均勻圓盤的圓周純滾動運動

蔡尚芳

私立吳鳳技術學院 電機工程系

前言

在重力下，若剛體具有軸對稱性，且以軸上一固定點爲支點，則其運動僅可能爲繞此支點的轉動，這樣的問題是剛體力學中轉動的標準例子，其分析方法與相關討論，在一般力學教科書中(French, 1971, p.680；Goldstein, 1980, p.213；Landau & Lifshitz, 1976, p.112；Marion & Thornton, 1995, p.445；Symon, 1971, p.454)，通常都會詳細加以交代。對高中與大一學生而言，只要能掌握一些基礎數學知識，如微分與向量的概念與基本運算，並運用總力學能必須守恆，以及力矩必等於角動量時變率的定律，則分析與理解這類的問題，實際上並無太大的困難(蔡尚芳，2001)。

如果沒有固定的支點，則剛體的運動就變得複雜許多，因爲除了轉動之外，同時還有整體的移動必須考慮，因此除了剛體沿斜坡或水平直線的滾動運動外(French, 1971, p.652；Symon, 1971, p.369)，一般高中與大一普通物理教材中較少提及這類型的問題，而比較專門的力學教科書，有些會提及這類問題，但通常都是使用拉格朗日的力學觀點(Meirovitch, 1970, p.160)，就高中與大一學生而言，並不太容易掌握。

事實上，當剛體沿著水平面上的圓形路徑運動時，如果採用適當的分析方式，則就難度與複雜度而言，與上述有固定支點的剛體運動，基本上並無太大的不同。本文即以均勻圓盤與圓環在水平面上沿著圓周的純滾動爲例，提出一種簡單的分析方法，說明如何將其運動分解成整體質心的移動與繞質心的轉動，並採用適當的參考坐標系來表達與轉動有關的各種向量，以導出運動方程式，進而求得運動的一些基本特性。

這個方法，當然可用在具有固定支點的剛體轉動問題上，也可加以推廣，用來處理圓盤與圓環在水平面上沿著任一指定路徑的運動，但本文中只以圓形路徑爲例導出其運動方程式，並求出作純滾動運動的剛體圓環或圓盤，沿著直線或圓形路徑前進，可以穩定的保持傾斜角而不致倒下的最低速率。

壹、一般剛體運動的基本公式

考慮一個原點位於 O 的慣性坐標系 xyz(參見圖 1)。若將剛體看成是一個多質點系統，並設其第 i 個質點的質量爲 m_i，位置向量爲 $\vec{r}_i$，速度爲 $\vec{v}_i$，所受的外力爲 $\vec{f}_i$，則由牛頓運動定律可得

$$\frac{d}{dt}\sum_i (m_i \vec{v}_i) = \sum_i \vec{f}_i = \vec{F} \tag{1}$$

上式中 $\vec{F}$ 爲作用於剛體的總外力，一般包括正向支撐力、摩擦力及重力。

若此剛體之總質量爲 M，質心 C 的位置向量爲 $\vec{r}_c$，質心速度爲 $\vec{v}_c$，則依定義可得

$$M = \sum_i m_i \,,\; M\vec{r}_c = \sum_i m_i \vec{r}_i \,,$$

$$M\vec{v}_c = \sum_i m_i \vec{v}_i \tag{2a}$$

如以相對於質心之位移 $\vec{r}_i' = \vec{r}_i - \vec{r}_c$ 與速度 $\vec{v}_i' = \vec{v}_i - \vec{v}_c$ 表示，則上式後二式亦可寫成

$$\sum_i m_i \vec{r}_i' = 0 \,,\; \sum_i m_i \vec{v}_i' = 0 \tag{2b}$$

而由(1)與(2a)兩式可得質心運動之加速度 $\vec{a}_c$ 需滿足

$$M\vec{a}_c = \frac{d}{dt}(M\vec{v}_c) = \vec{F} \tag{3}$$

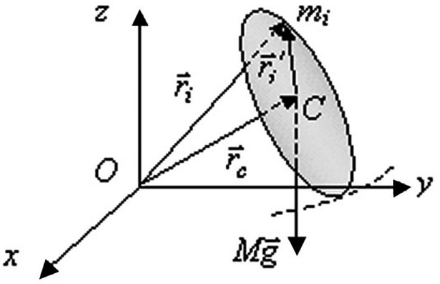

圖1

以原點 O 爲參考點時，剛體所受之總力矩 $\vec{\tau}$，等於各外力 $\vec{f}_i$ 對此點之力矩的總和。因 $\vec{r}_i = \vec{r}_c + \vec{r}_i'$，故得

$$\vec{\tau} = \sum_i (\vec{r}_i \times \vec{f}_i) = \sum_i (\vec{r}_c \times \vec{f}_i) + \sum_i (\vec{r}_i' \times \vec{f}_i)$$

$$= \vec{r}_c \times \vec{F} + \vec{\tau}' \tag{4a}$$

$$\vec{\tau}' = \sum_i (\vec{r}_i' \times \vec{f}_i) \tag{4b}$$

上式中 $\vec{\tau}'$ 爲外力相對於質心 C 之總力矩。

剛體相對於原點 O 之總角動量 $\vec{L}$，依其定義與(2a)、(2b)兩式可表示爲

$$\vec{L} = \sum_i (\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i) = \vec{r}_c \times M\vec{v}_c + \sum_i (\vec{r}_i' \times m_i \vec{v}_i')$$

$$= \vec{L}_c + \vec{L}' \tag{5a}$$

$$\vec{L}_c = \vec{r}_c \times M\vec{v}_c \tag{5b}$$

$$\vec{L}' = \sum_i (\vec{r}_i' \times m_i \vec{v}_i') \tag{5c}$$

上式中 $\vec{L}_c$ 爲剛體質心運動相對於原點 O 之總角動量，而 $\vec{L}'$ 則爲剛體相對於其質心 C 之總角動量。

由(1)與(4a)兩式可得總角動量的時變率等於總力矩 $\vec{\tau}$，即

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_i (\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i) = \sum_i (\vec{r}_i \times \vec{f}_i) = \vec{\tau} \tag{6a}$$

將(5a)與(4a)兩式之結果分別代入上式之最左邊與最右邊，可得

$$\frac{d\vec{L}_c}{dt} + \frac{d\vec{L}'}{dt} = \vec{r}_c \times \vec{F} + \vec{\tau}' \tag{6b}$$

但由(5b)與(3)式可得質心運動之角動量的時變率爲

$$\frac{d\vec{L}_c}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r}_c \times M\vec{v}_c) = \vec{r}_c \times \vec{F} \qquad (6c)$$

將(6b)式減去(6c)式可得

$$\frac{d\vec{L}'}{dt} = \vec{\tau}' \qquad (6d)$$

(6a)與(6d)兩式之結果顯示，不論以原點 O 或以質心 C 當作計算角動量與力矩的參考點，剛體之總角動量的時變率都等於外力之總力矩。

在總外力 $\vec{F}$ 與總力矩 $\vec{\tau}$ 作用下，(3)與(6a)式分別給出總動量 $M\vec{v}_c$ 與總角動量 $\vec{L}$ 的時變率，此兩式爲分析剛體運動的基本公式。以上的討論顯示(6a)式可用(6c)與(6d)二式取代，而因(6c)式其實只是(3)式在垂直於 $\vec{r}_c$ 之平面上的分量式，故處理剛體的運動時，可改用(3)與(6d)式即可，本文以下即採用此一分析方式。

貳、主軸坐標系之轉動角速度

本文有時爲簡化符號，會在一個物理量的符號上冠以一或二點，以表示該量對時間的一次或二次微分，例如 $\dot{\phi}$ 與 $\ddot{\phi}$ 分別代表 ϕ 對時間 t 之一次與二次微分。

任何一個具有軸對稱性的剛體，繞其質心 C 的轉動慣量具有三個互相垂直的主軸，設以 1、2、3 軸稱之。若取此剛體的對稱軸爲 3 軸，並令 1、3 兩軸與鉛直之 z' 軸共平面，則 1、2、3 軸形成一右手制正交坐標系(如圖 2)，本文中以主軸坐標系稱之，並以 $\hat{e}_1$、$\hat{e}_2$、$\hat{e}_3$ 分別代表沿坐標軸方向的單位向量。注意：上述共平面之選擇，一般剛體的轉動運動並不一定適用，但任何剛體的轉動慣量則恆有三個互相垂直的主軸(Marion & Thornton, 1995, p.414；Symon, 1971, p.426)。

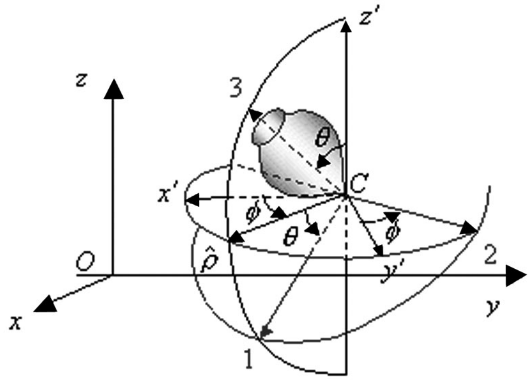

圖2

在 dt 的時間內，當 3 軸隨著剛體的轉動，致其在 xyz 坐標系中的極角由 θ 變爲 $\theta + d\theta$，方位角由 ϕ 變爲 $\phi + d\phi$ 時，由圖 2 可看出各坐標軸單位向量的變化爲

$$d\hat{e}_1 = -d\theta\,\hat{e}_3 + \cos\theta\, d\phi\,\hat{e}_2 \qquad (7a)$$

$$\begin{aligned} d\hat{e}_2 &= -d\phi\,\hat{\rho} \\ &= -d\phi(\sin\theta\,\hat{e}_3 + \cos\theta\,\hat{e}_1) \end{aligned} \qquad (7b)$$

$$d\hat{e}_3 = \sin\theta\, d\phi\,\hat{e}_2 + d\theta\,\hat{e}_1 \qquad (7c)$$

將上式除以 dt 可得各單位向量的時變率爲

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{e}_1}{dt} &= -\dot{\theta}\,\hat{e}_3 + \dot{\phi}\cos\theta\ \hat{e}_2 \\ &= (\dot{\theta}\,\hat{e}_2 + \dot{\phi}\cos\theta\ \hat{e}_3) \times \hat{e}_1 \end{aligned} \qquad (8a)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{e}_2}{dt} &= -\dot{\phi}\sin\theta\,\hat{e}_3 - \dot{\phi}\cos\theta\,\hat{e}_1 \\ &= (-\dot{\phi}\sin\theta\,\hat{e}_1 + \dot{\phi}\cos\theta\,\hat{e}_3) \times \hat{e}_2 \end{aligned} \qquad (8b)$$

$$\frac{d\hat{e}_3}{dt} = \dot{\phi}\sin\theta\,\hat{e}_2 + \dot{\theta}\,\hat{e}_1$$

$$= (-\dot{\phi}\sin\theta\,\hat{e}_1 + \dot{\theta}\,\hat{e}_2)\times\hat{e}_3 \qquad (8c)$$

若定義一向量 $\vec{\Omega}$ 如下：

$$\vec{\Omega} = \Omega_1\hat{e}_1 + \Omega_2\hat{e}_2 + \Omega_3\hat{e}_3 \qquad (9a)$$

$$\Omega_1 = -\dot{\phi}\sin\theta, \Omega_2 = \dot{\theta},$$

$$\Omega_3 = \dot{\phi}\cos\theta \qquad (9b)$$

則(8a)-(8c)式之結果，可改寫為

$$\frac{d\hat{e}_1}{dt} = -\Omega_2\hat{e}_3 + \Omega_3\hat{e}_2 = \vec{\Omega}\times\hat{e}_1 \quad (10a)$$

$$\frac{d\hat{e}_2}{dt} = -\Omega_3\hat{e}_1 + \Omega_1\hat{e}_3 = \vec{\Omega}\times\hat{e}_2 \quad (10b)$$

$$\frac{d\hat{e}_3}{dt} = -\Omega_1\hat{e}_2 + \Omega_2\hat{e}_1 = \vec{\Omega}\times\hat{e}_3 \quad (10c)$$

由(10a)-(10c)式可看出主軸坐標系之各坐標軸，以 $\vec{\Omega}$ 為瞬時角速度，繞質心轉動。

參、軸對稱剛體相對於質心之角動量與其時變率

軸對稱剛體轉動之角速度 $\vec{\omega}$ 可用沿各坐標軸之分量表示為

$$\vec{\omega} = \omega_1\hat{e}_1 + \omega_2\hat{e}_2 + \omega_3\hat{e}_3 \qquad (11a)$$

由於剛體之對稱軸即為主軸坐標系之 3 軸，故剛體轉動角速度 $\vec{\omega}$ 與坐標系 3 軸轉動角速度 $\vec{\Omega}$ 沿 1 與 2 軸之分量相同，即

$$\omega_1 = \Omega_1, \omega_2 = \Omega_2 \qquad (11b)$$

若以質心為參考點，剛體繞其主軸 1、2、3 的轉動慣量分別為 I_1、I_2、I_3，則其相對於質心之總角動量 $\vec{L}'$ 可表示為

$$\vec{L}' = L_1'\,\hat{e}_1 + L_2'\,\hat{e}_2 + L_3'\,\hat{e}_3 \qquad (12a)$$

$$L_1' = I_1\omega_1, L_2' = I_2\omega_2,$$

$$L_3' = I_3\omega_3 \qquad (12b)$$

由(6d)與(12a)式可得

$$\frac{d\vec{L}'}{dt} = (\frac{dL_1'}{dt}\hat{e}_1 + \frac{dL_2'}{dt}\hat{e}_2 + \frac{dL_3'}{dt}\hat{e}_3)$$

$$+(L_1'\frac{d\hat{e}_1}{dt} + L_2'\frac{d\hat{e}_2}{dt} + L_3'\frac{d\hat{e}_3}{dt}) = \vec{\tau}' \qquad (13a)$$

若利用(10a)-(10c)式與(12b)式，則上式之分量可寫為

$$\frac{dL_1'}{dt} + (-L_2'\Omega_3 + L_3'\Omega_2)$$

$$= I_1\dot{\omega}_1 + (-I_2\omega_2\Omega_3 + I_3\omega_3\Omega_2) = \tau_1' \qquad (13b)$$

$$\frac{dL_2'}{dt} + (-L_3'\Omega_1 + L_1'\Omega_3)$$

$$= I_2\dot{\omega}_2 + (-I_3\omega_3\Omega_1 + I_1\omega_1\Omega_3) = \tau_2' \quad (13c)$$

$$\frac{dL_3'}{dt} + (-L_1'\Omega_2 + L_2'\Omega_1)$$

$$= I_3\dot{\omega}_3 + (-I_1\omega_1\Omega_2 + I_2\omega_2\Omega_1) = \tau_3' \quad (13d)$$

因軸對稱剛體之轉動慣量 $I_1 = I_2$，故由(11b)式可知(13d)式可簡化為

$$I_3\dot{\omega}_3 = \tau_3' \qquad (13e)$$

肆、圓盤(或圓環)於水平面上的圓周運動

設均勻圓盤之半徑為 r，質量為 M，對稱軸(即 3 軸)之極角為 θ，方位角為 ϕ(如圖 3)。當接觸點 B 於 xy 水平面上沿半徑為 R 的圓形路徑前進時，此圓盤的質心速度為 $\vec{v}_c$，繞質心轉動之角速度為 $\vec{\omega}$。設以 $\vec{R}$ 代表由 O 至 B 之徑向量，則圓盤質心 C 之位置向量可表示為

$$\vec{r}_c = \vec{R} - r\hat{e}_1$$

$$= -R(\sin\theta\,\hat{e}_3 + \cos\theta\,\hat{e}_1) - r\hat{e}_1 \qquad (14a)$$

若將上式先對時間微分一次與兩次後，再將(9b)與(10a)-(10c)式之結果代入，則可得質心速度與加速度分別為

$$\vec{v}_c = -\dot{\phi}(R + r\cos\theta)\hat{e}_2 + r\dot{\theta}\,\hat{e}_3 \qquad (14b)$$

$$\begin{aligned}\vec{a}_c &= \{r\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2(R + r\cos\theta)\cos\theta\}\hat{e}_1 \\ &+ \{2r\dot{\phi}\dot{\theta}\sin\theta - \ddot{\phi}(R + r\cos\theta)\}\hat{e}_2 \qquad (14c) \\ &+ \{r\ddot{\theta} + \dot{\phi}^2(R + r\cos\theta)\sin\theta\}\hat{e}_3\end{aligned}$$

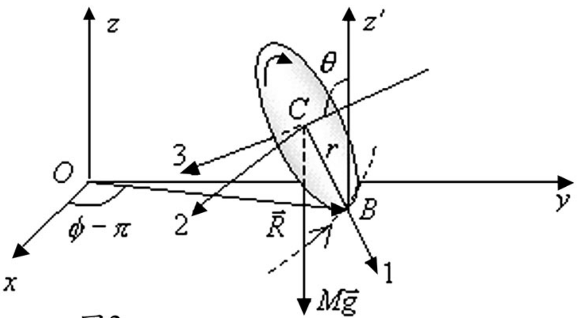

圖3

若作用於 B 點之外力為 $\vec{F}_B$，並以 $\vec{g}$ 代表重力加速度，則由(3)式可得

$$M\vec{a}_c = \vec{F}_B + M\vec{g} \qquad (15)$$

利用上式與(4b)式可得相對於質心 C 之外力總力矩為

$$\begin{aligned}\vec{\tau}' &= r\vec{e}_1 \times \vec{F}_B = r\vec{e}_1 \times (M\vec{a}_c - M\vec{g}) \\ &= -Mr\{r\ddot{\theta} + \dot{\phi}^2(R + r\cos\theta)\sin\theta + g\cos\theta\}\hat{e}_2 \\ &+ Mr\{2r\dot{\phi}\dot{\theta}\sin\theta - \ddot{\phi}(R + r\cos\theta)\}\hat{e}_3\end{aligned} \qquad (16)$$

以上求得外力總力矩之方式，只要接觸點的運動路徑為已知，即可適用，並不僅限於本文所討論的圓形路徑。

若圓盤做純滾動運動，則其與地面接觸點的速度 $\vec{v}_B$ 須為零，即

$$\vec{v}_B = \vec{v}_c + \vec{\omega} \times r\hat{e}_1 = 0 \qquad (17a)$$

將(11a)與(14b)式之結果，代入上式，可得圓盤沿圓周做純滾動運動的條件為

$$-\dot{\phi}(R + r\cos\theta)\hat{e}_2 + r\dot{\theta}\,\hat{e}_3 + r(\omega_3\hat{e}_2 - \omega_2\hat{e}_3) = 0 \qquad (17b)$$

而將(9b)與(11b)式之結果代入上式，則得

$$\dot{\phi}(R + r\cos\theta) = r\omega_3 \qquad (17c)$$

上式對時間微分一次後成為

$$\ddot{\phi}(R + r\cos\theta) - r\dot{\phi}\dot{\theta}\sin\theta = r\dot{\omega}_3 \qquad (17d)$$

利用(17c)與(17d)式，(16)式可改寫成

$$\begin{aligned}\vec{\tau}' &= -Mr\{(r\ddot{\theta} + r\omega_3\dot{\phi}\sin\theta + g\cos\theta)\hat{e}_2 \\ &+ r(\dot{\phi}\dot{\theta}\sin\theta - \dot{\omega}_3)\hat{e}_3\}\end{aligned} \qquad (18a)$$

故得力矩之分量為

$$\tau_1' = \vec{\tau}' \cdot \hat{e}_1 = 0 \qquad (18b)$$

$$\tau_2' = \vec{\tau}' \cdot \hat{e}_2 = -Mr^2(\ddot{\theta} + \omega_3\dot{\phi}\sin\theta) - Mgr\cos\theta \qquad (18c)$$

$$\tau_3' = \vec{\tau}' \cdot \hat{e}_3 = Mr^2(\dot{\phi}\dot{\theta}\sin\theta - \dot{\omega}) \qquad (18d)$$

將以上三式、(9b)與(11b)式之結果代

入(13b)-(13d)式可得如下之圓盤運動方程式：

$$I_1(\ddot{\phi}\sin\theta + 2\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\theta) = I_3\omega_3\dot{\theta} \qquad (19a)$$

$$(I_1 + Mr^2)\ddot{\theta} + (I_3 + Mr^2)\omega_3\dot{\phi}\sin\theta - I_1\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta = -Mrg\cos\theta \qquad (19b)$$

$$(I_3 + Mr^2)\dot{\omega}_3 = Mr^2\dot{\phi}\dot{\theta}\sin\theta \qquad (19c)$$

使用與本節相同的方式，可將以上所得的結果推廣，證明剛體沿任意水平路徑的純滾動運動，仍然適用以上三式，此與Meirovitch (1971, p.163)是一致的。

伍、圓盤(或圓環)以固定傾斜角沿圓周做純滾動運動

若圓盤偏離鉛直面之傾斜角 α 固定不變，即 $\theta = \theta_0 = \frac{1}{2}\pi + \alpha$ （$0 \le \alpha < \frac{1}{2}\pi$）爲定值，則 $\dot{\theta} = \ddot{\theta} = 0$，代入(19a)式得 $\ddot{\phi} = 0$，顯示 $\dot{\phi}$ 爲定值。另由(19c)式得此情況下 $\dot{\omega}_3 = 0$，即 ω_3 亦爲定值，故(19b)式簡化爲

$$(I_3 + Mr^2)\omega_3\dot{\phi}\sin\theta_0 - I_1\dot{\phi}^2\sin\theta_0\cos\theta_0 = -Mrg\cos\theta_0 \qquad (19d)$$

以下分兩種情況來討論：

(1) 圓盤盤面鉛直，亦即 $\theta_0 = \frac{1}{2}\pi$（或 $\alpha = 0$）

上式簡化成爲 $\dot{\phi} = 0$，即 ϕ 爲固定值，故此時圓盤係沿直線做純滾動運動，質心速率 v_c 可爲任意值，並無限制。

(2) 圓盤盤面傾斜，亦即 $\frac{1}{2}\pi < \theta_0 < \pi$（或 $0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$）

設以 ρ 代表質心至 z 軸之距離(亦即質心圓周運動的半徑)，即

$$\rho = R + r\cos\theta_0 \qquad (20a)$$

則由純滾動運動的條件(17c)式得質心速率 v_c 爲

$$v_c = \rho\dot{\phi} = r\omega_3 \qquad (20b)$$

故(19d)式可改寫成

$$(I_3 + Mr^2)(\frac{v_c}{r})(\frac{v_c}{\rho})\cos\alpha + I_1(\frac{v_c}{\rho})^2\sin\alpha\cos\alpha = Mrg\sin\alpha \qquad (21a)$$

經整理後即得

$$v_c^2(1 + \frac{I_3}{Mr^2} + \frac{I_1\sin\alpha}{Mr\rho}) = g\rho\tan\alpha \qquad (21b)$$

於上式中代入圓盤之轉動慣量 $I_3 = \frac{1}{2}Mr^2 = 2I_1$ 可得

$$v_c^2(\frac{3}{2} + \frac{r\sin\alpha}{4\rho}) = g\rho\tan\alpha \qquad (21c)$$

而代入圓環之轉動慣量 $I_3 = Mr^2 = 2I_1$ 則得

$$v_c^2(2 + \frac{r\sin\alpha}{2\rho}) = g\rho\tan\alpha \qquad (21d)$$

若於(21b)式中令 I_3 與 I_1 爲零，亦即圓盤只滑動而不轉動，則得

$$v_c^2 = g\rho\tan\alpha \qquad (21e)$$

此結果一如預期，與彎道外側墊高至路面傾斜角爲 α 時(如圖 4)，視汽車或剛體爲質點，以等速沿半徑爲 ρ 之光滑圓形彎道繞行的公式相同(Crummett & Western, 1994, p.132)。

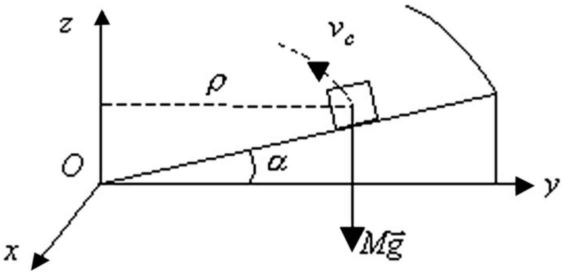

圖4

陸、盤面傾斜角固定時，圓盤(或圓環)沿圓周做純滾動運動的穩定性

以下僅討論 $\rho >> r$ 的情形以簡化問題。由(20b)式，此時 $\dot{\phi}$ 遠小於 ω_3，可視之為一階微小量。

考慮圓盤在極角 θ_0 附近之微幅變化，令 $\theta = \theta_0 + \varepsilon \quad (|\varepsilon| << \theta_0)$，並忽略二階以上之微小量，則(19a)-(19c)式可近似爲

$$I_1\ddot{\phi}\sin\theta_0 = I_3\omega_3\dot{\varepsilon} \tag{22a}$$

$$(I_1 + Mr^2)\ddot{\varepsilon} + (I_3 + Mr^2)\omega_3\dot{\phi}\sin\theta_0$$

$$= Mrg(\varepsilon\sin\theta_0 - \cos\theta_0) \tag{22b}$$

$$(I_3 + Mr^2)\dot{\omega}_3 = 0 \tag{22c}$$

上式顯示 ω_3 爲固定值。若將(22a)式對時間積分一次並令積分常數爲 A，可得

$$I_1\dot{\phi}\sin\theta_0 = I_3\omega_3\varepsilon + A \tag{22d}$$

由上式與(22b)式消去 $\dot{\phi}$ 可得

$$(I_1 + Mr^2)\ddot{\varepsilon} + (I_3 + Mr^2)\omega_3\left(\frac{I_3\omega_3\varepsilon + A}{I_1}\right)$$

$$= Mrg(\varepsilon\sin\theta_0 - \cos\theta_0) \tag{22e}$$

以 B 代表上式中之常數項，即令

$$B = -Mrg\cos\theta_0 - (I_3 + Mr^2)\left(\frac{\omega_3 A}{I_1}\right) \tag{23a}$$

則(22e)式經移項整理後可寫成

$$(I_1 + Mr^2)\ddot{\varepsilon} + \{(I_3 + Mr^2)\frac{I_3\omega_3^2}{I_1} - Mrg\sin\theta_0\}\varepsilon = B \tag{23b}$$

由上式可得 ε 作微幅振盪的必要條件爲等式左邊 ε 項的係數須爲正值，即

$$(I_3 + Mr^2)I_3\omega_3^2 > I_1 Mrg\sin\theta_0 \tag{24a}$$

由上式與(20b)式可得此情況下質心速率 $v_c = \omega_3 r$ 必須大於一臨界速率 v_m，即

$$v_c > v_m = r\sqrt{\frac{I_1 Mgr\sin\theta_0}{I_3(I_3 + Mr^2)}} \tag{24b}$$

若改以圓盤之傾斜角 α 表示($\theta_0 = \frac{1}{2}\pi + \alpha$)，即

$$v_m = r\sqrt{\frac{I_1 Mgr\cos\alpha}{I_3(I_3 + Mr^2)}} = \sqrt{\frac{gr\cos\alpha}{3}} \tag{24c}$$

(1) $\theta_0 = \frac{1}{2}\pi$ (或 $\alpha = 0$)

當剛體爲圓盤時，上式成爲

$$v_m = \sqrt{\frac{gr}{3}} \tag{24d}$$

由以上(五)之(1)的討論，此時圓盤係沿直線做純滾動運動，質心速率 v_c 的大小並無限制，但欲穩定的維持盤面與地面保持垂直($\alpha = 0$)， v_c 不能低於上式所給之 v_m，此一結果與 Meirovitch(1971, p.164)相同。

(2) $\frac{1}{2}\pi < \theta_0 < \pi$ (或 $0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$)

在 $\rho >> r$ 的情況下，由(21b)式知圓盤質心速率 v_c 可近似爲

$$v_c \cong r\sqrt{\frac{Mg\rho\tan\alpha}{I_3 + Mr^2}} = \sqrt{\frac{2g\rho\tan\alpha}{3}} \tag{25}$$

由(25)與(24c)兩式可得

$$\frac{v_m^2}{v_c^2} = \frac{I_1 r}{I_3 \rho}\left(\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha}\right) = \frac{r}{2\rho}\left(\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha}\right) \tag{26a}$$

若要圓盤盤面穩定的維持於傾斜角 α 附近，則須 $v_c > v_m$，此時由上式可得

$$\frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha} > \frac{r}{2\rho} \tag{26b}$$

由於上式左邊爲 α 的遞增函數，故盤面要穩定的維持傾斜角時，只需 α 大於以下之最小角 α_m 即可：

$$\frac{r}{2\rho}(\sin^2\alpha_m - 1) + \sin\alpha_m = 0 \tag{26c}$$

即

$$\sin\alpha_m = \frac{\sqrt{1+(\frac{r}{\rho})^2} - 1}{(\frac{r}{\rho})} = \frac{(\frac{r}{\rho})}{\sqrt{1+(\frac{r}{\rho})^2} + 1} \cong \frac{r}{2\rho} \tag{26d}$$

由於 $\rho >> r$，故由上式可得 $\alpha_m \cong r/(2\rho)$。注意：由(25)式，α 角愈大，質心速率 v_c 亦愈大，此時盤面能夠維持穩定之傾斜角的道理，與對稱陀螺的章動現象相似(蔡尚芳，2001)。

參考文獻

蔡尚芳(2001)：由牛頓力學看對稱陀螺的運動。**科學教育月刊**，241(7)，35-44。

Crummett, W. P. & Western, A. B. (1994). *University physics*. Dubuque, IA: Wm. C. Brown Communications.

French, A. B. (1971). *Newtonian mechanics*. New York: W.W. Norton & Company.

Goldstein, H. (1980). *Classical mechanics* (2nd ed.). Reading, MA: Addison-Wesley Publishing Company.

Landau, L. D. & Lifshitz, E. M. (1976). *Mechanics* (3rd ed.). Translation by J. B. Sykes & J. S. Bell. Oxford: Pergamon Press.

Marion, J. B. & Thornton, S. T. (1995). *Classical dynamics of particles and systems* (4th ed.). Philadelphia: Saunders College Publishing.

Meirovitch, L. (1970). *Methods of analytical dynamics*. New York: McGraw-Hill.

Symon, K. R. (1971). *Mechanics* (3rd ed.). Reading, MA: Addison-Wesley Publishing Company.