第三章　腦電波分析方法

在本研究中所分析的是受試者在看螢幕上所出現的圖像並想像中間黑色方塊移置特定位置所產生的腦波，分析流程如圖 3.1 所示。首先由腦電波儀記錄受測者在不同狀態下的腦波，然後做去雜訊(眼動)的動作，再來做快速傅立葉處理，看此筆是否有有效特徵，若出現有效特徵才以分類器進行分類，若沒有則捨去此筆數據，最後我們計算分類器對不同狀態下腦波之鑑別率。在本章中將依序介紹各個步驟所使用之分析法的基本原理及演算法。

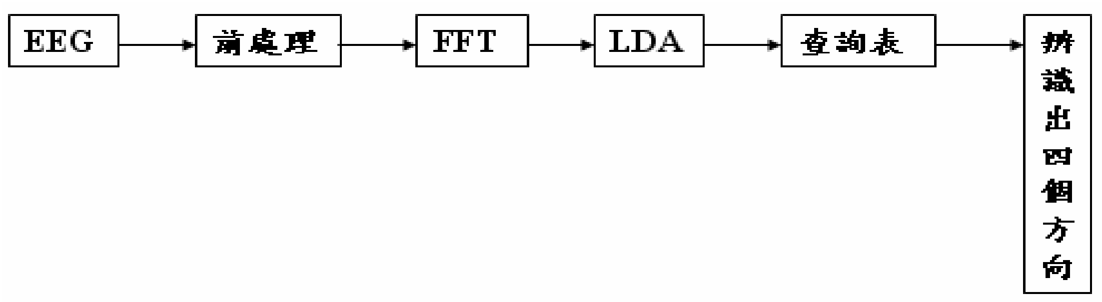

圖 3.1 想像四個方向之腦電波分析流程圖

一、腦電波的前處理

在量測腦電波時，記錄到的訊號並不完全是大腦的電活動，所以在腦電波中許多電壓的變化可能來自其他來源，這些我們稱它為雜訊，有來自儀器本身或是受測者，如下：

1. 週遭環境：周圍的電子儀器可能會導致 50-60Hz 的雜訊。
2. 受測者：眨眼、眼球轉動、流汗、肌肉的收縮放鬆、身體移動等[1]。

我們利用 NeuroScan 公司所出的 Scan4.3 軟體將受測者的腦波圖做去眼動的雜訊及分段的動作，如圖 3.2 與圖 3.3 所示，在圖 3.3 中可以看到在 16 秒左右通道 Fz、F3、F4 和 C3 的眼動雜訊已經被濾除了。接著再對這些資料做分段以及過大振幅的濾除，我們是設定為-75μV 到 75μV，這樣才

算完成前處理的動作。

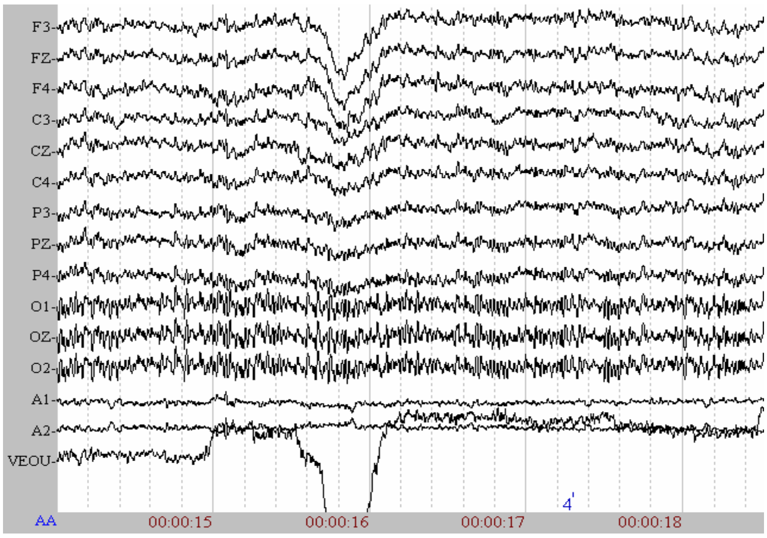

圖 3.2 原始腦波圖

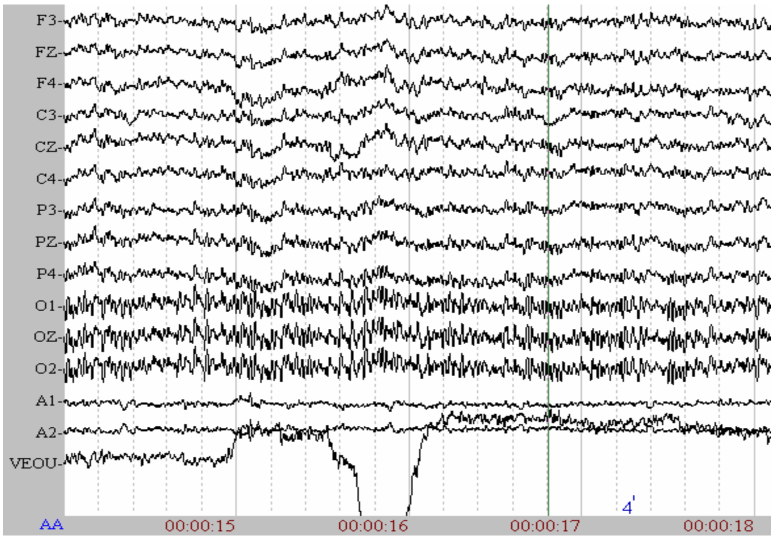

圖 3.3 去眼動的腦波圖

二、特徵擷取演算法

特徵擷取的方法不外乎是利用濾除雜訊後的腦波頻譜，找出明顯的特徵，所以就有我們常見的頻譜分析法---快速傅立葉轉換(Fast fourier transform)、小波轉換(Wavelet transform)，模型分析法---Markov EEG 模型、AR model，成份分析法---主成分分析法(Principal components analysis)、獨立成份分析法(Independent components analysis) [11][15]。本研究之所以用快速傅立葉轉換，因為想藉由能量頻譜來檢驗實驗的正確度而

且有文獻[20]只用快速傅立葉轉換就可以看出明顯的特徵。

(一) 快速傅立葉轉換法

1. 簡介

傅立葉轉換是將在時域的信號乘上一個 e 的-jwt 次方，再積分之後就會變成頻域的信號(如 3-1 式)。簡單地說，傅氏轉換是將信號由時域轉到頻域，如此我們就可以看到此信號的頻譜，由頻譜可以得知此信號含哪些頻率，進而分析此信號的頻譜特性。

$$X(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t) * e^{-j\omega t} \qquad (3-1)$$

離散傅氏轉換(discrete Fourier transform, DFT)是將離散信號從時域轉到頻域做分析的數學式(如 3-2 式所示)，由於離散傅氏轉換的運算次數是 N^2，轉換時有複雜的運算量，所以在 1965 年，Cooly 和 Tukey 發表一個計算離散傅氏轉換後，有效的降低 DFT 的運算量(從 N^2 變為 $N\log_2 N$)，但在他們的演算法，N 必須是二或是多個整數的乘積。由於這篇論文的發表，使得離散傅氏轉換在訊號處理上的應用蓬勃發展，造成有許多高效率計算的演算法發現[6][19]，這些演算法都稱為快速傅立葉轉換，簡稱 FFT。

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1} x(n) * e^{-j\omega nk} \qquad k=1,2\cdots,N-1, \omega=\frac{2\pi}{N} \qquad (3-2)$$

FFT 演算法的基本原理是將長度為 N 的序列的離散傅氏轉換的計算分解成許多小的離散傅氏轉換。利用這個原理衍生出多種的演算法，但他們的計算速度上是一樣的。本研究就以分時 FFT 演算法簡單敘述[4]。

2. 原理

當我們計算離散傅氏轉換(DFT)時，可從分解計算成許多連續的小 DFT 計算而得到，在這個計算過程，可以利用複數指數 $W_N^{kn}=e^{-j(2\pi/N)kn}$ 的對稱性與週期性。而演算法的分解是基於把序列 $x(n)$ 分成許多小序列，所

以稱之為分時演算法。

根據 Cooly 和 Tukey 所提的演算法，若 $x(n)$ 為 N 點序列，n=0, 1, 2, …, N-1 則離散傅氏轉換公式如 3-3 式：

$$X[k] = DFT(x(n)) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk} \qquad k = 0,1,...,N-1 \qquad (3-3)$$

其中 $x(n)$ 為時域函數，X[k]為經過轉換後的頻域函數，N 為取樣數量，$W_N = e^{-j2\pi/N} = \cos(2\pi/N) - j\sin(2\pi/N)$ 稱為 twiddle factor[4]。

若以 2 為基數來考慮，將(3-3)式中的 $x(n)$ 根據 n 的奇數項與偶數項分為兩組，即 n=2a 和 n=2a+1 兩組，則

$$\begin{aligned} X[k] &= \sum_{a=0}^{(N/2)-1} x(2a) W_N^{k(2a)} + \sum_{a=0}^{(N/2)-1} x(2a+1) W_N^{k(2a+1)} \\ &= \sum_{a=0}^{(N/2)-1} x(2a) W_{N/2}^{ka} + W_N^k \sum_{a=0}^{(N/2)-1} x(2a+1) W_{N/2}^{ka} \end{aligned} \qquad (3-4)$$

令 $A[k] = \sum_{a=0}^{(N/2)-1} x(2a) W_{N/2}^{ka} \qquad \mathrm{k} = 0, 1, ..., \mathrm{N}-1$

$$\mathrm{B}[k] = \sum_{a=0}^{(N/2)-1} x(2a+1) W_{N/2}^{ka} \qquad \mathrm{k} = 0, 1, ..., \mathrm{N}-1$$

則 $X[k] = A[k] + W_N^k B[k] \qquad \mathrm{k} = 0, 1, ..., \mathrm{N}-1$

(3-4)式的每一個和是一 N/2 點的 DFT，第一個和是原序列偶數點的 N/2 點的 DFT，第二個和是原序列奇數點的 N/2 點的 DFT，A[k]和 B[k]是 k 的週期函數，且週期為 N/2。

在圖 3.4 中，兩個 4 點的 DFT 被計算，其中把 B[0]乘上 W_N^0，然後加上 A[0]，則得到 X[0]。由於 A[k]和 B[k]是 k 的週期函數，且週期為 4，所以 B[4]=B[0]和 A[4]=A[0]，至於 X[5]、X[6]和 X[7]的值同理可得，如圖

6 所示。接著針對 a 的奇數項與偶數項將 A[k]和 B[k]進行分解，跟之前分解 $x(n)$ 一樣，總共分解 3 次，最後的流程圖如圖 3.5 所示[4]。

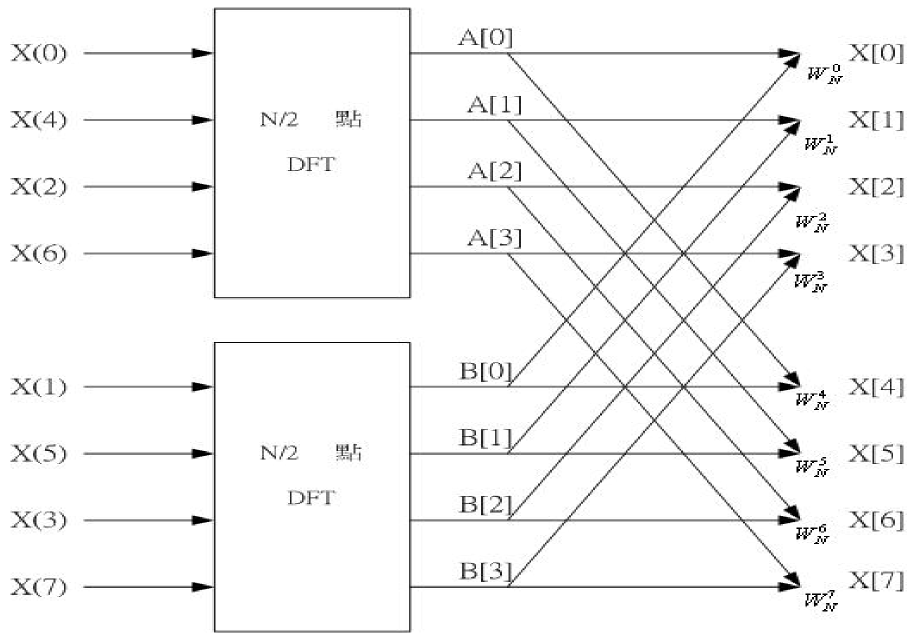

圖 3.4 把 N/2 點的 DFT 分解成 2 個 N/4 點的 DFT 的流程圖

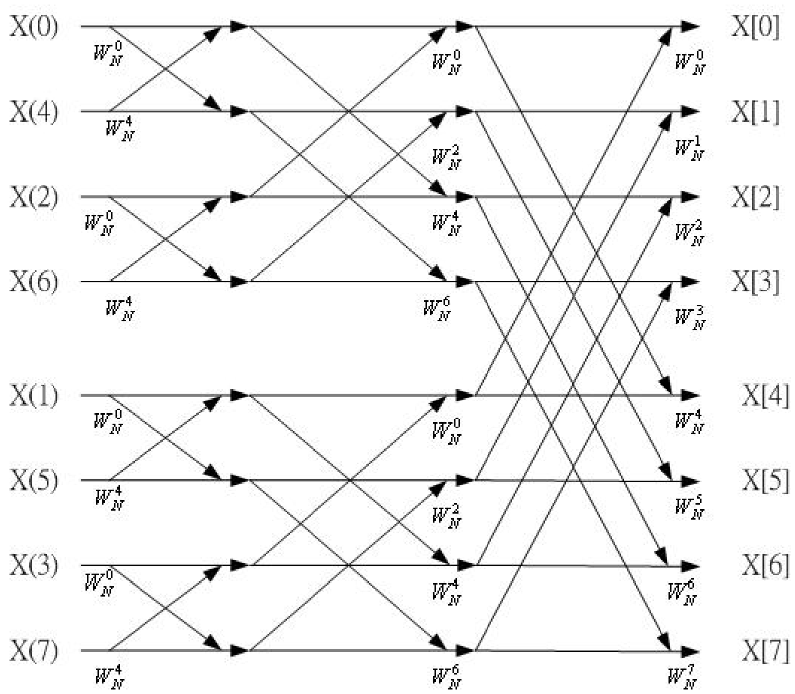

圖 3.5　8 點 DFT 計算的完全分解流程圖

(二)小波轉換分析

1.簡介

小波轉換在二十世紀初就已經出現了，它在發展初期是屬於純數學的領域，直到 Daubechies 與 Mallat 將小波轉換與數位訊號處理結合後，才有學者研究小波的應用，直到現今，小波轉換在電腦科學、數學、物理或工程上都有很多的研究與應用[25]。

2.原理

小波轉換簡單地說，以數學轉換的方式，把一個訊號經由轉換使其分成數個頻率分量。它是將小波基底函數(mother wavelet)經一定比例的伸縮與平移形成一組的小波函數，用這些小波函數來展開欲分析的訊號，使原始訊號分成數個分量，之所以要將小波基底經伸縮與平移是為了改變小波轉換在時頻域的解析度，並使它具有局部定位的能力[25]。

小波轉換可寫成 3-5 式。其中小波基底函數為$\phi(t)$，它必須符合積分為零及能量有限的特性，分別如 3-6、3-7 式所示。

$$W_f(a,b)=\frac{1}{\sqrt{|a|}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\phi^*(\frac{t-b}{a})\,dt \qquad \text{其中} a,b\in R\ , a\neq 0 \qquad (3-5)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\phi(t)dt=0 \qquad (3-6)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\phi(t)|^2 dt<\infty \qquad (3-7)$$

3-8 式為小波基底函數經伸縮與平移後產生的小波函數$\phi_{b,a}(t)$，其中:

(1) a 為比例係數，用來對小波函數基底函數$\phi(t)$壓縮或拉伸。

(2) b 為移位係數，用來對整段小波基底函數作平移，以涵蓋整個時間軸。

$$\phi_{b,a}(t)=a^{-1/2}\phi(\frac{t-b}{a}), a>0 \qquad (3-8)$$

所以重寫小波轉換表示式 3-8 成為 3-9 式。

$$W_f(a,b) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\phi^*{}_{a,b}(t)dt \qquad 其中a,b \in R\ ,\ a>0 \qquad (3-9)$$

小波分解，根據小波函數推導出一組小波分解的高通與低通的濾波器。將一段取樣頻率為 f_s 的數位離散訊號 X 當作原始輸入訊號，使它分別通過小波分解的高通與低通濾波器，可分別得到此訊號取樣頻率為 f_s 的高頻(Hx1)與低頻(Lx1)訊號分量。再將 Lx1 經小波分解的高通與低通濾波器，可以得到第二層的小波係數 Hx2 與 Lx2，依此類推，可以得到很多層的小波係數，如圖 3.7 所示，由此可知只要我們知道小波係數，就可以判別原始輸入訊號 X 在各個頻帶的分量。而圖 3.6 中我們可以看到原始訊號經由高通濾波器與低通濾波器分成兩部分，接著再一次經另一組的高通濾波器與低通濾波器，一直分成你想要的頻帶。

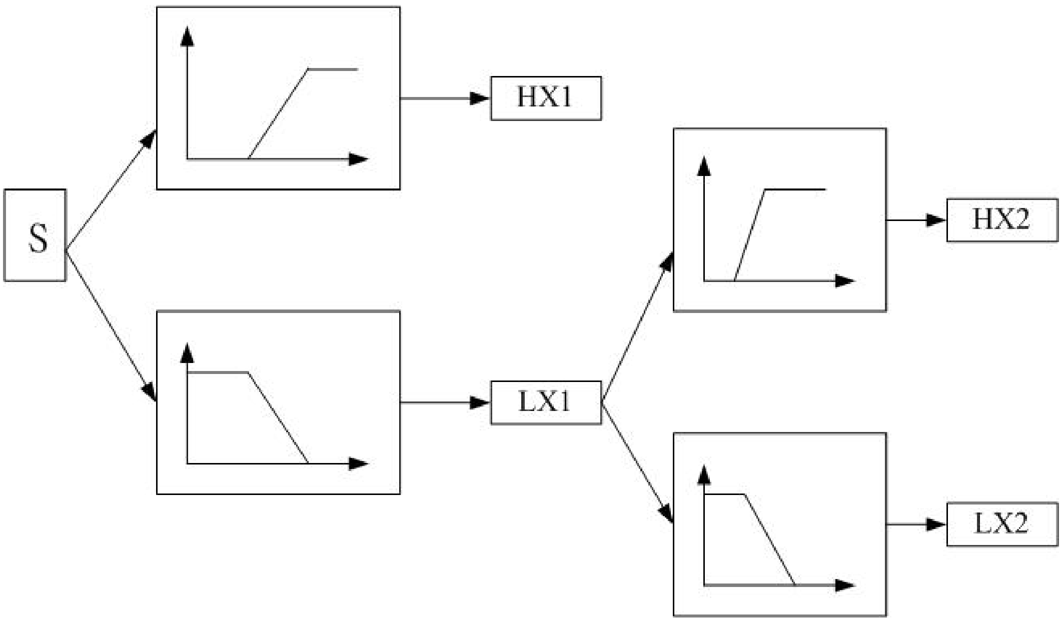

圖 3.6 訊號 X 經兩次小波分解的流程圖

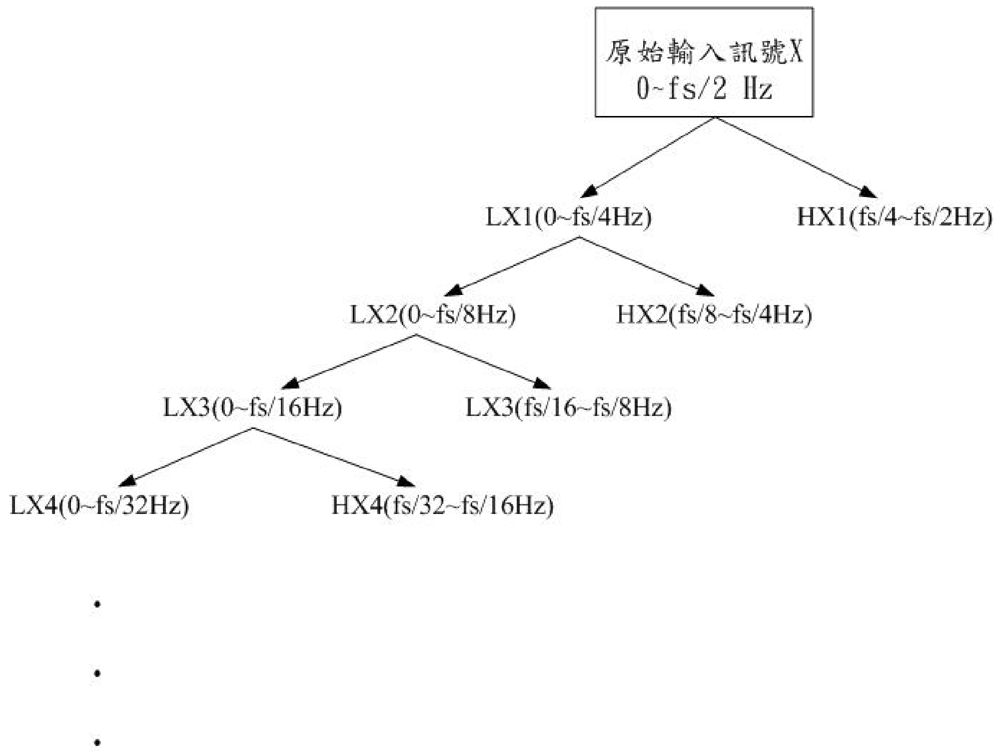

圖 3.7　原始輸入訊號經多層小波分解後的頻帶分布

三、分類器演算法

分類器演算法的方法不外乎是找出最佳的投影軸，將不同群的數據能夠有效地分開做分類，像主成分分析法(Principal Components Analysis, PCA)、支持向量機(Support Vector Machines, SVMs)、線性鑑別分析法(Linear discriminant analysis, LDA)[1][5]。或者利用類神經網路這些方法。本研究想利用 LDA 兩兩方向腦波資料找出正負值關係並且藉由一個自己做的查詢表來做比對，這樣就可以找出受測者冥想哪一個方向。

(一) 線性鑑別分析(Linear discriminant Analysis, LDA)

1. 簡介

判別分析法是在已知種類的情況下，有新的資料可以用此法選定一判別準則，以判別新的資料被分為哪一類，而線性鑑別分析法是我們分辨

腦電波型態的主要工具。由於分類器因為輸入的空間維度的增加，造成困難度增加，所以我們才會採用 Fisher discriminant function 來解決此問題。

2. 演算法

線性鑑別分析法[1]找一個轉換矩陣，來縮小轉換後同一類別內特徵參數與該類別中心點的距離，並拉大不同類別間的中心點的差距。它找尋最佳化的轉換矩陣是利用同一類別內資料的變異數與不同類別內資料的變異數這兩個參數推導出一個 Fish’s linear discriminant function，藉由此函數經過一些數學處理就可以找到最佳化的轉換矩陣，其推導過程如下三個步驟來描述:

(a)算出同一類別內的散佈矩陣 S_w 與不同類別的散佈矩陣 S_B。

$$S_{W_x} = \sum_{c=1}^{C}\sum_{m=1}^{M}(\overline{X}_m^c - \overline{X}^c)(\overline{X}_m^c - \overline{X}^c)^T \qquad (3-10)$$

$$S_{B_x} = \sum_{C=1}^{C}(\overline{X}^C - \overline{X})(\overline{X}^C - \overline{X})^T \qquad (3-11)$$

其中有 C 類的資料，每類有 M 個，經轉換後($y = w^T x$)，3-10 和 3-11 式變為 3-12 和 3-13 式

$$S_{W_y} = W^T S_{W_x} W \qquad (3-12)$$

$$S_{B_y} = W^T S_{B_x} W \qquad (3-13)$$

(b)得到一個 Fish’s linear discriminant function，為了求極值，計算它的梯度。

$$J(w) = \frac{S_{B_x}}{S_{W_x}} = \frac{W^T S_{B_x} W}{W^T S_{W_x} W} \qquad (3-15)$$

$$J(w) = w^T S_B w - \lambda(w^T S_W w - 1) - \sum_{i=1}^{k-1} \rho_i w^T w_i$$
$$= w^T S_B w - \lambda(w^T S_W w - 1) - w^T W\rho$$

J(W)的梯度 $2S_B w - 2\lambda S_w w - W\rho = 0$

經過一些整理得到下式

$$W^T S_W^{-1} W\rho = 2W^T S_W^{-1} S_B w$$
$$\rho = 2(W^T S_W^{-1} W)^{-1} W^T S_W^{-1} S_B$$

(c)利用剛才得到的式子，求出最佳化的轉換矩陣 Q。

$$2W(W^T S_W^{-1} W)^{-1} W^T S_W^{-1} S_B w = 2S_B w - 2\lambda S_w w$$

$$S_W^{-1} W(W^T S_W^{-1} W)^{-1} W^T S_W^{-1} S_B w = S_W^{-1} S_B w - \lambda w$$
$$(I - S_W^{-1} W(W^T S_W^{-1} W)^{-1} W^T) S_W^{-1} S_B w = \lambda w$$

$$Q = (I - S_W^{-1} W(W^T S_W^{-1} W)^{-1} W^T) S_W^{-1} S_B \qquad (3-16)$$

接著我們藉由推導出最佳化轉換矩陣 Q 的公式，用 Matlab6.5 版寫成 LDA 分類器。