

中學生通訊解題第十期參考解答與評析

臺北市立建國高級中學 數學科

問題編號

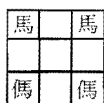
891001

在一個九格棋盤上放置了兩個「馬」和兩個「傜」的象棋，放置的位置如圖一所示，「馬」或「傜」的走法則如圖二所示。在移動「馬」或「傜」時有兩個限制：

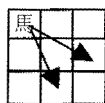
(1)「馬」或「傜」在斜進時，如在其正前方一位有另一顆棋子時則不得前進，如圖三所示。（就是不得出現「拐馬腳」前進的狀況）

(2)兩個象棋不得佔用同一個位置。

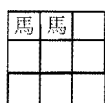
請問：如果要得到兩種棋子互換的結果，最少要走多少步？



圖一



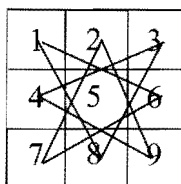
圖二



圖三

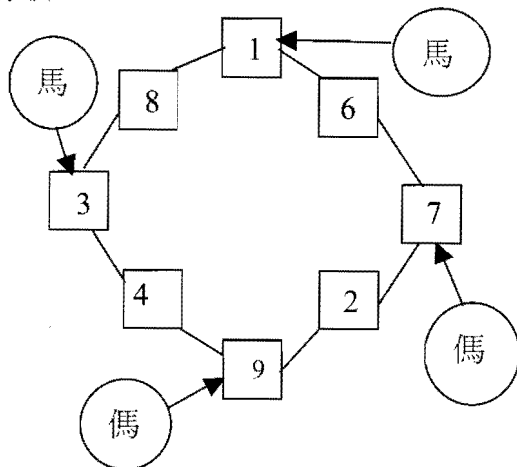
參考解答：

(1)將每個格子編號，並畫出所有可能的走法，則象棋的位置順序必呈現在以下 8 個位置循環的現象： $1 \rightarrow 6 \rightarrow 7 \rightarrow 2 \rightarrow 9 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 8 \rightarrow 1 \dots$ 。我們也可發現，永遠不會有棋子佔據 5 的位置，如圖四所示。



圖四

將這 8 個位置畫成圖五的循環圖，然後可依順時針或逆時針的順序依序移動四個象棋。



圖五

例如：如果順時針移動，則 1 上的「馬」最後要移動 4 步到 9（只移動到 7 會因「拐馬腳」造成後面棋子不能通過而不能達成題目的要求）；同理，3 上的「馬」要移動 4 步到 7，9 上的「傜」要移動 4 步到 1，7 上的「傜」則要移動 4 步到 3。

(3)上的移動步數總共 $4 \times 4 = 16$ 步。

解題重點：

1. 將象棋的位置順序呈現在 8 個循環位置。
2. 將『拐馬腳』的限制做出因應。

評析：

1. 大部分同學僅呈現操作步驟。
2. 理清晰並呈現象棋循環位置者有彰化縣陽明國中李昱融、高師大附中國中部蔡政

洋、板橋海山國中張源平等同學。

- (3) 參答人數共有 49 人，平均得分 6.71 分，得分率 95.91%。

問題編號
891002

今有 12 名旅客要趕往 40 公里處的車站去搭乘火車，出發的時間離開車的時間只剩下 3 小時，他們步行的速度為每小時 4 公里，若光靠走路一定來不及。目前唯一可利用的交通工具只有一輛小汽車，小汽車的速度為每小時 60 公里，但此輛車連司機在內最多只能載 5 人。請設計出一種方法，讓這 12 名旅客都能趕上火車。

參考解答：

- (1) 先讓汽車將 4 名旅客送到中途某處，再讓這 4 名旅客步行，此時其他 8 名旅客也在步行；接著汽車再回來載 4 名旅客，剩下 4 名旅客仍然繼續步行，追上前面 4 名旅客後也讓他們下車一起步行；最後回來接剩下的 4 名旅客逕抵火車站。適當選取第一批旅客的下車地點，可以是載送最後一批旅客的汽車與前面 8 名旅客同時抵達車站，在整個過程中，每一位旅客不是乘車就是步行，因此是一種最快的方法。
- (2) 設汽車送第一批旅客行使 x 公里後讓他們下車步行，此時其他旅客步行了 $\frac{4x}{60} = \frac{x}{15}$ 公里，其間相差了 $\frac{14x}{15}$ 公里，在往後的時間裡，因為步行的旅客速度一樣，所以兩批旅客之間始終相差 $\frac{14x}{15}$ 公里。而汽車要在這段距離之間來會行駛兩趟，每來回依趟所

用的時間為 $\frac{14x}{60+4} + \frac{14x}{60-4} = \frac{x}{32}$ ，但汽車來回兩

趟時間恰好是第一批旅客步行 $40 - x$ 公里的時間，即 $2 \times \frac{x}{32} = \frac{40-x}{4}$ 解得 $x=32$ 公里。因此所需的總時間為 $\frac{32}{60} + \frac{40-32}{4} = 2.53$ 小時，故這種方法必能讓這 12 名旅客皆趕上火車。

解題重點：

本題方法有很多種。但若讓所有旅客們同時出發，有的坐車有的步行；並使得各組走路及坐車的時間相同，則 12 名旅客可同時到達車站，且所花費之時間亦最短。

評析：

- (1) 基本上同學們皆能提出趕上火車的方法。只是巧妙各有不同。建議同學們以後遇到類似的問題，應以找出『最省時』之方法為目標。
- (2) 有五位同學寫出最省時的方法，分別為台南市建興國中郭顯宗；台北市民生國中黃彥豪、弘道國中魏群樹、敦化國中郭勝旻、光復國小劉欣瑜等同學。
- (3) 另有 13 位同學採用下列方式：12 位旅客同時出發，其中八人步行，四位搭車先到車站，而車子回頭於人車相遇處再載走四人到車站，車子再回頭載第三組到車站，

所費時間為 $2\frac{41}{48}$ 小時。

- (4) 其餘同學大都採用以『三小時到達車站』為規劃，例如：第一組旅客先坐車 0.5 小時（載至離出發地 30 公里處下車），然後步行 2.5 小時（10 公里）到車站。而其他各組旅客則或先或後到達車站。
- (5) 本題參答人數有 50 人，平均得分 5.42 分，得分率 77.43%。

問題編號

891003

一間木櫃有 n 個抽屜，分別標上 $1 \sim n$ 的號碼，並將其全部鎖上，現在依下列的操作方式改變其狀態：（所謂改變抽屜的狀態，就是原來是開的變成鎖上，原來是鎖上的變成開的）

第 1 次將號碼被 1 整除的抽屜改變狀態。

第 2 次將號碼被 2 整除的抽屜改變狀態。

……

第 k 次將號碼被 k 整除的抽屜改變狀態。

……

請問經過 n 次操作後，那些編號的抽屜是打開的？

參考解答：

對於 $1 \sim n$ 中的任一個數字 m 而言，對於第 p 次操作，若 $p|m$ ，則會改變第 m 號抽屜的狀態。所以經過 n 次的操作後，第 m 號的抽屜改變狀態的次數 = 其正因數的個數。

故當 m 的正因數的個數是奇數時，第 m 號抽屜經過 n 次操作後就會是打開的。又因為正因數個數為奇數的正整數必為完全平方數，所以 $1 \sim n$ 號中號碼是完全平方數的抽屜會被打開。

評析：

(1) 本次考題絕大部分同學都可掌握題意，寫對答案。唯解答之過程卻有好壞之分，有同學直接用操作法推測出答案，顯然不令人滿意。有同學直接說出答案，卻未做出合理之推測說明。

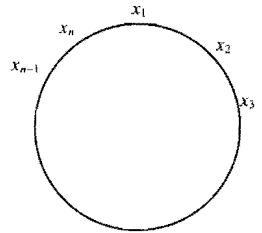
(2) 本題表現優異者有基隆市銘傳國中江政融，台北市仁愛國中吳宗哲、明德國中王

琨傑、大直國中陳俊曄、弘道國中魏群樹、金華國中趙心予，民生國中張哲瑞，台北縣新莊國中吳之堯、江翠國中莊凱壹、黃明山、鍾佳琦、永和國中黃俊諺，新竹市光華國中賴俊儒，彰化縣員林國中王琨傑、陽明國中李昱融、高雄縣鳳西國中葉仲恆，高雄市高雄國中吳哲宇、立志中學蔡政江等同學。

問題編號

891004

如圖，圓周上依序填上 n 個不同的數 x_1, x_2, \dots, x_n ，($n \geq 3$) 每個數都等於它左右相鄰兩數的乘積。



(例如： $x_1 = x_n \cdot x_2$ ， $x_2 = x_1 \cdot x_3$ ， \dots ， $x_n = x_{n-1} \cdot x_1$)，試問 $n =$ 多少時可以找到 x_1, x_2, \dots, x_n 滿足上述的條件。

參考解答：

(1) $n=3$

$$x_1 = x_2 \times x_3 \text{ -- (1) 由(1)(2) } \Rightarrow x_1 = x_1 \times x_3^2$$

$$x_2 = x_1 \times x_3 \text{ -- (2) 即 } x_1 = 0 \text{ 或 } x_3 = \pm 1 \text{ (均不合)}$$

$$x_3 = x_1 \times x_2 \text{ -- (3) } x_1$$

(2) $n=4$ x_3

x_2 x_1

$$x_1 = x_2 \times x_4$$

$$x_2 = x_3 \times x_1 \text{ 即 } x_2 = x_4 \text{ (不合) } x_4 \quad x_2$$

$$x_3 = x_2 \times x_4$$

$$x_4 = x_1 \times x_3 \quad x_3$$

(3) $n=5$

$$x_1 = x_2 \times x_5 \text{--(1)}$$

$$x_2 = x_1 \times x_3 \text{--(2)}$$

$$x_3 = x_2 \times x_4 \text{--(3)}$$

$$x_4 = x_3 \times x_5 \text{--(4)}$$

$$x_5 = x_1 \times x_4 \text{--(5)}$$

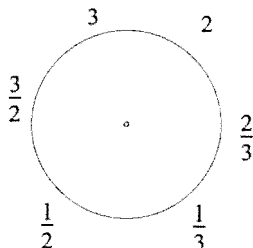
(2)代入(1) $x_1 = x_1 \times x_3 \times x_5$

$\therefore x_1 = 0$ 不合

$\therefore x_5 \times x_3 = 1 \Rightarrow x_4 = 1 \Rightarrow x_3 = x_2$ (不合)

(4) $n=6$ (可尋得其中一組解)

$$x_1=3, x_2=2, x_3=\frac{2}{3}, x_4=\frac{1}{3}, x_5=\frac{1}{2}, x_6=\frac{3}{2}$$



(5) $n>6$ 時，

任取二個相鄰不為零的數 p, q

依次序下去的數分別為 $p, q, \frac{q}{p}, \frac{1}{p}, \frac{1}{q}, \frac{p}{q}, p$

上述第一個位置上的數必與第七個位置上的數相等，與已知矛盾。

$\therefore n > 6$ 不可能

$\therefore n=6$

評析：

(1)答題優良的學生有高雄縣鳳西國中葉仲恆，北市弘道國中賴凱文，北縣江翠國中黃明山、永和國中黃俊諺。

(2)本題參答人數共有 43 人，平均得分數 4.66，得分率為 66.5%。

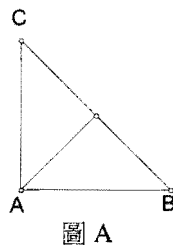
問題編號

891005

已知 $\triangle ABC$ 是等腰三角形，今過 $\triangle ABC$ 的一個頂點作一條直線，將 $\triangle ABC$ 分成兩個小的等腰三角形，請問 $\triangle ABC$ 的三個內角度數可能是幾度？

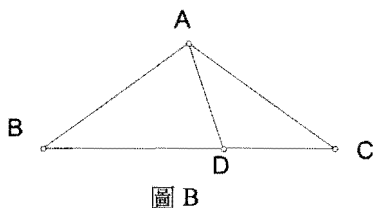
參考解答：

(1)先將最容易想到等腰三角形如右圖 A，此時 $\triangle ABC$ 之三個內角分別為 $90^\circ, 45^\circ, 45^\circ$ ，即可滿足題目之要求。



(2)在圖 B 中讓 $\overline{AB} = \overline{BD}$ ， $\overline{AD} = \overline{DC}$ ，並令 $\angle A = \alpha$ ， $\angle B = \angle C = \beta$ ，我們有

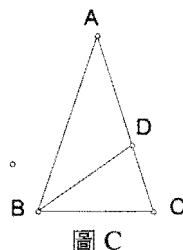
$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = 180^\circ \\ \alpha = 3\beta \end{cases} \text{解得 } \alpha = 108^\circ, \beta = 36^\circ.$$



(3)在圖 C 中使 $\overline{AD} = \overline{BD} = \overline{BC}$ ，且令 $\angle A = \alpha$ ， $\angle B = \angle C = \beta$ ，因

$$\text{此有 } \begin{cases} \alpha + 2\beta = 180^\circ \\ 2\alpha = \beta \end{cases}$$

解得 $\alpha = 36^\circ, \beta = 72^\circ$ 。



(4)在圖 D 中取 $\overline{AD} = \overline{BD}$ ， $\overline{CD} = \overline{CB}$ ，而且 $\angle A = \alpha$ ， $\angle B = \angle C = \beta$ ，可列出

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = 180^\circ \\ \frac{180^\circ - \beta}{2} = 2\alpha \end{cases}$$

解得 $\alpha = (25\frac{5}{7})^\circ$
 $\beta = (77\frac{1}{7})^\circ$ 。

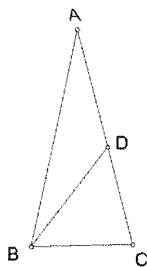


圖 D

從以上我們可以求出本題之四個答案如下：

$(90^\circ, 45^\circ, 45^\circ)$ $(108^\circ, 36^\circ, 36^\circ)$
 $(36^\circ, 72^\circ, 72^\circ)$ $(25\frac{5}{7}^\circ, 77\frac{1}{7}^\circ, 77\frac{1}{7}^\circ)$

評析：

- (1)本題的目的想要訓練學生思考的嚴密性，解題時能考慮過 A、B、C 三頂點的直線，若假設 $\overline{AB} = \overline{AC}$ ，因為 $\angle B = \angle C$ ，故只須討論過 $\angle A$ 、 $\angle B$ (或過 $\angle A$ 、 $\angle C$)

兩種情形，大部分的同學均能得到某幾組答案，不過還是有很多學生因為討論不完整，只得到了部分的答案，如果能在花些時間重新審視整個解題的過程，相信能夠把答案寫的更完整。

答題優良的學生有高縣鳳西國中葉仲恆、北縣新莊國中吳之堯、北市明德國中王琨傑、北縣江翠國中葉品辰、台南市建興國中黃信溢、北市民生國中鍾佳琦、曾怡嘉、彰化縣員林國中劉金瑞、江孟恆、北市大直高中國中部陳俊曄、北縣福和國中楊智寰、北市成德國中劉昱亞、北市仁愛國中吳宗哲、基隆市銘傳國中江政融、北縣海山國中張源平。

參與徵答的共有 48 位同學，平均得分為 4.9 分，得分率為 70%。

請在右圖之○內填入 1~8 的數字，使得兩個菱形內及虛線上的四個數字和都相等。

