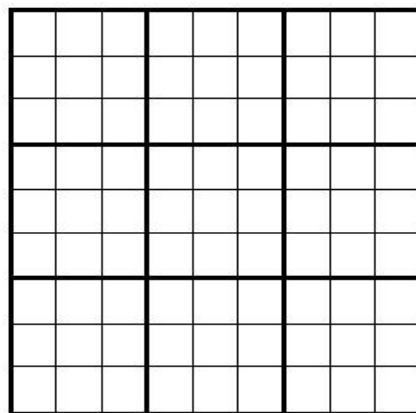


第一章 緒論

第一節 前言

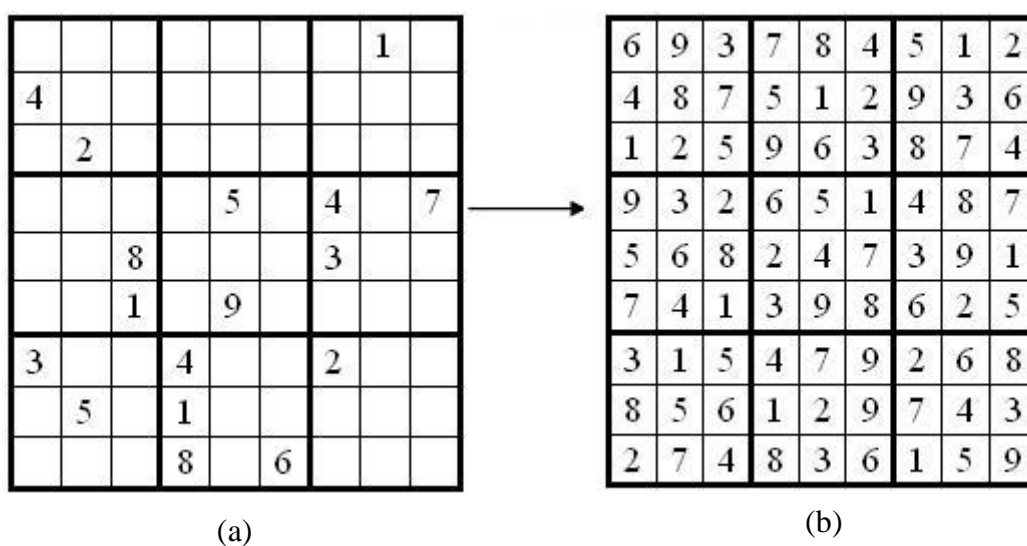
數獨(Sudoku)近年來風靡全世界，成為最熱門的新興益智遊戲；Sudoku的原創者是18世紀末的瑞士數學家歐拉(Euler)，概念源自於「拉丁方塊」[13]，遊戲本身只要運用邏輯推理並不需要深奧的數學技巧，因此人人都可以成為數獨高手。數獨题目的難易程度可以用题目中的提示數多寡來區隔，提示數越少者難度越高，而現今已知的最少提示數為17，換句話說，要解17個提示數的數獨盤面，是相當困難的挑戰。本論文提出一套「基因重整繁衍」之演算法，開發出現今最少提示數的數獨盤面產生器，透過此產生器可以大量產生困難度最高的數獨盤面。

1970年代數獨遊戲在美國熱烈發展，改名為數字拼圖(Number Place)，之後流傳至日本並發揚光大，以數學智力拼圖遊戲發表。在1984年一本遊戲雜誌《パズル通信ニコリ》正式把它命名為數獨，Sudoku這個名字來自於日文“suji wa dokushin ni kagiru”，意思為「每個數字僅限出現一次」，在题目中玩家會看到一個 9×9 的大九宮格，而其中又劃分成九個 3×3 的小九宮格，如圖一：



圖一 9×9 九宮格

遊戲規則很簡單：在大九宮格裡，填入 1 到 9 的數字，讓每個數字在每個行、列及小九宮格裡都只出現一次。謎題中會預先填入若干數字(提示數)，其它格位則留白，玩家得依謎題中的提示，運用個人的邏輯和推理，在其它的空格上填入 1 到 9 的數字，特別要注意的是，每個數字在每個小九宮格內不能重複，每個數字在每行、每列也不能出現一樣的數字！就因為它的「數」字必須「獨」立，所以中文就譯為「數獨」。



圖二 一個 17 個提示數的盤面與解答

由於數獨遊戲受到社會大眾的青睞，因此市面上出現越來越多的數獨相關文章、盤面及各式程式，使得玩家有相當多的機會以及資料來源可投入此遊戲。大多數的數獨研究以解題為主，可分為簡易級、中級、高級、困難級等不同等級的盤面，玩家可以依照自己的程度挑戰不同困難度的數獨盤面。目前除了報章雜誌固定時間提供新盤面之外，還有許多的網站、電視節目等都會不定時的提供新盤面，甚至於有遊戲廠商開發出數獨機供玩家隨時隨地皆可以悠遊於數獨遊戲之中，日後可想而知，手機或PDA也會陸續導入數獨遊戲，使得數獨遊戲更為盛行。由於數獨只需要邏輯思維能力，與數字運算無關，非數學高手也能輕易上手，雖然玩法簡單，但數字排列方式卻千變萬化，所以不少教育者認為數獨是鍛鍊腦筋的好方法。

數獨遊戲除了解題的方法及速度受到大眾重視之外，目前最被數學家所注目的數獨問題在於「最少提示數(Minimum hints)的數獨盤面」，現今已知的最少提示數為 17，是否存在著 16 個提示數的數獨盤面目前尚不得而知，已有許多玩家、研究者投入大量的精神、資源想找出 16 個提示數的盤面，或者證明沒有 16 個提示數的盤面存在，但截至目前為止，還沒有人有辦法得到答案。

正因為最少提示數的數獨盤面備受重視，且目前已知的最少提示數為 17，故設法運用演算法去大量產生 17 個提示數的盤面對於研究最少提示數的數獨盤面極具意義，本研究發展一套「基因重整繁衍」的演算法，目的為開發出一個能夠不斷大量產生盤面的軟體，而不再靠人工蒐集的方式慢慢取得，快速而大量的 17 個提示數盤面產生器可作為日後研究 16 提示數盤面存在可能性的根基。

由於目前尚未有一套系統可以大量的產生目前已知的最少提示數之數獨盤面，故本系統的開發與實作，會對數獨領域未來更深入的研究帶來更多的研究資料，這也是本研究的最大貢獻。

第二節 文獻探討

目前已被證明，數獨遊戲屬於滿足問題(SAT problem)[6]，而滿足問題又已被證明是 NP-Complete 的問題[12]，故解 $n^2 \times n^2$ 的數獨遊戲也被推導為是 NP-Complete 的問題；雖然 9×9 的數獨盤面已有通解，能利用電腦程式快速的得到解答，但是一旦盤面擴增(n 變大時)，則目前程式解題所需時間會成指數暴漲，無法在多項式時間內找到通解。

Sudoku 研究中最常見的是以解題為主，而最簡單、常見的是使用暴力搜

尋法來解題，除了暴力搜尋法外，還有許多不同的解題方式如：限制問題(Constraint problem)[11]、幾何置換法(Geometric Crossover) [7]、著色問題(Graph coloring problem)等等，甚至於針對解數獨題目類型的問題而創造出新的程式語言如：ZIMPL[5]；上述的每一種解題方法會針對不同特質的數獨題型，提出能夠增快解答效率的一套理論，因此要評斷或選擇最快的數獨解題方式，還是得依盤面特性選擇。

限制問題(Constraint problem)[11]中主要是利用建立模型的方式去解答並且建立評量相關遊戲困難度的方法。其中利用多種不同的模型技術試圖找到不用搜尋就可解題的方法，例如 Channeling、Shaving、Redundant Constraints 等，並且利用繁衍系統(propagation schemes)評量各種模型下解答之不同困難度，並產生統計數據。

ZIMPL[5]語言是 Thorsten Koch 花了五年的時間去開發、維護以及功能再衍生而成的新工具，它主要是由線性(linear)和混合式整數程式規劃法(mixed integer programming)所組成，這個語言可以快速的將現實世界中的問題以數學模式來設計、解答。以數獨遊戲為例，可以利用 ZIMPL 模型，架構出簡短的程式碼便能快速且正確的計算出盤面解答。發明 ZIMPL 模型的動機在於 Koch 發現到去建立一個數學模型比要了解問題本身以及獲取有限的可用資料來得簡單許多，所以利用自動產生模型語言建構式的方法，得以將複雜問題轉換為模型而變得更輕鬆容易。

而另一個常被討論的議題，則是標準 9×9 的數獨到底有多少個謎題可被提供？目前已有澳洲數學家利用群論，計算出本質上不同的數獨謎題之答案(填滿 81 個格位)一共有 5,472,730,538 個[9]，假設全球的媒體每天刊登 1000 個本質上不同的數獨謎題，約 50 億個不同本質的數獨謎題大約需要一萬四千九百九十四年才能全部刊登完一次。而為什麼會有這麼龐大的數量存在呢？目前已可以得知的是提示數 17 個以上到 81 個都存在著許多的盤面，而

且是「本質上」都不同的數獨盤面。何謂「不同本質」的數獨盤面呢？所謂不同本質的數獨盤面指的就是經過對稱性的排列組合後，仍然不為相同的數字組合；而對稱性的排列組合[4]相當多，列舉如下：

1. 數字 1~9 的對稱組合
2. 單行與單行間的對稱排列
3. 單列與單列間的對稱排列
4. 九宮格組成的行與行間的對稱排列
5. 九宮格組成的列與列間的對稱排列
6. 旋轉與翻轉

許多數學家針對對稱性的排列組合以數學模式[2][3]來計算出所有對稱性的盤面會有多少個，但針對單一提示數盤面存在的數量卻無從算起。

在網站名稱為 Sudoku Checker and the Minimum Number of Clues Problem 的[8]中提供一個名為「Solver」的電腦程式，這個程式是由 Gary McGuire 所撰寫而成，由於 Gary 本身對數獨遊戲相當的熱衷，所以設計了一套軟體可以針對所輸入的任何一個完整的數獨謎題檢驗出是否有解答存在，亦可以支援解題 Sudoku-X(diagonal sudoku) 以及 Sudoku-DG(disjoint groups)等型態的變形數獨遊戲，網站中提供電腦程式的下載，包含執行檔以及程式碼，本研究將充分利用到此資源。

在 Minimum Sudoku[10]中可以看到目前確實有許多人著手於「具唯一解的最少提示數之數獨盤面」的探討，在此網站中可以看到目前已知的最少提示數為 17，並且經過長時間的人工搜集目前已知有 36628 筆 17 個提示數的數獨盤面存在，而且經過進一步檢查尚未發現有 16 個提示數存在。

第三節 現今最少盤面狀況與規則定義

首先定義本論文中的數獨遊戲為標準數獨盤面，它是由九個九宮格所組成，每行有九個不同數字(1~9)組成，每列有九個不同數字(1~9)組成，每個九宮格也都由九個不同數字(1~9)所組成，共有 81 個格位，每個格位都有其相對應的位址，在本論文中稱之為「格位數」，如下圖：

1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25	26	27
28	29	30	31	32	33	34	35	36
37	38	39	40	41	42	43	44	45
46	47	48	49	50	51	52	53	54
55	56	57	58	59	60	61	62	63
64	65	66	67	68	69	70	71	72
73	74	75	76	77	78	79	80	81

圖三 數獨基本盤面

圖中數字代表格位數；粗框線代表九宮格

每個數獨題目(如圖二(a))，皆含有數個提示數預先放置在格位內，使得玩家可根據題目中的提示數，以邏輯推理方式或是滿足問題模式來完成數獨盤面，數獨題目的有效性以是否具備「唯一解」作為判斷，如果依照相同的提示數可產生一個以上的不同完整數獨盤面，則該數獨題目為無效的題目，也就是說，每一個有效的數獨題目，都只會有唯一一組完整的數獨盤面存在，剛好能產生唯一解而又提供最少個提示數的數獨盤面，在本論文中稱之為「最少提示數之數獨盤面」。

現今已知的最少提示數為 17，但尚未找到 16 個提示數且具有唯一解的盤面，目前有學者朝著 16 個提示數的盤面但具有唯二解的方向尋找，試圖觀察是否 17 就是最少提示數的邊界。

第四節論文架構

本論文首先探討目前最熱門的益智遊戲-數獨，藉由現存已知數獨最少提示數盤面不易取得性，彰顯發展最少提示數盤面產生器的重要性。第二章描述 17 個提示數之盤面產生器中最重要的母體來源以及基因重整繁衍法，第三章則探討如何篩檢由產生器所產生出來的子代候選盤面，使之成為優生子代，第四章則是展示產生器及篩檢法的實作方式。最後一章總結本研究的結論與未來研究方向。