

國立臺灣師範大學物理研究所

碩士論文

Kitaev 模型及拓樸絕緣體

Kitaev Model and Topological Insulator

指導教授：高賢忠教授

研究生：陳韋錫 撰

中華民國一〇四年六月

中文摘要

本篇論文的目的為了解 Kitaev 模型的拓樸結構和拓樸絕緣體背後的數學結構。我們先研究在二介質的情況下狄拉克方程式中的粒子質量參數由負到正，並考慮兩邊為束縛態時的模型，接著考慮三介質束縛態的情況；而研究 Kitaev 模型時，我們先從 tight-binding 模型開始。對它的漢米頓算子作變分得到其運動方程組，並將兩端的運動方程式視為邊界條件，解出其粒子之狀態和能譜圖；再將模型一步一步的推廣至 Kitaev 模型。

tight-binding 模型的能譜總是連續。SSH 模型的能譜則與系統粒子數的奇偶性有關。粒子數為奇數時，若 $w_1 \neq w_2$ ，系統一定會有一個 zero-mode。當 $w_1 > w_2$ ，此 zero-mode 為侷限於左邊界的 edge-state；當 $w_1 < w_2$ ，此 zero-mode 則為侷限於右邊界的 edge-state。粒子數為偶數時，若 $w_1 \geq w_2$ ，系統沒有 zero-modes。若 $w_1 < w_2$ ，則系統總是有兩個 zero-modes，且分別對應到侷限於左、右邊界上的 edge-states。Kitaev 模型也有類似的情況：若 $\mu \geq 2w$ ，系統沒有 zero-modes。若 $\mu < 2w$ 則系統總是有兩個 zero-modes，且分別對應到侷限於左、右邊界上的 edge-states。

關鍵字：拓樸絕緣體、狄拉克方程式、Kitaev 模型。



目錄

中文摘要.....	I
目錄.....	II
第一章 簡介.....	1
1.1 量子霍爾效應(Quantum Hall Effect).....	1
1.2 量子自旋霍爾效應(Quantum Spin Hall Effect).....	2
第二章 拓樸絕緣體.....	5
2.1 兩介質之狄拉克方程式.....	5
2.2 三介質之狄拉克方程式.....	11
第三章 Kitaev 模型.....	17
3.1 Tight-binding 模型.....	17
3.2 SSH 模型.....	21
3.3 1D Kitaev 模型.....	30
第四章 結論.....	37
參考資料.....	38
附錄.....	39
A.1 Tight-binding 模型.....	39
A.2 SSH 模型.....	39
A.3 1D Kitaev 模型.....	44

第一章 簡介

1.1 量子霍爾效應(Quantum Hall Effect)

若將電子氣體限制在二維系統下(例：二氧化矽和矽之間的二維界面會產生位能阱會將電子氣體束縛於此)，並外加強磁場且超低溫環境。當這些在二維界面傳遞的電子遇到雜質時，會繞過此雜質後繼續沿著原本之方向繼續運動，但是由於此系統需要外加強磁場且低溫環境，因此限制了量子霍爾效應的應用空間。

在量子霍爾效應中，由於外加強磁場使電子運行軌道產生量子化的現象，進而使得電

子能階量子化： $\varepsilon_n = \hbar\omega_c \left(n + \frac{1}{2} \right)$ ，其中 ω_c 為迴旋角頻率，並稱此能階為蘭道能階

(Landau level)，且能階間間距皆為 $\hbar\omega_c$ ，此時的能帶結構和絕緣體相似，但不同於

絕緣體的是，若外加一個電場，會產生出霍爾電流。電子會盡可能的擠在最低的蘭道能階上，只有當最低能階填滿後電子才會跑到次高能階去。而每一個蘭道能階簡併數

為 N ，等於穿過這二維材料的基本磁通($\Phi_0 = hc/e$)數目，即 $N = BA/\Phi_0$ 。所以磁場

愈大，則每一個蘭道能階可以填的電子數愈多。霍爾電導 $\sigma_H = n(e^2/h)$ ，其中

$n = N_e/N$ ，稱 n 為填充因子， N_e 為電子數目。若填充因子為整數時，則最低的 n 個蘭道能階剛好全部填滿；如果填充因子不為整數，則有一個能階未被完全填滿。

在界面完整且雜質極少的情況下，若溫度夠低且磁場夠強，實驗上可以觀察到整數量子霍爾效應，即 σ_H 總是為 (e^2/h) 的整數倍。在解釋整數量子霍爾效應時，可以

忽略電子和電子間的交互作用。繼續增加磁場強度則會發現，填充因子在簡單分數(1/3, 1/5, 2/5, 1/7, 2/7, 3/7, ...)時也會觀測到量子霍爾效應，稱為分數量子霍爾效應。在解釋分數量子霍爾效應時，電子和電子間的交互作用扮演十分重要的角色，這是凝態物理中著名的強關聯電子系統。分數量子霍爾效應可以在砷化鎵(GaAs)和砷化鋁鎵(AlGaAs)的二維界面中觀測到。

1.2 量子自旋霍爾效應(Quantum Spin Hall Effect)

在量子自旋霍爾效應中，自旋向上和自旋向下對應到的能量數量級相同，因此就必須考慮「自旋—軌道耦合」(spin—orbit coupling)的量子效應。不同於量子霍爾效應，量子自旋霍爾效應不需要外加磁場使得不同運動方向及自旋的電子分隔，但是材料本身需要有夠強的自旋—軌道耦合效應，因此只有少部分材料能呈現量子自旋霍爾效應。

由於在材料邊緣允許不同的傳遞方向，電子可以在不同的傳遞方向上具有不同的自旋，所以會有四個傳遞通道。而在材料內部產生能隙此四個通道會分別侷限於材料的邊緣，且不同運動方向的電子必須具有相反的自旋，這種狀態稱之為邊緣態(edge state)或是表面態(surface state)，之後皆稱此狀態為邊緣態。具有這樣邊緣態的系統就會展現量子自旋霍爾效應，如圖 1.2.1[2]所示：

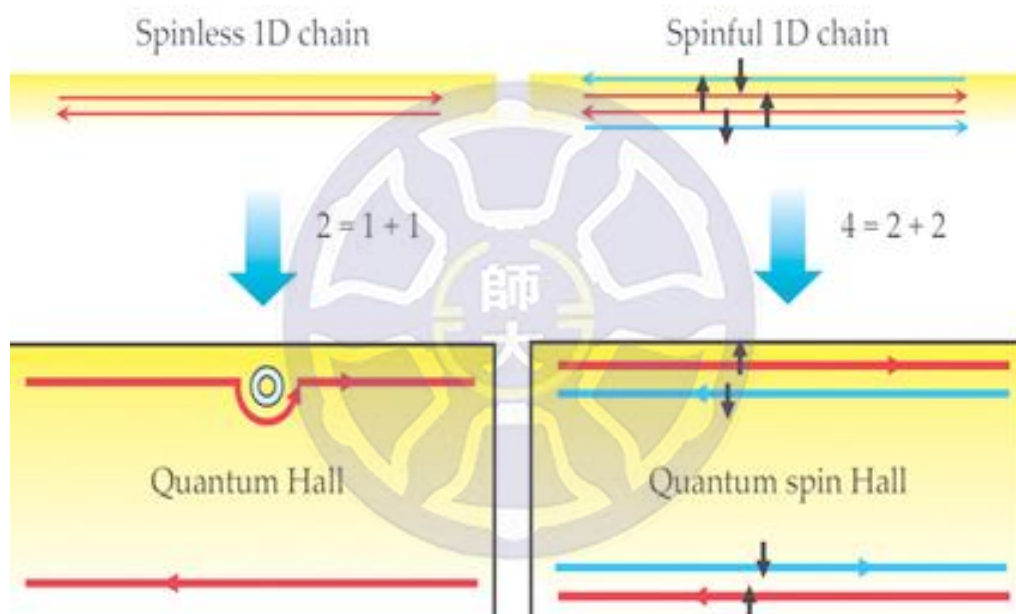


圖 1.2.1：圖 1.2.1 左為量子霍爾效應，電子會沿著此系統之邊緣分別以相反方向運動，當這些在表面傳遞的電子遇到雜質時，會繞過此雜質後繼續沿著原本之方向繼續運動；圖 1.2.1 右為量子自旋霍爾效應，四個通道會分別侷限於材料的邊緣，且不同運動方向的電子必須具有相反的自旋。

雖然量子自旋霍爾效應會使得材料邊緣同時存在兩個運動方向的電子，但是沿著原本特定方向運動的電子在遇到非磁性雜質時不會產生反方向的散射(backscattering)。原因是當系統中的電子遇到非磁性雜質時，會分別以順時針和逆時針方向環繞雜質，又因時間反演對稱的緣故，這兩個經過反方向散射的電子波函數恰好會形成破壞性干涉，這樣特性會使得電子在表面達到完美的傳遞。反之，雜質為磁性物質時，時間反演對稱會被破壞，因此被散射的電子波函數也就無法形成破壞性干涉。所以時間反演對稱是保證量子自旋霍爾效應不被破壞的主要因素。

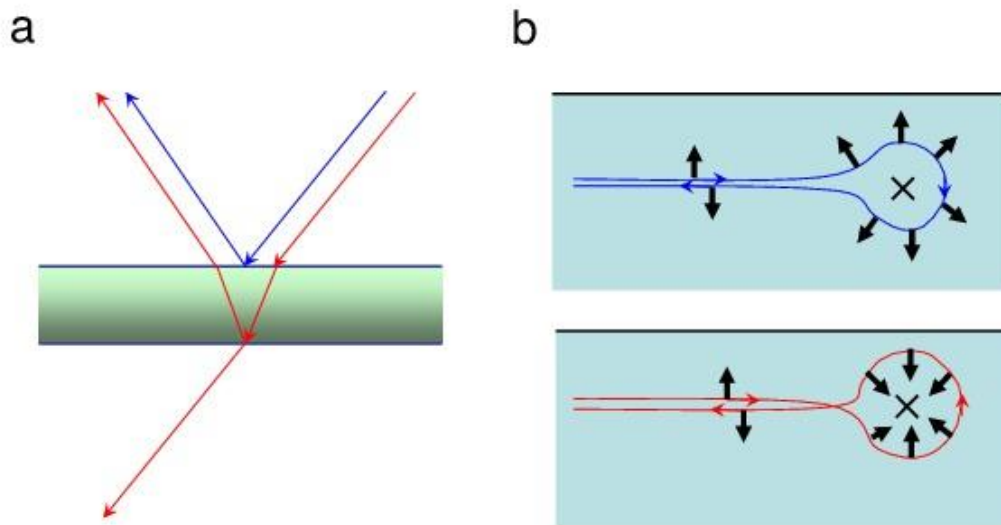


圖 1.2.2[2]：(a)在透鏡上的增透膜。光會被增透膜的上層(藍線)及底部(紅線)反射，可以調整增透膜的厚度使得經反射後的光恰形成破壞性干涉；(b)當電子在量子自旋霍爾邊緣態時被非磁性雜質散射會有兩種可能的路徑。當電子繞著順、逆時針轉時自旋皆會轉 180 度，這兩種路徑電子自旋的差恰為 360 度，而電子自旋差 360 度，則電子波函數會差一個負號，因此這兩種反射方式的電子波函數始終會相互抵消，即為破壞性干涉。

只要這些散射項不破壞時間反演，作為邊緣態出現的無質量狄拉克粒子就能保留下來，只是邊緣態的自旋和動量會耦合在一起，這樣的邊緣態被稱為 helical liquid。這樣的特性一般用 Z_2 拓樸量子數 (Z_2 topological quantum number) 來描述，因此量子自旋霍爾絕緣體 (quantum spin hall insulator) 也被稱為拓樸絕緣體 (topological insulator)。 Z_2 拓樸量子數可以簡單理解為邊界上的時間反演共軛對數目的奇偶性。當邊界上只存在一對時間反演共軛對時，非磁性雜質不會導致共軛對之間的耦合，所以這個無能隙的邊緣態會受到時間反演對稱的保護。當邊界上存在兩對時間反演共軛對時，反向散射就會在這兩對之間發生，這會使得電子獲得一個能隙，而系統就變成一般的絕緣體。因此奇數對和偶數對狄拉克粒子在物理性質上有所不同，即奇數對為拓樸絕緣體，而偶數對為一般絕緣體[3]。

1.3 拓樸絕緣體

拓樸絕緣體是一種同時具有導體和絕緣體物理特性的新穎材料，從電子能帶結構來看，拓樸絕緣體內部(bulk)的價帶和導電帶間有能隙，因此電子無法自由移動，故為絕緣體；而另一方面，拓樸絕緣體表面存在著連接導帶和價帶的邊緣態。由於這邊緣態，電子才能夠自由的傳遞，使得拓樸絕緣體具有導電性。圖 1.2 便是一般絕緣體和拓樸絕緣體之能帶結構：

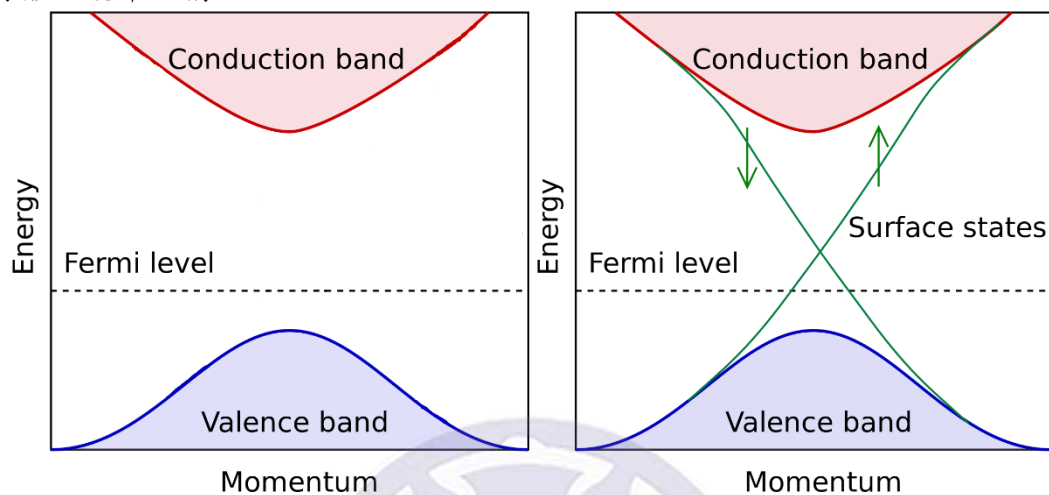


圖 1.3.1：圖 1.3.1 左為一般絕緣體之能帶結構；圖 1.3.1 右為拓樸絕體之能帶結構。

目前二維量子自旋霍爾效應已經被理論預測存在於 HgTe/CdTe 中，且已有實驗觀測的結果[2]。

第二章 拓樸絕緣體

2.1 兩介質之狄拉克方程式

在討論拓樸絕緣體之前，要先介紹狄拉克方程式(Dirac equation)

$$\hat{H}\Psi(\vec{r},t) = (\beta mc^2 - i\hbar c\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla})\Psi(\vec{r},t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{r},t), \quad (2.1)$$

其中 \hat{H} 是漢米頓算子， $\Psi(\vec{r},t)$ 是波函數。

上述 α_i 和 β 滿足以下性質：

$$\alpha_i^2 = \beta^2 = I_4, \{ \alpha_i, \alpha_j \} = 0, \{ \alpha_i, \beta \} = 0. \quad (2.2)$$

其中 I_4 為四維單位矩陣。

在此篇論文取 $\alpha_i = \sigma_i \otimes \sigma_i$ ， $\beta = \sigma_3 \otimes I_2$ ，其中 I_2 為二維單位矩陣而 σ_i 是包立矩陣 (Pauli matrix)

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

利用分離變數法，令

$$\Psi(\vec{r},t) = \psi(\vec{r})e^{-i\omega t}, \quad (2.4)$$

其中 ω 是能量。

在將上式代入(2.1)式整理即可得與時無關的狄拉克方程式(time-independent Dirac equation)

$$\hat{H}\psi(\vec{r}) = (\beta m - i\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla})\psi(\vec{r}) = \omega\psi(\vec{r}) \quad (2.5)$$

狄拉克方程式最簡單的解為平面波

令

$$\psi(\vec{r}) = Ae^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

其中 $\vec{k} = (k_1, k_2, k_3)$ 且 u_1, v_1 為 two-component spinor。

將上式代回狄拉克方程式中，得

$$\left(-m(\sigma_3 \otimes I_2) + k_i \alpha_i\right) \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} = \omega \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix}, \quad (2.7)$$

將上式化簡整理後，得

$$\begin{pmatrix} \omega + m & -\vec{\sigma} \cdot \vec{k} \\ -\vec{\sigma} \cdot \vec{k} & \omega - m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} = 0. \quad (2.8)$$

為了得出非平庸解，因此係數矩陣之行列式值必須為零，得

$$k^2 = \omega^2 - m^2. \quad (2.9)$$

由(2.8)式可以得出 u_1 和 v_1 之關係式

$$u_1 = \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{k}}{\omega + m} v_1. \quad (2.10)$$

接下來，我們考慮平面波在兩不同介質中傳遞之情況：當 $z < 0$ 時，粒子質量參數為 $-m$ ，當 $z > 0$ 時，此時粒子質量參數為 m ，即

$$\hat{H} = \beta m \text{sign}(z) + \vec{\alpha} \cdot \vec{p}, \quad (2.11)$$

其中

$$\text{sign}(z) = \begin{cases} 1, & z \geq 0; \\ -1, & z < 0. \end{cases} \quad (2.12)$$

在介質中傳遞的波函數分別為

$$\begin{aligned} \psi_{\text{I}}(\vec{r}) &= \psi_{\text{A}} + \psi_{\text{D}} = A e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} + D e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}} \begin{pmatrix} u_4 \\ v_4 \end{pmatrix}, & z < 0; \\ \psi_{\text{II}}(\vec{r}) &= \psi_{\text{B}} + \psi_{\text{C}} = B e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}} \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix} + C e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \begin{pmatrix} u_3 \\ v_3 \end{pmatrix}, & z \geq 0. \end{aligned} \quad (2.13)$$

其中 $\vec{k} = (k_1, k_2, k_3)$, $\vec{q} = (k_1, k_2, -k_3)$ 且 u_i, v_i 為 two-component spinor。

由(2.8)式可整理出 u_i 和 v_i 之關係式

$$u_1 = \frac{\bar{\sigma} \cdot \bar{k}}{\omega + m} v_1, u_2 = \frac{\bar{\sigma} \cdot \bar{q}}{\omega - m} v_2, u_3 = \frac{\bar{\sigma} \cdot \bar{k}}{\omega - m} v_3, u_4 = \frac{\bar{\sigma} \cdot \bar{q}}{\omega + m} v_4. \quad (2.14)$$

當 $z=0$ 時，則 $\psi_I(x, y, 0) = \psi_{II}(x, y, 0)$ ，即

$$A \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} + D \begin{pmatrix} u_4 \\ v_4 \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix} + C \begin{pmatrix} u_3 \\ v_3 \end{pmatrix}. \quad (2.15)$$

將上式分 u_i 和 v_i 整理，並將 u_i 和 v_i 之關係式代入消去 u_i

$$Av_1 + Dv_4 = Bv_2 + Cv_3; \quad (2.16)$$

$$A \frac{\bar{\sigma} \cdot \bar{k}}{\omega + m} v_1 + D \frac{\bar{\sigma} \cdot \bar{q}}{\omega + m} v_4 = B \frac{\bar{\sigma} \cdot \bar{q}}{\omega - m} v_2 + C \frac{\bar{\sigma} \cdot \bar{k}}{\omega - m} v_3. \quad (2.17)$$

由上兩式化簡整理得

$$Cv_3 = \frac{(\omega - m)k_3 A \begin{pmatrix} \omega k_3 & -mk_- \\ mk_+ & \omega k_3 \end{pmatrix} v_1 + mB \begin{pmatrix} mk_{\perp}^2 - \omega k_3^2 & -(\omega + m)k_3 k_- \\ (\omega + m)k_3 k_+ & mk_{\perp}^2 - \omega k_3^2 \end{pmatrix} v_2}{k^2(m^2 + k_3^2)}. \quad (2.18)$$

將上式代回(2.16)式，解出

$$\begin{aligned} & Dv_4 \\ &= \frac{1}{k^2(m^2 + k_3^2)} \begin{pmatrix} (-m\omega)k_3^2 - m^2k_{\perp}^2 & -m(\omega - m)k_3 k_- \\ m(\omega - m)k_3 k_+ & (-m\omega)k_3^2 - m^2k_{\perp}^2 \end{pmatrix} Av_1 \\ &+ \frac{1}{k^2(m^2 + k_3^2)} \begin{pmatrix} -m(\omega + m)k_3^2 + (2m^2 + k_3^2)k^2 & -m(\omega + m)k_3 k_- \\ m(\omega + m)k_3 k_+ & -m(\omega + m)k_3^2 + (2m^2 + k_3^2)k^2 \end{pmatrix} Bv_2, \end{aligned} \quad (2.19)$$

其中 $k_{\pm} = k_1 \pm ik_2, k_{\perp}^2 = k_1^2 + k_2^2$.

若是考慮在一介面的束縛態

$$\begin{aligned}\psi_{\text{I}}(\vec{r}) &= \psi_{\text{A}} = A e^{i\vec{k}' \cdot \vec{r}} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix}, z < 0; \\ \psi_{\text{II}}(\vec{r}) &= \psi_{\text{B}} = B e^{i\vec{q}' \cdot \vec{r}} \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix}, z \geq 0.\end{aligned}\tag{2.20}$$

其中 $\vec{k}' = (k_1, k_2, -i\kappa)$, $\vec{q}' = (k_1, k_2, i\kappa)$, $\kappa > 0$.

由(2.9)式可同理得出

$$k'^2 = q'^2 = \omega^2 - m^2.\tag{2.21}$$

同樣可以得出 u_i 和 v_i 之關係式

$$u_1 = \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{k}'}{\omega + m} v_1, u_2 = \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{q}'}{\omega - m} v_2.\tag{2.22}$$

在 $z = 0$ 時，則 $\psi_{\text{I}}(x, y, 0) = \psi_{\text{II}}(x, y, 0)$ ，即

$$A v_1 = B v_2;\tag{2.23}$$

$$A \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{k}'}{\omega + m} v_1 = B \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{q}'}{\omega - m} v_2.\tag{2.24}$$

由上兩式化簡，得

$$A \left(\frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{k}'}{\omega + m} - \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{q}'}{\omega - m} \right) v_1 = 0.\tag{2.25}$$

為使 v_1 不為平庸解，故取矩陣行列式值為零，化簡解出

$$\kappa = m \text{ 或 } k_{\perp}.\tag{2.26}$$

將上式代入(2.21)式，解出

$$\omega = \pm k_{\perp} \text{ 或 } \pm m.\tag{2.27}$$

1. 當 $\kappa = m$ 時：

將 $\kappa = m$ 代入波向量(wave vector)，

$$\vec{k}' = (k_1, k_2, -im), \vec{q}' = (k_1, k_2, im).\tag{2.28}$$

(i) 當 $\kappa = m$ 且 $\omega = k_{\perp}$ 時，則(2.36)式可改寫成

$$u_1 = \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{k}'}{k_{\perp} + m} v_1, u_2 = \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{q}'}{k_{\perp} - m} v_2, \quad (2.29)$$

(ii) 當 $\kappa = m$ 且 $\omega = -k_{\perp}$ 時，則(2.36)式可改寫成

$$u_1 = -\frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{k}'}{k_{\perp} - m} v_1, u_2 = -\frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{q}'}{k_{\perp} + m} v_2, \quad (2.30)$$

這裡的 v_1, v_2 為任意二維旋量。

2. 當 $\kappa = k_{\perp}$ 時：

將 $\kappa = k_{\perp}$ 代入波向量，

$$\vec{k}' = (k_1, k_2, -ik_{\perp}), \vec{q}' = (k_1, k_2, ik_{\perp}). \quad (2.31)$$

(i) 當 $\kappa = k_{\perp}$ 且 $\omega = m$ 時，則(2.22)式可改寫成

$$\begin{cases} u_1 = \frac{1}{2m} \frac{1}{\sqrt{2k_{\perp}}} \frac{B}{A} \begin{pmatrix} 2k_{\perp}^2 \\ 2ik_{\perp}k_{+} \end{pmatrix}; \\ u_2 = \frac{1}{2m} \frac{1}{\sqrt{2k_{\perp}}} \begin{pmatrix} 2k_{\perp}^2 \\ 2ik_{\perp}k_{+} \end{pmatrix}; \\ v_1 = \frac{1}{\sqrt{2k_{\perp}}} \frac{B}{A} \begin{pmatrix} ik_{\perp} \\ k_{+} \end{pmatrix}; \\ v_2 = \frac{1}{\sqrt{2k_{\perp}}} \begin{pmatrix} ik_{\perp} \\ k_{+} \end{pmatrix}. \end{cases} \quad (2.32)$$

(ii) 當 $\kappa = k_{\perp}$ 且 $\omega = -m$ 時，則(2.22)式可改寫成

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1 = -\frac{1}{2m} \frac{1}{\sqrt{2}k_{\perp}} \begin{pmatrix} 2ik_{\perp}k_{-} \\ 2k_{\perp}^2 \end{pmatrix}; \\ u_2 = -\frac{1}{2m} \frac{1}{\sqrt{2}k_{\perp}} \frac{A}{B} \begin{pmatrix} 2ik_{\perp}k_{-} \\ 2k_{\perp}^2 \end{pmatrix}; \\ v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}k_{\perp}} \begin{pmatrix} k_{-} \\ ik_{\perp} \end{pmatrix}; \\ v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}k_{\perp}} \frac{A}{B} \begin{pmatrix} k_{-} \\ ik_{\perp} \end{pmatrix}. \end{array} \right. \quad (2.33)$$

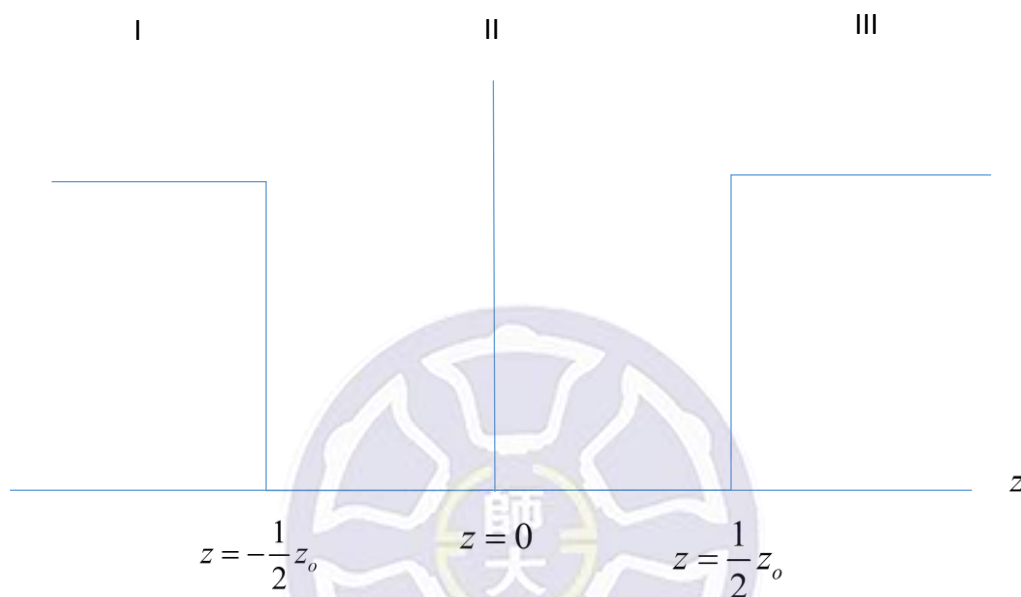
3. 小結：

$\kappa = m$ 且 $\omega = \pm k_{\perp}$ 是此系統的 zero mode，它被束縛在系統的介面上。



2.2 三介質之狄拉克方程式

考慮在一物理圖像如下，考慮平面波在三不同介質中傳遞之物理圖像，當 $z < -\frac{z_o}{2}$ 時，此時介質為 m ，當 $-\frac{z_o}{2} < z < \frac{z_o}{2}$ 時，此時介質為 $-m$ ，當 $z > \frac{z_o}{2}$ 時，此時介質為 m 。



此物理圖像和方形位能阱(square-well potential)相似，可分別討論中間介質波函數 $\psi_{II}(\vec{r})$ 的 z 部分為奇函數和偶函數。

I. 當中間介質波函數 $\psi_{II}(\vec{r})$ 的 z 部分為偶函數時：

$$\begin{aligned} \psi_I(\vec{r}) &= Ae^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix}, z < -\frac{z_o}{2}; \\ \psi_{II}(\vec{r}) &= Be^{i(k_1x+k_2y)} \cosh(\kappa z) \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix}, -\frac{z_o}{2} \leq z \leq \frac{z_o}{2}; \\ \psi_{III}(\vec{r}) &= Ae^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix}, z > \frac{z_o}{2}, \end{aligned} \quad (2.34)$$

在 $z = -\frac{z_0}{2}$ 時，則 $\psi_I\left(x, y, -\frac{z_0}{2}\right) = \psi_{II}\left(x, y, -\frac{z_0}{2}\right)$ ，即

$$Ae^{-\frac{\kappa z_0}{2}} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} = B \cosh\left(\frac{\kappa z_0}{2}\right) \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix}. \quad (2.35)$$

同樣可以得出 u_i 和 v_i 之關係式

$$u_1 = \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{k}'}{\omega - m} v_1, u_2 = \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{k}'}{\omega + m} v_2. \quad (2.36)$$

將 u_i 和 v_i 之關係式代入(2.35)式消去 u_i ，得

$$Ae^{-\frac{\kappa z_0}{2}} v_1 = B \cosh\left(\frac{\kappa z_0}{2}\right) v_2; \quad (2.37)$$

$$Ae^{-\frac{\kappa z_0}{2}} \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{k}'}{\omega - m} v_1 = B \cosh\left(\frac{\kappa z_0}{2}\right) \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{k}'}{\omega + m} v_2. \quad (2.38)$$

將上兩式化簡整理

$$\left(\frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{k}'}{\omega - m} - \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{k}'}{\omega + m} \right) v_1 = 0, \quad (2.39)$$

為了得出非平庸解，因此係數矩陣之行列式值必須為零，化簡解出

$$\kappa = k_{\perp}. \quad (2.40)$$

將上式代入(2.21)式，解出

$$\omega = \pm m. \quad (2.41)$$

1. 當 $\kappa = k_{\perp}$ 時：

將 $\kappa = k_{\perp}$ 代入波向量，

$$\vec{k}' = (k_1, k_2, -ik_{\perp}). \quad (2.42)$$

(i) 當 $\kappa = k_{\perp}$ 且 $\omega = m$ 時，則(2.36)式可改寫成

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \\ u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \\ v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}k_{\perp}} \begin{pmatrix} -ik_{\perp} \\ k_{+} \end{pmatrix}; \\ v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}k_{\perp}} \frac{2A}{B} \frac{1}{1+e^{\kappa z_0}} \begin{pmatrix} -ik_{\perp} \\ k_{+} \end{pmatrix}. \end{array} \right. \quad (2.43)$$

由上式和(2.37)式可得出 v_1 和 v_2 間的關係

$$v_2 = 2 \frac{A}{B} \frac{1}{1+e^{\kappa z_0}} v_1 \quad (2.44)$$

(ii) 當 $\kappa = k_{\perp}$ 且 $\omega = -m$ 時，則(2.36)式可改寫成

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \\ u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \\ v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}k_{\perp}} \frac{B}{2A} (1+e^{\kappa z_0}) \begin{pmatrix} -ik_{\perp} \\ k_{+} \end{pmatrix}; \\ v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}k_{\perp}} \begin{pmatrix} -ik_{\perp} \\ k_{+} \end{pmatrix}. \end{array} \right. \quad (2.45)$$

由上式和(2.37)式可得出 v_1 和 v_2 間的關係

$$v_2 = 2 \frac{A}{B} \frac{1}{1+e^{\kappa z_0}} v_1 \quad (2.46)$$

II. 當中間介質波函數 $\psi_{\text{II}}(\vec{r})$ 的 z 部分為奇函數時：

$$\begin{aligned}
\psi_{\text{I}}(\bar{r}) &= Ae^{i\bar{k}'\cdot\bar{r}} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix}, z < -\frac{z_o}{2}; \\
\psi_{\text{II}}(\bar{r}) &= Be^{i(k_1x+k_2y)} \sinh(\kappa z) \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix}, -\frac{z_o}{2} \leq z \leq \frac{z_o}{2}; \\
\psi_{\text{III}}(\bar{r}) &= -Ae^{i\bar{q}'\cdot\bar{r}} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix}, z > \frac{z_o}{2},
\end{aligned} \tag{2.47}$$

在 $z = -\frac{z_o}{2}$ 時，則 $\psi_{\text{I}}\left(x, y, -\frac{z_o}{2}\right) = \psi_{\text{II}}\left(x, y, -\frac{z_o}{2}\right)$ ，即

$$Ae^{-\frac{\kappa z_o}{2}} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} = -B \sinh\left(\frac{\kappa z_o}{2}\right) \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix}. \tag{2.48}$$

將 u_i 和 v_i 之關係式代入(2.48)式消去 u_i ，得

$$Ae^{-\frac{\kappa z_o}{2}} v_1 = -B \sinh\left(\frac{\kappa z_o}{2}\right) v_2; \tag{2.49}$$

$$Ae^{-\frac{\kappa z_o}{2}} \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{k}'}{\omega - m} v_1 = -B \sinh\left(\frac{\kappa z_o}{2}\right) \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{k}'}{\omega + m} v_2. \tag{2.50}$$

將上兩式化簡整理

$$\left(\frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{k}'}{\omega - m} - \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{k}'}{\omega + m} \right) v_1 = 0, \tag{2.51}$$

為了得出非平庸解，因此係數矩陣之行列式值必為零，化簡解出

$$\kappa = k_{\perp}. \tag{2.52}$$

將上式代入(2.9)式，解出

$$\omega = \pm m. \tag{2.53}$$

1. 當 $\kappa = k_{\perp}$ 時：

將 $\kappa = k_{\perp}$ 代入波向量，

$$\vec{k}' = (k_1, k_2, -ik_{\perp}), \vec{q}' = (k_1, k_2, ik_{\perp}). \tag{2.54}$$

(i) 當 $\kappa = k_{\perp}$ 且 $\omega = m$ 時，則(2.36)式改寫成

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \\ u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \\ v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}k_{\perp}} \begin{pmatrix} -ik_{\perp} \\ k_{+} \end{pmatrix}; \\ v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}k_{\perp}} \frac{2A}{B} \frac{1}{e^{\kappa z_0} - 1} \begin{pmatrix} -ik_{\perp} \\ k_{+} \end{pmatrix}. \end{array} \right. \quad (2.55)$$

由上式和(2.49)式可得出 v_1 和 v_2 間的關係

$$v_2 = 2 \frac{A}{B} \frac{1}{e^{\kappa z_0} - 1} v_1 \quad (2.56)$$

(ii) 當 $\kappa = k_{\perp}$ 且 $\omega = -m$ 時，則(2.36)式改寫成

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \\ u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \\ v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}k_{\perp}} \begin{pmatrix} -ik_{\perp} \\ k_{+} \end{pmatrix}; \\ v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}k_{\perp}} \frac{B}{2A} (e^{\kappa z_0} - 1) \begin{pmatrix} -ik_{\perp} \\ k_{+} \end{pmatrix}. \end{array} \right. \quad (2.57)$$

由上式和(2.49)式可得出 v_1 和 v_2 間的關係

$$v_2 = 2 \frac{A}{B} \frac{1}{e^{\kappa z_0} - 1} v_1 \quad (2.58)$$

III. 小結：

我們所考慮的三個不同介質的系統沒有 zero mode。

第三章 Kitaev 模型

3.1 Tight-binding 模型

在自然單位(natural units)下的薛丁格方程式(Schrödinger equation)為

$$\hat{H}\Psi(\vec{r},t)=\left(-\frac{1}{2m}\nabla^2+U(\vec{r})\right)\Psi(\vec{r},t)=i\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\vec{r},t), \quad (3.1)$$

其中 \hat{H} 是漢米頓算子， $\Psi(\vec{r},t)$ 是波函數。

利用分離變數法，令

$$\Psi(\vec{r},t)=\psi(\vec{r})e^{-i\Omega t}, \quad (3.2)$$

其中 Ω 是能量。

將上式代入(3.1)式整理即可得與時無關的薛丁格方程式(time-independent Schrödinger equation)

$$\hat{H}\psi(\vec{r})=\left(-\frac{1}{2m}\nabla^2+U(\vec{r})\right)\psi(\vec{r})=\Omega\psi(\vec{r}). \quad (3.3)$$

而 Tight-Binding 模型是考慮鄰近電子的波函數的疊加的效應去處理許多凝態物理(condensed matter physics)中的問題，而其漢米頓算子為

$$\hat{H}=\sum_{n=1}^{N-1}w(C_{n+1}^\dagger C_n+C_n^\dagger C_{n+1}), \quad (3.4)$$

其中 w 為 hopping term 的係數且為實數。

利用變分法得出薛丁格方程式

$$i\dot{C}_n-w(C_{n+1}+C_{n-1})=0 \quad (3.5)$$

令

$$C_n=c_n e^{-i\Omega t} \quad (3.6)$$

其中 Ω 為能量。

將上式代入(3.5)式化簡得

$$wc_{n-1} - \Omega c_n + wc_{n+1} = 0. \quad (3.7)$$

其中 n 滿足 $2 \leq n \leq N-1$ 。

由此關係可以得出系統的運動方程組為

$$\begin{aligned} wc_1 - \Omega c_2 + wc_3 &= 0; \\ wc_2 - \Omega c_3 + wc_4 &= 0; \\ &\vdots \\ wc_{N-2} - \Omega c_{N-1} + wc_N &= 0. \end{aligned} \quad (3.8)$$

兩端點之運動方程式如下：

$$-\Omega c_1 + wc_2 = 0; \quad (3.9)$$

$$wc_{N-1} - \Omega c_N = 0. \quad (3.10)$$

可將其視為邊界條件(boundary condition)。

令

$$c_n = c_o s^n, \quad (3.11)$$

將上式代入(3.7)式，可得

$$w - \Omega s + ws^2 = 0. \quad (3.12)$$

由上式和根與係數之關係可得出

$$s_+ + s_- = \frac{\Omega}{w}; \quad (3.13)$$

$$s_+ s_- = 1. \quad (3.14)$$

上式有兩個根分別對應到不同特性，解的通式為此兩種特性的線性組合，因此(3.11)式可改寫成

$$c_n = c_+ s_+^n + c_- s_-^n. \quad (3.15)$$

將上式代入邊界條件(3.9)式和(3.10)式，並利用(3.7)式將其化簡為

$$c_0 = 0; \quad (3.16)$$

$$c_{N+1} = 0. \quad (3.17)$$

將(3.15)式代入上兩式得

$$c_0 = c_+ + c_- = 0; \quad (3.18)$$

$$c_{N+1} = c_+ s_+^{N+1} + c_- s_-^{N+1} = 0. \quad (3.19)$$

將(3.18)式代入(3.19)式

$$s_+^{N+1} - s_-^{N+1} = 0 \quad (3.20)$$

將上式移項並利用(3.14)式整理後

$$s_+^{2(N+1)} = 1. \quad (3.21)$$

由上式解出 s_+ 且由(3.14)式得出 s_-

$$s_{\pm} = e^{\pm ik_m}. \quad (3.22)$$

其中 $k_m = \frac{m\pi}{N+1}$ 。

將上式代入(3.13)式，得出

$$\Omega = 2w \cos(k_m). \quad (3.23)$$

其中 m 為

$$\{m | m \in \mathbb{Z}, 1 \leq m \leq N\} \quad (3.24)$$

將(3.22)式代入(3.15)式，得出

$$c_n = 2ic_+ \sin(nk_m). \quad (3.25)$$

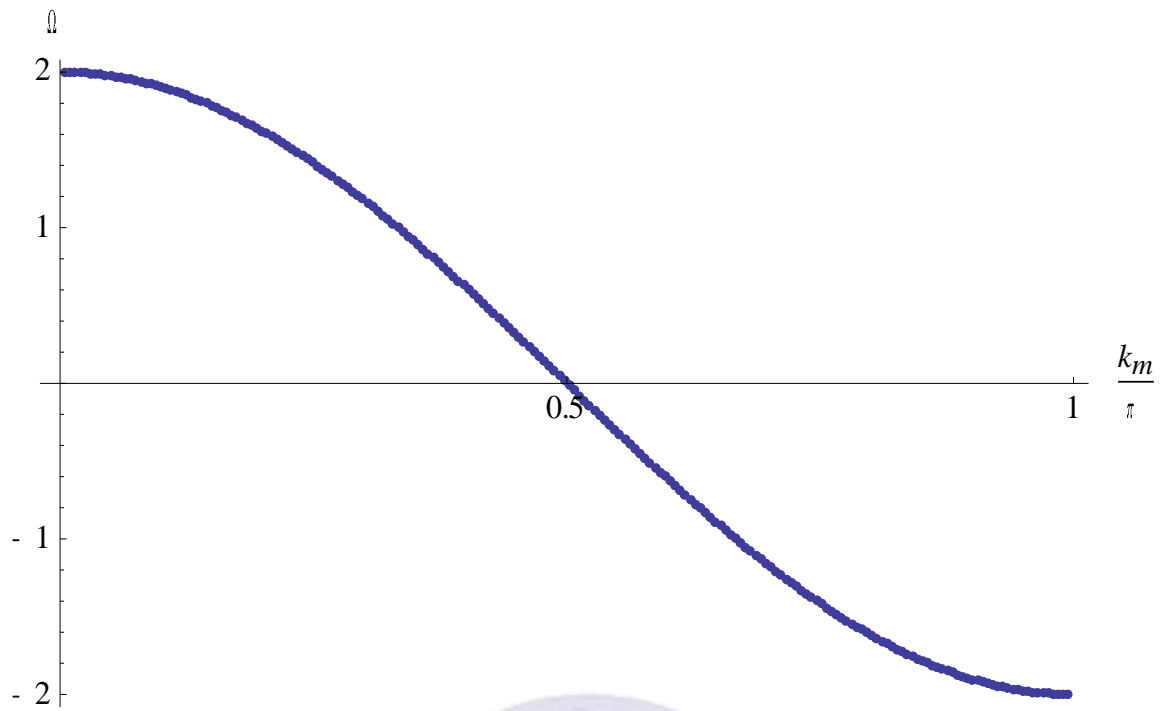
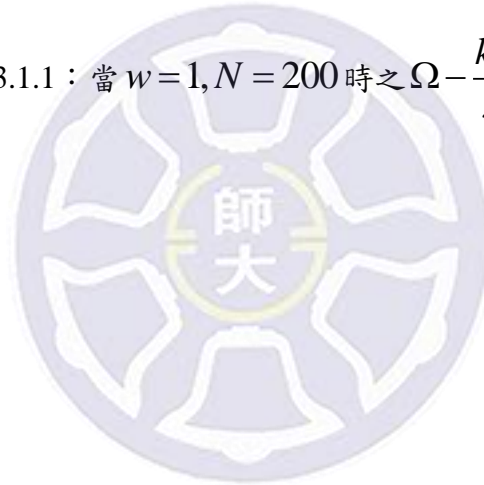


圖 3.1.1 : 當 $w=1, N=200$ 時之 $\Omega - \frac{k_m}{\pi}$ 圖



3.2 SSH 模型

考慮一漢米頓算子 \hat{H} 為

$$\hat{H} = \sum_{n=1,3,5,\dots} w_1 (C_{n+1}^\dagger C_n + C_n^\dagger C_{n+1}) + \sum_{n=2,4,6,\dots} w_2 (C_{n+1}^\dagger C_n + C_n^\dagger C_{n+1}), \quad (3.26)$$

其中 w_1 、 w_2 為 hopping term 的係數且為實數。

利用變分法分別得出奇數行和偶數行的薛丁格方程式

$$i\dot{C}_n - w_2 C_{n-1} - w_1 C_{n+1} = 0, \quad (3.27)$$

$$i\dot{C}_n - w_1 C_{n-1} - w_2 C_{n+1} = 0. \quad (3.28)$$

令

$$C_n = c_n e^{-i\Omega t} \quad (3.29)$$

其中 Ω 為能量。

將上式代入(3.27)和(3.28)式化簡得

$$w_2 c_{n-1} - \Omega c_n + w_1 c_{n+1} = 0; \quad (3.30)$$

其中 n 滿足 $\{n | 2 \leq n \leq N-1, n \in \text{odd}\}$ 。

$$w_1 c_{n-1} - \Omega c_n + w_2 c_{n+1} = 0. \quad (3.31)$$

其中 n 滿足 $\{n | 2 \leq n \leq N-1, n \in \text{even}\}$ 。

由此關係可以得出系統的運動方程組為

$$\begin{aligned} w_1 c_1 - \Omega c_2 + w_2 c_3 &= 0; \\ w_2 c_2 - \Omega c_3 + w_1 c_4 &= 0; \\ &\vdots \\ w_1 c_{N-2} - \Omega c_{N-1} + w_2 c_N &= 0. \quad (N \in \text{odd}) \\ w_2 c_{N-2} - \Omega c_{N-1} + w_1 c_N &= 0. \quad (N \in \text{even}) \end{aligned} \quad (3.32)$$

兩端點的運動方程式如下：

$$-\Omega c_1 + w_1 c_2 = 0; \quad (3.33)$$

$$w_2 c_{N-1} - \Omega c_N = 0. \quad (N \in \text{odd}) \quad (3.34)$$

$$w_1 c_{N-1} - \Omega c_N = 0. \quad (N \in \text{even})$$

可將其視為邊界條件。

令

$$c_n = \begin{cases} a_j = a_0 s^j, j = 2n-1 \\ b_j = b_0 s^j, j = 2n \end{cases}, \quad (3.35)$$

將(3.35)式代入(3.30)式和(3.31)式，可得下列關係式

$$w_2 b_{j-1} - \Omega a_j + w_1 b_j = 0; \quad (3.36)$$

$$w_1 a_j - \Omega b_j + w_2 a_{j+1} = 0. \quad (3.37)$$

由上式可得

$$b_j = \frac{1}{\Omega} (w_1 a_j + w_2 a_{j+1}). \quad (3.38)$$

將上式代入(3.36)式中並整理化簡可得

$$w_1 w_2 + (w_1^2 + w_2^2 - \Omega^2) s + w_1 w_2 s^2 = 0. \quad (3.39)$$

利用根與係數之關係可得出

$$s_+ + s_- = \frac{-(w_1^2 + w_2^2 - \Omega^2)}{w_1 w_2}; \quad (3.40)$$

$$s_+ s_- = 1. \quad (3.41)$$

上式有兩個根分別對應到不同特性解，解的通式為此兩種特性解的線性組合，因此(3.35)式可以改寫成

$$c_n = \begin{cases} a_j = a_+ s_+^j + a_- s_-^j, j = 2n-1 \\ b_j = b_+ s_+^j + b_- s_-^j, j = 2n \end{cases}, \quad (3.42)$$

將(3.40)和(3.41)式化簡整理得

$$\Omega^2 = w_1^2 + w_2^2 + 2w_1 w_2 (s + s^{-1}). \quad (3.43)$$

接著分別討論 N 為奇數和偶數的情況：

I. 當 N 為奇數時的情況時，邊界條件為

$$-\Omega c_1 + w_1 c_2 = 0; \quad (3.44)$$

$$w_2 c_{N-1} - \Omega c_N = 0. \quad (3.45)$$

利用(3.30)式可將上兩式簡化為

$$c_0 = 0; \quad (3.46)$$

$$c_{N+1} = 0. \quad (3.47)$$

將(3.42)式代入上兩式

$$b_0 = b_+ + b_- = 0; \quad (3.48)$$

$$b_{\frac{N+1}{2}} = b_+ s_+^{\frac{N+1}{2}} + b_- s_-^{\frac{N+1}{2}} = 0. \quad (3.49)$$

將(3.48)式代入(3.49)式

$$s_+^{\frac{N+1}{2}} - s_-^{\frac{N+1}{2}} = 0. \quad (3.50)$$

由(3.41)式及(3.50)式解出 s_+ 及 s_-

$$s_{\pm} = e^{\pm i k_m}. \quad (3.51)$$

其中 $k_m = \frac{2m\pi}{N+1}$ 。

將上式代入(3.43)式

$$\Omega^2 = w_1^2 + w_2^2 + 2w_1w_2 \cos(k_m). \quad (3.52)$$

1. 當 Ω 不為零的情況：

將(3.51)式代入(3.42)中的第二式，可得

$$b_j = b_+ s_+^j + b_- s_-^j = 2i b_+ \sin(jk_m). \quad (3.53)$$

將上式代入(3.36)式，可得

$$a_j = a_+ s_+^j + a_- s_-^j = \frac{2i b_+}{\Omega} \{w_1 \sin[jk_m] + w_2 \sin[(j-1)k_m]\}. \quad (3.54)$$

當 Ω 不為零時，則此時 m 的條件為

$$\left\{ m \mid m \in \mathbb{Z}, 1 \leq m \leq N, m \neq \frac{N+1}{2} \right\}, \quad (3.55)$$

若 $m = \frac{N+1}{2}$ ，則 $a_j = b_j = 0$ 。

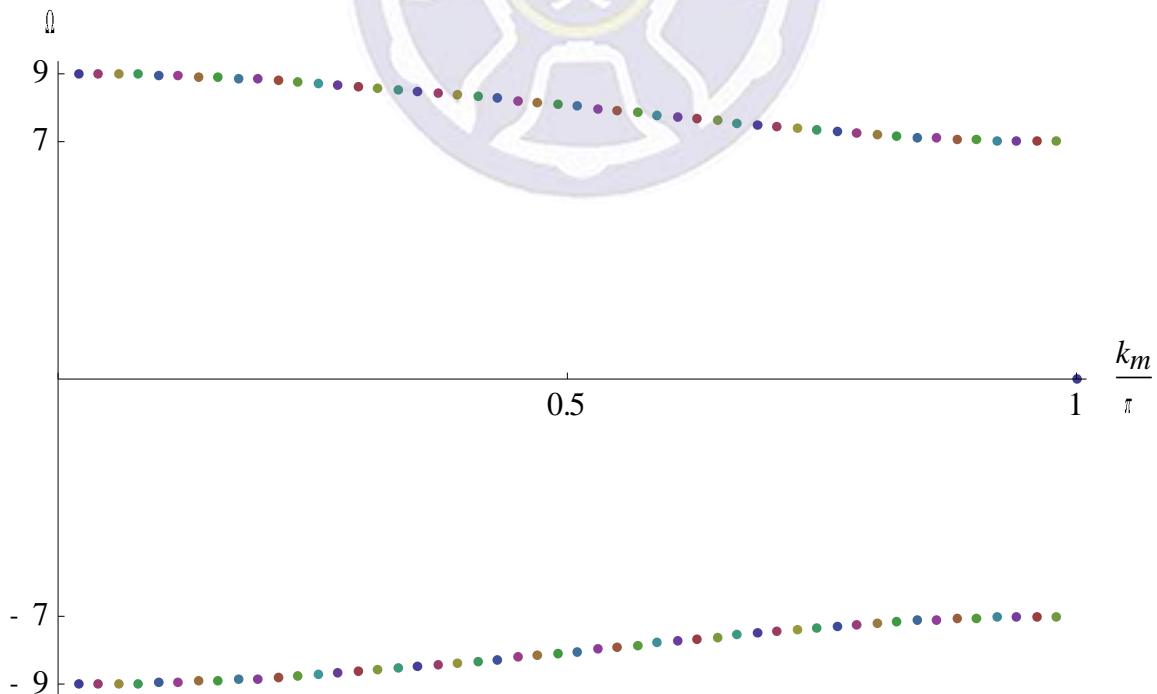


圖 3.2.1：當 $w_1 = 1, w_2 = 8, N = 101$ 時之 $\Omega - \frac{k_m}{\pi}$ 圖

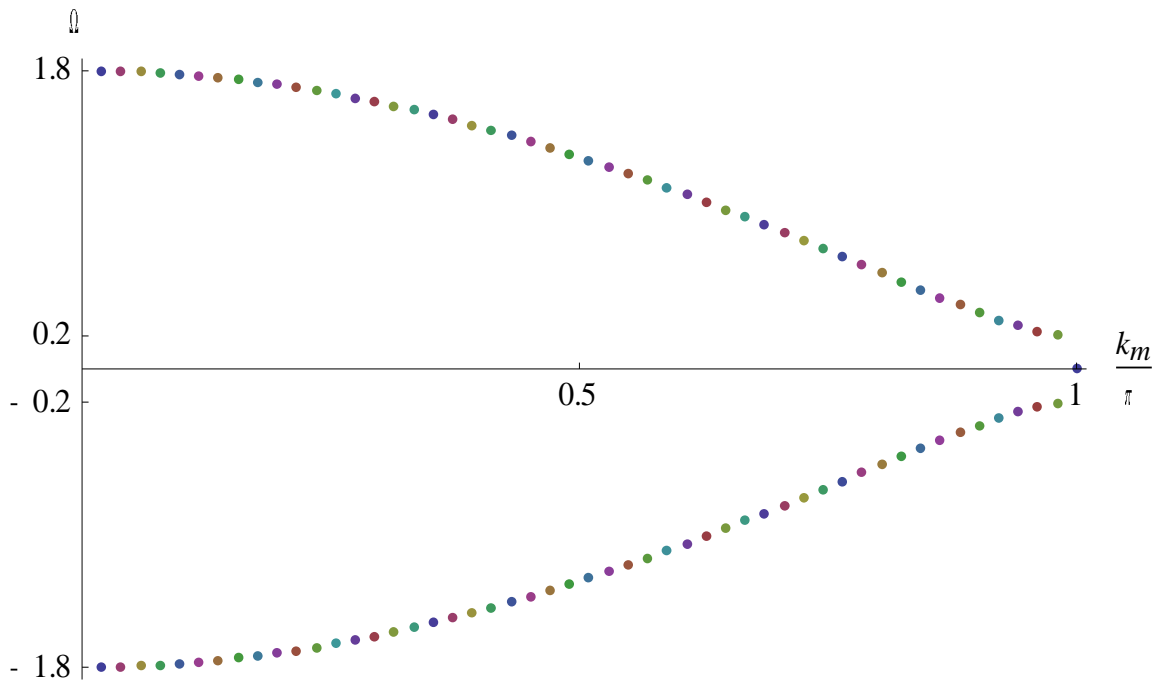


圖 3.2.2 : 當 $w_1 = 1, w_2 = 0.8, N = 101$ 時之 $\Omega - \frac{k_m}{\pi}$ 圖

2. 當 Ω 為零的情況：

當 Ω 為零時，則(3.32)式將會化簡為

$$\begin{aligned}
 w_2 c_2 &= 0; \\
 w_1 c_1 + w_2 c_3 &= 0; \\
 w_2 c_2 + w_1 c_4 &= 0; \\
 &\vdots \\
 w_2 c_{N-1} &= 0.
 \end{aligned} \tag{3.56}$$

將(3.35)式代入邊界條件(3.46)和(3.47)兩式，得

$$\mathbf{c}_n = \begin{cases} a_j = a_0 s^j, j = 2n-1 \\ b_j = 0, j = 2n \end{cases}, \tag{3.57}$$

將上式代入(3.56)式並化簡整理得

$$w_1 + w_2 s = 0. \tag{3.58}$$

再將上式中的 s 解出

$$s = -\frac{w_1}{w_2}. \quad (3.59)$$

將上式代回(3.57)式，得

$$\mathbf{c}_n = \begin{cases} a_j = a_0 \left(-\frac{w_1}{w_2} \right)^j \\ b_j = 0, j = 2n \end{cases}. \quad (3.60)$$

由上式可得出下列遞迴關係式

$$a_{j+1} = a_0 s^{j+1} = \left(-\frac{w_1}{w_2} \right) a_j. \quad (3.61)$$

在 Ω 為零的情況下，當 $w_1 > w_2$ 時，波函數會侷限於左邊的邊界；當 $w_2 > w_1$ 時，波函數會侷限於右邊的邊界。

II. 當 N 為偶數時，邊界條件為

$$-\Omega c_1 + w_1 c_2 = 0; \quad (3.62)$$

$$w_1 c_{N-1} - \Omega c_N = 0. \quad (3.63)$$

利用(3.30)和(3.31)兩式可將上兩式改寫成

$$c_0 = 0; \quad (3.64)$$

$$c_{N+1} = 0. \quad (3.65)$$

將(3.42)式代入上兩式，得

$$b_0 = b_+ + b_- = 0; \quad (3.66)$$

$$a_{\frac{N+2}{2}} = a_+ s_+^{\frac{N+2}{2}} + a_- s_-^{\frac{N+2}{2}} = 0. \quad (3.67)$$

由(3.42)、(3.36)和(3.37)三式可得出 $a_+ b_+$ 和 $a_- b_-$ 之間關係式

$$a_+ = \frac{1}{\Omega} (w_1 + w_2 s_+^{-1}) b_+; \quad (3.68)$$

$$a_- = \frac{1}{\Omega} (w_1 + w_2 s_-^{-1}) b_-. \quad (3.69)$$

將上兩式和(3.66)式代入(3.67)式得

$$a_{\frac{N+2}{2}} = \frac{1}{\Omega} (w_1 + w_2 s_+^{-1}) b_+ s_+^{\frac{N+2}{2}} - \frac{1}{\Omega} (w_1 + w_2 s_-^{-1}) b_- s_-^{\frac{N+2}{2}} = 0. \quad (3.70)$$

利用(3.41)式將上式化簡

$$1 + \frac{w_2}{w_1} s - \frac{w_2}{w_1} s^{N+1} - s^{N+2} = 0. \quad (3.71)$$

由上式得知，當固定 N 時，方程式有兩種情況，其一為 $w_1 > w_2$ ，另一為 $w_2 > w_1$ ，以

下取 N 為 20，並以 $w_1 = 1, w_2 = 0.8$ 作為 $w_1 > w_2$ 情況之代表； $w_1 = 1, w_2 = 9$ 作為

$w_2 > w_1$ 情況之代表。

1. 當 $N = 20$ 且 $w_1 > w_2$ 時的情況：

取 $w_1 = 1, w_2 = 0.8$ 代入上式，得

$$1 + 0.8s - 0.8s^{21} - s^{22} = 0. \quad (3.72)$$

利用 Mathematica 9 解出(3.72)式中的 s ，並代入(3.43)式和(3.42)式解出 Ω 、 b_j 、 a_j ，並

作 $\Omega - \frac{\text{Arg}(s)}{\pi}$ 圖。

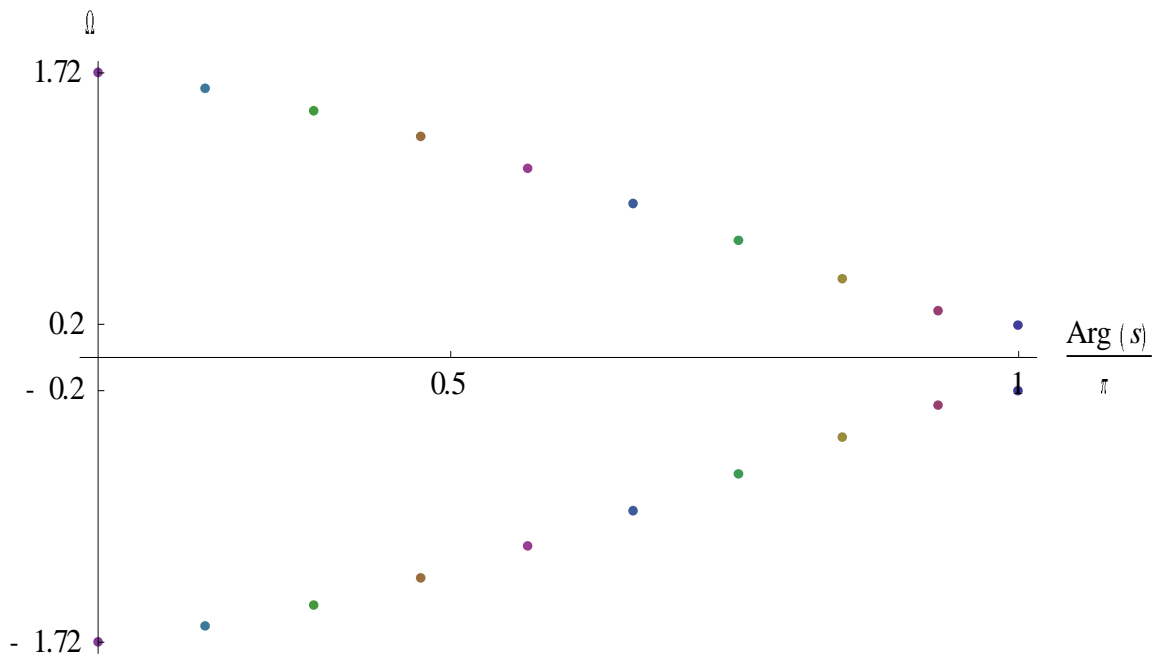


圖 3.2.3 : 當 $w_1 > w_2$ 時之 $\Omega - \frac{\text{Arg}(s)}{\pi}$ 圖

2. 當 $N = 20$ 且 $w_2 > w_1$ 時的情況：

取 $w_1 = 1, w_2 = 9$ 代入(3.71)式得

$$1 + 9s - 9s^{21} - s^{22} = 0. \quad (3.73)$$

同理作出 $\Omega - \frac{\text{Arg}(s)}{\pi}$ 圖。

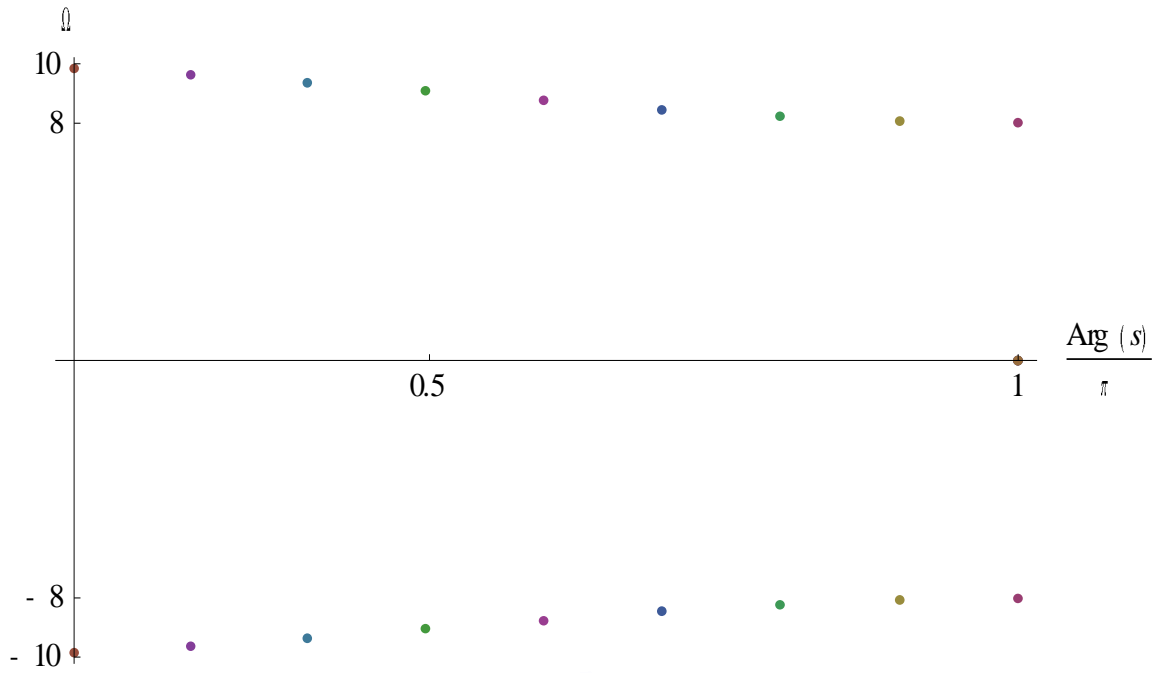


圖 3.2.4：當 $w_2 > w_1$ 時之 $\Omega - \frac{\text{Arg}(s)}{\pi}$ 圖

當 $s = -\frac{1}{9}$ 和 -9 時，會得出 $\frac{\text{Arg}(s)}{\pi} = 1, \Omega = 0$ 。

由 1. 和 2. 可以看出只有當 $w_2 > w_1$ 時會有 zero-mode，而當 $w_1 \geq w_2$ 時則無 zero-mode。

表 3.2.1：SSH 模型結論整理

SSH 模型					
分類	N 為奇數			N 為偶數	
	$w_1 > w_2$	$w_1 = w_2$	$w_1 < w_2$	$w_1 \geq w_2$	$w_1 < w_2$
結論	波函數會侷限於左邊的邊界	無 zero-mode	波函數會侷限於右邊的邊界	無 zero-mode	有兩個 zero-modes，波函數會分別侷限於左邊和右邊的邊界

3.3 1D Kitaev 模型

考慮一漢米頓算子 \hat{H} 為

$$\hat{H} = \sum_{j=1}^{N-1} \left(w(C_{j+1}^\dagger C_j + C_j^\dagger C_{j+1}) - \Delta(C_{j+1}^\dagger C_j^\dagger + C_j C_{j+1}) + \mu C_j^\dagger C_j \right). \quad (3.74)$$

利用變分法得出薛丁格方程式

$$i\dot{C}_j - w(C_{j+1} + C_{j-1}) + \Delta(C_{j+1}^\dagger - C_{j-1}^\dagger) - \mu C_j = 0. \quad (3.75)$$

其中 j 滿足 $2 \leq j \leq N-1$ 。

$$i\dot{C}_1 - wC_2 + \Delta C_2^\dagger - \mu C_1 = 0. \quad (3.76)$$

$$i\dot{C}_N - wC_{N-1} + \Delta C_{N-1}^\dagger - \mu C_N = 0. \quad (3.77)$$

令

$$C_j = c_j e^{-i\Omega t} + d_j e^{i\Omega t}, \quad (3.78)$$

將(3.78)式代入(3.75)式並整理可得出

$$\begin{cases} (\Omega - \mu)c_j - w(c_{j+1} + c_{j-1}) + \Delta(d_{j+1} - d_{j-1}) = 0; \\ (\Omega + \mu)d_j + w(d_{j+1} + d_{j-1}) - \Delta(c_{j+1} - c_{j-1}) = 0. \end{cases} \quad (3.79)$$

再令 $c_j = c_o s^j, d_j = d_o s^j$ 代入(3.79)式，並改寫成矩陣形式

$$\begin{pmatrix} ((\Omega - \mu) - w(s + s^{-1})) & \Delta(s - s^{-1}) \\ -\Delta(s - s^{-1}) & (\Omega + \mu) + w(s + s^{-1}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_o \\ d_o \end{pmatrix} = 0. \quad (3.80)$$

為使 c_o, d_o 不為平庸解，所以(3.80)式中的係數矩陣之行列式值必須為零

$$(w^2 - \Delta^2)(s + s^{-1})^2 + 2\mu w(s + s^{-1}) - (\Omega^2 - \mu^2 + 4\Delta^2) = 0. \quad (3.81)$$

假設(3.81)式之根為 $s_1, s_2, s_1^{-1}, s_2^{-1}$ ，則 $s_1, s_2, s_1^{-1}, s_2^{-1}$ 滿足下列關係式

$$(s_1 + s_1^{-1}) + (s_2 + s_2^{-1}) = -\frac{2\mu w}{w^2 - \Delta^2} \quad (3.82)$$

$$(s_1 + s_1^{-1})(s_2 + s_2^{-1}) = -\frac{\Omega^2 - \mu^2 + 4\Delta^2}{w^2 - \Delta^2} \quad (3.83)$$

因此 c_j 和 d_j 的通解為

$$c_j = (c_{1+} s_1^j + c_{1-} s_1^{-j}) + (c_{2+} s_2^j + c_{2-} s_2^{-j}); \quad (3.84)$$

$$d_j = -\frac{(\Omega - \mu) - w(s_1 + s_1^{-1})}{\Delta(s_1 - s_1^{-1})} (c_{1+} s_1^j - c_{1-} s_1^{-j}) - \frac{(\Omega - \mu) - w(s_2 + s_2^{-1})}{\Delta(s_2 - s_2^{-1})} (c_{2+} s_2^j - c_{2-} s_2^{-j}). \quad (3.85)$$

$$\begin{cases} s_1 = e^{p_1 + p_2}; \\ s_2 = e^{p_1 - p_2}. \end{cases} \quad (3.86)$$

利用根與係數之關係和(3.86)可得出

$$\begin{cases} \cosh(p_1) \cosh(p_2) = -\frac{\tilde{\mu}}{1 - \tilde{\Delta}^2}; \\ \cosh(2p_1) + \cosh(2p_2) = \frac{\tilde{\Delta}^2 + \tilde{\mu}^2 - \tilde{\Omega}^2}{1 - \tilde{\Delta}^2}. \end{cases} \quad (3.87)$$

其中 $\tilde{\Delta} = \frac{\Delta}{w}$, $\tilde{\mu} = \frac{\mu}{2w}$, $\tilde{\Omega} = \frac{\Omega}{2w}$ 。

再令 $u_1 = \cosh(p_1)$, $u_2 = \cosh(p_2)$ 代入(3.87)式

$$\begin{cases} u_1 u_2 = -\frac{\tilde{\mu}}{1 - \tilde{\Delta}^2}; \\ u_1^2 + u_2^2 - 1 = \frac{\tilde{\Delta}^2 + \tilde{\mu}^2 - \tilde{\Omega}^2}{1 - \tilde{\Delta}^2}. \end{cases} \quad (3.88)$$

又由邊界條件

$$\begin{cases} (\Omega - \mu)c_1 - wc_2 + \Delta d_2 = 0; \\ (\Omega + \mu)d_1 + wd_2 - \Delta c_2 = 0; \end{cases} \quad (3.89)$$

$$\begin{cases} (\Omega - \mu)c_N - wc_{N-1} - \Delta d_{N-1} = 0; \\ (\Omega + \mu)d_N + wd_{N-1} + \Delta c_{N-1} = 0. \end{cases} \quad (3.90)$$

和前面關係式化簡得出

$$\tilde{\Omega} = \tilde{\mu} + \frac{u_2 U_N(u_1) - u_1 U_N(u_2)}{u_1 U_N(u_1) - u_2 U_N(u_2)}. \quad (3.91)$$

其中 $U_N(u_i)$ 為切比雪夫多項式(Chebyshev polynomials)。

由(3.88)式和(3.91)式可以得出以 u_1 為變數的代數方程式。

根據參考資料[6]得知，當固定 N 時，方程式有兩種情況，其一為 $\mu < 2w$ ，另一為 $\mu > 2w$ ，以下取 N 為 20，並以 $\tilde{\mu} = 0.2$ 作為 $\mu < 2w$ 情況之代表； $\tilde{\mu} = 1.2$ 作為 $\mu > 2w$ 情況之代表。

I. 取 $N = 15, \tilde{\Delta} = 0.6, \tilde{\mu} = 0.2$ 時

由以上之條件得出 u_1 為變數的常係數方程式，利用 Mathematica 9 解出方程式中的 u_1 ，

由(3.88)式解出 u_2 ，再由 u_1, u_2 代入(3.86)式得出 s_1, s_2 ，作 s_1 、 s_2 的高斯平面圖和

$\Omega - \frac{\text{Arg}(s_2)}{\pi}$ 圖。

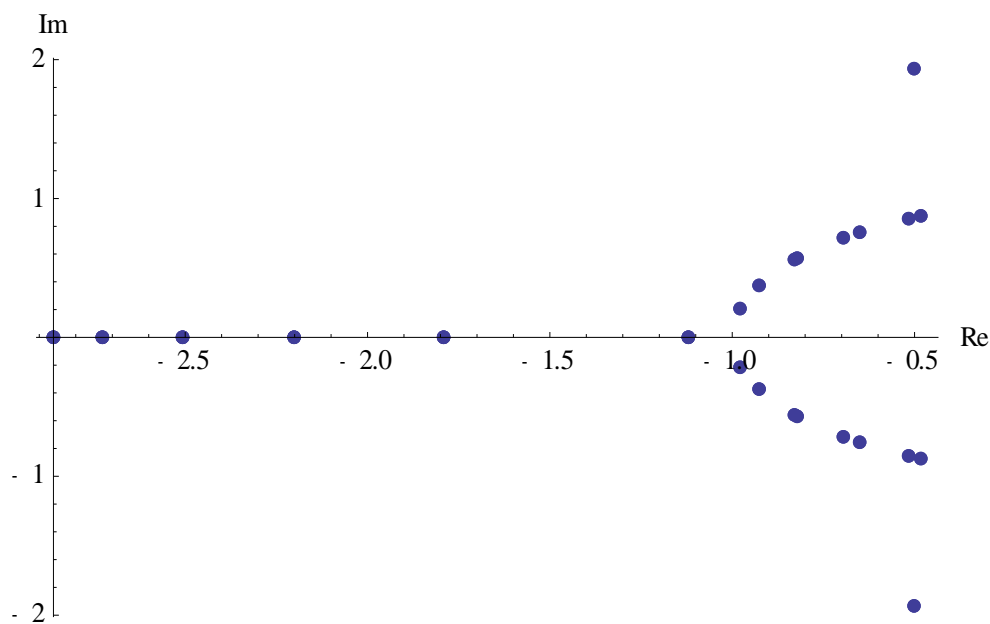


圖 3.3.1 : s_1 的高斯平面圖

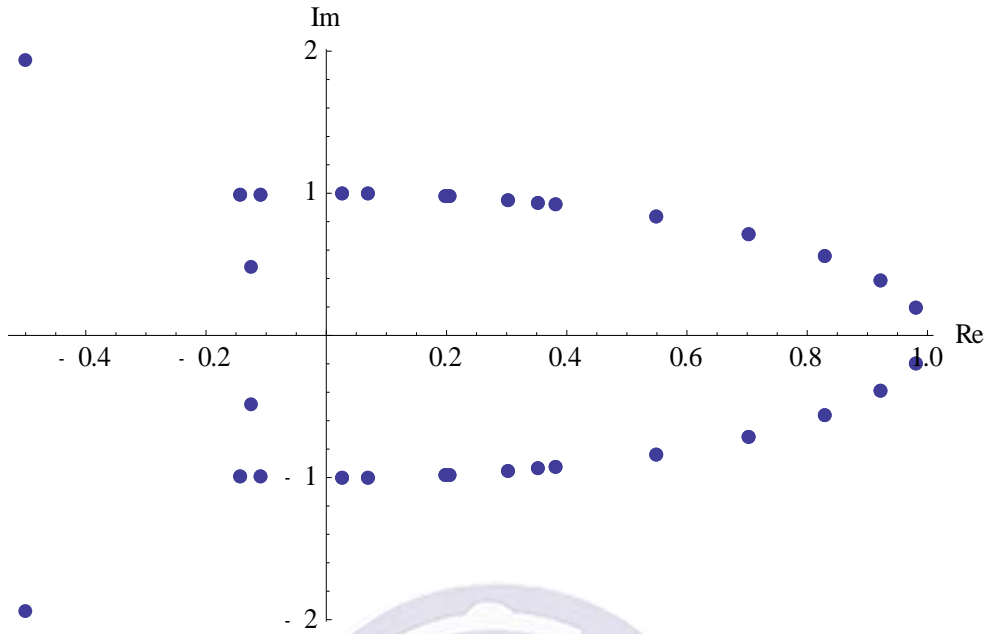


圖 3.3.2 : s_2 的高斯平面圖

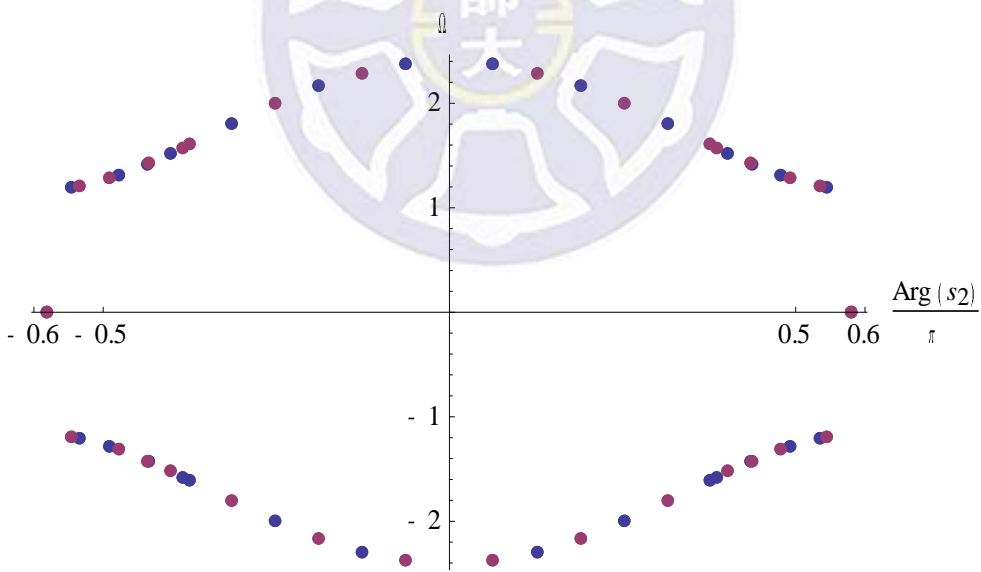


圖 3.3.3 : $\Omega - \frac{\text{Arg}(s_2)}{\pi}$ 圖

當 $s_2 = -0.125 + 0.484i, -0.500 + 1.94i$ 時, $(\Omega, \frac{\text{Arg}(s_2)}{\pi}) = (0.0000356, 0.580)$;

當 $s_2 = -0.125 - 0.484i, -0.500 - 1.94i$ 時, $(\Omega, \frac{\text{Arg}(s_2)}{\pi}) = (0.0000356, -0.580)$.

II. 取 $N = 15, \tilde{\Delta} = 0.6, \tilde{\mu} = 1.2$ 時

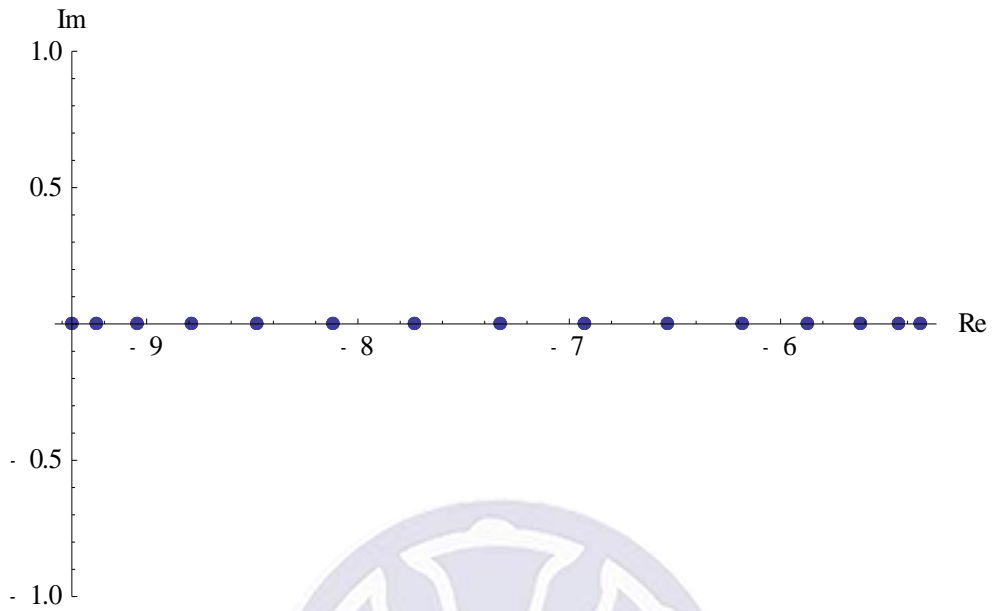


圖 3.3.4 : s_1 的高斯平面圖

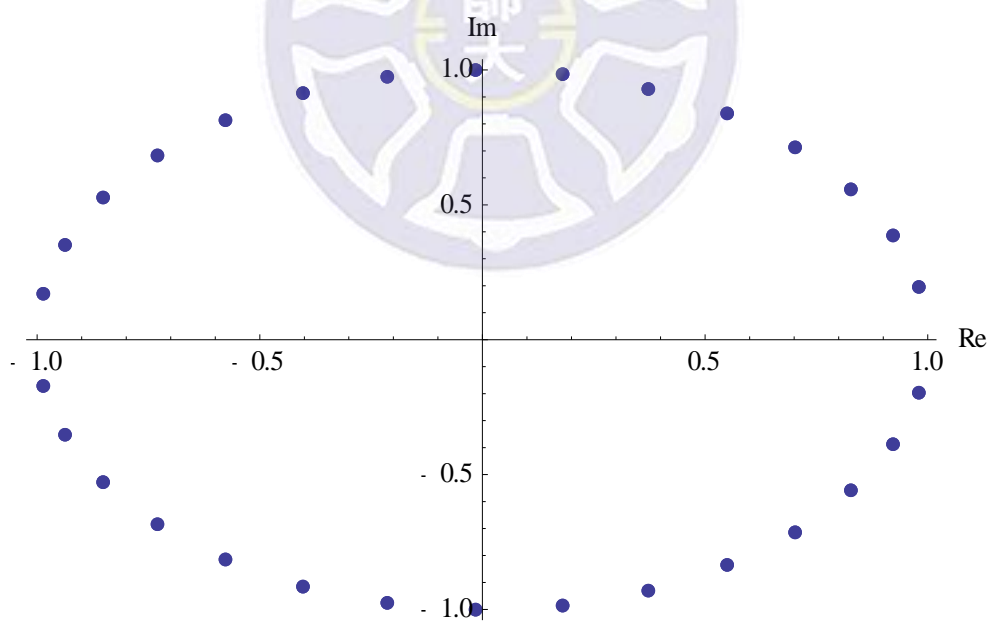


圖 3.3.5 : s_2 的高斯平面圖

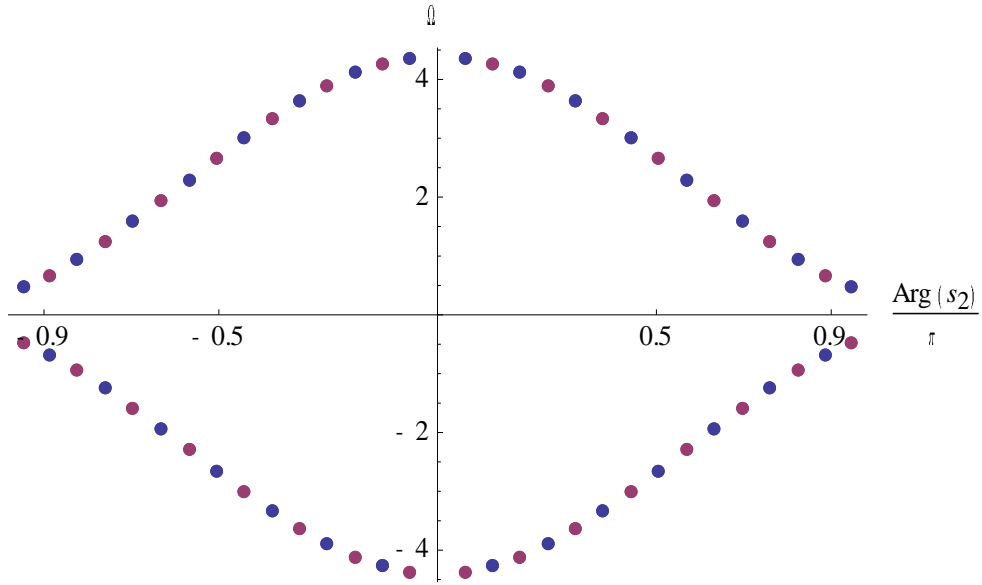


圖 3.3.6 : $\Omega - \frac{\text{Arg}(s_2)}{\pi}$ 圖

表 3.3.1 : Kitaev 模型結論整理

Kitaev 模型		
分類	$\mu \geq 2w$	$\mu < 2w$
結論	無 zero-mode	有兩個 zero-modes，波函數會分別侷限於左邊和右邊的邊界

第四章 結論

在二介質系統中， $\kappa = m$ 且 $\omega = \pm k_{\perp}$ 為此系統的 zero mode，它是被束縛在系統的介面上的 edge-state；在三介質系統中則沒有 zero-mode。tight-binding 模型的能譜總是連續。SSH 模型的能譜則與系統粒子數的奇偶性有關。粒子數為奇數時，若 $w_1 \neq w_2$ ，系統一定會有一個 zero-mode。當 $w_1 > w_2$ ，此 zero-mode 為侷限於左邊界的 edge-state；而當 $w_1 < w_2$ ，此 zero-mode 則為侷限於右邊界的 edge-state。粒子數為偶數時，若 $w_1 \geq w_2$ ，系統沒有 zero-modes。若 $w_1 < w_2$ ，則系統總是有兩個 zero-modes，且分別對應到侷限於左、右邊界上的 edge-states。Kitaev 模型也有類似的情況：若 $\mu \geq 2w$ ，系統沒有 zero-modes。若 $\mu < 2w$ 則系統總是有兩個 zero-modes，且分別對應到侷限於左、右邊界上的 edge-states。



參考資料

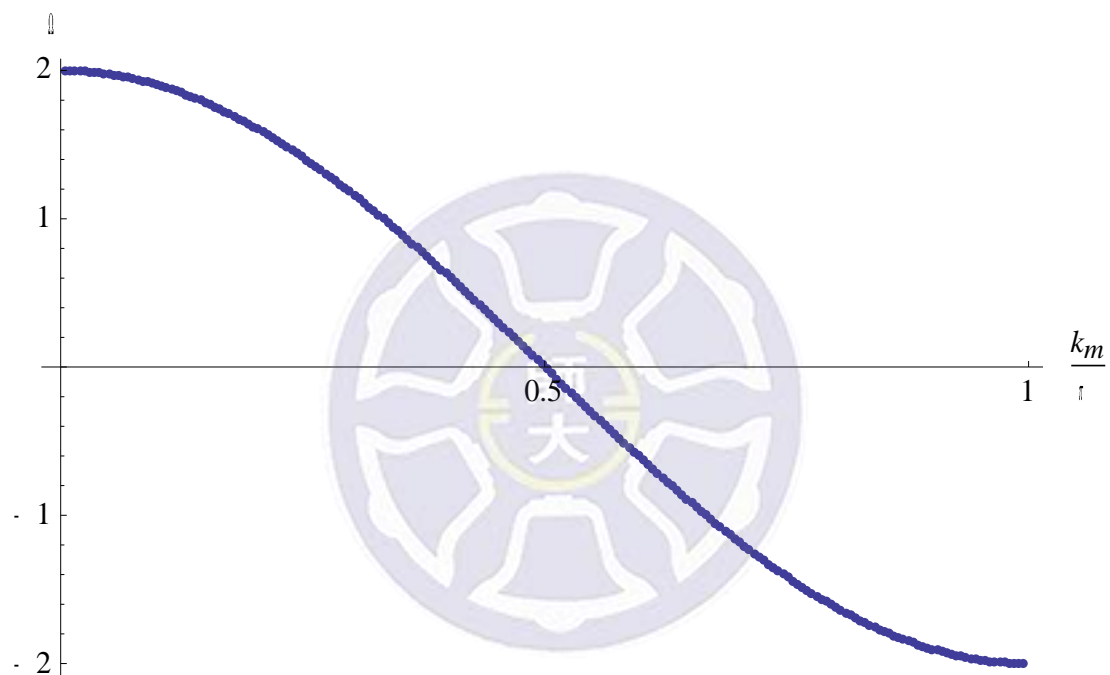
- [1] 孫允武，分數量子霍爾效應，物理雙月刊，廿一卷二期，261-270，(1994年4月)。
- [2] Xiao-Liang Qi, and Shou-Cheng Zhang, “*The quantum spin Hall effect and topological insulators,*” *Physics Today*, Jan. 2010, Vol. 63, Pg. 33-38.
- [3] C.L. Kane, and E.J. Mele, “ *Z_2 topological order and the quantum spin Hall effect,*” *Phys. Rev. Lett.* 95, 146802 (2005).
- [4] W.P. Su, J.R. Schrieffer, and A.J. Heeger, “*Solitons in Polyacetylene,*” *Physical review letters* : Volume 42, number 25. (18 June 1979).
- [5] Jasin Alicea, “*New directions in the pursuit of Majorana fermions in solid state systems,*” *Rep. Prog. Phys.* 75, 076501 (2012).
- [6] A Yu Kitaev, “*Unpaired Majorana fermions in quantum wires,*” *Phys.-Usp.* 44 131 (2001).



附錄

A.1 Tight-binding 模型

```
table200a = N[Table[{ $\frac{m}{N+1}$ ,  $2 w \text{Cos}[\frac{m \pi}{N+1}]$ }/. {w → 1, N → 200}, {m, 1, 200}]];
ListPlot[table200a, AxesLabel → {" $\frac{k_m}{\pi}$ ",  $\Omega$ }, Ticks → {{0.5, 1}}]
```



A.2 SSH 模型

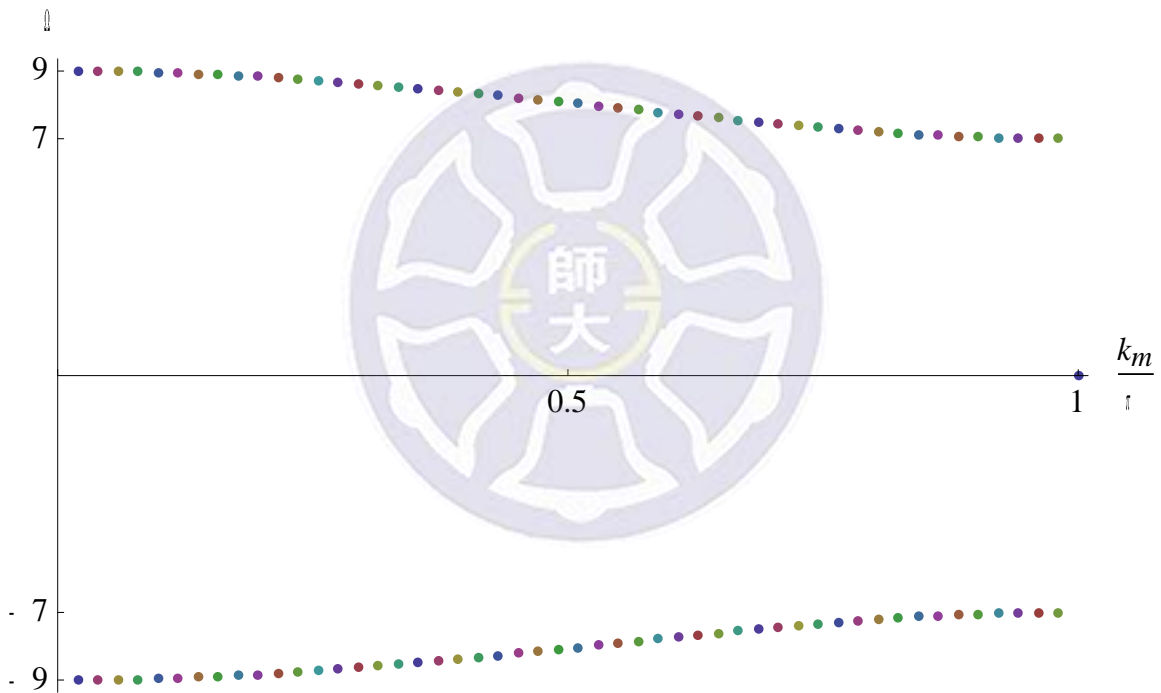
N 為奇數的情況之程式碼

- i. $N = 101, w_1 = 1, w_2 = 8$ 之 Mathematica 程式碼：

```

table101a =
N[Table[{{ $\frac{2 m}{N+1}$ ,  $\sqrt{w1^2 + w2^2 + 2 w1 w2 \text{Cos}\left[\frac{2 m \pi}{N+1}\right]}$  } /. {w1  $\rightarrow$  1, w2  $\rightarrow$  8, N  $\rightarrow$  101},
{ $\frac{2 m}{N+1}$ ,  $-\sqrt{w1^2 + w2^2 + 2 w1 w2 \text{Cos}\left[\frac{2 m \pi}{N+1}\right]}$  } /. {w1  $\rightarrow$  1, w2  $\rightarrow$  8, N  $\rightarrow$  101}},
{m, {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19,
20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35,
36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50}}]];
plot101a1 = ListPlot[table101a, AxesLabel  $\rightarrow$  {" $\frac{k_m}{\pi}$ ",  $\Omega$ },
Ticks  $\rightarrow$  {{0, 0.5, 1}, {-9, -7, 7, 9}}, PlotRange  $\rightarrow$  {{0, 1.01}}];
plot101a2 = ListPlot[{{1, 0}}];
Show[plot101a1, plot101a2]

```

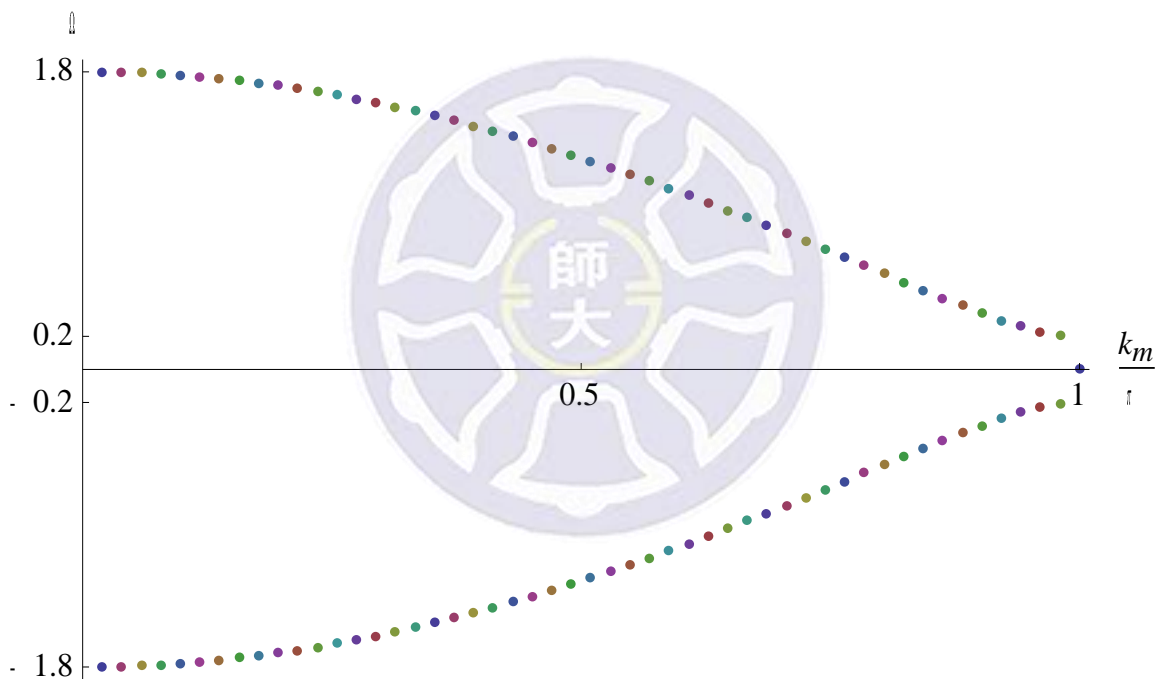


ii. $N = 101, w_1 = 1, w_2 = 0.8$ 之 Mathematica 程式碼：

```

table101b =
N[Table[{{ $\frac{2m}{N+1}$ ,  $\sqrt{t_1^2 + t_2^2 + 2 t_1 t_2 \cos\left[\frac{2m\pi}{N+1}\right]}$ }} /. {t1 -> 1, t2 -> 0.8, N -> 101},
{ $\frac{2m}{N+1}$ ,  $-\sqrt{t_1^2 + t_2^2 + 2 t_1 t_2 \cos\left[\frac{2m\pi}{N+1}\right]}$ }} /. {t1 -> 1, t2 -> 0.8, N -> 101}},
{m, {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19,
20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35,
36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50}}]];
plot101b1 = ListPlot[table101b, AxesLabel -> {" $\frac{k_m}{\pi}$ ",  $\Omega$ },
Ticks -> {{0.5, 1}, {-1.8, -0.2, 0.2, 1.8}}, PlotRange -> {{0, 1.01}}];
plot101b2 = ListPlot[{{1, 0}}];
Show[plot101b1, plot101b2]

```



N 為偶數的情況之程式碼

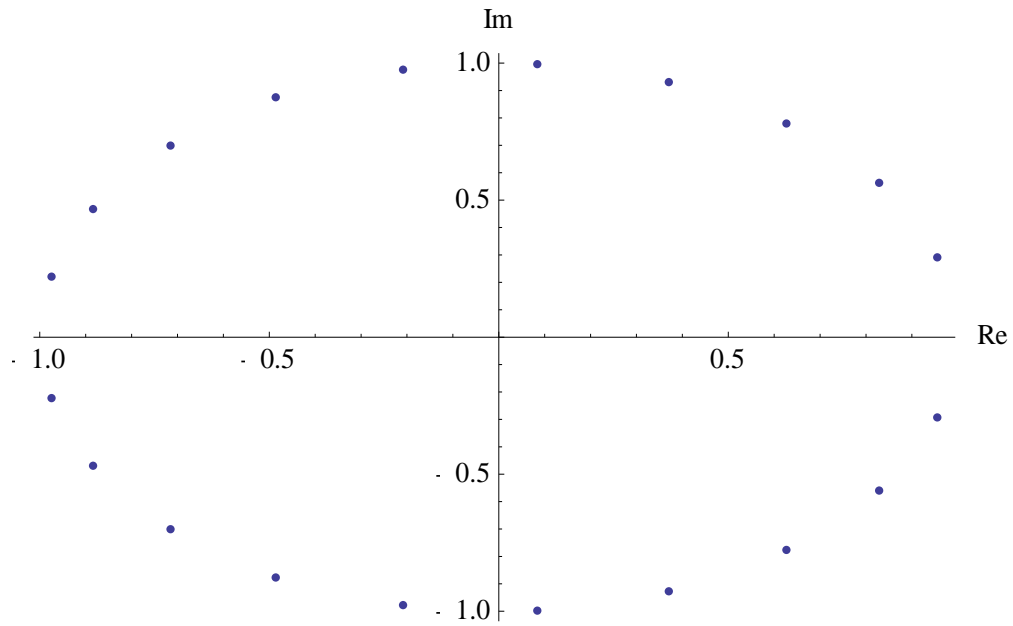
I. $N = 20, w_1 = 1, w_2 = 0.8$ 之 Mathematica 程式碼：

```

Expand[w2 s (1 - sNN) + w1 (1 - sNN+2) /. {NN -> 20, w1 -> 1, w2 -> 0.8}]
1 + 0.8 s - 0.8 s21 - s22

sol20a =
NSolve[Expand[w2 s (1 - sNN) + w1 (1 - sNN+2) /. {NN -> 20, w1 -> 1, w2 -> 0.8}] == 0, s];
ListPlot[Table[{Re[s], Im[s]} /. sol20a[[i]], {i, 2, 21}], AxesLabel -> {Re, Im}]

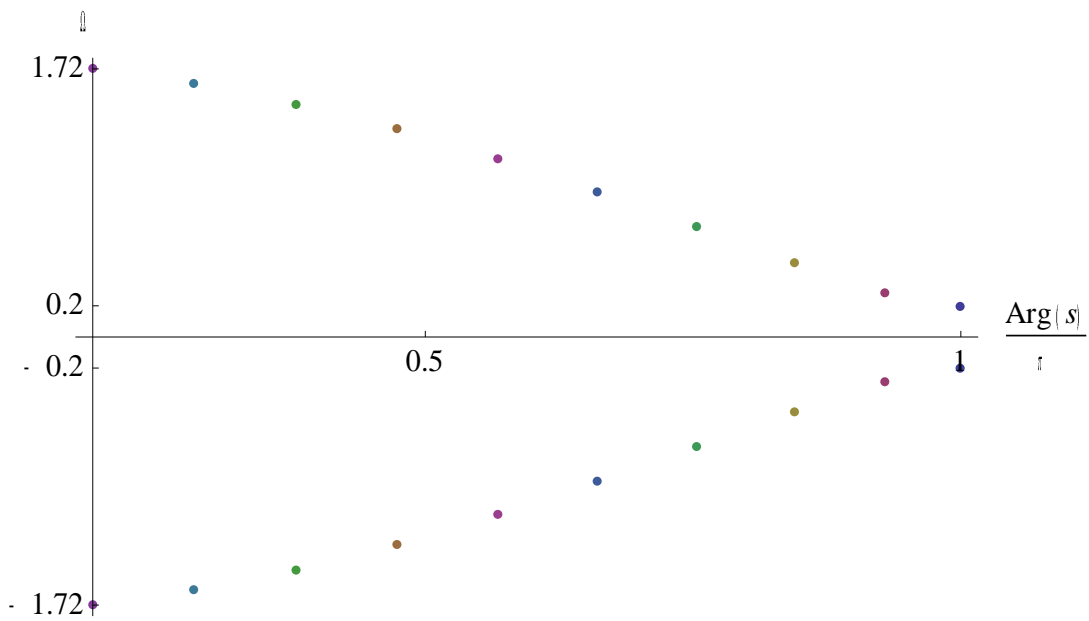
```



```

table20a =
Table[{{1/π Arg[s] /. sol20a[[i]],
Chop[√(w1² + w2² + w1 w2 (s + s⁻¹)) /. {w1 → 1, w2 → 0.8} /. sol20a[[i]], 10⁻⁶]},
{1/π Arg[s] /. sol20a[[i]],
Chop[-√(w1² + w2² + w1 w2 (s + s⁻¹)) /. {w1 → 1, w2 → 0.8} /. sol20a[[i]], 10⁻⁶]}],
{i, {1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19}}];
ListPlot[table20a, AxesLabel → {"Arg(s) / π", Ω},
Ticks → {{0.5, 1}, {-1.72, -0.2, 0.2, 1.72}}]

```



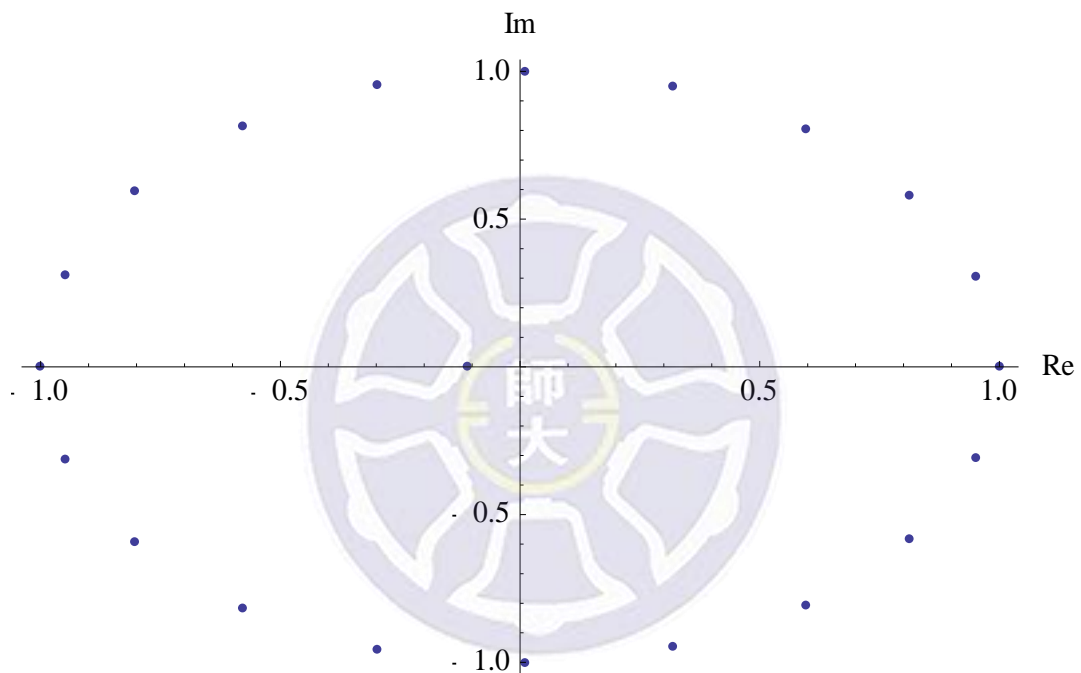
II. $N = 20, w_1 = 1, w_2 = 9$ 之 Mathematica 程式碼：

```
Expand[w2 s (1 - sNN) + w1 (1 - sNN+2) /. {NN → 20, w1 → 1, w2 → 9}]
```

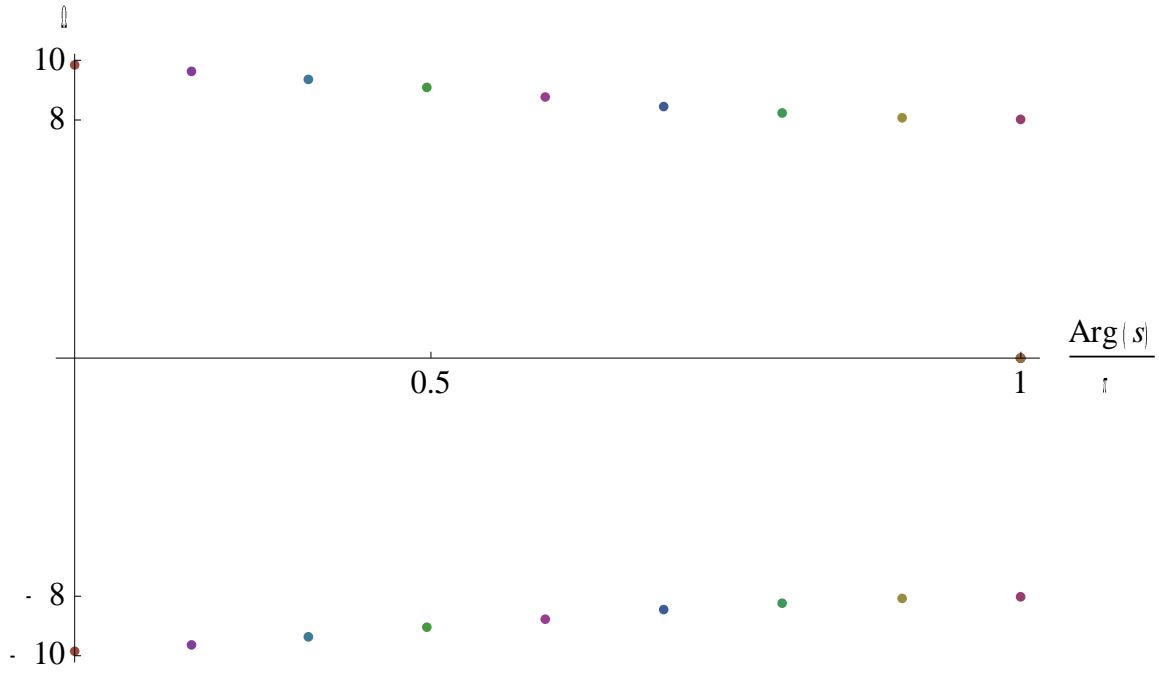
```
1 + 9 s - 9 s21 - s22
```

```
sol20b =
```

```
NSolve[Expand[w2 s (1 - sNN) + w1 (1 - sNN+2) /. {NN → 20, w1 → 1, w2 → 9}] == 0, s];
ListPlot[Table[{Re[s], Im[s]} /. sol20b[[i]], {i, 2, 22}], AxesLabel → {Re, Im}]
```



```
table20b = Table[{{{1/π Arg[(s) /. sol20b[[i]]],
  Re[√(w12 + w22 + w1 w2 (s + s-1)) /. {w1 → 1, w2 → 9} /. sol20b[[i]]}},
  {1/π Arg[(s) /. sol20b[[i]]],
  Re[-√(w12 + w22 + w1 w2 (s + s-1)) /. {w1 → 1, w2 → 9} /. sol20b[[i]]}}},
  {i, {1, 2, 4, 6, 8, 10, 11, 13, 15, 17, 19}}];
ListPlot[table20b, AxesLabel → {"Arg(s) / π", Ω},
  Ticks → {{0.5, 1}, {-10, -8, 8, 10}}]
```



A.3 1D Kitaev 模型

```

eq3Ωa =
(-2 s1^2 w + 2 s1^{1+NN} w + 2 s2^2 w - 2 s1^{3+NN} s2^2 w - 2 s2^{1+NN} w + 2 s1^{3+NN} s2^{1+NN} w + 2 s1^2 s2^{3+NN} w -
2 s1^{1+NN} s2^{3+NN} w - s1 μ + s1^{2+NN} μ + s2 μ - s1^2 s2 μ + s1^{1+NN} s2 μ - s1^{3+NN} s2 μ + s1 s2^2 μ -
s1^{2+NN} s2^2 μ - s1 s2^{1+NN} μ + s1^{2+NN} s2^{1+NN} μ - s2^{2+NN} μ + s1^2 s2^{2+NN} μ - s1^{1+NN} s2^{2+NN} μ +
s1^{3+NN} s2^{2+NN} μ + s1 s2^{3+NN} μ - s1^{2+NN} s2^{3+NN} μ + s1 Ω - s1^{2+NN} Ω - s2 Ω + s1^2 s2 Ω -
s1^{1+NN} s2 Ω + s1^{3+NN} s2 Ω - s1 s2^2 Ω + s1^{2+NN} s2^2 Ω + s1 s2^{1+NN} Ω - s1^{2+NN} s2^{1+NN} Ω +
s2^{2+NN} Ω - s1^2 s2^{2+NN} Ω + s1^{1+NN} s2^{2+NN} Ω - s1^{3+NN} s2^{2+NN} Ω - s1 s2^{3+NN} Ω + s1^{2+NN} s2^{3+NN} Ω) ;
sol3Ωa = Simplify[Solve[eq3Ωa == 0, Ω]]
{ {Ω → (s1 (-1 + s2^2) (1 + s2^{1+NN}) μ - s1^{2+NN} (-1 + s2^2) (1 + s2^{1+NN}) μ -
s2 (-2 s2 w + 2 s2^{NN} w - μ + s2^{1+NN} μ) + s1^{3+NN} s2 (-2 s2 w + 2 s2^{NN} w - μ + s2^{1+NN} μ) +
s1^{1+NN} (2 w - 2 s2^{3+NN} w + s2 μ - s2^{2+NN} μ) + s1^2 (2 (-1 + s2^{3+NN}) w + s2 (-1 + s2^{1+NN}) μ)) /
(s2 - s2^{2+NN} + s1^2 s2 (-1 + s2^{1+NN}) + s1^{3+NN} s2 (-1 + s2^{1+NN}) + s1 (-1 + s2^2) (1 + s2^{1+NN}) -
s1^{2+NN} (-1 + s2^2) (1 + s2^{1+NN}) + s1^{1+NN} (s2 - s2^{2+NN}))} } }
det1p =
Collect[Together[z^2 w^2 - (z^2 - 4) Δ^2 + 2 z w μ + μ^2 - Ω^2], z] // Map[Simplify, #, 2] &
4 Δ^2 + z^2 (w^2 - Δ^2) + 2 w z μ + μ^2 - Ω^2

```

```

eq2μ = (s1 + 1 / s1) + (s2 + 1 / s2) + Coefficient[det1p, z, 1] / Coefficient[det1p, z, 2]
eqs1 = Factor[(eq2μ /. {Δ → w * Δt, μ → 2 w * μt})];

$$\frac{1}{s_1} + s_1 + \frac{1}{s_2} + s_2 + \frac{2 w \mu}{w^2 - \Delta^2}$$

equ1 =
Collect[Simplify[ExpToTrig[eqs1 /. {s1 → Exp[p1 + p2], s2 → Exp[-p1 + p2]}]] /.
{Cosh[p1] → u1, Cosh[p2] → u2}, {u1, u2, μt, Ω}] // Map[Simplify, #, 2] &

$$4 u_1 u_2 - \frac{4 \mu t}{-1 + \Delta t^2}$$

FNuma[NN_, u1_, u2_] := u2 * ChebyshevU[NN, u1] - u1 * ChebyshevU[NN, u2];
FDenoa[NN_, u1_, u2_] := u1 * ChebyshevU[NN, u1] - u2 * ChebyshevU[NN, u2];
sol4a = Solve[equ1 == 0, u2]; equ3a = ((Δt^2 - 1) (u1^2 + u2^2) + 1) * FDenoa[NN, u1, u2]^2 -
2 μt * FDenoa[NN, u1, u2] * FNuma[NN, u1, u2] - FNuma[NN, u1, u2]^2;
equ4a = u1^(2 NN + 4) (equ3a /. sol4a[[1]]);

```

I. $N = 15, \tilde{\Delta} = 0.6, \tilde{\mu} = 0.2$ 之 Mathematica 程式碼：

```

solu1a = NSolve[
{Factor[equ4a / ((1 - Δt^2)^2 u1^4 - μt^2)^2 /. {NN → 15}] /. {μt → 2 / 10, Δt → 6 / 10} ==
0}, {u1}, WorkingPrecision → 50];
solu2a = Solve[{(equ1 /. {μt → 2 / 10, Δt → 6 / 10}) /. {NN → 15} == 0}, {u2}];
solp1a = ArcCosh[{u1 /. solu1a}]; solp2a = ArcCosh[{u2 /. solu2a[[1]] /. solu1a}];
Do[ss1[i] = Chop[(Exp[solp1a[[i]]] + solp2a[[i]]), 10^-10];
ss2[i] = Chop[(Exp[-solp1a[[i]]] + solp2a[[i]]), 10^-10];
θs1[i] = Arg[ss1[i]] / π;
θs2[i] = Arg[ss2[i]] / π;
Ω0[i] = (Ω /. sol3Ωa[[1]]) /. {s1 → ss1[i], s2 → ss2[i]} /. {Δ → w * Δt, μ → 2 w * μt} /.
{NN → 15} /. {w → 1, Δt → 6 / 10, μt → 2 / 10});
If[Abs[(equ1 /. solu2a[[1]] /. solu1a[[i]]) /. {Δ → w * Δt, μ → 2 w * μt} /.
{w → 1, Δt → 6 / 10, μt → 2 / 10}] > 10^-4 ||
Abs[(equ4a / solu1a[[i]]) /. {Δ → w * Δt, μ → 2 w * μt} /.
{w → 1, Δt → 6 / 10, μt → 2 / 10} /. {NN → 12}] > 10^-4, Print["*****"];

If[(Abs[Abs[ss1[i]] - 1] > 10^-4) && (Abs[Abs[ss2[i]] - 1] > 10^-4), Print["*****"];
Print["i = ", i, "; (s1, |s1|) = ", {"", ss1[i], "", Abs[ss1[i]]}];
Print["i = ", i, "; (s2, |s2|) = ", {"", ss2[i], "", Abs[ss2[i]]}];
Print["i = ", i, "; Ω = ", Chop[Ω0[i]]; Print["*****"];
If[(Abs[Abs[ss1[i]] - 1] > 10^-4), Print["i = ", i, "; (s1, |s1|) = ", {"",
ss1[i], "", Abs[ss1[i]]}]; Print["i = ", i, "; Ω = ", Chop[Ω0[i]]];
If[(Abs[Abs[ss2[i]] - 1] > 10^-4), Print["i = ", i, "; (s2, |s2|) = ", {"",
ss2[i], "", Abs[ss2[i]]}]; Print["i = ", i, "; Ω = ", Chop[Ω0[i]]];
(* Print["i = ", i, "; (s, θ) = ", {"", ss[i], "", θs[i]}] *),
{i, 1, Length[solu1a]}];

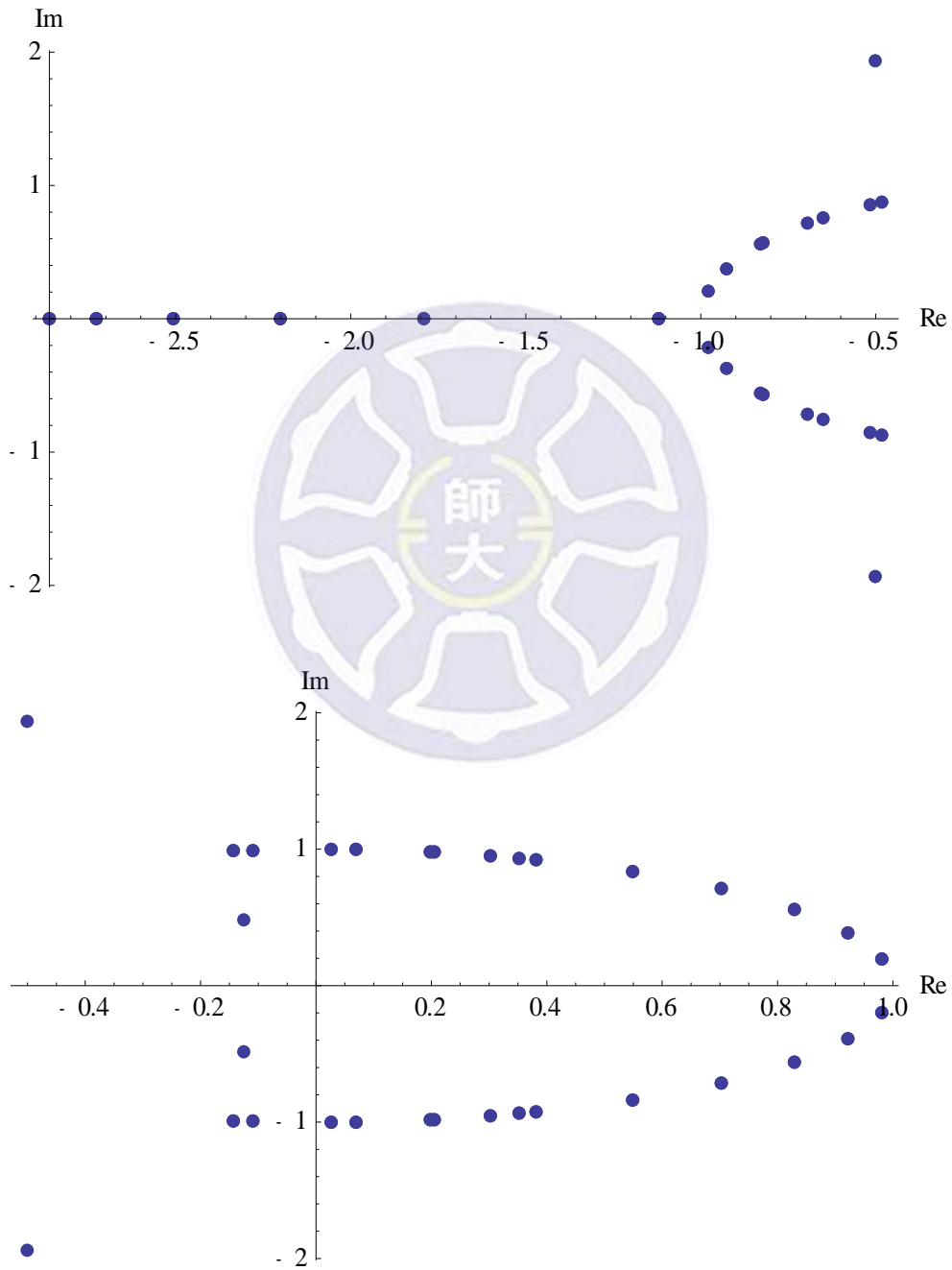
```

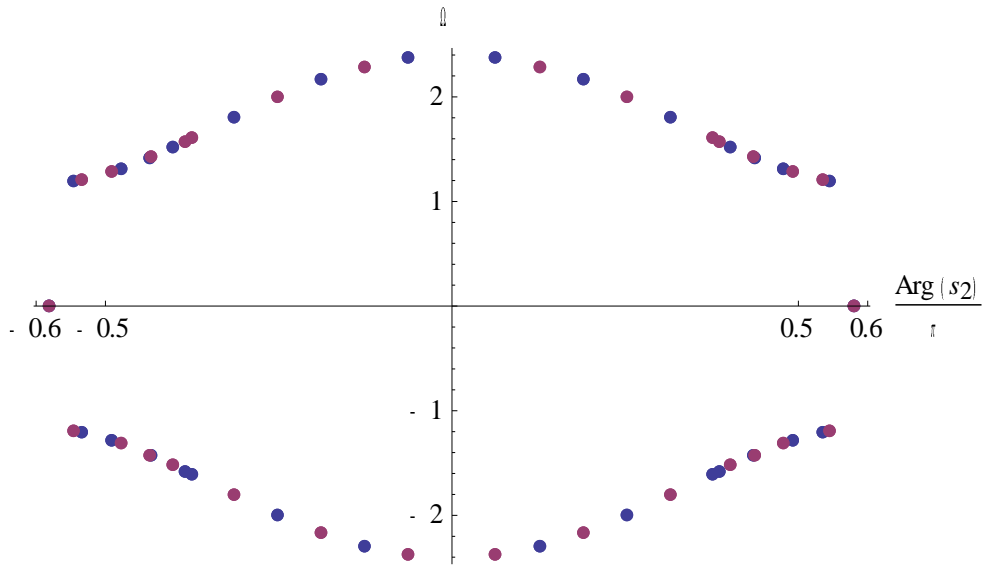


```

s1tab = Table[{Re[ss1[i]], Im[ss1[i]]}, {i, Length[solula]};
s2tab = Table[{Re[ss2[i]], Im[ss2[i]]}, {i, Length[solula]};
Ω2ptab = Table[{θs2[i], Re[Ω0[i]]}, {i, Length[solula]};
Ω2mtab = Table[{θs2[i], Re[-Ω0[i]]}, {i, Length[solula]};
ListPlot[s1tab, PlotStyle → {PointSize[0.015]}, AxesLabel → {Re, Im}]
ListPlot[s2tab, PlotStyle → {PointSize[0.015]}, AxesLabel → {Re, Im}]
ListPlot[{Ω2ptab, Ω2mtab}, PlotStyle → {PointSize[0.015]},
AxesLabel → {" $\frac{\text{Arg}(s_2)}{\pi}$ ", Ω}, Ticks → {{-0.6, -0.5, 0.5, 0.6}}]

```





II. $N = 15, \tilde{\Lambda} = 0.6, \tilde{\mu} = 1.2$ 之 Mathematica 程式碼：

```

solu1a = NSolve[{{Factor[equ4a / ((1 - Δt2)2 u14 - μt2)2 /. {NN → 15}] /.
  {μt → 12 / 10, Δt → 6 / 10}} == 0}, {u1}, WorkingPrecision → 50];
solu2a = Solve[{(equ1 /. {μt → 12 / 10, Δt → 6 / 10} /. {NN → 15}) == 0}, {u2}];
solp1a = ArcCosh[{u1 /. solu1a}]; solp2a = ArcCosh[{u2 /. solu2a[[1]] /. solu1a}];
Do[ss1[i] = Chop[(Exp[solp1a[[i]] + solp2a[[i]]], 10-10];
  ss2[i] = Chop[(Exp[-solp1a[[i]] + solp2a[[i]]], 10-10];
  θs1[i] = Arg[ss1[i]] / π; θs2[i] = Arg[ss2[i]] / π;
  Ω0[i] = (Ω /. sol3Ωa[[1]] /. {s1 → ss1[i], s2 → ss2[i]} /. {Δ → w * Δt, μ → 2 w * μt} /.
    {NN → 15} /. {w → 1, Δt → 6 / 10, μt → 12 / 10});
  If[Abs[(equ1 /. solu2a[[1]] /. solu1a[[i]] /. {Δ → w * Δt, μ → 2 w * μt} /.
    {w → 1, Δt → 6 / 10, μt → 2 / 10})] > 10-4 ||
    Abs[(equ4a / solu1a[[i]] /. {Δ → w * Δt, μ → 2 w * μt} /.
    {w → 1, Δt → 6 / 10, μt → 12 / 10} /. {NN → 12})] > 10-4, Print["*****"];
  If[(Abs[Abs[ss1[i]] - 1] > 10-4) && (Abs[Abs[ss2[i]] - 1] > 10-4), Print["*****"];
  Print["i = ", i, "; (s1, |s1|) = ", {"", ss1[i], ",", Abs[ss1[i]], ""}];
  Print["i = ", i, "; (s2, |s2|) = ", {"", ss2[i], ",", Abs[ss2[i]], ""}];
  Print["i = ", i, "; Ω = ", Chop[Ω0[i]]; Print["*****"];
  If[(Abs[Abs[ss1[i]] - 1] > 10-4), Print["i = ", i, "; (s1, |s1|) = ", {"",
    ss1[i], ",", Abs[ss1[i]], ""}]; Print["i = ", i, "; Ω = ", Chop[Ω0[i]]];
  If[(Abs[Abs[ss2[i]] - 1] > 10-4), Print["i = ", i, "; (s2, |s2|) = ", {"",
    ss2[i], ",", Abs[ss2[i]], ""}]; Print["i = ", i, "; Ω = ", Chop[Ω0[i]]];
  (* Print["i = ", i, "; (s, θ) = ", {"", ss[i], ",", θs[i], ""}];
  {i, 1, Length[solu1a]}];

```

```

s1tab = Table[{Re[ss1[i]], Im[ss1[i]]}, {i, Length[solula]};
s2tab = Table[{Re[ss2[i]], Im[ss2[i]]}, {i, Length[solula]};
Ω2ptab = Table[{θs2[i], Re[Ω0[i]]}, {i, Length[solula]};
Ω2mtab = Table[{θs2[i], Re[-Ω0[i]]}, {i, Length[solula]};
ListPlot[s1tab, PlotStyle → {PointSize[0.015]}, AxesLabel → {Re, Im}]
ListPlot[s2tab, PlotStyle → {PointSize[0.015]}, AxesLabel → {Re, Im}]
ListPlot[{Ω2ptab, Ω2mtab}, PlotStyle → {PointSize[0.015]},
  AxesLabel → {" $\frac{\text{Arg}(s_2)}{\pi}$ ", Ω}, Ticks → {{-0.9, -0.5, 0.5, 0.9}}]

```

