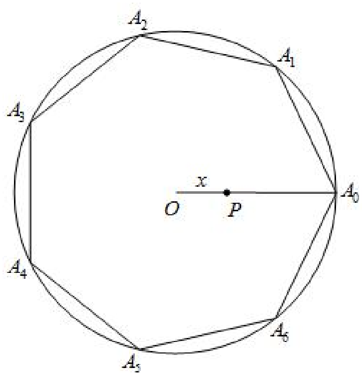
在整個十八世紀，數學家對複數的認識仍搖擺不定，他們很願意在推導有關實數的中間過程利用它，但是又懷疑它本身是否有具體的意義。甚至把複數當成試金石應用在地理，物理，電磁學等諸多領域，並取得了豐碩的成果，本文將介紹科茨（R. Cotes, 1682-1716）發現的一道幾何定理作為範例，以說明複數的威力。

事實上，一直到漢米爾頓(W.R. Hamilton, 1805-1865)證明了可由平面定義出複數結構，人們對複數的疑慮才終於煙消雲散。

2. 科茨的幾何定理

在 1716 年，科茨發現了一道關於正 n 邊形的著名定理，事實上，他只敘述了這個定理而未給出證明。乍看之下似乎和複數毫無關聯，下面就讓我們來看如何藉由複數的幫助來證明這道定理。

【科茨定理】考慮單位圓上的正 n 邊形，頂點 A_0 在圓的 3 點鐘方向，並以逆時針依序標其它頂點為 $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$，如下圖所示（圖為 $n=7$ 的示例）。



若 P 點在 $\overline{OA_0}$ 上，且 $\overline{OP}=x$ ，則以下等式成立

$$\overline{PA_0}\cdot\overline{PA_1}\cdot\overline{PA_2}\cdots\overline{PA_{n-1}}=1-x^n \text{ 。}$$

【證明】若將單位圓圓心平移至複數平面的原點 O ，則 A_1 剛好對應到複數

$z_1=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}$，$A_2$ 對應到複數 $z_2=\cos\frac{2\cdot 2\pi}{n}+i\sin\frac{2\cdot 2\pi}{n}$，…，一般而言，當 $1\le k\le n$ 時，A_k 對應到複數 $\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}$，而且 A_0 對應到複數 $z_0=1$。從正 n 邊形的圖形可以發現

$$\overline{z_1}=z_{n-1},\ \overline{z_2}=z_{n-2},\cdots,\ \overline{z_{n-1}}=z_1.$$

根據 1 的 n 次方根公式，知道 $z^n-1=(z-1)(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_{n-1})$，將複數 z 改為實數 x，得

$$x^n-1=(x-1)(x-z_1)(x-z_2)\cdots(x-z_{n-1}).$$

我們以 $D(x)$ 代表線段乘積 $\overline{PA_0}\cdot\overline{PA_1}\cdot\overline{PA_2}\cdots\overline{PA_{n-1}}$，並利用複數平面的距離公式，可得

$$D(x)=\overline{PA_0}\cdot\overline{PA_1}\cdot\overline{PA_2}\cdots\overline{PA_{n-1}}=|x-1|\cdot|x-z_1|\cdot|x-z_2|\cdots|x-z_{n-1}|,$$

將兩邊平方，得

$$\begin{aligned}
D^2(x)&=|x-1|^2\cdot|x-z_1|^2\cdot|x-z_2|^2\cdots|x-z_{n-1}|^2\\
&=\left[(x-1)\overline{(x-1)}\right]\left[(x-z_1)\overline{(x-z_1)}\right]\left[(x-z_2)\overline{(x-z_2)}\right]\cdots\left[(x-z_{n-1})\overline{(x-z_{n-1})}\right]\\
&=\left[(x-1)^2\right]\left[(x-z_1)(x-\overline{z_1})\right]\left[(x-z_2)(x-\overline{z_2})\right]\cdots\left[(x-z_{n-1})(x-\overline{z_{n-1}})\right]\\
&=\left[(x-1)^2\right]\left[(x-z_1)(x-z_{n-1})\right]\left[(x-z_2)(x-z_{n-2})\right]\cdots\left[(x-z_{n-1})(x-z_1)\right]\\
&=\left[(x-1)(x-z_1)(x-z_2)\cdots(x-z_{n-1})\right]^2\\
&=\left(x^n-1\right)^2.
\end{aligned}$$

因為 $D(x)\ge 0$ 且 $0\le x\le 1$，所以

$$D(x)=-\left(x^n-1\right)=1-x^n\ ，$$

故

$$\overline{PA_0}\cdot\overline{PA_1}\cdot\overline{PA_2}\cdots\overline{PA_{n-1}}=1-x^n\ 。\blacksquare$$

回頭來看，證明只是把真實長度丟到複數世界（複數平面）討論再換回來而已，複數能不費力的越過很多實數繞不過去的難點，全是因為它能馳騁在整個平面上並做很好的四則運算。複數的世界還具備許多實數沒有的特性，能用來簡化實數現象。例如觀察 $(1+i)$ 的乘冪，其幅角是周期性

變化的，可表示為

$$\left(1+i\right)^{n}=\left(\sqrt{2}\right)^{n}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}}\right)^{n}=2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)^{n}=2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4}\right),$$

另一方面，若將其中的$1,i$拆開來看，則根據二項式定理，得

$$\begin{aligned}\left(1+i\right)^{n}&=C_0^n+C_1^n\cdot i+C_2^n\cdot i^2+C_3^n\cdot i^3+\cdots+C_n^n\cdot i^n\\&=\left(C_0^n-C_2^n+C_4^n-\cdots\right)+\left(C_1^n-C_3^n+C_5^n-\cdots\right)\cdot i,\end{aligned}$$

比較兩邊實部的係數，得

$$C_0^n-C_2^n+C_4^n-\cdots=2^{\frac{n}{2}}\cos\frac{n\pi}{4},$$

左式的結果居然是看n除以 8 的餘數決定的！若是不用複數證明，首先你不得不分開討論餘數情形，其次你也看不清為何等式對不同餘數有如此差異，而複數把這些全都聯繫在一起，使一切豁然開朗，複數真是神奇！

3. 結語

科學家為了驗證假設需要反覆的實驗取得數據，為此在實驗室營造出各種特殊的環境來達到目標。今日的數學發展也是如此，常常由於不同需求創造出各種數學結構，很多甚至看來匪夷所思，但確實都有其重要和方便之處。其中「純人造」的結構「複數」，是個大膽而成功的嘗試，也是這一切的起始點。它讓平方不能為負的標準崩塌了，從此人們認識到沒有絕對的標準，數學才能再度提升到更抽象的層次。

參考文獻

[1] 比爾．柏林霍夫, 佛南度．辜維亞, 溫柔數學史：從古埃及到超級電腦, 五南, 2014.

第 3.4 節　來自印度的天才無限家

「一個公式對我沒有意義，除非它代表了娜瑪姬莉女神的想法。」

——拉馬努金（S. Ramanujan, 1887-1920）

「拉馬努金對代數公式和無窮級數變換等等所具有的洞察力才是最令人吃驚的。在這些領域中，我從未見到可與之相匹的人，我只能把他與尤拉或雅可比相比。」

——哈代（G. H.Hardy, 1877-1947）

「在許多情況下，我只介紹一下證明中的特色，有時只指出可以從中得到證明的相關定理……細讀別人完全寫出來的證明，和由自己找出全部或一部份的證明，兩者對心智的影響之區別是很大的。就好比觀光客到一個新地方或是沒有去過的國家，只跟著導遊跑來跑去，和自己拿著地圖探路之間的樂趣大不相同一樣。」

——卡爾《匯編》序

1. 引言

1913 年的 1 月 16 號在劍橋大學的三一學院那裡，著名的數學家哈代教授收到了這樣一封信，這封信是這麼開始的“尊敬的先生，僅自我介紹如下，我是馬德拉斯港務信託處的一個職員，年薪只有 20 英鎊，23 歲，我沒受過大學教育，但已學完通常的中學課程，離開學校後我仍以閒暇時間攻讀數學，我未能按常規按部就班的學習正規的大學課程，但我在開闢我自己的道路。”這一封信很可能是 20 世紀，數學史上最有名的一封信，甚至可能是 20 世紀科學史上最有名的一封信。因為這封信就開啟了後來一個不世出的魔法般的數學天才，他燦爛的一生。然後開始締結了一個科學史上很著名，很偉大的一段友誼關係。

拉馬努金是二十世紀國際數學界公認的數學奇才，他沒有接受過正規的數學教育，卻憑著天生對數學的直覺取得了令人驚嘆的成就，由一個默默無聞的南印度小職員一躍而成為英國劍橋大學的名人、現代數學史上最富傳奇色彩的人物。拉馬努金 1920 年去世的時候年僅 32 歲，身後留下近 4 千條寫在筆記本上未經證明的“奇特而又有趣的數學公式”，這些被稱為拉馬努金的《數學筆記本》，共有三大本。後來數學家安德魯斯(George E. Andrews)在 1976 年到三一學院訪問，又在雷恩圖書館發現拉馬努金重

要的遺留手稿，並稱它為《遺失的筆記》。

儘管沒接受正規數學教育，拉馬努金從小就展現出對數學的興趣與狂熱。他在 15 歲時自學卡爾的《匯編》，內含 5000 多個複雜的數學公式。這種書怎麼可能適合少年看呢？然而拉馬努金靠獨自研究終於弄明白全部內容，也造就了他異於常人的思維能力。受《匯編》影響，拉馬努金在南印度家鄉及赴英五年期間，他的數學筆記本也羅列了幾千條沒證明的數學公式。例如，101 學年度由教育部所辦的全國高中數學能力競賽，其中的一道題目便是出自拉馬努金的《數學筆記本》

$$\sqrt[3]{\cos 40^\circ}+\sqrt[3]{\cos 80^\circ}-\sqrt[3]{\cos 20^\circ}=\sqrt[3]{\frac{3\left(\sqrt[3]{9}-2\right)}{2}}\text{ 。}$$

又當你看到下列的無限項公式

$$\frac{1}{\pi}=\frac{2\sqrt{2}}{9801}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(4k)!(1103+26390k)}{(k!)^4 396^{4k}},$$

你會怎麼想呢？這是天才無限家，知無涯者——拉馬努金，《數學筆記本》裡的一道公式，也是在當時逼近π最快的級數之一，每算一項可得到 8 位有效數字，這種涉及π的無窮級數、連分數公式在《數學筆記本》中隨處可見。拉馬努金處理公式猶如魔術師，他總能巧妙的找出離奇的竅門與技巧，從而得到有趣的結果。

除了直覺和技巧，拉馬努金對數字各種性質的記憶力同樣驚人，他有次病重，哈代前往探望時說：「我搭計程車來，車牌號碼是 1729，這數字真沒趣，希望不是不祥之兆。」拉馬努金答道：「不，這個數有趣得很。在所有可以用兩個立方數之和來表達而且有兩種表達方式的數之中，1729 是最小的。」即

$$1729=1^3+12^3=9^3+10^3$$

後來哈代引述李特爾伍德的話說：「每個正整數都是拉馬努金的朋友。」

以下將介紹拉馬努金所發現的兩組等式，讓讀者一窺天才之手筆。

2. 拉馬努金的根號等式

本節將介紹拉馬努金的一道根號數等式問題當作開胃菜。處理根號數最好的方式就是用乘方來逐步「還原」，使複雜的根號數變簡單，以下我們用拉馬努金發現的根號等式來說明。

【定理一】證明等式

$$\sqrt[5]{\frac{1}{25}}+\sqrt[5]{\frac{3}{25}}-\sqrt[5]{\frac{9}{25}}=\sqrt[3]{\sqrt[5]{\frac{32}{5}}-\sqrt[5]{\frac{27}{5}}}$$

成立。

【證明】將等號兩邊同時三次方，只要能證明等式

$$\left(\sqrt[5]{\frac{1}{25}}+\sqrt[5]{\frac{3}{25}}-\sqrt[5]{\frac{9}{25}}\right)^3=\sqrt[5]{\frac{32}{5}}-\sqrt[5]{\frac{27}{5}}$$

成立即可。根據乘法公式，得

$$(a+b+c)^3=(a+b+c)^2(a+b+c)=\left(a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca\right)(a+b+c),$$

展開整理，得

$$(a+b+c)^3=\left(a^3+b^3+c^3\right)+3\left(a^2b+b^2a+b^2c+c^2b+c^2a+a^2c\right)+6abc \text{ 。}$$

因為

$$\sqrt[5]{\frac{1}{25}}+\sqrt[5]{\frac{3}{25}}-\sqrt[5]{\frac{9}{25}}=5^{-\frac{2}{5}}\left(1^{\frac{1}{5}}+3^{\frac{1}{5}}-3^{\frac{2}{5}}\right) \text{，}$$

所以

$$\left(\sqrt[5]{\frac{1}{25}}+\sqrt[5]{\frac{3}{25}}-\sqrt[5]{\frac{9}{25}}\right)^3=\left(5^{-\frac{2}{5}}\right)^3\left(1^{\frac{1}{5}}+3^{\frac{1}{5}}-3^{\frac{2}{5}}\right)^3=5^{-\frac{6}{5}}\left(1^{\frac{1}{5}}+3^{\frac{1}{5}}-3^{\frac{2}{5}}\right)^3 \text{ 。}$$

將$\left(1^{\frac{1}{5}}+3^{\frac{1}{5}}-3^{\frac{2}{5}}\right)^3$代入上面的乘法公式，得

$$\left(1^{\frac{1}{5}}+3^{\frac{1}{5}}-3^{\frac{2}{5}}\right)^3=\left(1^{\frac{3}{5}}+3^{\frac{3}{5}}-3^{\frac{6}{5}}\right)+3\left(3^{\frac{1}{5}}+3^{\frac{2}{5}}-3^{\frac{4}{5}}+3-3^{\frac{2}{5}}+3^{\frac{4}{5}}\right)+6\left(-3^{\frac{3}{5}}\right) \text{，}$$

再化簡，得

$$\left(1+3^{\frac{3}{5}}-3^{\frac{6}{5}}\right)+3\left(3^{\frac{1}{5}}+3\right)-6\cdot3^{\frac{3}{5}}=\left(1+3^{\frac{3}{5}}-3^{\frac{6}{5}}\right)+\left(3^{\frac{6}{5}}+9\right)-6\cdot3^{\frac{3}{5}}=10-5\cdot3^{\frac{3}{5}} \text{ 。}$$

故

$$\left(\sqrt[5]{\frac{1}{25}}+\sqrt[5]{\frac{3}{25}}-\sqrt[5]{\frac{9}{25}}\right)^3=5^{-\frac{6}{5}}\left(10-5\cdot 3^{\frac{3}{5}}\right)=5^{-\frac{1}{5}}\left(2-3^{\frac{3}{5}}\right)=\sqrt[5]{\frac{32}{5}}-\sqrt[5]{\frac{27}{5}}\ ,$$

得證。■

雖然我們找到了證明方式，但是難道不會好奇“拉馬努金是怎麼想到這個等式的呢？”畢竟證明它是一回事，發現它可能又是另一回事了。當拉馬努金在英國留學時，他的老師哈代就常常好奇的問說：「你每天早上一起床，就寫下這麼多的恆等式，到底是如何發生的？」拉馬努金總是說「那些是昨晚神明託夢給我的。」例如，拉馬努金也提出過根號數

$$\sqrt[3]{\sqrt{\frac{189+72\sqrt{7}+6\sqrt[4]{7}\cdot\sqrt{\frac{3}{2}}\cdot\left(3+\sqrt{7}\right)^2}{2}}+\sqrt{\frac{191+72\sqrt{7}+6\sqrt[4]{7}\cdot\sqrt{\frac{3}{2}}\cdot\left(3+\sqrt{7}\right)^2}{2}}}$$

與根號數

$$\sqrt{\frac{\sqrt{3+\sqrt{7}}+\sqrt[4]{6\sqrt{7}}}{\sqrt{3+\sqrt{7}}-\sqrt[4]{6\sqrt{7}}}}$$

是相等的。難道他能夠直接「感知」根號數間的關連性嗎？關於拉馬努金如何構思出這些奇妙的等式至今仍然是一個謎。

3. 拉馬努金的三角等式

在上節中用到了恆等式

$$(a+b+c)^3=\left(a^3+b^3+c^3\right)+3\left(a^2b+b^2a+b^2c+c^2b+c^2a+a^2c\right)+6abc\ ,$$

它只是單純為了將計算簡化。在這節中將介紹引言中所提，數學能力競賽中一道美麗的題目——拉馬努金的三角等式，我們會發現恆等式在證明中起到關鍵的作用。

【三角等式】證明底下兩個等式成立：

(1) $\sqrt[3]{\cos 40^\circ}+\sqrt[3]{\cos 80^\circ}-\sqrt[3]{\cos 20^\circ}=\sqrt[3]{\frac{3\left(\sqrt[3]{9}-2\right)}{2}}$ 。

(2) $\sqrt[3]{\sec 40^\circ}+\sqrt[3]{\sec 80^\circ}-\sqrt[3]{\sec 20^\circ}=\sqrt[3]{6\left(\sqrt[3]{9}-1\right)}$。

【證明】讓我們先證明第一個等式：

首先注意

$$-\cos 20^\circ=\cos\left(180-20\right)^\circ=\cos 160^\circ \text{。}$$

因為 $40^\circ,80^\circ,160^\circ$ 的三倍角的餘弦值都相等，即

$$\cos 120^\circ=\cos 240^\circ=\cos 480^\circ=-\cos 60^\circ=-\frac{1}{2}\text{，}$$

所以，根據三倍角公式 $\cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$，可知

$$\cos 40^\circ,\quad \cos 80^\circ,\quad \cos 160^\circ=-\cos 20^\circ$$

為方程式 $4x^3-3x=-\dfrac{1}{2}$ 的三實根，即為三次方程式 $x^3-\dfrac{3}{4}x+\dfrac{1}{8}=0$ 的三實根。

現在為了方便起見，令

$$a=\sqrt[3]{\cos 40^\circ},\quad b=\sqrt[3]{\cos 80^\circ},\ c=\sqrt[3]{\cos 160^\circ}=-\sqrt[3]{\cos 20^\circ}\text{。}$$

因為

$$a^3=\cos 40^\circ,\quad b^3=\cos 80^\circ,\quad c^3=\cos 160^\circ=-\cos 20^\circ$$

為 $x^3-\dfrac{3}{4}x+\dfrac{1}{8}=0$ 的三實根，所以由根與係數的關係，得

$$\begin{cases} a^3+b^3+c^3=0; \\ a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3=-\dfrac{3}{4}; \\ abc=\sqrt[3]{a^3b^3c^3}=\sqrt[3]{-\dfrac{1}{8}}=-\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

原問題是要求

$$a+b+c=\sqrt[3]{\cos 40^\circ}+\sqrt[3]{\cos 80^\circ}-\sqrt[3]{\cos 20^\circ}$$

的值。

根據前一節的證明中所考慮的恆等式

$$\left(a+b+c\right)^3=\left(a^3+b^3+c^3\right)+3\left(a^2b+b^2a+b^2c+c^2b+c^2a+a^2c\right)+6abc\text{，}$$

及分別用ab,bc,ca代入上式中的a,b,c，所得的恆等式

$$(ab+bc+ca)^3=(a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3)+3(a^2b^3c+ab^3c^2+ab^2c^3+a^2bc^3+a^3bc^2+a^3b^2c)$$
$$+6a^2b^2c^2$$

將兩恆等式代入數值，得

$$(a+b+c)^3=0+3(a^2b+b^2a+b^2c+c^2b+c^2a+a^2c)+6\left(-\frac{1}{2}\right)$$

及

$$(ab+bc+ca)^3=\left(-\frac{3}{4}\right)+3\left(-\frac{1}{2}\right)(a^2b+b^2a+b^2c+c^2b+c^2a+a^2c)+6\left(-\frac{1}{2}\right)^2\text{。}$$

雖然無法直接求出$a^2b+b^2a+b^2c+c^2b+c^2a+a^2c$，但觀察後可發現

$$(a+b+c)(ab+bc+ca)=(a^2b+b^2a+b^2c+c^2b+c^2a+a^2c)+3abc\text{，}$$

這樣就能把上面兩式連繫在一起了！為了進一步化簡，令

$$S=a+b+c,\quad T=ab+bc+ca\text{，}$$

則有

$$a^2b+b^2a+b^2c+c^2b+c^2a+a^2c=ST+\frac{3}{2}\text{。}$$

再代入上面兩式，得

$$\begin{cases} S^3-3ST=\dfrac{3}{2}\cdots\cdots\cdots① \\ T^3+\dfrac{3}{2}ST=-\dfrac{3}{2}\cdots\cdots② \end{cases}$$

和解二元一次方程式類似，我們想消去T，整理出只含S的方程式。將②式乘 2 倍加上①式，得

$$S^3+2T^3=-\frac{3}{2}.\cdots\cdots③$$

將③式等號兩邊同乘S^3，得

$$S^6+2(ST)^3=-\frac{3}{2}S^3\text{，}$$

再由①式的ST代入，得

$$S^6+2\left(\frac{S^3}{3}-\frac{1}{2}\right)^3=-\frac{3}{2}S^3 \text{ ，}$$

整理，得

$$S^9+9S^6+27S^3-\frac{27}{8}=0 \text{ ，}$$

恰好可配成立方式

$$\left(S^3+3\right)^3=\frac{27}{8}\cdot 9 \text{ 。}$$

因為 $S=\sqrt[3]{\cos 40^\circ}+\sqrt[3]{\cos 80^\circ}-\sqrt[3]{\cos 20^\circ}$ 為實數，所以

$$S^3+3=\frac{3}{2}\sqrt[3]{9}\Rightarrow S=\sqrt[3]{\frac{3\left(\sqrt[3]{9}-2\right)}{2}} \text{ 。}$$

第二個等式的證明方法和第一個類似：

因為 $\sec\theta=\dfrac{1}{\cos\theta}$ 且知 $\cos 40^\circ,\cos 80^\circ,\cos 160^\circ$ 為方程式 $x^3-\dfrac{3}{4}x+\dfrac{1}{8}=0$ 的三實根，所以 $\sec 40^\circ,\sec 80^\circ,\sec 160^\circ$ 為方程式 $\left(\dfrac{1}{x}\right)^3-\dfrac{3}{4}\left(\dfrac{1}{x}\right)+\dfrac{1}{8}=0$ 的三實根，即

$$\sec 40^\circ,\quad \sec 80^\circ,\quad \sec 160^\circ=-\sec 20^\circ$$

為方程式 $\dfrac{1}{8}x^3-\dfrac{3}{4}x^2+1$ 的三實根。

同樣令

$$a=\sqrt[3]{\sec 40^\circ},b=\sqrt[3]{\sec 80^\circ},c=-\sqrt[3]{\sec 20^\circ}$$

由根與係數的關係，得

$$\begin{cases} a^3+b^3+c^3=6 \\ a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3=0 \\ abc=-2 \end{cases} \text{ ，}$$

令 $S=a+b+c,T=ab+bc+ca$ ，可化簡得

$$\begin{cases} S^3-3ST=12 \\ T^3+6ST=-12 \end{cases} ,$$

類似處理，可整理得

$$\frac{1}{27}S^9+\frac{2}{3}S^6+4S^3-64=0\text{ 。}$$

配成立方式

$$\left(\frac{S^3}{3}+2\right)^3=8\cdot 9\text{ 。}$$

因為 $S=\sqrt[3]{\sec 40^\circ}+\sqrt[3]{\sec 80^\circ}-\sqrt[3]{\sec 20^\circ}$ 為實數，所以

$$\frac{S^3}{3}+2=2\sqrt[3]{9}\Rightarrow S=\sqrt[3]{6\left(\sqrt[3]{9}-1\right)}\text{ ，}$$

得證。■

不要被突然出現的三角函數嚇住，這裡的 $\cos 40°, \cos 80°, -\cos 20°$ 其實都是根號數，題目架構和【定理一】一樣，只是根號形式十分複雜，對於理解和計算毫無幫助，所以借用幾何形式來表示，骨子裡還是代數問題。在那次競賽中，關於這道問題，五十位考生中只有一位作對，而且是位高二的女生，以上大致是羅啟心這位女學生的作法。

4. 結語

西方有個很古老的爭論，就是數學是數學家造出來的實體，還是本來就有，只不過又被數學家發現而已。拉馬努金是屬於後一陣營的。在他看來，數及它們之間的數學關係，只不過是給人類的一些線索，說明這宇宙是怎樣結合在一起的。每一個新定理就是這未被探索的無涯中的一點一滴。在哈代剛和他合作時，他甚至不太理解甚麼是證明，以及為何要花時間去論證那些他憑直覺就確認是對的事情？本文只是介紹拉馬努金信手拈來的兩個恆等式，並且用凡人的角度來解讀與證明，面對他的數學成果我們(後人)都像是盲人摸象，摸了大半天才能確認這是象。而只有拉馬努金能夠完全跳過摸的過程，他一眼就能看到了。

最後，我們附上哈代給英年早逝的拉馬努金的悼文：

「……如果他在年輕時就被發現並稍加培訓，他可能會成為一個更偉大的數學家，他會揭示更多的新東西，而且無疑也是更

重要的東西。不過另一方面，這一來他就可能不再那麼是拉馬努金了，而是更多地像一個歐洲教授，然而這可能是失大於得。……」

參考文獻

[1] 羅伯特・卡尼格爾, 知無涯者：拉馬努金傳(The Man Who Knew Infinity), 上海科技教育出版社, 2008。

[2] 鳳凰衛視 20091203 梁文道《開卷八分鐘》節目：【本期薦書：知無涯者——拉馬努金傳】。

第 4 章　結論

完成這十篇文章後，感覺自己心態起了很大變化，具體來說有下列幾點。

空虛、陌生感覺的降低

因為過去有很多概念沒有親自想過，所以寫作文章時，在提出自己的疑問後，和舊經驗做連結往往帶出新的問題。好在我有足夠的時間進行思考，並積極探究設法弄清楚。如此重新架構起來的內容才有實體感，畢竟一磚一瓦都是自己親手以最順眼的方式鋪設，我認為這樣才能達到真正的進步。

數學視野的拓展、接受度的提升

過去所學沒有經過再一次消化，純粹是由各種散亂的題目、概念、定理堆砌而成，像茫茫大海汪洋一片。經過整理後感覺變成一座圖書館，書架上排列整齊的書。依不同方式分類而又互相聯繫，對我而言一個問題可以帶出一種技巧，甚至背後的一套方法跟思路。這大大壓縮了腦內的負擔，使我能騰出時間精力做更多事情。數學觀的培養也使接受度有了提升，我發現自己能閱讀講授數學史和數學思維方法的書了，換作以前的我是不可能看下去的，真是不可思議！

開始學習欣賞

完成這些文章的主要目的並不是解題訓練，我現在知道解題和個人能力有關，且一定程度上是可以培養的。我的目的是嘗試把心中的鎖打開，追求的並非囫圇吞棗，而是回到學習的初衷。我發現對概念深入理解會產生一種親切感，會注意以前看不見的地方，開始仔細檢視證明的細節，這些概念是如何促成問題的解決。最後把概念圖像化，開始欣賞和品味數學。

這次撰寫使自己受益匪淺，將這些好經驗寫成文章，相信對於面臨類似情況的廣大學習者，也會有不少參考價值。

參考文獻

中文部分

孔德偉(2014)。*尺規作圖實例、題解和證明*。香港：香港特別行政區政府教育局。

汪曉勤、張小明(2006)。圓之吻：阿波羅尼斯問題的歷史。*數學傳播季刊*，*30*(2)，40-50。

林傑斌(1995)。*天才之旅：偉大數學定理的創立*。台北市：牛頓出版社。

洪萬生(2014)。*摺摺稱奇：初登大雅之堂的摺紙數學*。台北市：三民。

徐澤林(2007)。江戶時代的算額與日本中學數學教育。*數學傳播季刊*，*31*(3)，70-78。

趙文敏(1992)。*幾何學概論*。台北市：九章出版社。

高斯(潘承洞、張明尧譯)(2011)。*算術探索*。中國：哈爾濱工業大學出版社。

丘成桐教授專訪」影片網站(2013 年 5 月 5 日)。檢自 https://www.youtube.com/watch?v=elPt0BfU_bA(May20, 2020)

日本社團「數學愛好者協會」網站(2018 年 12 月 18 日)。檢自 https://twitter.com/mathlava (May 10, 2020)

外文部分

Aczel, A.D. (2009).*Descartes's Secret Notebook: A True Tale of Mathematics, Mysticism, and the Quest to Understand the Universe.* New York:Broadway Books.

Berlinghoff, W. P., &Gouvea, F. Q. (2014). *Math Through the Ages: A Gentle History for Teachers and Others.*Farmington:Oxton House Publishers.

Bold, B. (2012).*Famous Problems of Geometry and How to Solve Them.* New York:Dover Books.

Coxeter, H. S. M. (1989). *Introduction to Geometry.*Hoboken: WILEY.

Dunham, W. (1990). *Journey Through Genius:The Great Theorems of Mathematics*.London: Penguin Books.

Hall, T. (1970).*Carl Friedrich Gauss.*Cambridge:The MIT Press.

Hidetoshi, F., Rothman, T., Dyson, F. (2008). *Sacred Mathematics: Japanese Temple Geometry*. Princeton: Princeton University Press.

Kanigel, R. (1992).*The Man Who Knew Infinity: A Life of the Genius Ramanujan.* United Kingdom: Abacus.

Martin, G. E.(1998). *Geometric Constructions.* New York:Springer.

Meskens, A., & Tytgat, P. (2017). *Exploring Classical Greek Construction Problems with Interactive Geometry Software.*Basel:Birkhäuser.

Pengelley, D. (2013). Sums of Powers in Discrete Mathematics: Archimedes Sums Squares in the Sand. *Convergence,*The Mathematical Association of America. doi:10.4169/loci003986

Sandifer, E. (2008). *How Euler Did Even More*. Washington, D.C: MAA.

Shenitzer, A., & Steprans, J. (1994). The Evolution of Integration. *Amer. Math. Monthly* 101, 66-72.

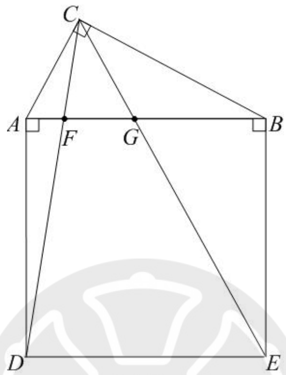
Yiu, P. (1999). *The Elementary Mathematical Works of Leonhard Euler(1707–1783).* Florida: Department of Mathematics Florida Atlantic University.

附錄 1：被遺忘的費馬-尤拉勾股定理其他證明

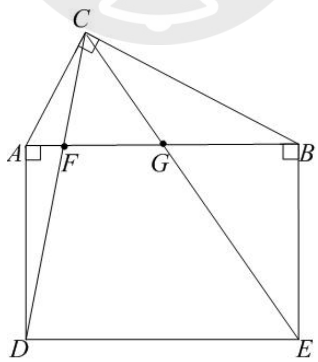
【費馬-尤拉勾股定理】

在三角形 ABC 中，$\angle C$ 為直角，以斜邊 $\overline{AB}$ 為底向外作一矩形 $ABED$，連接線段 $\overline{CD},\overline{CE}$，並假設兩線段和斜邊 $\overline{AB}$ 分別交於 F,G 兩點。試證

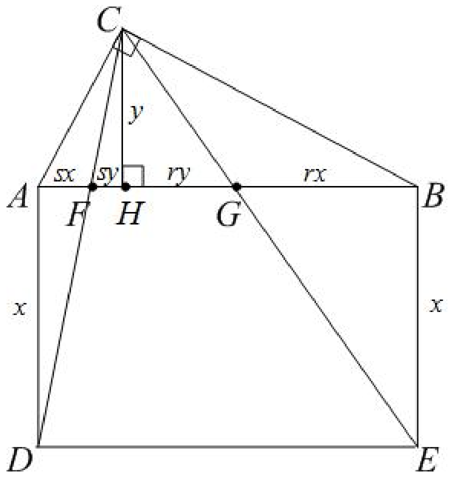
(1) 若 $\overline{AB}=\overline{AD}$，則 $\overline{AF}\cdot\overline{BG}=\overline{FG}^2$。



(2) 若 $\overline{AB}=\sqrt{2}\,\overline{AD}$，則 $\overline{AG}^2+\overline{BF}^2=\overline{AB}^2$。



【代數證明】過 C 點作高 $\overline{CH}$ 如下圖，



可得兩組相似三角形$\Delta CHF \sim \Delta DAF, \Delta CHG \sim \Delta EBG$，得比例式

$\dfrac{\overline{AF}}{\overline{FH}} = \dfrac{\overline{BG}}{\overline{GH}} = \dfrac{\overline{AD}}{\overline{CH}}$成立。現假設長度分別為

$$\overline{AD} = x, \overline{CH} = y, \overline{AF} = sx, \overline{FH} = sy, \overline{BG} = rx, \overline{GH} = ry，$$

可得

$$\overline{AB} = sx + sy + rx + ry = (r+s)(x+y)。$$

另外，根據母子相似定裡可得

$$\overline{AH} \cdot \overline{BH} = \overline{CH}^2 \Rightarrow s(x+y) \cdot r(x+y) = rs(x+y)^2 = y^2，$$

以下將用這兩條關係式證明定理。

(1) 若$\overline{AB} = \overline{AD} = x$，則有

$$\begin{cases} (r+s)(x+y) = x \\ rs(x+y)^2 = y^2 \end{cases}，$$

將下式等號兩邊同乘$(r+s)^2$，並以上式代入，得

$$rsx^2 = y^2(r+s)^2 \Rightarrow (rx)(sx) = (ry+sy)^2，$$

即

$$\overline{BG} \cdot \overline{AF} = \overline{FG}^2。$$

(2) 若$\overline{AB} = \sqrt{2}\,\overline{AD} = \sqrt{2}x$，則有

$$\begin{cases}(r+s)(x+y)=\sqrt{2}x \\ rs(x+y)^2=y^2\end{cases},$$

分別變形得

$$\begin{cases}\dfrac{r+s}{\sqrt{2}}=\dfrac{x}{x+y} \\ \sqrt{rs}=\dfrac{y}{x+y}\end{cases}\Rightarrow\frac{r+s}{\sqrt{2}}+\sqrt{rs}=1\text{。}$$

移項後平方得

$$\frac{(r+s)^2}{2}=\left(1-\sqrt{rs}\right)^2=rs+1-2\sqrt{rs}\text{，}$$

再用原式代入，得

$$\frac{(r+s)^2}{2}=rs+1-2\left(1-\frac{r+s}{\sqrt{2}}\right)\Rightarrow r^2+s^2-2\sqrt{2}r-2\sqrt{2}s+2=0\text{。}$$

整理得

$$\left(\sqrt{2}-r\right)^2+\left(\sqrt{2}-s\right)^2=2\text{，}$$

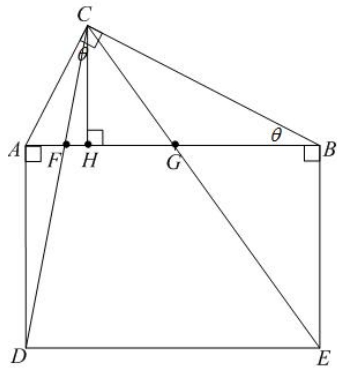
將等號兩邊同乘 x^2，得

$$\left(\sqrt{2}x-rx\right)^2+\left(\sqrt{2}x-sx\right)^2=\left(\sqrt{2}x\right)^2\text{，}$$

即

$$\overline{AG}^2+\overline{FB}^2=\overline{AB}^2\text{。}\blacksquare$$

【三角證明】在三角形 ABC 中，作高 $\overline{CH}$，如圖所示，由三角形 AA 相似性質得三組相似三角形：$\Delta ADF\sim\Delta HCF,\Delta BEG\sim\Delta HCG$ 及 $\Delta CDE\sim\Delta CFG$。



假設 $\overline{FG}=r\overline{DE}$，有

$$\frac{\overline{CF}}{\overline{FD}}=\frac{\overline{CH}}{\overline{AD}}=\frac{\overline{FH}}{\overline{AF}}=\frac{r}{1-r}\text{，}$$

同理，得

$$\frac{\overline{CG}}{\overline{GE}}=\frac{\overline{CH}}{\overline{BE}}=\frac{\overline{GH}}{\overline{BG}}=\frac{r}{1-r}\text{ 。}$$

為了方便，令$\angle ABC=\angle ACH=\theta$，利用這些條件來證明：

(1) 若$\overline{AB}=\overline{AD}$，則

$$\frac{r}{1-r}=\frac{\overline{CH}}{\overline{AD}}=\frac{\overline{AB}\sin\theta\cos\theta}{\overline{AB}}=\sin\theta\cos\theta\text{ 。}$$

又由

$$\overline{AF}=\frac{1-r}{(1-r)+r}\overline{AH}=(1-r)\overline{AC}\sin\theta=(1-r)\overline{AB}\sin^2\theta\text{ ，}$$

及

$$\overline{BG}=\frac{1-r}{(1-r)+r}\overline{BH}=(1-r)\overline{BC}\cos\theta=(1-r)\overline{AB}\cos^2\theta\text{ ，}$$

得到

$$\begin{aligned}\overline{AF}\cdot\overline{BG}&=(1-r)\overline{AB}\sin^2\theta\cdot(1-r)\overline{AB}\cos^2\theta\\&=\left((1-r)\sin\theta\cos\theta\overline{AB}\right)^2\\&=\left(r\overline{DE}\right)^2\\&=\overline{FG}^2.\end{aligned}$$

(2) 若$\overline{AB}=\sqrt{2}\,\overline{AD}$，則

$$\frac{r}{1-r}=\frac{\overline{CH}}{\overline{AD}}=\frac{\overline{AB}\sin\theta\cos\theta}{\frac{\overline{AB}}{\sqrt{2}}}=\sqrt{2}\sin\theta\cos\theta\text{ 。}$$

同(1)，有

$$\overline{AF}=(1-r)\overline{AB}\sin^2\theta,\quad \overline{BG}=(1-r)\overline{AB}\cos^2\theta\text{，}$$

可得

$$\overline{AF}\cdot\overline{BG}=\left((1-r)\sin\theta\cos\theta\overline{AB}\right)^2=\left(\frac{r\overline{DE}}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{\overline{FG}^2}{2}\text{ 。}$$

因此

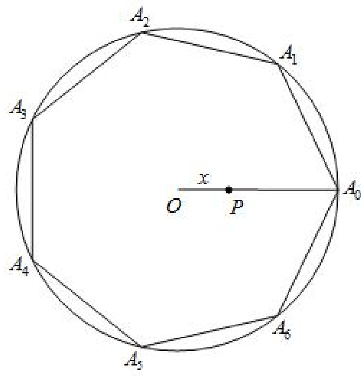
$$\overline{BF}^2=\left(\overline{BG}+\overline{FG}\right)^2=\overline{BG}^2+2\overline{BG}\cdot\overline{FG}+2\overline{AF}\cdot\overline{BG}=\overline{BG}^2+2\overline{AG}\cdot\overline{BG}\ ，$$

得到

$$\overline{AG}^2+\overline{BF}^2=\overline{AG}^2+\left(\overline{BG}^2+2\overline{AG}\cdot\overline{BG}\right)=\overline{AB}^2\ 。\blacksquare$$

附錄 2：科茨的一道定理非複數證明

【科茨定理】考慮單位圓上的正 n 邊形，頂點 A_0 在圓的 3 點鐘方向，並以逆時針依序標其它頂點為 $A_1, A_2, ..., A_{n-1}$，如下圖所示（圖為 $n=7$ 的示例）。



若 P 點在 $\overline{OA_0}$ 上，且 $\overline{OP}=x$ ，則以下等式成立

$$\overline{PA_0}\cdot\overline{PA_1}\cdot\overline{PA_2}\cdots\overline{PA_{n-1}}=1-x^n \text{ 。}$$

【證明】首先注意到頂點 A_0 □ A_{n-1} 除了本身在 x 軸上的點(n 為奇數時僅 A_0 一點， n 為偶數時有 $A_0, A_{\frac{n}{2}}$ 兩點)，其餘點對於 x 軸都是上下對稱的，即 $\overline{PA_i}=\overline{PA_{n-i}}$ 。因此左式中除了 $\overline{PA_0}=1-x, \overline{PA_{\frac{n}{2}}}=1+x$ 可直接算出，其餘的線段乘積可配對為

$$\left(\overline{PA_1}\cdot\overline{PA_{n-1}}\right)\cdot\left(\overline{PA_2}\cdot\overline{PA_{n-2}}\right)\cdots\left(\overline{PA_i}\cdot\overline{PA_{n-i}}\right)=\overline{PA_1}^2\cdot\overline{PA_2}^2\cdots\overline{PA_i}^2, i<\frac{n}{2} \text{ ，}$$

而在 ΔPOA_k 中由於 $\angle POA_k=\dfrac{2k\pi}{n}$ ，根據餘弦定理可得

$$\overline{PA_k}^2=x^2-2\cos\frac{2k\pi}{n}x+1^2 \text{ 。}$$

因此 n 為奇數時左式為

$$\overline{PA_0}\cdot\overline{PA_1}^2\cdots\overline{PA_{\frac{n-1}{2}}}^2=(1-x)\cdot\prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}\left(x^2-2\cos\frac{2k\pi}{n}x+1\right) \text{ ，}$$

n 為偶數時左式為

$$\overline{PA_0}\cdot\overline{PA_{\frac{n}{2}}}\cdot\overline{PA_1}^2\cdots\overline{PA_{\frac{n-2}{2}}}^2=(1-x)\cdot(1+x)\cdot\prod_{k=1}^{\frac{n-2}{2}}\left(x^2-2\cos\frac{2k\pi}{n}x+1\right) \text{ ，}$$

以下將證明這些多項式乘積皆為$1-x^n$，便得原式成立。

(1) 為了方便證明每個二次式都是x^n-1的因式，我們考慮更一般的情形：

對自然數n，$x^2-2\cos\theta x+1$恆為$x^{2n}-2\cos n\theta x^n+1$的因式，即

$$x^2-2\cos\theta x+1 \mid x^{2n}-2\cos n\theta x^n+1, n=1,2,3,\ldots \text{。}$$

對n使用數學歸納法，$n=1$時顯然成立，$n=2$時由

$$\left(x^2-2\cos\theta x+1\right)\left(x^2+2\cos\theta x+1\right)=\left(x^2+1\right)^2-\left(2\cos\theta x\right)^2 \text{，}$$

展開再利用倍角公式得

$$x^4-2\left(2\cos^2\theta-1\right)x^2+1=x^4-2\cos 2\theta x^2+1 \text{，}$$

故$n=2$也成立。現假設$n=k-1,k$時成立，即

$$f_1=x^{2k-2}-2\cos\left(k-1\right)\theta x^{k-1}+1, f_2=x^{2k}-2\cos k\theta x^k+1$$

都能被$x^2-2\cos\theta x+1$整除，欲推出$n=k+1$成立，考慮

$$\left(-x^2\right)f_1+\left(2\cos\theta x\right)f_2+\left(x^2-2\cos\theta x+1\right)\left(x^{2k}+1\right) \text{，}$$

此式能被$x^2-2\cos\theta x+1$整除，前兩項乘開分別為

$$-x^{2k}+2\cos\left(k-1\right)\theta x^{k+1}-x^2, 2\cos\theta x^{2k+1}-4\cos\theta\cos k\theta x^{k+1}+2\cos\theta x \text{，}$$

相加整理得，

$$2\cos\theta x^{2k+1}-x^{2k}-2\left(2\cos k\theta\cos\theta-\cos\left(k-1\right)\theta\right)x^{k+1}-x^2+2\cos\theta x \text{。}$$

加入最後一項得

$$x^{2k+2}-2\left(2\cos k\theta\cos\theta-\cos\left(k-1\right)\theta\right)x^{k+1}+1 \text{，}$$

最後根據和角公式有

$$\cos\left(k+1\right)\theta=\cos k\theta\cos\theta-\sin k\theta\sin\theta, \cos\left(k-1\right)\theta=\cos k\theta\cos\theta+\sin k\theta\sin\theta$$

將兩公式相加，並代入上式得

$$x^{2k+2}-2\cos\left(k+1\right)\theta x^{k+1}+1 \text{，}$$

即$n=k+1$時成立。

(2) 由於

$$\theta=\frac{2k\pi}{n} \Rightarrow \cos n\theta=\cos 2k\pi=1 \text{，}$$

令$\theta=\dfrac{2k\pi}{n}$代入剛才的關係式可得

$$x^2-2\cos\frac{2k\pi}{n}x+1 \,\Big|\, x^{2n}-2x^n+1, 1\le k<\frac{n}{2}\text{。}$$

注意到二次式$\left\{x^2-2\cos\dfrac{2k\pi}{n}x+1, 1\le k<\dfrac{n}{2}\right\}$都不能用係數為實數的多項式來因式分解，且兩兩都不相同，就跟整數中的不同質數一樣。因此如果對右式

$$x^{2n}-2x^n+1=\left(x^n-1\right)^2$$

用實係數多項式作完全的因式分解，可得n為奇數時有

$$\prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}\left(x^2-2\cos\frac{2k\pi}{n}x+1\right)\Bigg|\frac{\left(x^n-1\right)}{\left(x-1\right)}\text{，}$$

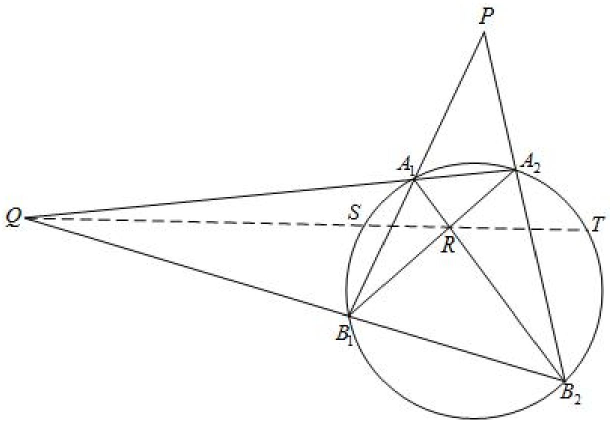
n為偶數時有

$$\prod_{k=1}^{\frac{n-2}{2}}\left(x^2-2\cos\frac{2k\pi}{n}x+1\right)\Bigg|\frac{\left(x^n-1\right)}{\left(x^2-1\right)}\text{，}$$

比較兩邊次數得兩邊相等，多項式關係得證，故原式得證。■

附錄 3：來自高斯「稀少但成熟」的洞見其他證明

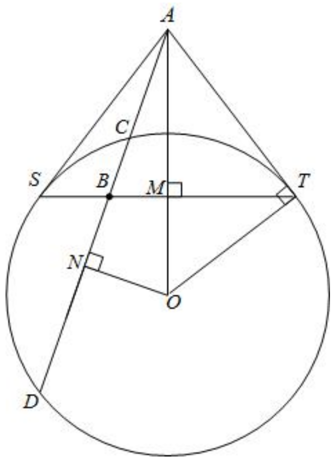
【高斯求圓切點定理】過圓外一點 P 作兩條割線分別交圓於 A_1, B_1 與 A_2, B_2，並作兩直線 $\overleftrightarrow{A_1A_2}, \overleftrightarrow{B_1B_2}$ 的交點 Q 以及兩直線 $\overleftrightarrow{A_1B_2}, \overleftrightarrow{A_2B_1}$ 的交點 R，如下圖所示。



試證：直線 $\overleftrightarrow{QR}$ 與圓的交點 S, T，正好是 P 對圓的兩切線之切點。

【證明 1】以下我們將圓和割線連出的直線形分開來討論，並分成兩階段來說明。

(1) 設切點連線段 $\overline{ST}$ 上的點 B 和圓外點 A 相連並交圓於 C, D 兩點，如圖所示，



由三角形 AA 相似性質知：$\Delta AMB \sim \Delta ANO, \Delta AMT \sim \Delta ATO$，得比例式 $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AM}} = \dfrac{\overline{AO}}{\overline{AN}}$ 與 $\dfrac{\overline{AT}}{\overline{AM}} = \dfrac{\overline{AO}}{\overline{AT}}$ 成立，即

$$\overline{AB} \cdot \overline{AN} = \overline{AM} \cdot \overline{AO} = \overline{AT}^2 \text{ 。}$$

又根據圓冪定理，得

$$\overline{AB}\cdot\overline{AN}=\overline{AT}^2=\overline{AC}\cdot\overline{AD}\text{ ，}$$

由於 N 為 $\overline{CD}$ 中點，可將上式代換為

$$\overline{AB}\cdot\left(\frac{\overline{AC}+\overline{AD}}{2}\right)=\overline{AC}\cdot\overline{AD}\text{ ，}$$

乘開後移項，得

$$\overline{AD}\cdot\left(\overline{AB}-\overline{AC}\right)=\overline{AC}\cdot\left(\overline{AD}-\overline{AB}\right)\text{，}$$

即

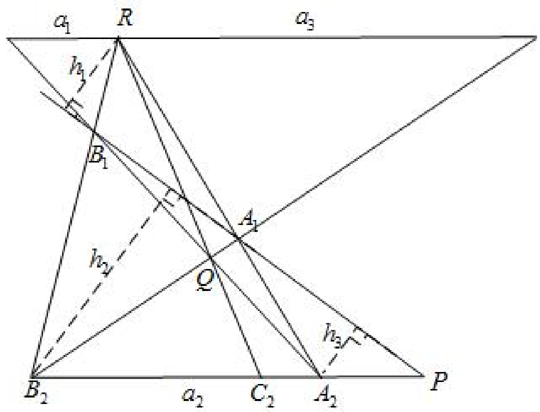
$$\overline{AD}\cdot\overline{BC}=\overline{AC}\cdot\overline{BD}\Rightarrow\frac{\overline{AC}}{\overline{AD}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{BD}}\text{ 。}$$

容易看出，在線段 $\overline{CD}$ 中滿足 $\frac{\overline{AC}}{\overline{AD}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{BD}}$ 的 B 點位置是唯一的，也就是說就算一開始不知道 S,T ，過 A 點作割線憑比例關係便能找出 $\overline{ST}$ 和割線的交點。

(2) 現在忽略題目中的圓，只看直線形並設 $\overleftrightarrow{QR}$ 和 $\overleftrightarrow{PA_1}$ 交於 C_1 ，和 $\overleftrightarrow{PA_2}$ 交於 C_2 ，欲證明下式

$$\frac{\overline{A_2P}}{\overline{PB_2}}=\frac{\overline{A_2C_2}}{\overline{C_2B_2}},\frac{\overline{A_1P}}{\overline{PB_1}}=\frac{\overline{A_1C_1}}{\overline{C_1B_1}}$$

恆成立。



如果將圖形看作一直線 L 截 ΔRA_2B_2 於 P,A_1,B_1 三點，並從三角形頂點分別對 L 做垂線 h_1,h_2,h_3 ，得三組共用 L 為邊的相似三角形，得

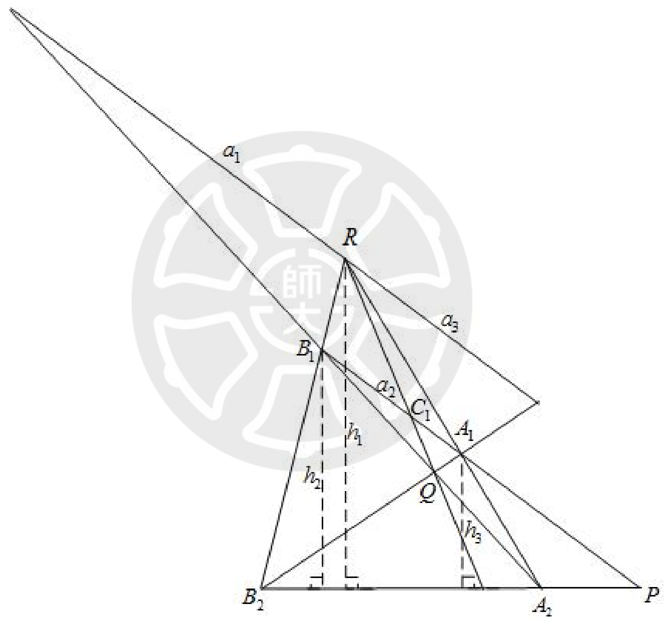
$$\frac{\overline{RB_1}}{\overline{B_1B_2}}=\frac{h_1}{h_2},\frac{\overline{B_2P}}{\overline{PA_2}}=\frac{h_2}{h_3},\frac{\overline{A_2A_1}}{\overline{A_1R}}=\frac{h_3}{h_1}\Rightarrow\frac{\overline{RB_1}}{\overline{B_1B_2}}\cdot\frac{\overline{B_2P}}{\overline{PA_2}}\cdot\frac{\overline{A_2A_1}}{\overline{A_1R}}=\frac{h_1\cdot h_2\cdot h_3}{h_2\cdot h_3\cdot h_1}=1\text{ ，}$$

另一方面，過三角形頂點R做對邊的平行線，延伸過Q的線段，與平行線交點和R距離a_1,a_3，並設對邊長a_2，得多組共用兩平行邊的相似三角形。而有

$$\frac{\overline{RB_1}}{\overline{B_1B_2}}=\frac{a_1}{a_2},\frac{\overline{B_2C_2}}{\overline{C_2A_2}}=\frac{a_3}{a_1},\frac{\overline{A_2A_1}}{\overline{A_1R}}=\frac{a_2}{a_3}\Rightarrow\frac{\overline{RB_1}}{\overline{B_1B_2}}\cdot\frac{\overline{B_2C_2}}{\overline{C_2A_2}}\cdot\frac{\overline{A_2A_1}}{\overline{A_1R}}=\frac{a_1\cdot a_3\cdot a_2}{a_2\cdot a_1\cdot a_3}=1\text{ ，}$$

上下兩式相除得

$$\frac{\overline{A_2P}}{\overline{PB_2}}=\frac{\overline{A_2C_2}}{\overline{C_2B_2}}\text{ 。}$$



同理，如果將圖形看作一直線L'截ΔRA_1B_1於P,A_2,B_2三點，並從三角形頂點分別對L'做垂線h_1,h_2,h_3，得三組共用L'為邊的相似三角形，得

$$\frac{\overline{RB_2}}{\overline{B_2B_1}}=\frac{h_1}{h_2},\frac{\overline{B_1P}}{\overline{PA_1}}=\frac{h_2}{h_3},\frac{\overline{A_1A_2}}{\overline{A_2R}}=\frac{h_3}{h_1}\Rightarrow\frac{\overline{RB_2}}{\overline{B_2B_1}}\cdot\frac{\overline{B_1P}}{\overline{PA_1}}\cdot\frac{\overline{A_1A_2}}{\overline{A_2R}}=\frac{h_1\cdot h_2\cdot h_3}{h_2\cdot h_3\cdot h_1}=1\text{ ，}$$

另一方面，過三角形頂點R做對邊的平行線，延伸過Q的線段，與平行線交點和R距離a_1,a_3，並設對邊長a_2，得多組共用兩平行邊的相似三角形。而有

$$\frac{\overline{RB_2}}{\overline{B_2B_1}}=\frac{a_3}{a_2},\frac{\overline{B_1C_1}}{\overline{C_1A_1}}=\frac{a_1}{a_3},\frac{\overline{A_1A_2}}{\overline{A_2R}}=\frac{a_2}{a_1}\Rightarrow\frac{\overline{RB_2}}{\overline{B_2B_1}}\cdot\frac{\overline{B_1C_1}}{\overline{C_1A_1}}\cdot\frac{\overline{A_1A_2}}{\overline{A_2R}}=\frac{a_3\cdot a_1\cdot a_2}{a_2\cdot a_3\cdot a_1}=1\text{ ，}$$

上下兩式相除得

$$\frac{\overline{A_1P}}{\overline{PB_1}}=\frac{\overline{A_1C_1}}{\overline{C_1B_1}}\ 。$$

綜合以上所述，得$\overleftrightarrow{QR}$和兩割線$\overrightarrow{PA_1},\overrightarrow{PA_2}$的交點$C_1,C_2$，必滿足比例關係

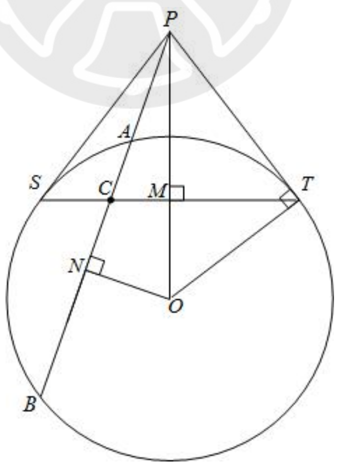
$$\frac{\overline{A_2P}}{\overline{PB_2}}=\frac{\overline{A_2C_2}}{\overline{C_2B_2}},\frac{\overline{A_1P}}{\overline{PB_1}}=\frac{\overline{A_1C_1}}{\overline{C_1B_1}}\ ，$$

得C_1,C_2在線段$\overline{ST}$上，因為兩點唯一決定一直線，所以直線$\overleftrightarrow{QR}$必和圓交於兩切點S,T。■

【證明 2】我們分兩階段來證明這個定理，第一階段說明割線具備的分比性質，第二階段運用交比概念證明Q,R點都在$\overleftrightarrow{ST}$上。

(1) 割線的分比性質：如下圖所示，過點P的一條割線交圓於A,B兩點，且交兩切點S,T的連線$\overleftrightarrow{ST}$於C點。我們有

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}=\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}\ 。$$



證明如下：利用AA相似性質$\Delta PMC\cong\Delta PNO,\Delta PMT\cong\Delta PTO$，得比例式

$$\begin{cases}\dfrac{\overline{PC}}{\overline{PM}}=\dfrac{\overline{PO}}{\overline{PN}}\\[2ex]\dfrac{\overline{PT}}{\overline{PM}}=\dfrac{\overline{PO}}{\overline{PT}}\end{cases}\Rightarrow\overline{PC}\cdot\overline{PN}=\overline{PM}\cdot\overline{PO}=\overline{PT}^2=\overline{PA}\cdot\overline{PB}\text{(圓冪性質)。}$$

由於N為$\overline{AB}$中點，可將上式代換為

$$\overline{PC}\cdot\left(\frac{\overline{PA}+\overline{PB}}{2}\right)=\overline{PA}\cdot\overline{PB}\Rightarrow\overline{PC}\cdot\overline{PA}+\overline{PC}\cdot\overline{PB}=2\overline{PA}\cdot\overline{PB}\ ,$$

移項，得

$$\overline{PB}\cdot\left(\overline{PC}-\overline{PA}\right)=\overline{PA}\cdot\left(\overline{PB}-\overline{PC}\right)\ ,$$

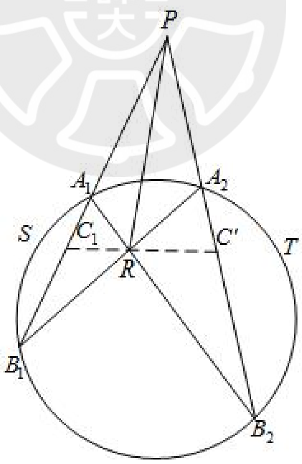
即

$$\overline{PB}\cdot\overline{CA}=\overline{PA}\cdot\overline{CB}\Rightarrow\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}=\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}\ 。$$

容易看出，在線段$\overline{AB}$中滿足$\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}=\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$的$C$點恰只有一點，也就是說，在割線上和$\overline{ST}$的交點$C$是由此比例式唯一決定的。令$\overleftrightarrow{ST}$和$\overrightarrow{PA_1}$交於$C_1$，和$\overrightarrow{PA_2}$交於$C_2$，則有

$$\frac{\overline{C_1A_1}}{\overline{C_1B_1}}=\frac{\overline{PA_1}}{\overline{PB_1}},\frac{\overline{C_2A_2}}{\overline{C_2B_2}}=\frac{\overline{PA_2}}{\overline{PB_2}}\ 。$$

(2) 欲證明$R\in\overleftrightarrow{ST}$如圖所示，設$\overrightarrow{C_1R}$和$\overrightarrow{PA_2}$交點為$C'$，且連接$\overline{PR}$，



透過面積的轉換得

$$1=\frac{\overline{C_1A_1}\cdot\overline{PB_1}}{\overline{C_1B_1}\cdot\overline{PA_1}}=\frac{\Delta RC_1A_1\cdot\Delta RPB_1}{\Delta RC_1B_1\cdot\Delta RPA_1}=\frac{\left(\overline{RC_1}\cdot\overline{RA_1}\cdot\sin\angle C_1RA_1\right)\cdot\left(\overline{RP}\cdot\overline{RB_1}\cdot\sin\angle PRB_1\right)}{\left(\overline{RC_1}\cdot\overline{RB_1}\cdot\sin\angle C_1RB_1\right)\cdot\left(\overline{RP}\cdot\overline{RA_1}\cdot\sin\angle PRA_1\right)}$$

$$=\frac{\sin\angle C_1RA_1\cdot\sin\angle PRB_1}{\sin\angle C_1RB_1\cdot\sin\angle PRA_1}.$$

以及

$$\frac{\overline{C'A_2}\cdot\overline{PB_2}}{\overline{C'B_2}\cdot\overline{PA_2}}=\frac{\Delta RC'A_2\cdot\Delta RPB_2}{\Delta RC'B_2\cdot\Delta RPA_2}=\frac{\left(\overline{RC'}\cdot\overline{RA_2}\cdot\sin\angle C'RA_2\right)\cdot\left(\overline{RP}\cdot\overline{RB_2}\cdot\sin\angle PRB_2\right)}{\left(\overline{RC'}\cdot\overline{RB_2}\cdot\sin\angle C'RB_2\right)\cdot\left(\overline{RP}\cdot\overline{RA_2}\cdot\sin\angle PRA_2\right)}$$

$$=\frac{\sin\angle C'RA_2\cdot\sin\angle PRB_2}{\sin\angle C'RB_2\cdot\sin\angle PRA_2}$$

即線段比(稱四點交比)等於連線至R點夾角，其正弦值的比。又因為

$$\frac{\sin\angle C'RA_2\cdot\sin\angle PRB_2}{\sin\angle C'RB_2\cdot\sin\angle PRA_2}=\frac{\sin\angle C_1RB_1\cdot\sin\angle PRA_1}{\sin\angle C_1RA_1\cdot\sin\angle PRB_1}=1\text{ ，}$$

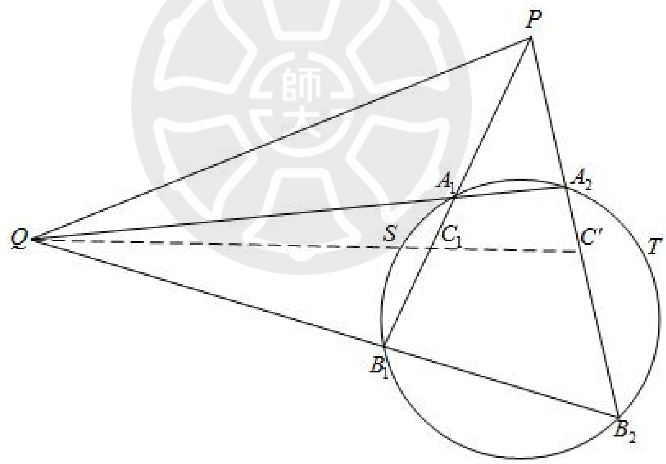
所以

$$\frac{\overline{C'A_2}\cdot\overline{PB_2}}{\overline{C'B_2}\cdot\overline{PA_2}}=1\Rightarrow\frac{\overline{C'A_2}}{\overline{C'B_2}}=\frac{\overline{PA_2}}{\overline{PB_2}}\text{ 。}$$

由(1)得$C'=C_2$，故C_1,R,C_2三點共線，得

$$R\in\overleftrightarrow{C_1C_2}=\overleftrightarrow{ST}\text{ 。}$$

同樣地，欲證明$Q\in\overleftrightarrow{ST}$如圖所示，設$\overleftrightarrow{C_1Q}$和$\overleftrightarrow{PA_2}$交點為$C'$，且連接$\overline{PQ}$，



透過面積的轉換得

$$1=\frac{\overline{C_1A_1}\cdot\overline{PB_1}}{\overline{C_1B_1}\cdot\overline{PA_1}}=\frac{\Delta QC_1A_1\cdot\Delta QPB_1}{\Delta QC_1B_1\cdot\Delta QPA_1}=\frac{\sin\angle C_1QA_1\cdot\sin\angle PQB_1}{\sin\angle C_1QB_1\cdot\sin\angle PQA_1}$$

以及

$$\frac{\overline{C'A_2}\cdot\overline{PB_2}}{\overline{C'B_2}\cdot\overline{PA_2}}=\frac{\Delta QC'A_2\cdot\Delta QPB_2}{\Delta QC'B_2\cdot\Delta QPA_2}=\frac{\sin\angle C'QA_2\cdot\sin\angle PQB_2}{\sin\angle C'QB_2\cdot\sin\angle PQA_2}$$

即線段比(四點交比)等於連線至Q點夾角，其正弦值的比。又因為

$$\frac{\sin\angle C'QA_2\cdot\sin\angle PQB_2}{\sin\angle C'QB_2\cdot\sin\angle PQA_2}=\frac{\sin\angle C_1QA_1\cdot\sin\angle PQB_1}{\sin\angle C_1QB_1\cdot\sin\angle PQA_1}=1\text{ ，}$$

所以

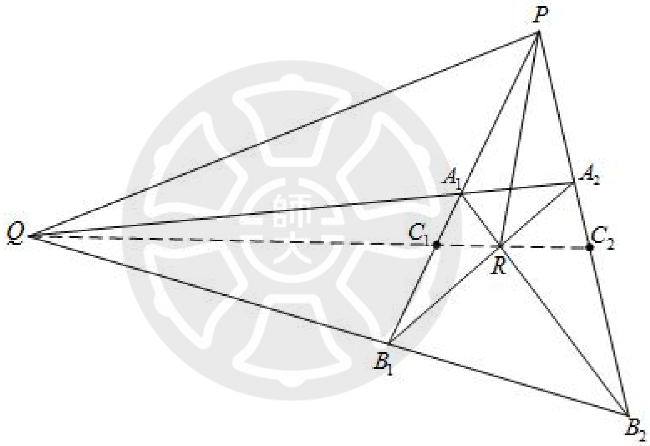
$$\frac{\overline{C'A_2}\cdot\overline{PB_2}}{\overline{C'B_2}\cdot\overline{PA_2}}=1\Rightarrow\frac{\overline{C'A_2}}{\overline{C'B_2}}=\frac{\overline{PA_2}}{\overline{PB_2}}\ 。$$

由(1)得$C'=C_2$，故Q,C_1,C_2三點共線，得

$$Q\in\overleftrightarrow{C_1C_2}=\overleftrightarrow{ST}\ 。■$$

【證明 3】我們分兩階段來證明這個定理，第一階段說明直線圖形具備的分比性質，第二階段說明當直線形限制在圓上時，Q,R點都在$\overleftrightarrow{ST}$上。

(1) 在定理的圖中，連接$\overline{PQ}$與$\overline{PR}$，令$\overleftrightarrow{QR}$和$\overleftrightarrow{PA_1}$交於$C_1$，和$\overleftrightarrow{PA_2}$交於$C_2$，並忘掉圖中的圓，如下圖所示。



欲證明線上的點滿足比例式

$$\frac{\overline{C_1A_1}}{\overline{C_1B_1}}=\frac{\overline{PA_1}}{\overline{PB_1}},\quad\frac{\overline{C_2A_2}}{\overline{C_2B_2}}=\frac{\overline{PA_2}}{\overline{PB_2}}\ ,$$

我們只需證明線段乘積的比值（稱為交比）

$$\omega_1=\frac{\overline{C_1A_1}\cdot\overline{PB_1}}{\overline{C_1B_1}\cdot\overline{PA_1}},\quad\omega_2=\frac{\overline{C_2A_2}\cdot\overline{PB_2}}{\overline{C_2B_2}\cdot\overline{PA_2}}$$

都是 1 即可。為了計算ω_1的值，可以透過外部的點Q及面積的轉換，得到

$$
\begin{aligned}
\omega_1 &= \frac{\overline{C_1A_1}\cdot\overline{PB_1}}{\overline{C_1B_1}\cdot\overline{PA_1}} \\
&= \frac{\Delta QC_1A_1\cdot\Delta QPB_1}{\Delta QC_1B_1\cdot\Delta QPA_1} \\
&= \frac{\left(\overline{QC_1}\cdot\overline{QA_1}\cdot\sin\angle C_1QA_1\right)\cdot\left(\overline{QP}\cdot\overline{QB_1}\cdot\sin\angle PQB_1\right)}{\left(\overline{QC_1}\cdot\overline{QB_1}\cdot\sin\angle C_1QB_1\right)\cdot\left(\overline{QP}\cdot\overline{QA_1}\cdot\sin\angle PQA_1\right)} \\
&= \frac{\sin\beta\sin(\alpha+\beta+\gamma)}{\sin(\beta+\gamma)\sin(\alpha+\beta)_1}.
\end{aligned}
$$

同理可得

$$
\omega_2 = \frac{\sin\beta\sin(\alpha+\beta+\gamma)}{\sin(\beta+\gamma)\sin(\alpha+\beta)_1} = \omega_1
$$

同樣地，我們也可以從點R及面積的轉換來推導ω_1,ω_2的關係如下。

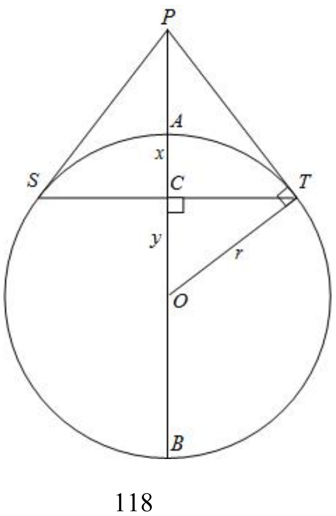
$$
\begin{aligned}
\omega_2 &= \frac{\sin\angle C_2RA_2\cdot\sin\angle PRB_2}{\sin\angle C_2RB_2\cdot\sin\angle PRA_2} \\
&= \frac{\sin\angle C_1RB_1\cdot\sin\angle PRA_1}{\sin\angle C_1RA_1\cdot\sin\angle PRB_1} \\
&= \frac{1}{\omega_1}.
\end{aligned}
$$

綜合上述，可解得$\omega_1=\omega_2=1$，即

$$
\frac{\overline{C_1A_1}}{\overline{C_1B_1}} = \frac{\overline{PA_1}}{\overline{PB_1}},\quad \frac{\overline{C_2A_2}}{\overline{C_2B_2}} = \frac{\overline{PA_2}}{\overline{PB_2}}
$$

成立。這裡注意$\overrightarrow{QR}=\overrightarrow{C_1C_2}$，而$C_1,C_2$分別為$\overrightarrow{PA_1},\overrightarrow{PA_2}$上唯一滿足分比的點。

(2) 設割線$\overleftrightarrow{PO}$交圓於A,B兩點，和$\overleftrightarrow{ST}$交於C點，如圖所示，



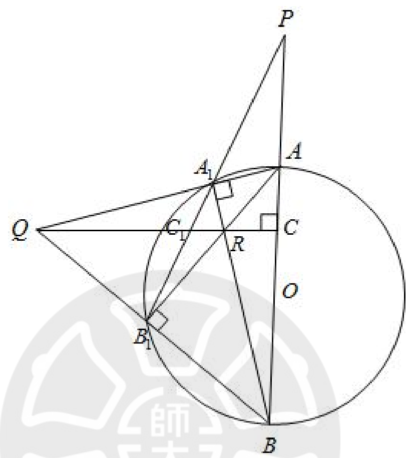
以下說明 C 點滿足分比性質，且(1)中的 C_1,C_2 點都在 $\overleftrightarrow{ST}$ 上。設 $\overline{PO}=x,\overline{CO}=y$ 且半徑為 r，由母子相似三角形性質得

$$xy=r^2 \Rightarrow xr-r^2+y(x-r)=xr+r^2-y(x+r)，$$

將等號兩邊因式分解得

$$(r+y)(x-r)=(r-y)(x+r)\Rightarrow \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}=\frac{(r-y)}{(r+y)}=\frac{(x-r)}{(x+r)}=\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}。$$

現取另條割線 $\overleftrightarrow{PA_1}$ 和 $\overleftrightarrow{PO}$ 來作題目中的圖，



因 $\overline{AB}$ 為直徑，根據圓周角性質，

$$\angle AA_1B=\angle AB_1B=90^\circ，$$

得 R 為 ΔQAB 的垂心，故

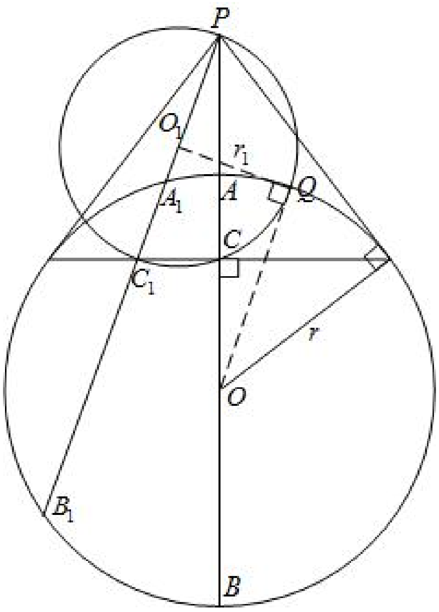
$$\overleftrightarrow{QR}=\overleftrightarrow{C_1C}\perp\overleftrightarrow{PO}。$$

得 C_1 在 $\overleftrightarrow{ST}$ 上，同理 C_2 也是，因此原題目圖中有

$$\overleftrightarrow{QR}=\overleftrightarrow{C_1C_2}=\overleftrightarrow{ST}。■$$

【割線的分比性質補充證明】

如圖，以 $\overline{PC_1}$ 為直徑作另一圓 O_1，則由圓周角定理知其通過 C 點，設其半徑為 r_1 並與圓 O 交於 Q 點。



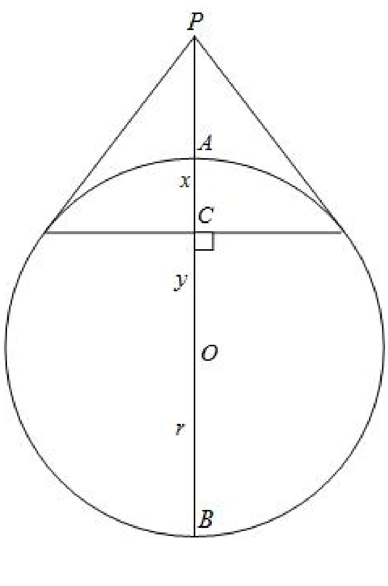
根據母子相似定理得

$$\overline{OC}\cdot\overline{OP}=r^2\text{ ，}$$

故O點對圓O_1的切線長為r，得Q點為O點對圓O_1的切點，即$\overline{OQ}\perp\overline{O_1Q}$(兩圓正交)。因此$Q$點亦為$O_1$點對圓$O$的切點，其切線長為$r_1$，再由圓冪定理得

$$\overline{O_1A_1}\cdot\overline{O_1B_1}=r_1^2\text{ 。}$$

此關係可導出分比性質，設$\overline{OP}=x,\overline{OC}=y$如下圖，



得

$$xy=r^2\Rightarrow xr-r^2+y\left(x-r\right)=xr+r^2-y\left(x+r\right)\text{ ，}$$

將等號兩邊因式分解得

$$(r+y)(x-r)=(r-y)(x+r)\Rightarrow \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}=\frac{(r-y)}{(r+y)}=\frac{(x-r)}{(x+r)}=\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}\ ,$$

同理可得

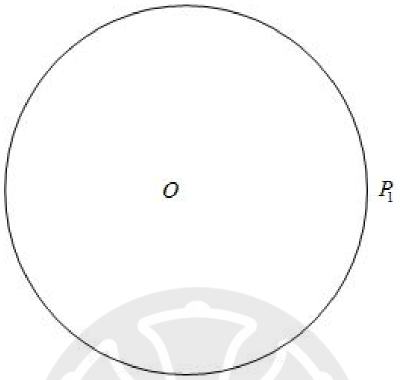
$$\frac{\overline{A_1C_1}}{\overline{A_1P}}=\frac{\overline{B_1C_1}}{\overline{B_1P}}\ 。\blacksquare$$

附錄 4：丘成桐的尺規作圖題其他證明

引言補充：

古典的正五邊形作圖法是對一線段先作出黃金分割，再利用黃金分割做出特殊的$36-72-72$度等腰三角形，進而作出正五邊形，有興趣的讀者可參考幾何原本。這裡將介紹由 Richmond (1893)給出的較簡捷的作法

【作圓內接正五邊形】給定圓O及圓上一點P_1，作圓內接正五邊形

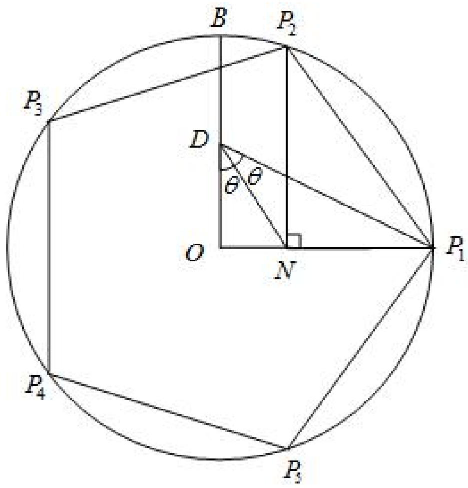


【作法與證明】依照下列步驟作圖：

1. 連O, P_1，過O點作$\overline{OP_1}$的垂線交圓O於B點
2. 作O, B中點D，連$\overline{DP_1}$
3. 作$\angle ODP_1$的角平分線，交$\overline{OP_1}$於N點
4. 過N點作$\overline{OP_1}$的垂線交圓O於P_2點
5. 以P_2為圓心，$\overline{P_1P_2}$長為半徑作圓交圓O於P_3點；以P_3為圓心，$\overline{P_1P_2}$長為半徑作圓交圓O於P_4點；以P_4為圓心，$\overline{P_1P_2}$長為半徑作圓交圓O於P_5點

   則P_1 □ P_5將圓O五等分，相連即為正五邊形。

所作參考圖如下。



為方便假定$\overline{OP_1}=1$，如果$\angle P_1OP_2=\dfrac{2\pi}{5}$，步驟 5 作出$P_1$ □ P_5即可將圓O五等分，因此我們要驗證$\overline{P_1P_2}=2\sin\dfrac{\pi}{5}$。由$36-72-72$度等腰三角形的邊長比(請參閱[1]的 6.2 節)可推得$\sin\dfrac{\pi}{5}=\dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$，即欲證$\overline{P_1P_2}=\dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}$。由圖知

$$\overline{DO}=\frac{1}{2},\overline{DP_1}=\sqrt{1^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}\ ,$$

根據角平分線定理有$\dfrac{\overline{DO}}{\overline{DP_1}}=\dfrac{\overline{NO}}{\overline{NP_1}}$，得

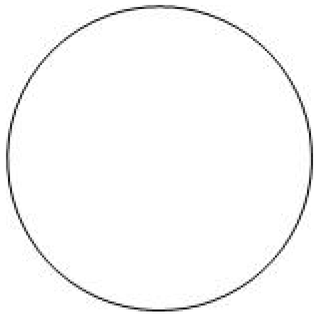
$$\overline{NO}=\frac{1}{1+\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}-1}{4},\overline{NP_1}=\frac{\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}=\frac{5-\sqrt{5}}{4}\ ,$$

再分別對直角三角形ONP_2,P_1NP_2運用畢氏定理得

$$\overline{NP_2}=\sqrt{1^2-\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\text{，以及}$$

$$\overline{P_1P_2}=\sqrt{\overline{NP_1}^2+\overline{NP_2}^2}=\sqrt{\left(\frac{5-\sqrt{5}}{4}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}\text{。}\ \blacksquare$$

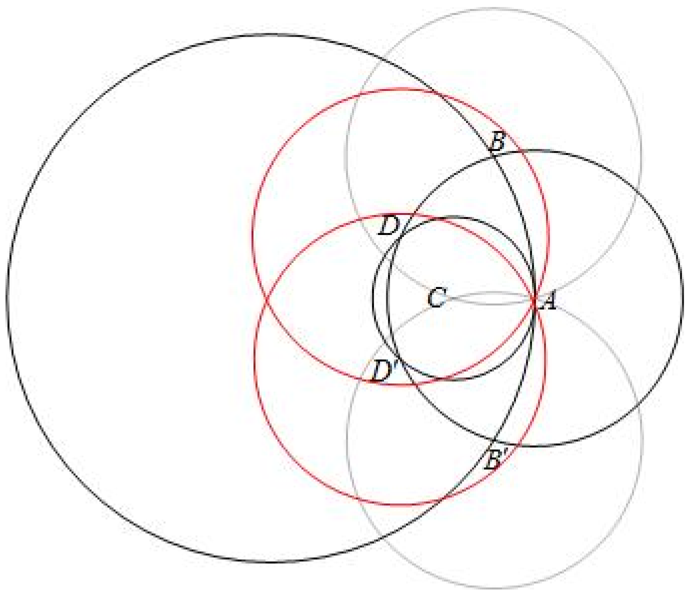
【拿破崙分圓問題】給定一圓O（不含圓心），只許用圓規的要求下，將此圓四等分。



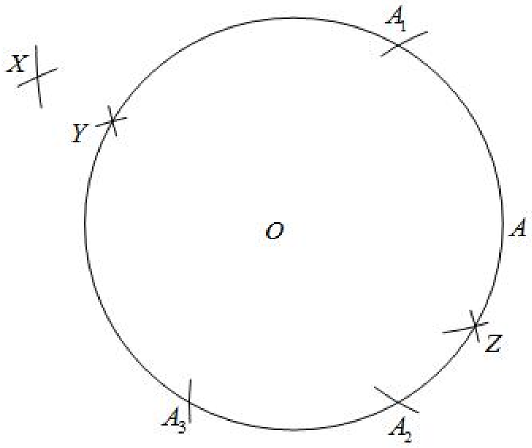
【作法與證明】依照下列步驟作圖：

1. 在圓O上找任意一點A，以任意半徑畫圓O_1（但必須和原來的圓有交點），交圓O於B,B'兩點。
2. 分別以B,B'為圓心，$\overline{AB}$為半徑，畫兩圓O_2,O_2'，兩圓交於A,C點
3. 以C為圓心，$\overline{AC}$為半徑，畫圓O_3，交圓O_1於D,D'兩點。
4. 分別以D,D'為圓心，$\overline{AB}$為半徑，畫兩圓O_4,O_4'，兩圓交於A和圓心O。
5. 分別以O,A為圓心，$\overline{OA}$為半徑，畫兩圓交於A_1,A_2兩點，
6. 分別以O,A_2為圓心，$\overline{OA}$為半徑，畫兩圓交於A,A_3兩點，
7. 分別以A_1,A_3為圓心，$\overline{A_1A_2}$為半徑，畫兩圓交X點，
8. 分別以A_1,A_3為圓心，$\overline{OX}$為半徑，畫兩圓交於Y,Z兩點，

所作參考圖如下：步驟 1~4 先作出圓心O



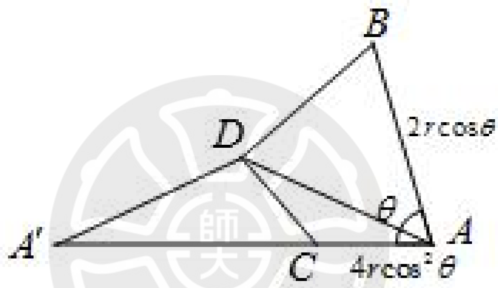
步驟 5~8 為



綜合上述，所作四點 A_1, Y, A_3, Z 將圓 O 四等分。

需要驗證兩件事情

(1) 驗證步驟 1~4 能找到圓心 O：



設兩圓 O_4, O_4'，交於 A, A'，欲說明 $A' = O$。已知兩圓相交，其連心線段會垂直平分兩交點連線段，兩圓一樣大則互相垂直平分。因此由兩圓 O, O_1 得 $\overline{OA}$ 中垂 $\overline{BB'}$，由兩圓 O_2, O_2' 得 $\overline{AC}$ 中垂 $\overline{BB'}$，由兩圓 O_1, O_3 得 $\overline{AC}$ 中垂 $\overline{DD'}$，故圓心 O 在 $\overline{DD'}$ 的中垂線 $\overleftrightarrow{AC}$ 上。假設圓 O 半徑 r，如果能證明 $\overline{AA'} = r$ 便得 $A' = O$。為了證明 $\overline{AA'} = r$ 考慮等腰三角形 ACD，並假設 $\angle BAC = \theta$，則有

$$\overline{AD} = \overline{AB} = 2r\cos\theta \text{ 以及}$$

$$\overline{AC} = 2\overline{AB}\cos\theta = 4r\cos^2\theta = \overline{DC} \text{ 。}$$

設 $\overline{DD'}$ 中點為 E，根據餘弦定理，

$$\overline{AE} = \overline{AD}\cos\angle DAC = \frac{\overline{AC}^2 + \overline{AD}^2 - \overline{CD}^2}{2\overline{AC}} = \frac{\left(4r\cos^2\theta\right)^2 + \left(2r\cos\theta\right)^2 - \left(4r\cos^2\theta\right)^2}{2\left(4r\cos^2\theta\right)}$$

化簡得

$$\overline{AE}=\frac{r}{2},\overline{AA'}=2\overline{AE}=r\text{ ，故 }A'=O\text{ 。}$$

(2) 驗證步驟 5~8 所作四點 A_1,Y,A_3,Z 將圓 O 四等分：

為了方便假設圓 O 半徑 $r=1$。由步驟 5 知 $\overline{OA_1}=\overline{OA}=\overline{AA_1}=1$，得三角形 A_1OA 為正三角形，同理得 AOA_2,A_2OA_3 皆為正三角形，故

$$\angle A_1OA_3=\angle A_1OA+\angle AOA_2+\angle A_2OA_3\text{ 為一平角，}$$

即 A_1,A_3 平分圓 O。而 $\overline{A_1A_2}$ 長為 2 倍正三角形的高，即 $\overline{A_1A_2}=\sqrt{3}$，因此步驟 7 作出等腰三角形 XA_1A_3，其底邊長為 2，腰長皆為 $\sqrt{3}$，由畢氏定理得

$$\overline{OX}=\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2-1^2}=\sqrt{2}\text{ 。}$$

而步驟 8 則作出等腰三角形 YA_1A_3,ZA_1A_3，其底邊長為 2，腰長皆為 $\sqrt{2}$，由畢氏定理得

$$\overline{OY}=\overline{OZ}=\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2-1^2}=1\text{ 。}$$

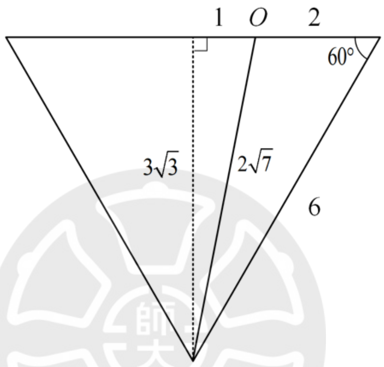
得 Y,Z 在圓 O 上且 $\overline{YZ}\perp\overline{A_1A_3}$，故四點 A_1,Y,A_3,Z 將圓 O 四等分。■

附錄 5：日本數學愛好協會的三等分活動其他證明

三等分最優秀賞−六芒星切法

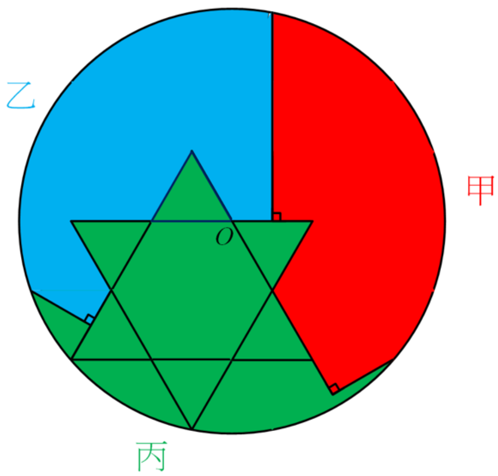
這壓軸的是第一名最優秀獎，由奇特的「六芒星」切法奪下，神秘的圖騰讓評審及網友全都驚呆，評審對此感到不可思議，點評表示「到底怎麼想出來的」，還說「用這方法切蛋糕絕對能 hold 住全場。」

將邊長為 6 的正三角形倒立，如下圖所示，此時高為$3\sqrt{3}$，再利用畢氏定理可以知道：邊上的三等分點O至頂點的距離為$2\sqrt{7}$ 。



上面這個簡單的模型，可能是「六芒星」切法的基本脈絡，讓我們來欣賞這奇妙的切法。

【圓三等分最優秀獎】如下圖所示，它是根據以下四個條件切割而得。



(1) 過O點作一條長度為 6 的水平線段，且讓O點為該線段的三等分點，並以此線段為邊作一個倒立的正三角形。

(2) 連接此倒立正三角形各邊的三等分點，作出一個同樣邊長的正三角形。

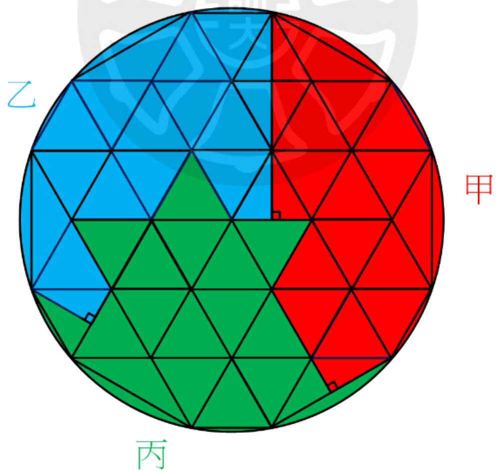
(3) 以 O 為圓心，作一半徑為 $2\sqrt{7}$ 的圓。

(4) 圖中有三條垂線，有兩條的垂足剛好是小正三角形的邊上中點，而另一個垂足與小正三角形的頂點距離剛好是 1。

求證：這些分割線將圓切割成甲，乙及丙三塊，他們會將圓面積三等分。

【證明】我們把圓形區域想像成一間教室，而且被那些切割線分割，在尊重切割線（但不考慮顏色）的情況下，希望用種類最少的磁磚將圓形教室密鋪。因為是圓弧外圍，所以一定會用到不是多邊形的磁磚（例如弓形等），而且根據題目對圓形的切割，先盡量用小正三角形去鋪設，是較理想的方式。

遵循上述分析，在尊重分割線及盡量用小正三角形密鋪的情況下，我們可以得到以下的磁磚密鋪圖。



在此密鋪圖中，用到以下五種形狀不同的磁磚（不考慮顏色）：

1. 小正三角形磁磚（邊長 2）。
2. 直角三角形磁磚（$30°-60°-90°$），兩塊此類磁磚可以拼成一塊小正三角形磁磚。
3. 鈍角三角形磁磚（$30°-30°-120°$），可拆成兩塊直角三角形磁磚。
4. 小弓形磁磚（其圓心角為 20 度）。

5. 大弓形磁磚（其圓心角為 40 度）。

現在可以來算三塊區域各密鋪多少面積的磁磚，從密鋪圖可以知道：

甲塊＝12 小正三角形+4 直角三角形+2 鈍角三角形+2 小弓形+2 大弓形

＝16 小正三角形+2 小弓形+2 大弓形;

乙塊＝12 小正三角形+4 直角三角形+2 鈍角三角形+2 小弓形+2 大弓形

＝16 小正三角形+2 小弓形+2 大弓形;

丙塊＝14 小正三角形+2 直角三角形+1 鈍角三角形+2 小弓形+2 大弓形

＝16 小正三角形+2 小弓形+2 大弓形。

因此，甲，乙及丙三塊面積都一樣，即他們會將圓面積三等分。■

在「六芒星」切法中，不僅甲，乙，丙（六芒星）將圓形三等份，而且從證明中也可以發現：圓弧上的三分割點也將圓周三等分。將六芒星拆開來看，正三角形是一種陽性的象徵，倒立的正三角形則是陰性，用六芒星作切法，是否有圓融的味道呢？