國立臺灣師範大學數學系碩士班碩士論文

指導教授：許志農　博士

勾股定理證明於數學能力指標中的探究

研究生：黃寶興

中華民國一百零五年六月

摘　要

數學證明在我國中學數學課程裡面是較容易被忽略的，主要因為考試領導教學以及升學至上依然是現今數學學習的主流，又在影響學生升學最鉅的會考、學力測驗及指定科目考試當中，需要以筆寫論述的測驗評量配分又不高，使得不論是學生或是教師都較容易將這部分擱置。

另一方面，也由於評量的公平性、證明題的解答不唯一以及學習數學證明在解題上的效果不夠直接等因素，都讓數學證明在中學生的數學學習中更加被邊緣化。但是數學證明在數學學習上還是有它相當的意義在，我們在國民中小學九年一貫課程綱要的能力指標中就可以看到關於證明的論述—「能針對問題，利用幾何或代數性質做簡單證明。」—（A-4-20, S-4-19）。

本研究為了彌補實務上我國中學數學教材上的不足，主要利用魯米斯（Elisha Scott Loomis）所著作的《勾股定理》（The Pythagorean Proposition）、伯果摩爾尼（Alexander Bogomolny）在他所建立的網站「勾股定理和它許多的證明」（http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/）中蒐集加上清代數學家華蘅芳、李善蘭所給出的一些證明去深究，探討哪些適合學生閱讀學習以達成提升數學素養的效果。並且利用國民中小學九年一貫課程綱要中的數學能力指標加以分類，給教學者及學習者參考。

關鍵字：勾股定理、魯米斯（Ellisha Scott Loomis）、證明學習、中學數學、能力指標

目　錄

摘　要
第一章　緒論 1
第一節　研究背景與動機 1
第二節　研究目的 2
第三節　研究範圍與後續 3
第二章　文獻探討 4
第一節　勾股定理 4
第二節　魯米斯的簡介 6
第三節　魯米斯的著作－《勾股定理》（**The Pythagorean Proposition**） 7
第四節　教科書的現況 8
第五節　數學能力指標 11
第三章　勾股定理證明工作單 13
第一節　勾股定理證明工作單內容說明 13
第二節　工作單內容 15
勾股定理證明-**A098** 16
勾股定理證明-**G115** 18
勾股定理證明-**G125** 22
勾股定理證明-**G138** 26
勾股定理證明-**G179** 30
勾股定理證明-**G211** 34
勾股定理證明-**G226** 36
勾股定理證明-**G230** 40
勾股定理證明-**G236** 42
勾股定理證明-**G237** 45
勾股定理證明-**G238** 48
勾股定理證明-**G239** 51
勾股定理證明-**G241** 54
勾股定理證明-**G242-1** 58
勾股定理證明-**G242-2** 63
勾股定理證明-**G243** 65
勾股定理證明-**G246** 67
勾股定理證明-**G247** 70

勾股定理證明-**G248**.....72
勾股定理證明-**G249**.....77
勾股定理證明-**G250**.....82
勾股定理證明-**G251**.....86
勾股定理證明-**G252**.....90
勾股定理證明-**G253**.....93
勾股定理證明-**G254**.....96
勾股定理證明-**G255**.....99
勾股定理證明-**Bog008**.....102
勾股定理證明-**Bog010**.....105
勾股定理證明-**Bog012**.....109
勾股定理證明-**Bog013**.....112
勾股定理證明-**Bog016**.....114
勾股定理證明-**Bog017**.....117
勾股定理證明-**Bog018**.....120
勾股定理證明-**Bog019**.....123
勾股定理證明-**Bog020**.....125
勾股定理證明-**Bog021**.....128
勾股定理證明-**Bog022**.....130
勾股定理證明-**Bog023**.....132
勾股定理證明-**Bog024**.....136
勾股定理證明-**Bog025**.....139
勾股定理證明-**Bog026**.....142
勾股定理證明-**Bog027**.....146
勾股定理證明-**Bog075**.....149
勾股定理證明-華蘅芳 **01**.....153
勾股定理證明-華蘅芳 **04**.....158
勾股定理證明-華蘅芳 **07**.....163
勾股定理證明-華蘅芳 **10**.....167
勾股定理證明-華蘅芳 **12**.....171
勾股定理證明-華蘅芳 **14**.....175
勾股定理證明-華蘅芳 **15**.....179
勾股定理證明-李善蘭.....183
第四章　參考文獻.....187

第一章　緒論

第一節　研究背景與動機

數學證明的功能是多元的，不只是為了數學研究或是在升學考試中得到計算證明題的分數，Gila Hanna（2000）曾說「數學證明的功能有驗證、解釋、信心、系統化、探索、溝通以及娛樂」。

其中「勾股定理」在我國數學課程中安排在八年級時學習，然而如同其它定理學習，學生也經常不疑有他的接受並學習使用這個定理、公式來計算解題，隨著時間過去也忘記了課本中以什麼樣的方式證明。並且由於勾股定理的代數式呈現地相當簡潔，學生較不會對它的正確性有所懷疑，也較沒有記憶上的困難，而在這樣的脈絡之下，其實我們學習更多的「勾股定理證明」的主要目的亦不是為了再次驗證定理的正確性，也不是為了學習如何使用它來解題。我們若將勾股定理證明視為一個待證命題，不論已知它正確或不相信它的正確性，都可以嘗試不同方式處理，也就會以一題多解，一題多變的思維學習。孫旭花（2007）就認為在所謂螺旋變式課程設計當中可以除了過往的「以舊引新」基礎上，反覆強調「以新歸舊」，培養一個新舊知識的連接眼光，形成整理的理解。

美國數學教師魯米斯所著的《勾股定理》一書中提供了良好的教材，他以容易理解且重要的勾股定理證明為旨，主要分成代數以及幾何兩大類，蒐集了近四百種證明方式，其中涵蓋了所有經典的證明。但除了粗略地分類及收錄範圍廣之外，《勾股定理》書中的證明過程有些過於簡略。

然而這些知識不直接被編著於教科書當中，本研究則嘗試將每一個勾股定理證明內容與九年一貫課程綱要中的數學能力指標連結，讓經常被認為是額外、多餘的學習活動，能更直接地反應在課綱的要求內，影響主要學習。

現今科技發達，如何將資訊、數位化融入學習無疑是重要的課題。因此若能開發出合適的數學教材，並透過社群網路或是各種資訊交流平台來分享，能讓更多學生、教師甚至一般民眾來使用，進而提升數學素養。

第二節　研究目的

國民中小學數學領域課程綱要中的能力指標「S-4-19：能針對問題，利用幾何或代數性質做簡單證明」，其中數學證明是由已知條件或已經確定是正確的性質再透過正確的邏輯推導的過程，本研究的目的在於要讓學生更進一步認識證明的方式及意義，符合國民中小學課程綱要，而培養推理能力亦是國中數學教育的重點之一。

為了提升邏輯推理的能力，本研究主要以魯米斯(Elisha Scott Loomis, 1852-1940)所著作的《勾股定理》(The Pythagorean Proposition)中、伯果摩爾尼（Alexander Bogomolny）在他所建立的網站「勾股定理和它許多的證明」（http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/）中的蒐集再加上清代數學家華蘅芳、李善蘭所給出的一些證明去深究，除了目前教科書所提供的三種勾股定理證明方法外，尋找是否有符合能力指標所要求，適合讓學生探討的勾股定理證明，再由數位教材團隊完成教材開發，透過網路分享讓學生、社會大眾甚至是孩童及銀髮族都能夠透過教材欣賞數學，提升國人數學證明，邏輯推理的能力，也可提供教學者課堂教材或是延伸教材及特色課程的發展方向。

第三節　研究範圍與後續

本研究範圍為魯米斯所著作的《勾股定理》這本書中的其中 26 個勾股定理證明，以及 Alexander Bogomolny 的 17 個證明，加上清代數學家華蘅芳及李善蘭的證明，合計共 51 個，研究著重修補《勾股定理》書上和 Alexander Bogomolny 證明的不完整，也將清代數學家的證明過程以較嚴謹的方式論述，並嘗試以九年一貫數學課程綱要中的能力指標加以標記，將適合用於教學活動的勾股定理證明做互動教材上的研討，除了證明外還提供一些個人淺見，最後與製作團隊合作開發數位教材，目前已將部分教材放置於所設立的專屬網站《非想非非想數學網》「http://www.math.ntnu.edu.tw/museum/」，提供各年齡學子及社會大眾進行數位學習之用。

因勾股定理證明繁多，本研究未完成之其餘證明修補或數位教材則將由勾股定理之製作團隊持續完成，並上傳至專屬網站《非想非非想數學網》平台上提供大眾做交流，也可透過網路留言板或電子郵件分享自己的教學方式或閱讀心得與建議。

第二章　　文獻探討

第一節 勾股定理

幾乎所有文明古國（希臘、中國、埃及、巴比倫、印度等）對勾股定理都有所研究，此定理是一個歷史悠久的定理，最早可回溯至古埃及在西元前 2600 年的紙草書就有（3,4,5）這一組勾股數的發現。除了埃及人外也從古巴比倫泥板中發現，約西元前 1900-1600 年時，古巴比倫人已經知道至少 15 組勾股數，其中數量最大的一個勾股數組是（18541，12709，13500）。

「勾股定理」亦可稱之為「畢達哥拉斯定理」（Pythagorean Theorem），是因為傳說畢達哥拉斯（Pythagoras, 560B.C.- 480B.C.）最早發現此定理的，而當五世紀的歐幾里得完成《幾何原本》，勾股定理出現在書中的命題 I.47，書中也在命題 VI.31 給出了另一個不同的證明方式。更重要的是歐幾里得在其著作《幾何原本》做註解時將最早的發現和證明歸功於畢達哥拉斯學派，因而得名為「畢氏定理」。

然而在中國，最早《史記》記載大禹治水—左治繩右規矩，那就是運用勾股測量的工具，有關勾股定理的記載，最早出現在西元前 100 年西漢時代《周髀算經》中，文中敘述商高在西元前 1100 年曾提過「勾廣三、股脩四、徑偶五」，然而商高所提到的是一個特別的直角三角形之邊長關係，即邊長為 3、4、5 的直角三角形，並無觸及一般性的「勾股定理」，有關一般性的勾股定理最早記載在《周髀算經·榮方問於陳子》中「若求邪至日者，以日下為勾，日高為股，勾股各自乘，並而開方除之，得邪至日」，這段敘述除了指出三角測量的方法外，並提到定理的一般性原則，即「句股各自乘，並而開方除之，即弦」，這樣等同於在敘述 $c=\sqrt{a^2+b^2}$ 。

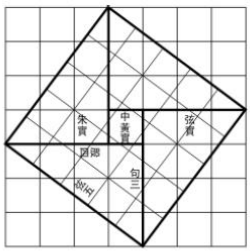


圖 2.1.1 中國數學家對勾股定理的論證

早在勾股定理證明出現之前，勾股測量對於解決生活中相關的應用問題，已有相當程度的發展，但是都尚未談及理論性的證明。中國自《九章算術》之後，歷代皆有數學家對勾股測量問題進行著述研究，但直到東漢末年趙爽（趙君卿）的「弦圖」出現才為勾股定理在中國數學史上較為正式的證明，他是利用割補法證明了勾股定理的。割補法就是使用幾何圖形的截、割、拼、補來證明代數式之間的恆等關係，既具一般性，又具直觀性，此為中國古代以形證數、形數統一、代數和幾何互不可分的獨特風格樹立了一個典範，以後的中國數學家大多繼承了這一風格並且代有發展。

除了趙爽之外，註解《九章算術》的劉徽則是利用圖形重新排列來證明，他將其方法稱為「出入相補」：「勾自乘為朱方，股自乘為青方，令出入相補，各從其類，因就其餘不移動也。合成弦方之冪，開方除之，即弦也。」但由於劉徽的出入相補說明過於簡約，因此，其弦方為何可由其它拼合而成，恐難以完全令人信服。

在中國自明代至清末，有一些數學家有條件接觸西洋數學，在中國引進西洋數學，如徐光啟、梅文鼎、李善蘭、華衡芳、李銳等，他們注重中西數學的融合，也嘗試使用更多種方式來證明勾股定理的正確性。

然而，這類中國風格的證明方式並不會被視為一個符合希臘風格的證明，自歐氏的《幾何原本》開始，西方的數學家們相信證明必預滿足嚴格的邏輯演繹順序，並以公認、自明的公理出發開始。但中國數學家對於證明的想法則是生成一個令人信服的實例，然後在由此推出一般情況。Joseph Needham（2002）曾說：「按中國人的方法，幾何圖形具有轉化的作用，由此數量關係就被概括成代數形式。」

另外 George Gheverghese Joseph（1991）就曾在他的著作上寫過一段話：「勾股定理在建立代數幾何以及它對中國代數的發展所作的貢獻是無法估量的，它奠定了幾何推理的基礎，打破了以往人們的偏見，認為凡是未受希臘數學影響的其他古代數學都是代數式的和經驗式的。」

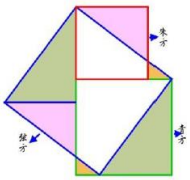


圖 2.1.2 劉徽的出入相補圖

第二節　魯米斯的簡介

魯米斯（Elisha Scott Loomis, 1852-1940），出生於美國俄亥俄州梅迪納鎮，他是一位哲學家、數學家、作家、系譜專家和土木工程師，但最值得讚許的頭銜是「教師」。在擔任教師期間，和他接觸的人們身上發揮了深刻的影響力，他認為真正的教學，值得花時間的教育和正確的生活存在於倫理和道德習慣的形成來讓一個人的社會貢獻一生，服務應指導一個人的行動，而不是利益。魯米斯曾以第三人稱來描述自己：「他作為教師的五十年間，他竭盡所能的培育超過 4000 名的男孩、女孩及年輕男女的行為習慣上，這為他烙刻了深深的印記。」

他撰寫了許多文章及出版許多叢書，範圍從幾何教學到倫理學、哲學及宗教等主題，其中他所撰寫的數學著作中，魯米斯將他在 1907 年動筆，直到 1927 年才完成出版的《勾股定理》（The Pythagorean Proposition）視為是他最好的著作，並且 1940 年時他做了修改，然而他也在這一年去世。雖然魯米斯在數學圈中並不是家喻戶曉的名字，沒有方程式或是定理是以他的名字命名，除了《勾股定理》這本書之外，大多數也已被人遺忘，但在他所著作的《勾股定理》這本書，在數學的教育而言是相當重要的一本書籍，在 1968 年，美國數學教師協會（NCTM）重印這本著作，當成數學教育經典系列的第一本書籍。

圖 2.2.1 魯米斯肖像

第三節　魯米斯的著作－《勾股定理》（The Pythagorean Proposition）

中世紀時期，學生想要獲得數學學位，需要對勾股定理提出一個原創的新穎證明，所以勾股定理在當時就有著大量的證明，有人就有將其收集在書或是期刊中，但都較為零散，直到魯米斯將當時所有的證明整理成書。他所著作的《勾股定理》（The Pythagorean Proposition），收集且分類了勾股定理的 371 種證明，此書首次出版於西元 1927 年，目前已有電子檔可供下載，叢書也收藏於國家圖書館，第二版於西元 1940 年做了修改後出版。

《勾股定理》這本書涵蓋了所有的經典證明，例如像達文西（Leonardo da Vinci）、托勒密（Claudius Ptolemaeus）、萊布尼茲（Gottfried Wilhelm Leibniz）、荷蘭物理學家惠更斯（Huygens）的證明，還有盲眼女孩庫力茲（E. A. Coolidge）約在 1888 年提出的證明，及 16 歲的高中女生安・康地（Ann Condit）提出的，甚至是美國總統加菲爾德（James Abram Garfield）所提供的…等經典證明，其中也包含許多作者魯米斯自己所提供的證明，也可惜有些作者可能已無法考據。這本書也穿插了 12 幅名人的肖像，像是歐幾里得、哥白尼、笛卡兒、伽利略和牛頓，當然也包括了畢達哥拉斯，也發現許多顯赫之士皆有證明過勾股定理。

而在《勾股定理》這本書出版之後，又有許多勾股定理的新證明被提出，伯果摩爾尼(Alexander Bogomolny)在他所建立的網站「勾股定理和它許多的證明」(http://www.cut-the-knot.org/pythagoras)收集了許多精彩的證明，除了部分魯米斯書中的美妙證明外，他也有收集了許多被新提出的勾股定理證明。

圖 2.3.2 《勾股定理》首頁

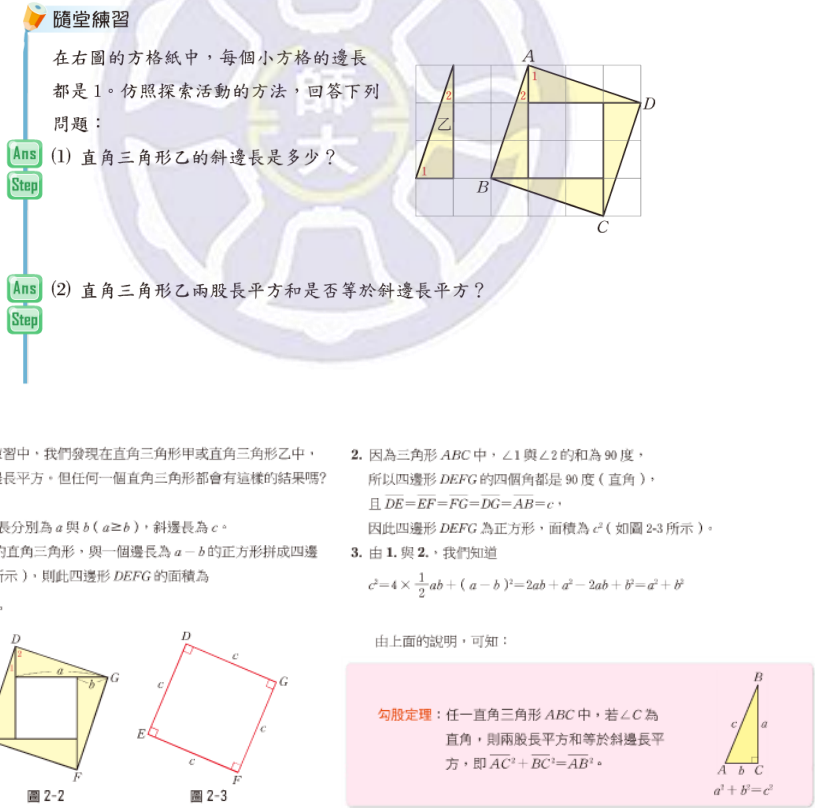
第四節　教科書的現況

勾股定理在目前的國民中小學課綱要中安排在國民中學第三冊，在此我們挑選 A、B、C 三個市占率較高的教科書版本作為定理證明內容內的剖析，所參考之教科書版本均為教育部審核通過之樣書，三個版本恰好對於勾股定理的證明也有不同的呈現方式：

版本 A(如圖 2.4.1)

證明方式：利用探索活動的發現，將四個全等直角三角形圍成一個以斜邊為邊長的大正方形，中間會形成一個邊長為兩股差的小正方形，接著用兩種方式去表示大正方形面積，再運用代數運算式子比較兩種面積表現式，整理得 $c^2=a^2+b^2$ 。

證明評析：在證明過程中，雖然圖形中只有以直角三角形斜邊為邊長的正方形面積，看不見另外以兩股為邊的正方形，可能較難感受到勾股定理在幾何上的意義，但用此代數證明較為嚴謹，可以簡單整理等式就能推出勾股定理的式子，此證明是婆什迦羅相當有名的證明，也收錄在魯米斯《勾股定理》的 A034。



隨堂練習

在右圖的方格紙中，每個小方格的邊長都是 1。仿照探索活動的方法，回答下列問題：

Ans Step (1) 直角三角形乙的斜邊長是多少？

Ans Step (2) 直角三角形乙兩股長平方和是否等於斜邊長平方？

從探索活動與隨堂練習中，我們發現在直角三角形甲或直角三角形乙中，其兩股長平方和等於斜邊長平方。但任何一個直角三角形都會有這樣的結果嗎？說明如下：

設直角三角形 ABC 兩股長分別為 a 與 b（$a\geq b$），斜邊長為 c。

1. 將四個與圖 2-1 相同的直角三角形，與一個邊長為 $a-b$ 的正方形拼成四邊形 $DEFG$（如圖 2-2 所示），則此四邊形 $DEFG$ 的面積為

$4\times\frac{1}{2}ab+(a-b)^2$。

圖 2-1　圖 2-2　圖 2-3

2. 因為三角形 ABC 中，$\angle 1$ 與 $\angle 2$ 的和為 90 度，所以四邊形 $DEFG$ 的四個角都是 90 度（直角），且 $\overline{DE}=\overline{EF}=\overline{FG}=\overline{DG}=\overline{AB}=c$，因此四邊形 $DEFG$ 為正方形，面積為 c^2（如圖 2-3 所示）。

3. 由 1. 與 2.，我們知道

$c^2=4\times\frac{1}{2}ab+(a-b)^2=2ab+a^2-2ab+b^2=a^2+b^2$

由上面的說明，可知：

勾股定理：任一直角三角形 ABC 中，若 $\angle C$ 為直角，則兩股長平方和等於斜邊長平方，即 $\overline{AC}^2+\overline{BC}^2=\overline{AB}^2$。

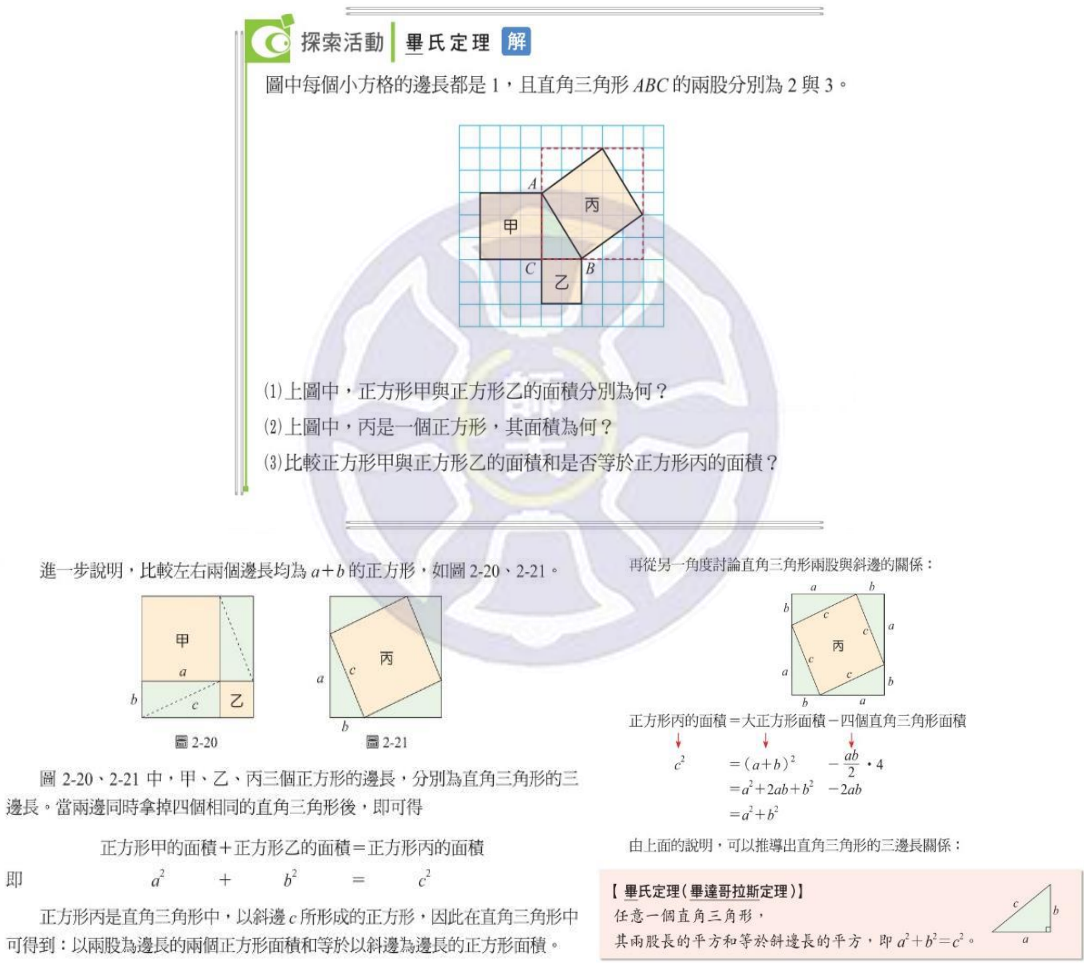
$a^2+b^2=c^2$

圖 2.4.1 版本 A 的證明

版本 B（圖 2.4.2）

證明方式：利用畢達哥拉斯的發現，及探索活動進一步說明「以兩股為邊長的正方形面積和等於以斜邊為邊長的正方形面積」，如下圖 2.4.2 課本中的圖形，學生可用直觀的方式，得到甲、乙、丙三個正方形的面積關係，進一步得勾股定理。

證明評析：以畢達哥拉斯的發想作為動機的引起，以直角三角形三邊延伸的正方形為主軸去說明三個正方形面積關係，純粹用較直觀的方式去作面積說明，而補充的另一個證明則是用相同的圖再用代數運算來說明，這樣學生不但較能感受其幾何意義，並且也利用了代數運算讓此證明較為嚴謹，此證明也有收錄在魯米斯《勾股定理》的 A035。



探索活動 | 畢氏定理 解

圖中每個小方格的邊長都是 1，且直角三角形 ABC 的兩股分別為 2 與 3。

(1) 上圖中，正方形甲與正方形乙的面積分別為何？

(2) 上圖中，丙是一個正方形，其面積為何？

(3) 比較正方形甲與正方形乙的面積和是否等於正方形丙的面積？

進一步說明，比較左右兩個邊長均為 $a+b$ 的正方形，如圖 2-20、2-21。

圖 2-20　圖 2-21

圖 2-20、2-21 中，甲、乙、丙三個正方形的邊長，分別為直角三角形的三邊長。當兩邊同時拿掉四個相同的直角三角形後，即可得

正方形甲的面積＋正方形乙的面積＝正方形丙的面積

即　$a^2 + b^2 = c^2$

正方形丙是直角三角形中，以斜邊 c 所形成的正方形，因此在直角三角形中可得到：以兩股為邊長的兩個正方形面積和等於以斜邊為邊長的正方形面積。

再從另一角度討論直角三角形兩股與斜邊的關係：

正方形丙的面積＝大正方形面積－四個直角三角形面積

$c^2 = (a+b)^2 - \frac{ab}{2}\cdot 4$

$= a^2+2ab+b^2 - 2ab$

$= a^2+b^2$

由上面的說明，可以推導出直角三角形的三邊長關係：

【畢氏定理（畢達哥拉斯定理）】

任意一個直角三角形，

其兩股長的平方和等於斜邊長的平方，即 $a^2+b^2=c^2$。

圖 2.4.2 版本 B 的證明

版本 C(圖 2.4.3)

證明方式：將四個全等直角三角形圍成一個以兩股和$(a+b)$為邊長的正方形，其圖形中會形成一個邊長為斜邊的正方形，接著用兩種方式去表示以斜邊為邊長的正方形面積，再運用代數運算比較兩種面積表現式，整理得$c^2=a^2+b^2$。

證明評析：此版本證明方式與版本 B 的補充證明是相同的，也與版本 A 的類似，差異是四個直角三角形的排列方法不同，學生從圖形中較難對勾股定理的幾何意義有所感受，缺少了較直觀的看法，但也較為嚴謹，此證明收錄在魯米斯《勾股定理》的 A035。

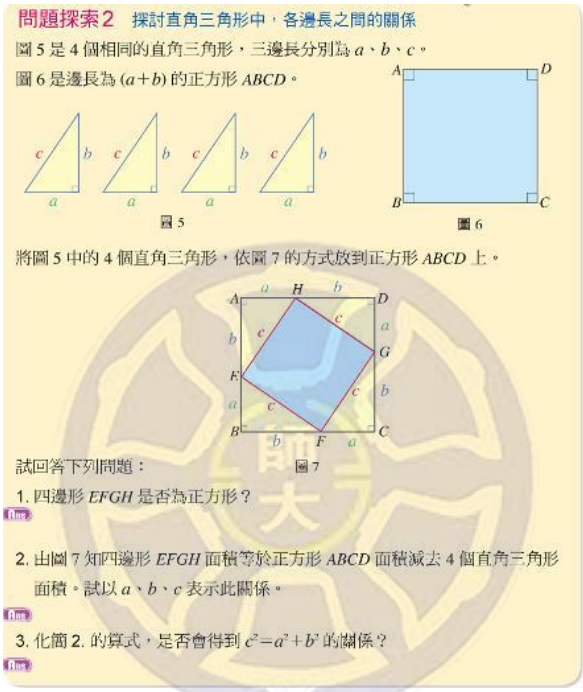

問題探索2　探討直角三角形中，各邊長之間的關係

圖 5 是 4 個相同的直角三角形，三邊長分別為 a、b、c。

圖 6 是邊長為 $(a+b)$ 的正方形 $ABCD$。

圖 5　圖 6

將圖 5 中的 4 個直角三角形，依圖 7 的方式放到正方形 $ABCD$ 上。

圖 7

試回答下列問題：

1. 四邊形 $EFGH$ 是否為正方形？

2. 由圖 7 知四邊形 $EFGH$ 面積等於正方形 $ABCD$ 面積減去 4 個直角三角形面積。試以 a、b、c 表示此關係。

3. 化簡 2. 的算式，是否會得到 $c^2=a^2+b^2$ 的關係？

圖 2.4.3 版本 C 的證明

結語：綜合以上我們發現三個版本皆是以圖形的拼湊作為證明的依據，圖形是輔助用，主要還是利用代數運算來證明，其中版本 A、C 僅使用代數運算，而版本 B 以直角三角形三邊延伸的正方形為主軸，再進一步作圖形輔助可直接發現三個正方形面積關係，不但有代數的運算，還有利用到圖形來說明幾何的意義，學生不但較容易理解，也不失嚴謹。

由此發現三個版本皆是用代數的方式來證明，因為相較於幾何較為嚴謹，而且皆是魯米斯《勾股定理》書中較為經典的證明，但證明種類不多，也是因為此時學生的先備知識較少，而在國中三年結束後，學習到幾何與代數的知識更為廣泛，如果能提供不同的證明方式呈現給學生，讓學生能以不同的面向看數學，並培養他們的邏輯推理與分析。

第五節　數學能力指標

本研究所指的數學能力指標係指教育部(民國 92 年)發佈的數學領域國民中小學九年一貫課程綱要中的能力指標，主要內容記載於課程綱要的第三部分。能力指標是參酌施行有年且有穩定基礎的傳統教材、國際間數學課程必備的核心題材、數學作為科學工具性的特質、現有學生能夠有效學習數學的一般能力等原則進行修訂。以四個階段及五大主題編號設定能力指標並期待一套好的數學課程或教科書，應能完整呈現數學思考的全貌，連結這些指標確實完成。

其中前四項主題的能力指標以三碼編排，第一碼是主題，以字母 N、S、A、D 分別表示「數與量」、「幾何」、「代數」和「統計與機率」四個主題；第二碼以 1、2、3、4 分別表示第一、二、三、四階段；第三碼則是能力指標的流水號。而第五主題「連結」也以三碼編排，第一碼為 C，第二碼則是以 R、T、S、C、E 分別表示察覺、轉化、解題、溝通、評析；第三碼為流水號。

例如：「能針對問題，利用幾何或代數性質做簡單證明。」－（A-4-20, S-4-19），後面的編號 A-4-20 即為代數主題的第四階段的第二十項，同樣地也是幾何主題的第四階段的第十九項。

本研究中探討的五十一個「勾股定理證明」所涉及到的能力指標主要有以下：

N-2-22	能理解正方形和長方形的面積與周長公式。(S-2-08)
N-3-22	能運用切割重組，理解三角形、平行四邊形與梯形的面積公式。(S-3-06)
N-3-23	能理解圓面積與圓周長的公式，並計算簡單扇形面積。

S-1-02	能描繪或仿製簡單幾何形體。
S-2-01	能認識平面圖形的內部、外部及其周界與周長。
S-2-02	能透過操作，將簡單圖形切割重組成另一已知簡單圖形。
S-2-03	能理解垂直與平行的意義。
S-2-04	能透過平面圖形的組成要素，認識基本平面圖形。
S-2-05	能透過操作，認識簡單平面圖形的性質。
S-2-06	能認識平面圖形全等的意義。
S-2-07	能理解旋轉角的意義。
S-2-08	能理解正方形和長方形的面積與周長公式。
S-3-01	能利用幾何形體的性質解決簡單的幾何問題。
S-3-02	能透過操作，認識「三角形三內角和為 180 度」與「兩邊和大於第三邊」的性質。
S-3-04	能認識平面圖形放大、縮小對長度、角度與面積的影響，並認識比例
S-3-06	能運用切割重組，理解三角形、平行四邊形與梯形的面積公式。(N-3-22)
S-3-07	能理解圓面積與圓周長的公式，並計算簡單扇形面積。(N-3-23)
S-4-01	能理解常用幾何形體之定義與性質。
S-4-02	能指出滿足給定幾何性質的形體。
S-4-04	能利用形體的性質解決幾何問題。
S-4-05	能理解畢氏定理及其逆敘述，並用來解題。

S-4-07	能理解平面上兩平行直線的各種幾何性質。
S-4-09	能理解三角形的全等定理，並應用於解題和推理。
S-4-10	能根據直尺、圓規操作過程的敘述，完成尺規作圖。
S-4-11	能理解一般三角形的幾何性質。
S-4-12	能理解特殊三角形(如正三角形、等腰三角形、直角三角形)的幾何性質。
S-4-13	能理解特殊四邊形(如正方形、矩形、平行四邊形、菱形、梯形)與正多邊形的幾何性質。
S-4-15	能理解三角形和多邊形的相似性質，並應用於解題和推理。
S-4-16	能理解三角形內心、外心、重心的意義與性質。
S-4-17	能理解圓的幾何性質。
S-4-19	能針對問題，利用幾何或代數性質做簡單證明。(A-4-20)

A-3-03	能認識等量公理。
A-3-04	能用含未知數符號的算式表徵具體情境之單步驟問題，並解釋算式與情境的關係。
A-3-06	能用符號表示簡單的常用公式。
A-4-01	能用符號代表數，表示常用公式、運算規則以及常見的數量關係(例如：比例關係、函數關係)。
A-4-02	能理解數的四則運算律，並知道加與減、乘與除是同一種運算。
A-4-03	能用 x、y、…符號表徵問題情境中的未知量及變量，並將問題中的數量關係，寫成恰當的算式(等式或不等式)。
A-4-05	能理解等量公理的意義，並做應用。
A-4-13	能熟練乘法公式。
A-4-15	能理解畢氏(勾股)定理，並做應用。
A-4-16	能用因式分解或配方法，解出二次方程式，並用來解題。
A-4-20	能針對問題，利用幾何或代數性質做簡單證明。(S-4-19)

C-R-04	能知道數學在促進人類文化發展上的具體例子。
C-E-01	能用解題的結果闡釋原來的情境問題。
C-E-02	能由解題的結果重新審視情境，提出新的觀點或問題。
C-E-03	能經闡釋及審視情境，重新評估原來的轉化是否得宜，並做必要的調整。
C-E-04	能評析解法的優缺點。
C-C-08	能尊重他人解決數學問題的多元想法。
C-S-01	能分解複雜的問題為一系列的子題。
C-S-03	能瞭解如何利用觀察、分類、歸納、演繹、類比等方式來解決問題。
C-S-05	能瞭解一數學問題可有不同的解法，並嘗試不同的解法。

第三章　　勾股定理證明工作單

第一節　勾股定理證明工作單內容說明

在本章的第二節中，將會介紹幾個勾股定理的證明，在每個證明中，皆從以角 C 為直角的直角三角形 ABC 出發，並假設 $\overline{BC}=a,\ \overline{AC}=b,\ \overline{AB}=c$（如圖 3.1.1），最終目標都是證明出 $a^2+b^2=c^2$ 這個等式。

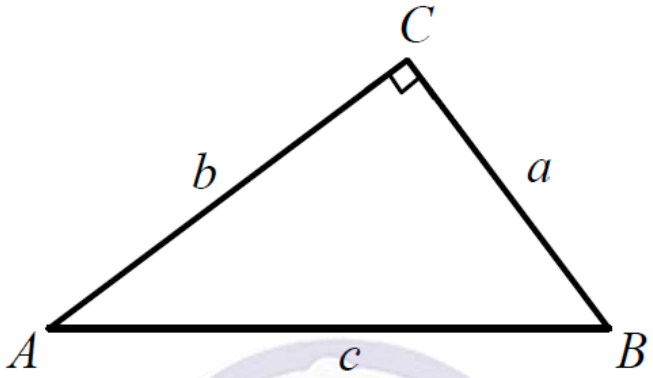


圖 3.1.1. 直角三角形 ABC

並且每個證明都會包含以下三個部分：

【作輔助圖】、【求證過程】、【註與心得】，以下我們分別就其內容作說明：

第一部分【作輔助圖】：

由於多數的證明過程需要作額外的輔助線，在這個部分會將作輔助圖的步驟完整列出，而且我們限制所有的步驟都是要能用尺規作圖可完成的，並且在步驟下方呈現出完成輔助線的圖形，讓閱讀者可以理解作圖的程序並作檢驗。

第二部分【求證過程】：

此部分是整個證明的重點，從已經完成的輔助圖中，以嚴謹且可讀的過程推導出勾股定理關係式。由於有些證明的步驟繁瑣，所以會在開頭簡單介紹此證明的脈絡，除了可以讓閱讀者在進行證明前先瞭解整個證明的想法，亦可以讓閱讀者嘗試在讀過脈絡即可開始自己證明，或是可以跟著步驟分段來完成證明。在每個證明步驟中，也都會作簡單的敘述，讓閱讀者能清楚知道該步驟要推論的內容。

第三部分【註與心得】：

此部分又分成四項：來源、心得、評量、補充。

在「來源」裡會標明原證明的出處，有些證明可能是有名數學家所給出，或是來自某本書、期刊或網頁，讓對此證明有興趣或有疑惑的讀者可以自行去蒐集資料來閱讀；

其中「心得」為研究者整理完此證明，或者是研究者先行讓學生閱讀後的心得，作個簡單的比較或評論，供給讀者參考；

而「評量」則是評論此證明適合哪個教學階段所能理解的，或是是否適合教學，以及是否具有欣賞及美學，這些評分皆是研究者整理完此證明，主觀的評價證明內容，雖然如此在這個部分的用意是希望閱讀者可以利用這些評價，來快速地判斷此證明是否符合他的學習需求；

最後「補充」裡會針對該證明簡單介紹作者生平故事，或是在證明中有利用到學生較不熟悉或未學過的定理，皆會放在補充裡，協助學生對此證明的理解，藉由一些小故事也希望引起學習數學的樂趣與動機，也可以讓學生延伸學習。本研究也在「補充」處指出關鍵的數學能力指標，意在提示閱讀者可以透過這個工作單的內容，培養符合能力指標所敘述的能力。

第二節　工作單內容

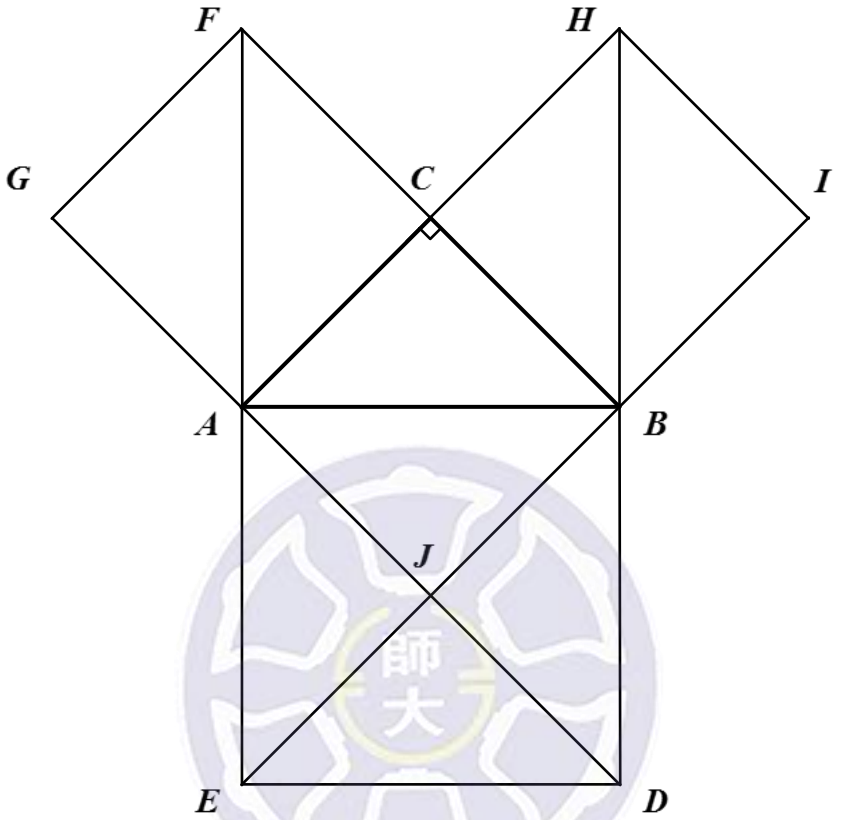
以下工作單我們將介紹 51 個勾股定理證明，如第一節所述，每一個證明皆包含三個部分：【作輔助圖】、【求證過程】、【註與心得】，本研究的 51 個證明中，有 26 個為魯米斯《勾股定理》這本書所收藏，另外有 Alexander Bogomolny 的 17 個證明，清代數學家華蘅芳的 7 個證明及李善蘭的一個證明，接著我們將介紹下述 51 個勾股定理證明：

A098、G115、G125、G138、G179、G211、G226、G230、G236、G237、G238、G239、G241、G242-1、G242-2、G243、G246、G247、G248、G249、G250、G251、G252、G253、G254、G255、Bog008、Bog010、Bog012、Bog013、Bog016、Bog017、Bog018、Bog019、Bog020、Bog021、Bog022、Bog023、Bog024、Bog025、Bog026、Bog027、Bog075、華蘅芳 01、華蘅芳 04、華蘅芳 07、華蘅芳 10、華蘅芳 12、華蘅芳 14、華蘅芳 15、李善蘭，其中包含許多經典證明。

勾股定理證明-A098

【作輔助圖】

1. 等腰直角三角形 ABC 分別以 $\overline{AB}$ 、 $\overline{BC}$ 、 $\overline{AC}$ 為邊長，向外作正方形 $ABDE$ ，正方形 $ACGF$ 、正方形 $BCHI$ 。
2. 接著連 $\overline{AF}$ 、連 $\overline{BH}$ ；並連 $\overline{AD}$ 與 $\overline{BE}$ 交於 J 。



【求證過程】

我們先證明輔助圖中的九個等腰直角三角形皆為全等的等腰直角三角形；再利用面積等式，即可推出畢氏定理的關係式。

1. 不難看出其中五個三角形為全等的三角形，以下我們給個證明：
   因為
   $$\angle ACF = \angle AGF = \angle BCH = \angle BIF = 90^\circ,$$
   並且有
   $$\overline{AC} = \overline{CF} = \overline{FG} = \overline{GA} = \overline{BC} = \overline{CH} = \overline{HI} = \overline{IB},$$
   所以可以得到
   $$\Delta ABC \cong \Delta AFC \cong \Delta AFG \cong \Delta BHC \cong \Delta BHI \text{ (SAS 全等).}$$
2. 另外也可以看到五個三角形全等，同樣地給出證明：
   因為
   $$\angle ACB = \angle AJB = \angle AJE = \angle BJD = \angle DJE = 90^\circ,$$
   並且有
   $$\angle ABC = \angle ABJ = \angle AEJ = \angle BDJ = \angle DEJ = 45^\circ \text{ 以及}$$
   $$\overline{AB} = \overline{AE} = \overline{ED} = \overline{DB},$$

所以可以得到

$$\Delta ABC \cong \Delta ABJ \cong \Delta AJE \cong \Delta BEJ \cong \Delta BDJ \text{ (AAS 全等).}$$

3. 綜合以上就可以利用拆解的方式，證明大正方形面積等於兩小正方形面積和：

因為

$$\begin{aligned}\square ABDE &= \Delta ABJ + \Delta AJE + \Delta BEJ + \Delta BDJ \\ &= \Delta AGF + \Delta ACF + \Delta BCH + \Delta BIH \\ &= \square ACFG + \square BCHI,\end{aligned}$$

所以

$$\square ABDE = \square ACFG + \square BCHI,$$

此為等腰直角三角形的畢氏定理，即

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：在柏拉圖的對話錄《Plato’s Dialogues》的 Meno 篇裡記載了西元前 500 年蘇格拉底(Socrates)教導一位奴隸小孩如何將一個正方形面積變成兩倍大的正方形的方法，也就是所謂的倍平方問題。當中就可以說是證明了畢氏定理中等腰直角三角形這樣的特例。收錄在 Loomis 的《勾股定理》中代數篇的編號第 098 號
2. 心得：此證明是畢氏定理的一個特例，僅證明了等腰直角三角形會有畢氏定理關係，也因此證明起來會相當容易。教學上若是在介紹一般性的畢氏定理前先講解此特例，再讓學生也有從特例推廣至一般的數學家精神，我想會是不錯的教學流程。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●	●	

4. 補充：在數學能力指標裡，有這麼一項：

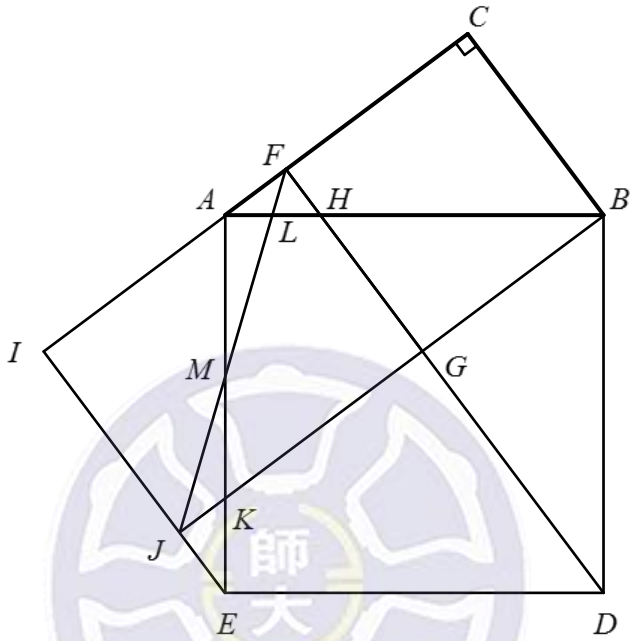
   C-R-04：能知道數學在促進人類文化發展上的具體例子。

   這個證明雖然不是處理一般性的勾股定理，但是它背後的故事是值得讓人深思的。歷史上希臘三哲學家中的柏拉圖在這個故事當中所傳達的是不論人的背景有多麼地不同，甚至在沒有受過正規教育的情況下都可以透過推理來學習證明知識的正確性。

勾股定理證明-G115

【作輔助圖】

1. 以直角三角形 ABC 的 $\overline{AB}$ 邊為邊，向外作正方形 $ABDE$ ；再以 $\overline{BC}$ 為邊，向內作正方形 $BCFG$ ，其中 $\overline{FG}$ 與 $\overline{AB}$ 交於 H ；連 $\overline{GD}$ 。
2. 接著延伸 $\overline{CA}$ 並取一點 I 使得 $\overline{AI}=\overline{BC}$ ，連 $\overline{IE}$ 。再延伸 $\overline{BG}$ 並交 $\overline{AE}$ 於 J ，交 $\overline{AE}$ 於 K 。
3. 最後連 $\overline{JF}$ 分別交 $\overline{AB}$ 於 L ，交 $\overline{AE}$ 於 M 。



【求證過程】

先作適當的輔助線，將直角三角形往外作出正方形及正方形邊上全等的直角三角形。我們利用全等及面積等式推導可以證明大正方形的面積等於小一正方形的面積以及其中一個梯形的面積和。而這個梯形的面積剛好又等於是另一股作出來的小正方形面積，也因此我們就證明了畢氏定理關係式。

1. 不難發現三角形 $\Delta ABC \cong \Delta DBG \cong \Delta EAI \cong \Delta JFG$ 為全等的直角三角形，以下我們給出證明：

   因為
   $$\overline{AB}=\overline{BD}\ (\because \text{正方形的邊}),$$
   而且
   $$\angle CBA = 90^\circ - \angle ABK = \angle DBG,$$
   以及
   $$\angle ACB = 90^\circ = \angle BGD,$$
   所以可以得到
   $$\Delta ABC \cong \Delta DBG\ (\text{AAS 全等}).$$
   接著考慮 $\Delta ABC \cong \Delta EAI$ ：

   其中因為

$$\overline{AB}=\overline{AE}\ (\because \text{正方形的邊}),$$

而且

$$\overline{AI}=\overline{CB},$$

以及

$$\angle CAB=90^\circ-\angle IAE=\angle AEI,$$

所以可以得到

$$\Delta ABC\cong\Delta EAI\ \ (\text{AAS 全等}).$$

然後看 $\Delta ABC\cong\Delta JFG$ ：

其中因為

$$\overline{BC}=\overline{FG}\ (\because \text{正方形的邊}),$$

而且有

$$\angle ACB=90^\circ=\angle FGJ,$$

以及

$$\begin{aligned}\overline{AC}&=\overline{AF}+\overline{FC}\\&=\overline{AF}+\overline{CB}\ (\because \text{正方形的邊})\\&=\overline{AF}+\overline{AI}\ (\because \Delta ABC\cong\Delta EAI)\\&=\overline{FI}=\overline{JG}\ (\because \text{長方形}IFGJ\text{的邊}),\end{aligned}$$

所以可以得到

$$\Delta ABC\cong\Delta JFG\ \ (\text{SAS 全等}).$$

再綜合以上四個全等式，可以得到

$$\Delta ABC\cong\Delta DBG\cong\Delta EAI\cong\Delta JFG\,.$$

2. 也可以看到 $\Delta AHF\cong\Delta EKJ$ ，以下我們給出證明：

其中因為

$$\begin{aligned}\overline{AF}&=\overline{CA}-\overline{CF}\\&=\overline{IE}-\overline{FB}\ (\because \Delta ABC\cong\Delta EAI\text{以及正方形的邊})\\&=\overline{IE}-\overline{IJ}\ (\because \text{長方形}BCIJ\text{的邊})\\&=\overline{JE},\end{aligned}$$

而且

$$\angle AFH=90^\circ=\angle KJE,$$

以及

$$\begin{aligned}\angle KEJ&=\angle AEI\\&=\angle CAB\ (\because \Delta ABC\cong\Delta EAI)\\&=\angle FAH,\end{aligned}$$

所以可以得到

$$\Delta AHF\cong\Delta EKJ\ \ (\text{ASA 全等}).$$

3. 接著發現 $\Delta BKA\cong\Delta DHB$ 亦為全等的三角形，以下是它的證明：

因為

$$\overline{AB}=\overline{BD}\ (\because \text{正方形的邊}),$$

而且

$$\begin{aligned}\overline{AK}&=\overline{AE}-\overline{KE}\\&=\overline{AB}-\overline{AH}\ (\because \text{正方形的邊且}\Delta AHF\cong\Delta EKJ)\\&=\overline{HB},\end{aligned}$$

以及

$$\angle BAK=90^\circ=\angle HBD,$$

所以可以得到

$$\Delta BKA\cong\Delta DHB\ (\text{SAS 全等}).$$

4. 在證明完三角形全等後，現在考慮面積之間的關係。其中我們發現 ΔBDG 面積與四邊形 $AKGH$ 面積相等，以下給出證明，這利用到剛剛證明的全等：

$$\begin{aligned}\Delta BDG&=\Delta HBD-\Delta HBG\\&=\Delta KAB-\Delta HBG\ (\because \Delta HBD\cong\Delta KAB)\\&=\text{四邊形}AKGH.\end{aligned}$$

5. 而 梯形$JEDF$面積 $=\overline{AC}^2$ 也就是以 $\overline{AC}$ 為邊的正方形面積，以下是它的證明：

$$\begin{aligned}\text{梯形}JEDF\text{面積}&=\frac{1}{2}\times\left(\overline{JE}+\overline{FD}\right)\times\left(\overline{JG}\right)\\&=\frac{1}{2}\times\left(\overline{IE}-\overline{IJ}+\overline{FG}+\overline{GD}\right)\times\left(\overline{AC}\right)\ (\because \Delta ABC\cong\Delta JFG)\\&=\frac{1}{2}\times\left(\overline{AC}-\overline{FG}+\overline{FG}+\overline{AC}\right)\times\left(\overline{AC}\right)\ (\because \text{長方形}FGJI\text{的兩邊而且}\Delta ABC\cong\Delta EAI\cong\Delta DBG)\\&=\frac{1}{2}\times\left(2\overline{AC}\right)\times\overline{AC}\\&=\overline{AC}^2.\end{aligned}$$

6. 因此我們就可以使用上面的全等關係以及面積等式來做以下推導：

$$\begin{aligned}\square ABDE&=AKHG+KEDG+\Delta BGD+\Delta HGB\\&=AKHG+KEDG+\Delta ABC+\Delta HGB\\&=AKHG+KEDG+\left(BCFH+\Delta AFL+\Delta FLH\right)\\&=KEDG+AKHG+\left(BCFG+\Delta HGB\right)+\left(\Delta AFL+\Delta FLH\right)\\&=KEDG+\Delta BGD+\square BCFG+\Delta KJE\\&=KEDG+\Delta FJG+\square BCFG+\Delta KJE\\&=\left(KEDG+\Delta FJG+\Delta KJE\right)+\square BCFG\\&=\text{梯形}JEDH+\square BCFG,\end{aligned}$$

也就是畢氏定理的關係式

$$c^2=a^2+b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明是一位 West Phila. 的中學生 Joseph Zelson 所給出。收錄在 Loomis 的《勾股定理》中幾何篇的編號第 115 號。
2. 心得：這個證明初看到會覺得複雜，輔助線將圖形切割成十一塊，並且要先證明其中的一塊梯形面積等於正方形面積，並非那麼直觀。使得在教學上的難度提高。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●			●	

4. 補充：在數學能力指標中，有這麼幾項：

   S-4-09：能理解三角形的全等定理，並應用於解題和推理。

   以及

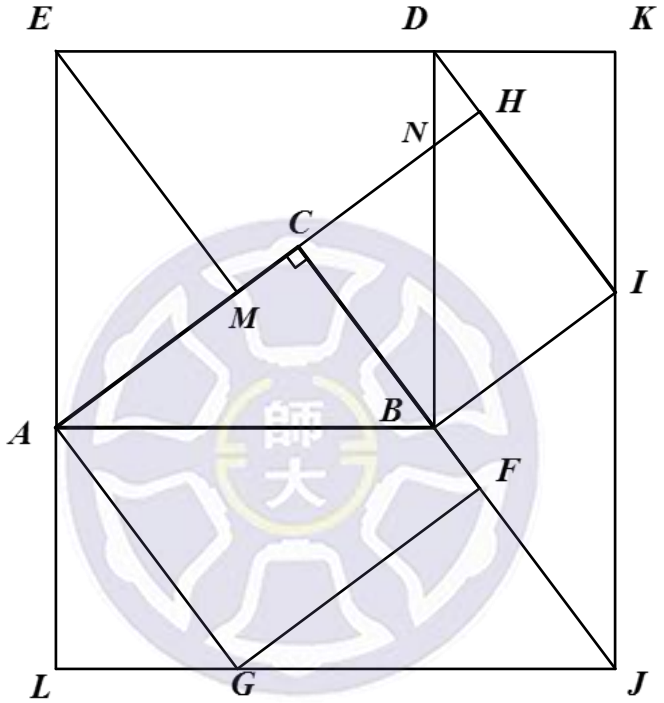
   N-3-22 及 S-3-06：能運用切割重組，理解三角形、平行四邊形與梯形的面積公式。

   此證明正是利用圖形的分割，以及三角形的全等來推理出畢氏定理關係式。

勾股定理證明-G125

【作輔助圖】

1. 以直角三角形的 $\overline{AB},\overline{AC},\overline{BC}$ 三邊為邊，分別向內、向內、向外作正方形 $ABDE$ 、正方形 $ACFG$ 以及正方形 $BCHI$ 。其中 $\overline{BD}$ 與 $\overline{CH}$ 交於 N 。
2. 在 $\overline{CF}$ 延伸線上取一點 J ，使 $\overline{BJ}$ 與 $\overline{AB}$ 等長。
3. 連 $\overline{JI}$ ，並延伸直線與 $\overline{ED}$ 的延伸線交於 K 。連 $\overline{JG}$ 並延伸與 $\overline{EA}$ 的延伸線交於 L 。
4. 過 E 作 $\overline{AC}$ 的垂線，垂足 M 。最後連 $\overline{DI}$ (之後將證明 $D-H-I$ 三點共線)。



【求證過程】

先以一個大長方形將直角三角形 ABC 及其三邊所製造的正方形圍住，並且以輔助線適當地將長方形分割成正方形、直角三角形以及梯形。在證明其中幾個三角形及梯形有全等性質後，以兩種不同的方式分割長方形，即可以從面積關係當中推導出畢氏定理關係式。

1. 不難發現 $\Delta ABC,\Delta GJF,\Delta JIB,\Delta DBI,\Delta EAM$ 為全等三角形，以下我們給出證明：

   首先因為

$$\overline{BC}=\overline{BI}\text{ (正方形的邊)},$$

   並且

$$\overline{AC}=\overline{BJ},$$

   以及

$$\angle ACB=90^{\circ}=\angle JBI,$$

   所以

$$\Delta ABC \cong \Delta JBI \text{ (SAS 全等).}$$

另一方面因為

$$\angle ACB = 90^\circ = \angle GFJ,$$

並且

$$\overline{AC} = \overline{GF} \text{ (正方形的邊),}$$

以及

$$\overline{CB} = \overline{CJ} - \overline{BJ} = \overline{CJ} - \overline{CF} = \overline{FJ},$$

所以

$$\Delta ABC \cong \Delta GFJ \text{ (SAS 全等).}$$

再來是因為

$$\angle ACB = 90^\circ = \angle EMA,$$

並且

$$\angle CAB = 90^\circ - \angle EAM = \angle AEM,$$

以及

$$\overline{AB} = \overline{EA} \text{ (正方形的邊),}$$

所以

$$\Delta ABC \cong \Delta EAM \text{ (AAS 全等).}$$

最後因為

$$\overline{AB} = \overline{BD} \text{ (正方形的邊),}$$

並且

$$\overline{BC} = \overline{BI} \text{ (正方形的邊),}$$

以及

$$\angle CBA = 90^\circ - \angle NBC = \angle DBI$$

所以

$$\Delta ABC \cong \Delta DBI \text{ (SAS 全等).}$$

我們也可以因為 $\angle BID = 90^\circ = \angle BIH$, 所以推得 $D - H - I$ 三點共線.

2. 接下來我們看出 $\Delta AGL, \Delta IDK$ 為全等三角形，以下是它的證明：
其中因為

$$\begin{aligned}\overline{ID} &= \overline{CA} \ (\text{因為}\Delta ABC \cong \Delta DBI) \\ &= \overline{AG} \ (\text{因為是正方形的邊}),\end{aligned}$$

並且

$$\begin{aligned}\angle DIK &= 90^\circ - \angle BIJ \\ &= 90^\circ - \angle EAM \ (\text{因為}\Delta JIB \cong \Delta EAM) \\ &= \angle GAL,\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}\angle KDI &= 90^\circ - \angle IDB \\ &= 90^\circ - \angle FGJ \ (\text{因為}\Delta DBI \cong \Delta GJF) \\ &= \angle AGL,\end{aligned}$$

所以

$$\Delta AGL \cong \Delta IDK \text{ (SAS 全等)}.$$

3. 再來可以看到梯形 $AGFB$ 全等於梯形 $EMHD$ ，以下我們給出證明：
因為有

$$\begin{aligned}\overline{AG} &= \overline{AC} \ (\text{因為是正方形的邊}) \\ &= \overline{EM} \ (\text{因為}\Delta ABC \cong \Delta EAM),\end{aligned}$$

還有

$$\overline{AB} = \overline{ED} \ (\text{因為是正方形的邊}),$$

以及

$$\begin{aligned}\overline{GF} &= \overline{AC} \ (\text{因為是正方形的邊}) \\ &= \overline{AM} + \overline{MC} = \overline{BC} + \overline{MC} \ (\text{因為}\Delta ABC \cong \Delta EAM) \\ &= \overline{HC} + \overline{CM} \ (\text{因為是正方形的邊}) \\ &= \overline{HM},\end{aligned}$$

還有

$$\angle AGF = 90^\circ = \angle EMH,$$

跟

$$\begin{aligned}\angle BAG &= 90^\circ - \angle CAB \\ &= 90^\circ - \angle MEA \ (\text{因為}\Delta ABC \cong \Delta EAM) \\ &= \angle DEM,\end{aligned}$$

所以可以得到

$$\text{梯形 } AGFB \cong \text{梯形 } EMHD \text{ (SASAS 全等)}.$$

4. 綜合以上全等的證明，再透過面積等式的推導我們可以得到：

$$\begin{aligned}&\text{正方形}ABDE + 2\Delta ALG + 3\Delta GFJ + \text{梯形}AGFB \\ &= \text{長方形}EKJL \\ &= \text{正方形}BCHI + \text{正方形}ACFG + 2\Delta ALG + 3\Delta GFJ + \text{梯形}EMHD,\end{aligned}$$

也就是

$$\text{正方形}ABDE = \text{正方形}BCHI + \text{正方形}ACFG,$$

此即為畢氏定理關係式

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：此證明收錄在 Loomis 的《勾股定理》中幾何篇的編號第 125 號。
2. 心得：不同於其它拼圖式證明是直接將兩個正方形分割再拼成兩個小正方形，這個證明方式是用相同的拼片將長方形留下大正方形或兩個小正方形，來證明面積的相等。算是一種反面思考的證明法式。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●	●		●	

4. 補充：在數學能力指標中，有這麼幾項：

   S-4-09：能理解三角形的全等定理，並應用於解題和推理。

   以及

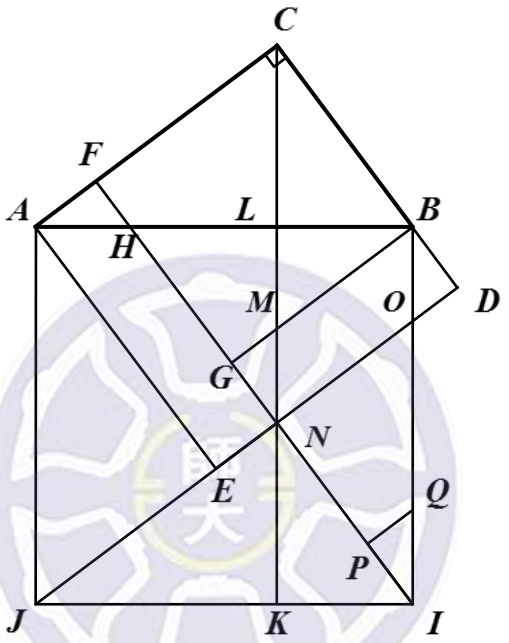
   N-3-22 及 S-3-06：能運用切割重組，理解三角形、平行四邊形與梯形的面積公式。

   此證明正是利用圖形的分割，以及三角形的全等來推理出畢氏定理關係式。

勾股定理證明-G138

【作輔助圖】

1. 以直角三角形 ABC 的 $\overline{AC}$ 及 $\overline{BC}$ 為正方形的一邊，分別向內作正方形 $ACDE$ 及正方形 $BCFG$。其中 $\overline{FG}$ 交 $\overline{AB}$ 於 H。
2. 以直角三角形 ABC 的 $\overline{AB}$ 為正方形的一邊，向外作正方形 $ABIJ$。
3. 並過 C 作 $\overline{IJ}$ 的垂直線垂足 K，交 $\overline{AB}$ 於 L，交 $\overline{BG}$ 於 M，交 $\overline{DE}$ 於 N。其中 $\overline{BI}$ 交 $\overline{DE}$ 於 O。連 $\overline{GI}$，連 $\overline{EJ}$。
4. 最後在 $\overline{BI}$ 上取一點 Q，使 $\overline{IQ}$ 與 $\overline{BO}$ 等長。並過 Q 作 $\overline{GI}$ 的垂直線，垂足為 P。



【求證過程】

此證明為拼圖式證明，我們先在直角三角形的三邊上分別作正方形，接著以輔助線將大正方形切割成數塊，再透過全等證明，就可以使用這些拼片拼成兩個較小的正方形。也就證明了畢氏定理的關係式。

1. 不難發現 $\Delta ABC, \Delta AJE, \Delta JIN, \Delta IBG$ 為全等三角形，以下我們給出證明：其中 $\Delta ABC, \Delta AJE$ 是因為

$$\overline{AB} = \overline{AJ} \ (\text{正方形的邊}),$$

並且

$$\overline{AC} = \overline{AE} \ (\text{正方形的邊}),$$

以及

$$\angle CAB = 90^\circ - \angle BAE = \angle JAE,$$

所以

$$\Delta ABC \cong \Delta AJE \ (\text{SAS 全等}).$$

因此 $\angle AED = 90^\circ = \angle AEJ$, 可以推得 $D - E - J$ 三點共線.

另一組 $\Delta ABC, \Delta IBG$，是因為

$$\overline{AB} = \overline{BI} \ (\text{正方形的邊}),$$

並且

$$\overline{BC} = \overline{BG} \ (\text{正方形的邊}),$$

以及

$$\begin{aligned}\angle CBA &= 90^\circ - \angle ABG \\ &= \angle GBI,\end{aligned}$$

所以

$$\Delta ABC \cong \Delta IBG \ (\text{SAS 全等}).$$

因此 $\angle BGN = 90^\circ = \angle BGI$，可以推得 $G - N - I$ 三點共線.

下一組是看 $\Delta ABC, \Delta JIN$，因為

$$\overline{AB} = \overline{AJ} \ (\text{正方形的邊}),$$

並且

$$\begin{aligned}\angle CAB &= 90^\circ - \angle CBA \\ &= 90^\circ - \angle AJE \ (\because \Delta ABC \cong \Delta AJE) \\ &= \angle NJI,\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}\angle CBA &= 90^\circ - \angle CAB \\ &= 90^\circ - \angle BIG \ (\because \Delta ABC \cong \Delta IBG) \\ &= \angle JIN,\end{aligned}$$

所以

$$\Delta ABC \cong \Delta JIN \ (\text{ASA 全等}).$$

2. 接著我們看出另一組三角形 $\Delta BHG, \Delta ION$ 的全等性，以下我們給出證明：
因為

$$\overline{BG} = \overline{IN} \ (\because \Delta IBG \cong \Delta JIN),$$

並且

$$\angle BGH = 90^\circ = \angle INO,$$

以及

$$\begin{aligned}\angle HBG &= 90^\circ - \angle HIB \\ &= \angle ION,\end{aligned}$$

所以

$$\Delta BHG \cong \Delta ION \ (\text{AAS 全等}).$$

3. $\Delta AHF, \Delta IQP, \Delta BOD$ 亦為全等的三角形，以下我們給個證明：
其中 $\Delta IQP, \Delta BOD$ 是因為

$$\overline{IQ} = \overline{BO},$$

並且

$$\angle BDO = 90^\circ = \angle IPQ,$$

以及

$$\begin{aligned}\angle QIP &= \angle OIN \\ &= 90^\circ - \angle NOI \\ &= 90^\circ - \angle BOD \ (\because \text{對頂角相等}) \\ &= \angle OBD,\end{aligned}$$

所以

$$\Delta IQP \cong \Delta BOD \ (\text{AAS 全等}).$$

還有 $\Delta BOD, \Delta AHF$ 是因為

$$\begin{aligned}\overline{AF} &= \overline{AC} - \overline{FC} \\ &= \overline{CD} - \overline{CB} \ (\text{正方形的邊}) \\ &= \overline{BD},\end{aligned}$$

並且

$$\angle AFH = 90^\circ = \angle BDO,$$

以及

$$\begin{aligned}\angle FAH &= \angle CAB \\ &= 90^\circ - \angle CBA \\ &= \angle OBD,\end{aligned}$$

所以

$$\Delta BOD \cong \Delta AHF \ (\text{ASA 全等}).$$

4. 綜合以上，我們就可以推導面積關係式：

$$\begin{aligned}\square ABIJ &= \Delta AEJ + ABOE + \Delta JIN + ONPQ + \Delta IQP \\ &= (\Delta AEJ + ABOE + \Delta IPQ) + \Delta JIN + ONPQ \\ &= (\Delta ABC + ABOE + \Delta BOD) + (\Delta ABC + ONPQ) \\ &= \square ACDE + (BCFH + \Delta AHF + ONPQ) \\ &= \square ACDE + (BCFH + \Delta IQP + ONPQ) \\ &= \square ACDE + (BCFH + \Delta ION) \\ &= \square ACDE + (BCFH + \Delta BHG) \\ &= \square ACDE + \square BCFG,\end{aligned}$$

此即為畢氏定理關係式

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：此證明由 M. Rogot 給出，因為 E. Fourrey 的書《*Curiosities of Geometry*》而聞名。記載於 Loomis 的《勾股定理》書中的幾何篇中編號第 138 號。
2. 心得：此證明亦屬於拼圖式的證明，只要證明對應的拼片為全等圖形，則可以透過面積關係來證明畢氏定理。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●		

4. 補充：在數學能力指標中，有這麼幾項：

   S-4-09：能理解三角形的全等定理，並應用於解題和推理。

   以及

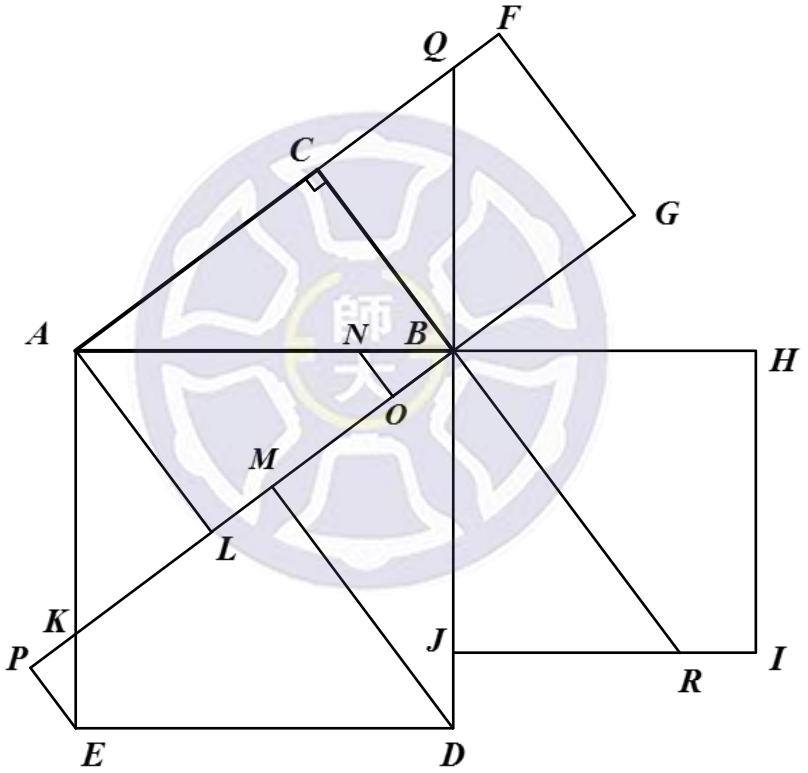
   N-3-22 及 S-3-06：能運用切割重組，理解三角形、平行四邊形與梯形的面積公式。

   此證明正是利用圖形的分割，以及三角形的全等來推理出畢氏定理關係式。

勾股定理證明-G179

【作輔助圖】

1. 以直角三角形 ABC 的 $\overline{AB}$ 、 $\overline{BC}$ 為正方形的一邊，向外作正方形 $ABDE$ 及正方形 $BCFG$ 。
2. 在 $\overline{AB}$ 延伸線上取一點 H ，使 $\overline{BH}$ 與 $\overline{AC}$ 等長，並以 $\overline{BH}$ 為正方形的一邊，向下作正方形 $BHIJ$ 。
3. 延伸 $\overline{GB}$ ，交 $\overline{AE}$ 於 K 。並過 A 作 $\overline{BK}$ 的垂直線，垂足 L ，同樣地過 D 作 $\overline{BK}$ 的垂直線，垂足 M 。
4. 在 $\overline{AB}$ 線段上取一點 N ，使得 $\overline{BN}$ 與 $\overline{KE}$ 等長。並過 N 作 $\overline{BK}$ 的垂直線，垂足 O 。
5. 再從 $\overline{BK}$ 延伸線上取一點 P 使得 $\overline{KP}$ 與 $\overline{NO}$ 等長，連 $\overline{PE}$ 。
6. 最後延伸 $\overline{DB}$ 交 $\overline{CF}$ 於 Q ，延伸 $\overline{CB}$ 交 $\overline{IJ}$ 於 R 。



【求證過程】

此證明屬拼圖式證明，我們先作以直角三角形三邊的三個正方形，再以適當的輔助線將正方形切割，其中大正方形被切割為五塊。接著我們要透過全等圖形的證明，確定可以用這五塊拼出兩個小的正方形，也就以面積的方式證明了畢氏定理的關係式。

1. 我們不難發現 $\Delta ABC, \Delta BAL, \Delta DBM, \Delta BRJ$ 這四個三角形為全等三角形，以下我們給出證明：

   其中 $\Delta ABC, \Delta BAI$ 是因為

   $$\overline{AB} = \overline{BA}(\text{共用邊}),$$

   並且

$$\angle ACB = 90^\circ = \angle BLA,$$

以及

$$\angle CAB = 90^\circ - \angle CBA = \angle ABL,$$

所以

$$\Delta ABC \cong \Delta BAI \text{ (AAS 全等)}.$$

其中另一組 $\Delta ABC, \Delta DBM$ 是因為

$$\overline{AB} = \overline{BD} \text{ (正方形的邊)},$$

並且

$$\angle ACB = 90^\circ = \angle DMB,$$

以及

$$\begin{aligned}\angle CBA &= 90^\circ - \angle CAB \\ &= 90^\circ - \angle ABL \left(\because \Delta ABC \cong \Delta BAL\right) \\ &= \angle DBM,\end{aligned}$$

所以

$$\Delta ABC \cong \Delta DBM \text{ (AAS 全等)}.$$

還有一組 $\Delta ABC, \Delta BRJ$ 是因為

$$\overline{AC} = \overline{BJ},$$

並且

$$\angle ACB = 90^\circ = \angle BJR,$$

以及

$$\begin{aligned}\angle CBA &= 90^\circ - \angle RBJ \\ &= \angle BRJ,\end{aligned}$$

所以

$$\Delta ABC \cong \Delta BRJ \text{ (AAS 全等)}.$$

2. 也可以看出 $\Delta AKL, \Delta BQC$ 為全等三角形，以下給出證明：
因為

$$\overline{AL} = \overline{BC} \left(\because \Delta ABC \cong \Delta BAL\right),$$

並且

$$\angle ALK = 90^\circ = \angle BCQ,$$

以及

$$\begin{aligned}\angle LAK &= 90^\circ - \angle BAL \\ &= 90^\circ - \angle ABC \left(\because \Delta ABC \cong \Delta BAL\right) \\ &= \angle QBC,\end{aligned}$$

所以

$$\Delta AKL \cong \Delta BQC \text{ (ASA 全等)}.$$

3. 而 $\Delta EKP, \Delta BNO$ 亦為全等三角形，以下是它的證明：
因為

$$\overline{KE} = \overline{BN},$$

並且

$$\overline{KP}=\overline{NO},$$

以及

$$\begin{aligned}\angle PKE &= \angle LKA\\ &= 90^{\circ}-\angle KAL\\ &= \angle NBO,\end{aligned}$$

所以

$$\Delta EKP \cong \Delta BNO \text{ (SAS 全等)}.$$

4. 而梯形 $DEPM$ 及梯形 $BRIH$ 為全等的四邊形，以下是它的證明：
因為

$$\begin{aligned}\overline{DM} &= \overline{BJ}\ \left(\because \Delta DBM \cong \Delta BRJ\right)\\ &= \overline{BH}\ \left(\because \text{正方形的邊}\right),\end{aligned}$$

並且

$$\begin{aligned}\overline{DE} &= \overline{BD}\ \left(\because \text{正方形的邊}\right)\\ &= \overline{BH}\ \left(\because \Delta DBM \cong \Delta BRJ\right),\end{aligned}$$

以及

$$\angle PMD = 90^{\circ} = \angle BHI,$$

還有

$$\begin{aligned}\angle MDE &= 90^{\circ}-\angle MDB\\ &= 90^{\circ}-\angle RBJ\left(\because \Delta BDM \cong \Delta BRJ\right)\\ &= \angle RBH,\end{aligned}$$

再加上

$$\angle EPM = 90^{\circ} = \angle RIH,$$

所以

$$\text{梯形}DEPM \cong \text{梯形}BRIH \text{ (SSAAA 全等)}.$$

5. 最後看出梯形 $ALON$,梯形 $BGFQ$ 亦為全等的四邊形，以下我們給出證明：
因為

$$\begin{aligned}\overline{BG} &= \overline{BC}\ \left(\because \text{正方形的邊}\right)\\ &= \overline{AL}\ \left(\because \Delta BQC \cong \Delta AKL\right),\end{aligned}$$

並且

$$\begin{aligned}\overline{AN} &= \overline{AB}-\overline{NB}\\ &= \overline{AE}-\overline{KE}\ \left(\because \text{正方形的邊及}\Delta BNO \cong \Delta EKP\right)\\ &= \overline{AK}=\overline{BQ}\ \left(\because \Delta AKL \cong \Delta BQC\right),\end{aligned}$$

以及

$$\angle QFG = 90^{\circ} = \angle NOL,$$

還有

$$\angle FGB = 90^{\circ} = \angle OLA,$$

再加上

$$\angle QBG = 90^{\circ} - \angle ABL$$
$$= \angle BAL,$$

所以

$$\text{梯形}ALON \cong \text{梯形}BGFQ\ (\text{SASAA 全等}).$$

6. 綜合以上我們可以推導面積關係式：

$$\begin{aligned}\square ABDE &= \Delta AKL + \text{梯形}ALON + \Delta BNO + DEKM + \Delta DBM \\ &= \Delta BQC + \text{梯形}BGFQ + \Delta EKP + DEKM + \Delta BRJ \\ &= \left(\Delta BCQ + \text{梯形}BGFQ\right) + \left[\left(\Delta EKP + DEKM\right) + \Delta BRJ\right] \\ &= \square BCFG + \left(\text{梯形}BHIR + \Delta BRJ\right) \\ &= \square BCFG + \square BHIJ,\end{aligned}$$

此即為畢氏定理關係式

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：此證明的作者姓名不詳，記載於 Loomis 的《勾股定理》中幾何篇中的編號第 179 號。
2. 心得：此證明亦屬於拼圖式的證明法，證明對應的拼片為全等的圖形，再透過面積關系式即可以證明出畢氏定理。證明過程中的切割方式應用到延伸線對頂角相等，只要取對應等長再作垂直就可以輕易得到一個對應全等的三角形拼片。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●		

4. 補充：在數學能力指標中，有這麼幾項：

   S-4-09：能理解三角形的全等定理，並應用於解題和推理。

   以及

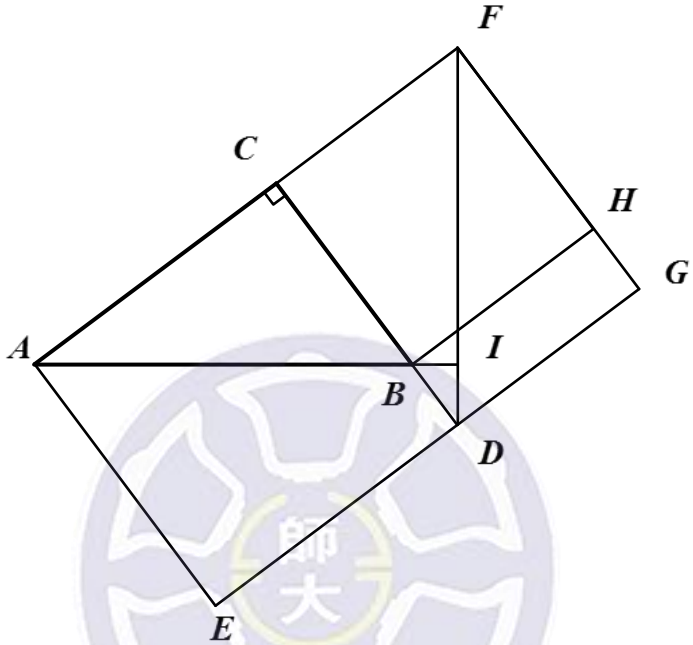
   N-3-22 及 S-3-06：能運用切割重組，理解三角形、平行四邊形與梯形的面積公式。

   此證明正是利用圖形的分割，以及三角形的全等來推理出畢氏定理關係式。

勾股定理證明-G211

【作輔助圖】

1. 以直角三角形 ABC 的 $\overline{AC}$ 邊為邊，向下作正方形 $ACDE$ 。
2. 延長 $\overline{AC}$ 使 $\overline{CF}=\overline{BC}$
3. 過 F 作 $\overline{CD}$ 平行線 $\overline{FG}$ ，使 $\overline{FG}=\overline{CD}$ 。
4. 過 B 作 $\overline{CF}$ 平行線交 $\overline{FG}$ 於 H 。
5. 延長 $\overline{AB}$ 交 $\overline{FD}$ 於 I 。



【求證過程】

先從直角三角形 ABC 的兩邊作向下、向外作正方形，再補至長方形。接著利用三角形面積選擇不同底高計算，再透過乘法的分配律，可以證明斜邊的平方即為兩正方形的面積和，來證明畢氏定理。

1. 首先推得兩個等式：

$$\square AEGF = 2\times\Delta ADF = \overline{FD}\times\overline{AI} = \overline{AF}\times\overline{AE},$$

及

$$\square BDGH = 2\times\Delta BDF = \overline{FD}\times\overline{BI} = \overline{BD}\times\overline{DG}.$$

2. 不難發現 ΔABC 和 ΔDFC 全等，以下是證明：

因為

$$\overline{CA}=\overline{CD}\left(\because \text{正方形的兩邊}\right),$$

並且

$$\overline{BC}=\overline{CF}\left(\because \text{正方形的兩邊}\right),$$

以及

$$\angle ACB = 90^\circ = \angle DCF,$$

所以可以推得

$$\Delta ABC \cong \Delta DFC \text{ (SAS 全等)},$$

因此

$$\overline{AB}=\overline{DF}.$$

3. 綜合以上就可以推導面積等式：

$$\begin{aligned}\overline{AB}^2&=\overline{FD}\times\overline{AB}\\&=\overline{FD}\times\left(\overline{AI}-\overline{BI}\right)\\&=\overline{FD}\times\overline{AI}-\overline{FD}\times\overline{BI}\\&=\overline{AE}\times\overline{AF}-\overline{BD}\times\overline{DG}\\&=\square ACDE+\square BCFH\\&=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2,\end{aligned}$$

此即為畢氏定理關係式。

【註與心得】

1. 來源：此證明是華盛頓州的 Arthur Colburn 給出。收錄在 Loomis 的《勾股定理》中幾何篇的編號第 179 號
2. 心得：此證明善用了一個三角形面積選擇不同底高來計算下的兩種表示法，再透過乘法的分配性質來證明畢氏定理。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●		

4. 補充：在數學能力指標中，有這麼幾項：

S-4-09：能理解三角形的全等定理，並應用於解題和推理。

以及

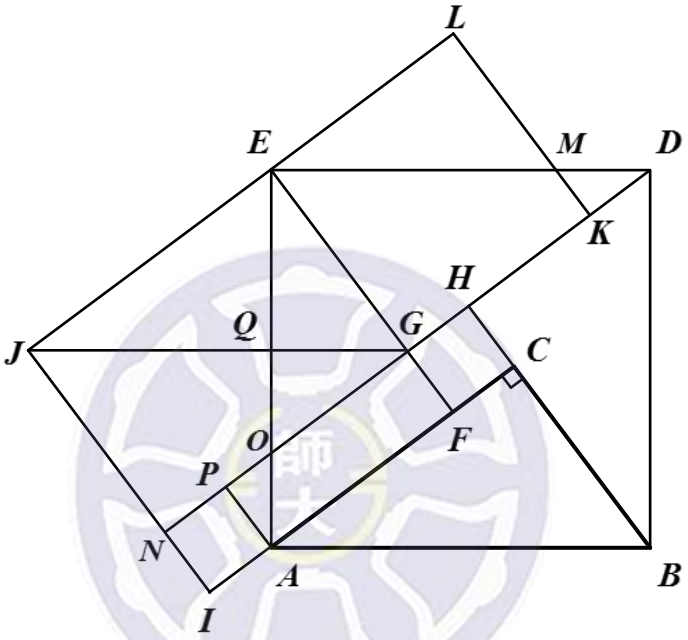
N-3-22 及 S-3-06：能運用切割重組，理解三角形、平行四邊形與梯形的面積公式。

此證明正是利用圖形的分割，以及三角形的全等來推理出畢氏定理關係式。

勾股定理證明-G226

【作輔助圖】

1. 以直角三角形 ABC 的 $\overline{AB}$ 邊為正方形的一邊，向內作正方形 $ABDE$ 。
2. 接著過 E 作 $\overline{AC}$ 的垂直線，垂足 F 。以及過 D 作 $\overline{EF}$ 的垂直線，垂足 G 。並延伸 $\overline{BC}$ 交 $\overline{DG}$ 於 H 。
3. 然後以 $\overline{EF}$ 為正方形的一邊，向左作正方形 $EFIJ$ 。再以 $\overline{EG}$ 為正方形的一邊，向右作正方形 $EGKL$ 。其中 $\overline{LK}$ 交 $\overline{DE}$ 於 M 。
4. 再來將 $\overline{DG}$ 延伸，交 $\overline{IJ}$ 於 N ，並交 $\overline{EA}$ 於 O 。以及過 A 作 $\overline{GN}$ 的垂直線，垂足 P 。最後連 $\overline{JG}$ 與 $\overline{AE}$ 交於 Q 。



【求證過程】

先作輔助圖，得到分別以直角三角形三邊為邊的三個正方形，並且將它們適當地切割。其中對應的區塊為全等圖形，也就是可以透過拼圖的方式將兩個小正方形切成的拼片，用來拼出大正方形。最後由面積關係即可推出畢氏定理的關係式。

1. 不難發現 $\Delta ABC, \Delta BDH, \Delta GJN, \Delta JGE, \Delta EAF, \Delta DEG$ 這六個直角三角形全為全等的直角三角形，以下我們給出證明：

   其中考慮 $\Delta ABC, \Delta BDH$ ，因為

   $$\angle CAB = 90^\circ - \angle CBA = \angle HBD,$$

   並且

   $$\angle ACB = 90^\circ = \angle BHD,$$

   以及

   $$\overline{AB} = \overline{BD}\left(\text{正方形的邊}\right),$$

   所以可以得到

   $$\Delta ABC \cong \Delta BDH \text{ (AAS 全等)}.$$

   另外 $\Delta ABC, \Delta EAF$ 為全等的三角形是因為

$$\overline{AB}=\overline{AE}\left(\text{正方形的邊}\right),$$

並且

$$\angle ACB=90^{\circ}=\angle EFA,$$

以及

$$\angle CBA=90^{\circ}-\angle CAB=\angle EAF\ ,$$

所以

$$\Delta ABC\cong\Delta EAF\ (\text{AAS 全等}).$$

接著看 $\Delta ABC,\Delta DEG$ 的全等，是因為

$$\overline{AB}=\overline{DE}\left(\text{正方形的邊}\right),$$

並且

$$\angle ACB=90^{\circ}=\angle DGE\ ,$$

以及

$$\begin{aligned}\angle CBA&=90^{\circ}-\angle CAB\\&=90^{\circ}-\angle FEA\left(\text{因為}\Delta ABC\cong\Delta EAF\right)\\&=\angle EAF,\end{aligned}$$

所以

$$\Delta ABC\cong\Delta DEG\ (\text{AAS 全等}).$$

還有 $\Delta ABC,\Delta JGE$ 則是因為

$$\begin{aligned}\overline{AC}&=\overline{EF}\left(\text{因為}\Delta ABC\cong\Delta EAF\right)\\&=\overline{EJ}\left(\text{正方形的邊}\right),\end{aligned}$$

並且

$$\overline{BC}=\overline{EG}\left(\text{因為}\Delta ABC\cong\Delta DEG\right),$$

以及

$$\angle ACB=90^{\circ}=\angle JEG,$$

所以

$$\Delta ABC\cong\Delta JGE\ (\text{SAS 全等}).$$

最後一組 $\Delta JGE,\Delta GJN$ 是因為在長方形 $EGNJ$ 中

$$\overline{JG}=\overline{GJ}\ ,$$

並且

$$\overline{JN}=\overline{EG}\ (\text{長方形的對邊}),$$

以及

$$\overline{GN}=\overline{EJ}\ (\text{長方形的對邊}),$$

所以

$$\Delta JGE\cong\Delta GJN\ (\text{SSS 全等}).$$

2. 接著也可以看出 $\Delta EOG,\Delta EML$ 為全等三角形，以下是證明：
因為有

$$\overline{EG}=\overline{EL}\left(\text{正方形的邊}\right),$$

並且

$$\angle EGO = 90^\circ = \angle ELM\ ,$$

以及

$$\angle GEO = 90^\circ - \angle DEG = \angle LEM\ ,$$

所以可以得到

$$\Delta EOG \cong \Delta EML\ (\text{ASA 全等}).$$

3. 而 $\Delta AOP, \Delta DMK$ 亦為全等三角形，同樣地給出證明：

因為

$$\begin{aligned}\overline{OA} &= \overline{EA} - \overline{EO}\\ &= \overline{ED} - \overline{EM}\ (\text{因為正方形的邊以及}\Delta EOG \cong \Delta EML)\\ &= \overline{MD},\end{aligned}$$

並且有

$$\angle APO = 90^\circ = \angle DKM\ ,$$

以及

$$\begin{aligned}\angle POA &= \angle GOE\ (\text{對頂角})\\ &= \angle LME\ (\text{因為}\Delta EOG \cong \Delta EML)\\ &= \angle DMK\ (\text{對頂角}),\end{aligned}$$

所以

$$\Delta AOP \cong \Delta DMK\ (\text{AAS 全等}).$$

4. 明顯地正方形 $APNI$ 與正方形 $CFGH$ 全等：

是因為 $\overline{GF} = \overline{PA}$ (長方形的對邊), 所以正方形是全等的.

5. 然後我們考慮大正方形面積的拆解：

$$\begin{aligned}\square ABDE &= \Delta ABC + \Delta BDH + \Delta DMK + EGKM + \Delta EOG + AFGO + \square CFGH\\ &= \Delta GJN + \Delta JGE + \Delta AOP + EGKM + \Delta EML + AFGO + \square AINP\\ &= (\Delta GJN + \Delta JGE + \Delta AOP + AFGO + \square AINP) + (\Delta EML + EGKM)\\ &= \square EFIJ + \square EGKL.\end{aligned}$$

以上面積關係式，也就是畢氏定理關係式

$$c^2 = a^2 + b^2\ .$$

【註與心得】

1. 來源：此證明來自 1918 年的 R. A. Bell, 他還提供了另外三種類似的證明方式。它收錄在 Loomis 的《勾股定理》的幾何篇中編號第 226 號。
2. 心得：此證明是屬拼圖式的證明方式，每一個拼片不只是面積相同，還是對應地全等。所以在理解上相當容易，學生願意嚐試應該也可以以類似的拆解方法來證明畢氏定理。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●	●		●	

4. 補充：在數學能力指標中，有這麼幾項：

   S-4-09：能理解三角形的全等定理，並應用於解題和推理。

   以及

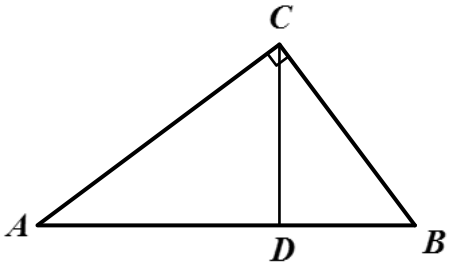
   N-3-22 及 S-3-06：能運用切割重組，理解三角形、平行四邊形與梯形的面積公式。

   此證明正是利用圖形的分割，以及三角形的全等來推理出畢氏定理關係式。

勾股定理證明-G230

【作輔助圖】

1. 直角三角形 ABC 中，過 C 作 $\overline{AB}$ 垂直線交 $\overline{AB}$ 於 D 。



【求證過程】

先證明三角形 ABC 、三角形 ACD 、三角形 CBD 彼此相似，再利用相似形面積比例特性即可推得畢氏定理關係式。

1. 子母相似性質可以看出這些直角三角形為相似的三角形，以下我們給個證明：

   因為

$$\angle C = \angle CDA = \angle CDB = 90^\circ,$$

   且

$$\angle A = \angle A \text{ 且 } \angle B = \angle B,$$

   所以

$$\Delta ABC \sim \Delta \mathrm{ACD} \sim \Delta CBD \,(\text{AA 相似}).$$

2. 接著要利用相似形面積等於對應邊形的平方比：

   因為

$$\Delta ABC : \Delta ACD : \Delta CBD = \overline{AB}^2 : \overline{AC}^2 : \overline{BC}^2,$$

   所以可以令 $\Delta ABC = \overline{AB}^2 \cdot k$ ， $\Delta ACD = \overline{AC}^2 \cdot k$ ， $\Delta CBD = \overline{BC}^2 \cdot k$ ，其中 $k \neq 0$

3. 再利用面積分割得到的等式推導：

$$\Delta ABC = \Delta ACD + \Delta BCD$$

$$\Rightarrow \overline{AB}^2 \cdot k = \overline{AC}^2 \cdot k + \overline{BC}^2 \cdot k$$

$$\Rightarrow \overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2,$$

   此即為畢氏定理關係式。

【註與心得】

1. 來源：此證明來自當時 19 歲的年輕人 Stanley Jashemski, 1934。收錄在 Loomis 的《勾股定理》中幾何篇的編號第 230 號
2. 心得：這個證明最棒的地方是從頭到尾只作了一條輔助線。而再利用中學就可以知道的相似形面積比例性質，就可以證明完畢。對於不喜歡作輔助線，較喜歡輕巧的證明手法的學生，是個很適合的學習內容。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●		

4. 補充：在數學能力指標裡，有這麼幾項：

   S-4-15：能理解三角形和多邊形的相似性質，並應用於解題和推理。

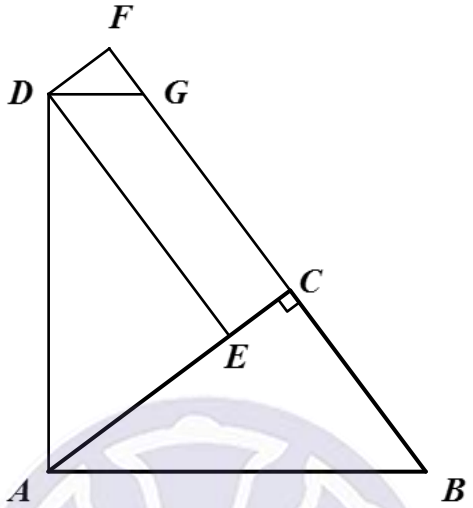
   C-E-02：能由解題的結果重新審視情境，提出新的觀點或問題。

   在這個證明裡特別地利用到了相似形的面積比例性質，並在學習上連結了子母相似性質以及勾股定理。

勾股定理證明-G236

【作輔助圖】

1. 直角三角形 ABC 中，過 A 作 $\overline{AB}$ 的垂直線 $\overline{AD}$ 並與 $\overline{AB}$ 等長。
2. 接著過 D 作 $\overline{AC}$ 的垂足 E。
3. 延伸 $\overline{BC}$ 至 F 使 $\overline{CF}$ 與 $\overline{DE}$ 等長，並連 $\overline{DF}$。
4. 最後過 D 作 $\overline{AB}$ 的平行線，交 $\overline{CF}$ 於 G。



【求證過程】

先作輔助線作出四邊形 $ABFD$ 及其分割。在證明一組全等三角形及一組相似三角形後，透過相似三角形邊長成比例的性質，將小三角形的三邊都以代數 a,b,c 表示。最後由兩種方式的面積拆解得到的等式，可以整理推導出畢氏定理關係式。

1. 不難發現 ΔABC 及 ΔDAE 為全等的直角三角形，以下我們給出證明：
   其中因為
   $$\angle ACB = 90^\circ = \angle DEA,$$
   並且
   $$\overline{AB} = \overline{AD},$$
   以及
   $$\angle CBA = 90^\circ - \angle CAB = \angle EAD,$$
   所以可以得到
   $$\Delta ABC \cong \Delta DAE \text{ (AAS 全等)}.$$
2. 也可以看出 ΔABC 及 ΔDGF 相似，以下也給個證明：
   因為 $\angle DFG = 90^\circ = \angle ACB$, $\angle FGD = \angle CBA$ (同側內角), 所以可以得到 $\Delta ABC \sim \Delta DGF$ (AA 相似).
3. 將 ΔDGF 的三邊長皆以直角三角形 ΔABC 的三邊 a,b,c 表示：
   其中
   $$\overline{DF} = \overline{CE} = b - a,$$
   另外由 $\Delta ABC \sim \Delta DGF$ 可以得知

$$\overline{DG}=\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}\cdot\overline{DF}=\frac{c}{b}(b-a)=c\left(1-{}^{a}\!/_{b}\right),$$

以及

$$\overline{GF}=\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}\cdot\overline{DF}=\frac{a}{b}(b-a)=a\left(1-{}^{a}\!/_{b}\right).$$

4. 由兩種拆解方式得到的面積等式開始推導：

因為

$$\Delta ABC+ACFD=ABFD=\Delta DGF+DGBA,$$

所以可以得到面積關係式

$$\frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}b\left[b+(b-a)\right]=\frac{1}{2}a\left(1-\frac{a}{b}\right)(b-a)+\frac{1}{2}c\left[c\left(1-\frac{a}{b}\right)+c\right]$$

展開得到

$$\frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}b^2+\frac{1}{2}b^2-\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}ab-\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{2}a^2+\frac{a^3}{2b}+\frac{1}{2}c^2-\frac{ac^2}{2b}+\frac{1}{2}c^2,$$

整理出

$$b^2=c^2-a^2+\frac{1}{2}ab+\frac{a^3}{2b}-\frac{ac^2}{2b},$$

$$a^2+b^2-c^2-\frac{a}{2b}\left(a^2+b^2-c^2\right)=0,$$

也就是

$$\left(a^2+b^2-c^2\right)\left(1-\frac{a}{2b}\right)=0,$$

其中已知 $a\neq 2b$, 因此 $a^2+b^2-c^2=0$.

此即為畢氏定理關係式

$$a^2+b^2=c^2.$$

【註與心得】

1. 來源：此證明是來自 J. G. Thompson 在 1888 年的證明。收錄在 Loomis 的《勾股定理》中的幾何篇中編號第 236 號。
2. 心得：這個證明用到的數學知識雖然並非困難，但是代數化簡的計算過程複雜。特別是其中不直接簡單地得到畢氏定理關係式，而是從因式分解中整理出來，在教學上不建議，比較像是拼湊出來的結果。

3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●	●			

4. 補充：數學能力指標中，有幾項是這樣：

   S-4-15：能理解三角形和多邊形的相似性質，並應用於解題和推理。

   以及

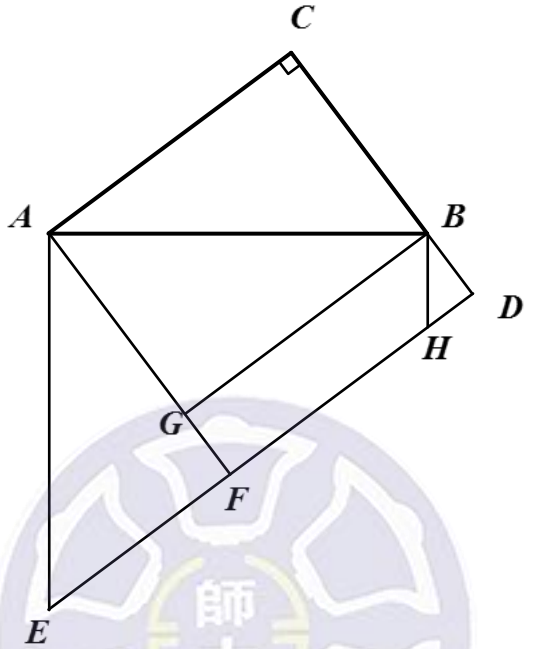
   N-3-22 及 S-3-06：能運用切割重組，理解三角形、平行四邊形與梯形的面積公式。

   此證明正是利用圖形的分割，以及三角形的相似再透過等量公理來推理出畢氏定理關係式。

勾股定理證明-G237

【作輔助圖】

1. 以直角三角形 ABC 的 $\overline{AC}$ 為邊，向內作正方形 $ACDF$ 。
2. 接著在 $\overline{DF}$ 延伸線上取一點 E 使 $\overline{FE}=\overline{CB}$ ，並連 $\overline{AE}$ 。
3. 然後過 B 作 $\overline{AB}$ 的垂直線，交 $\overline{DE}$ 於 H 。以及過 B 作 $\overline{AF}$ 的垂線，交 $\overline{AF}$ 於 G 。



【求證過程】

在適當地作輔助線後，我們會在直角三角形 ΔABC 的下方製造出四邊形。接著透過這個四邊形的兩個拆解方式，加上相似三角形的邊長成比例的特性，以代數表示面積等式，再運算推導方程式，就可以得到畢氏定理關係式。

1. 不難發現 ΔABC 及 ΔAEF 為全等三角形，以下我們給出證明：
   因為
   $$\overline{AC}=\overline{AF}\left(\because \text{正方形}ACDF\text{的兩邊}\right),$$
   並且
   $$\overline{EF}=\overline{BC},$$
   以及
   $$\angle AFE=90^{\circ}=\angle ACB,$$
   所以可以得到
   $$\Delta ABC\cong\Delta AEF\ (\text{SAS 全等}).$$

2. 接著我們看出 ΔABC 以及 ΔBDH 為相似三角形，以下給個證明：
   因為
   $$\angle CBA=90^{\circ}-\angle DBH=\angle DHB,$$
   並且

$$\angle ACB = 90^\circ = \angle BDH\ ,$$

所以可以得到

$$\Delta ABC \sim \Delta BDH \text{ (AA 相似)}.$$

3. 我們依相似形性質將 ΔBDH 的三邊以 ΔABC 的三邊 $\overline{BC} = a, \overline{AC} = b, \overline{AB} = c$ 表示：

其中

$$\overline{BD} = \overline{CD} - \overline{CB} = b - a\ .$$

另一方面因為

$$\Delta BDH \sim \Delta ABC\ ,$$

所以

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{DH}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}},$$

可以推得

$$\overline{DH} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} \cdot \overline{BD} = \frac{a}{b}(b-a) = a\left(1 - {}^{a}\!/_{b}\right).$$

同理

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{BH}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}},$$

可以推得

$$\overline{BH} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \cdot \overline{BD} = \frac{c}{b}(b-a) = c\left(1 - {}^{a}\!/_{b}\right).$$

4. 然後就可以將同一個四邊形以兩種不同的方式拆解，並考慮其面積：

因為

$$\Delta AEF + AFDB = ABDE = AEHB + \Delta BHD\ ,$$

並以 a, b, c 表示成

$$\frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}b\left[b + (b-a)\right] = \frac{1}{2}c\left[c + c\left(1 - {}^{a}\!/_{b}\right)\right] + \frac{1}{2}a(b-a)\left(1 - {}^{a}\!/_{b}\right),$$

展開可以得到

$$\frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}c^2 + \frac{1}{2}c^2 - \frac{ac^2}{2b} + \frac{1}{2}ab - \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}a^2 + \frac{a^3}{2b},$$

並可以化簡成

$$b^2 = c^2 - a^2 + \frac{1}{2}ab - \frac{ac^2}{2b} + \frac{a^3}{2b} \Rightarrow \left(a^2 + b^2 - c^2\right)\left(1 - \frac{a}{2b}\right) = 0\ ,$$

其中因為 $b > a$ 所以 ${}^{a}\!/_{2b} \neq 1$, 所以 $a^2 + b^2 - c^2 = 0$,

也就是畢氏定理關係式

$$a^2 + b^2 = c^2\ .$$

【註與心得】

6. 來源：此證明是作者 Loomis 在 1900 年的八月所給出，參考了 J. G. Thompson 的證明。收錄在《勾股定理》的幾何篇中編號第 237 號。
7. 心得：這個證明用到的數學知識雖然並非困難，但是代數化簡的計算過程複雜。特別是其中不直接簡單地得到畢氏定理關係式，而是從因式分解中整理出來，在教學上不建議，比較像是拼湊出來的結果。
8. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●	●			

9. 補充：數學能力指標中，有幾項是這樣：

   S-4-15：能理解三角形和多邊形的相似性質，並應用於解題和推理。

   以及

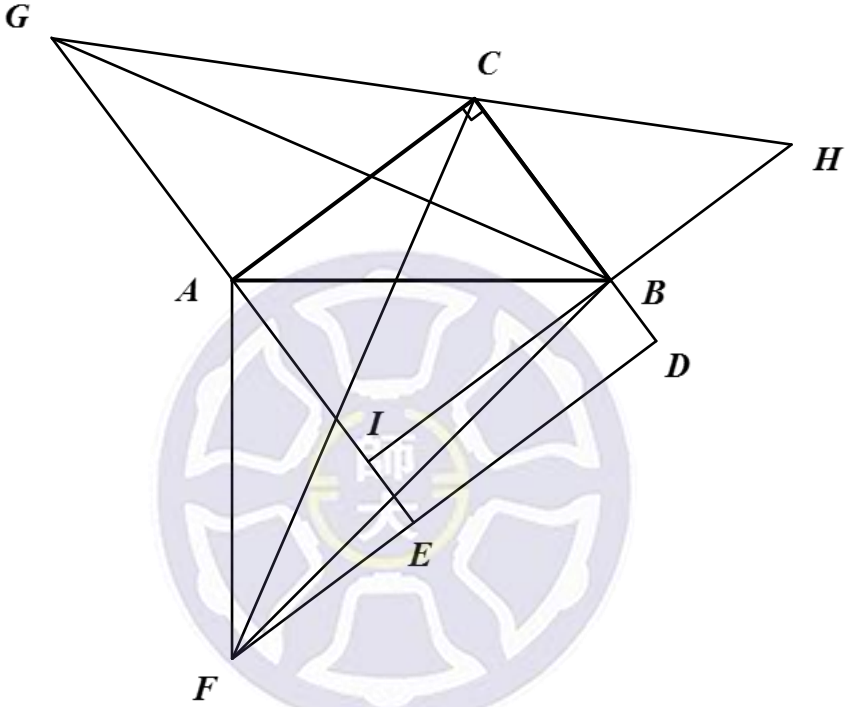
   N-3-22 及 S-3-06：能運用切割重組，理解三角形、平行四邊形與梯形的面積公式。

   此證明正是利用圖形的分割，以及三角形的相似再透過等量公理來推理出畢氏定理關係式。

勾股定理證明-G238

【作輔助圖】

1. 以直角三角形 ABC 的 $\overline{AC}$ 邊為正方形的一邊，向內作正方形 $ACDE$ 。
2. 過 A 向外作 $\overline{AB}$ 的垂直線，並在垂直線上取一點 F ，使 $\overline{AF}$ 與 $\overline{AB}$ 等長。同樣地過 A 向外作 $\overline{AC}$ 的垂直線，並在垂直線上取一點 G ，使 $\overline{AG}$ 與 $\overline{AC}$ 等長。再過 B 向外作 $\overline{BC}$ 的垂直線，並在垂直線上取一點 H ，使 $\overline{BH}$ 與 $\overline{BC}$ 等長。接著連起 $\overline{BF}$ 、$\overline{CG}$ 以及 $\overline{CH}$ 。可以得到三個等腰直角三角形 $\Delta ABF, \Delta ACG, \Delta BCH$ 。
3. 過 B 作 $\overline{AC}$ 的平行線，交 $\overline{AE}$ 於 I 。最後連 $\overline{EF}$ 。



【求證過程】

輔助線圖中原直角三角形及大的等腰直角三角形組合的四邊形重新切成兩個三角形，也可以看到原直角三角形及兩個小等腰直角三角形組合的四邊形重新切成兩個三角形。而我們可以利用全等及同底等高證明這分別的兩塊三角形的面積是對應相等的。最後我們透過等量原理推導面積等式，就可以得證大等腰直角三角形的面積，等於兩個小等腰直角三角形的面積和，也就完成了這個畢氏定理的證明。

1. 不難看出 $\Delta ABC, \Delta AFE$ 為全等的三角形，以下我們給出證明：
   其中因為
   $$\overline{AB} = \overline{AF},$$
   並且
   $$\overline{AC} = \overline{AE} (\because \text{正方形的邊}),$$
   以及
   $$\angle CAB = 90^\circ - \angle BAE = \angle FAE,$$

所以

$$\Delta ABC \cong \Delta AFE \text{ (SAS 全等)}.$$

1. 接著以同底等高方式證明ΔBCF面積$=\Delta HBG$面積：
   考慮ΔBCF以$\overline{BC}$為底，高為$\overline{DF}$；ΔHBG以$\overline{BH}$為底，高為$\overline{GI}$。
   其中

$$\overline{BC}=\overline{BH}$$

   並且

$$\begin{aligned}\overline{DF}&=\overline{DE}+\overline{EF}\\&=\overline{AC}+\overline{BC}\left(\because \text{正方形的邊以及}\Delta ABC\cong AFE\right)\\&=\overline{GA}+\overline{AI}\ \left(\because \text{等腰直角三角形的邊以及長方形的邊}\right)\\&=\overline{GI},\end{aligned}$$

   所以有ΔBCF與ΔHBG同底等高，因此它們的面積相同。
2. 最後我們推導面積關係式：

$$\begin{aligned}\Delta ABF+\Delta ABC&=\text{四邊形}ACBF\\&=\Delta CAF+\Delta CFB\\&=\Delta BAG+\Delta BGH\\&=\text{四邊形}ABHG\\&=\Delta CGA+\Delta CHB+\Delta ABC.\end{aligned}$$

3. 從上式可以得到$\Delta ABF=\Delta CGA+\Delta CHB$也就是說
   $2\Delta ABF=2\Delta CGA+2\Delta CHB$,
   此即為畢氏定理關係式

$$c^2=a^2+b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：此證明來自 1821 年的 Hoffmann 所寫下，在 1880 年的書《*Jury Wipper*》中被找到。Loomis 將這個證明記載於《勾股定理》中的幾何篇編號第 238 號。
2. 心得：這個證明使用到的為等腰直角三角形，有別於一般常見的正方形面積的證明。利用到四邊形的兩種分割法，證明出大的等腰直角三角形面積可以表示成另外兩個小的直角三角形面積。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●			●	

4. 補充：在數學能力指標中，有這麼幾項：

   S-4-09：能理解三角形的全等定理，並應用於解題和推理。

   以及

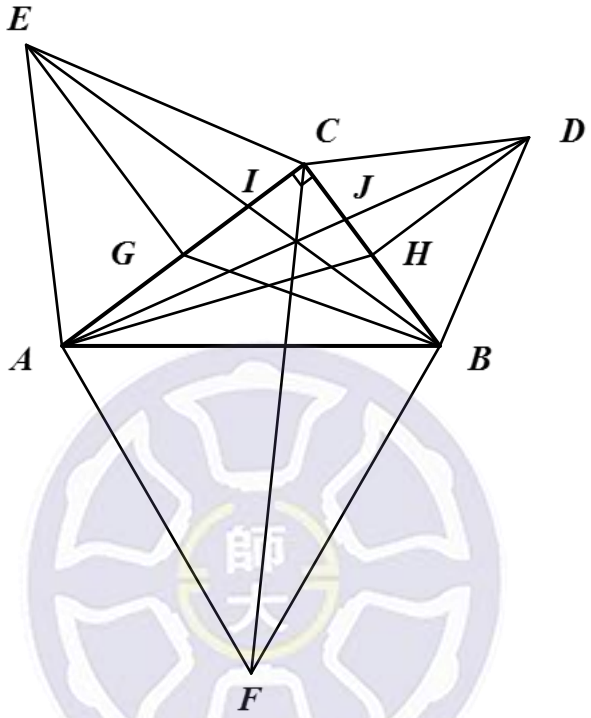
   N-3-22 及 S-3-06：能運用切割重組，理解三角形、平行四邊形與梯形的面積公式。

   此證明正是利用圖形的分割，以及三角形的全等來推理出畢氏定理關係式。

勾股定理證明-G239

【作輔助圖】

1. 分別直角三角形 ABC 的 $\overline{AB}$ 、 $\overline{BC}$ 及 $\overline{AC}$ 為邊向外作正三角形 BCD 、正三角形 ACE 及正三角形 ABF 。
2. 過 E 作 $\overline{AC}$ 垂直線交 $\overline{AC}$ 於 G ，過 D 作 $\overline{BC}$ 垂直線交 $\overline{BC}$ 於 H 。
3. 連 $\overline{BE}$ 交於 I 、連 $\overline{AD}$ 與 $\overline{BC}$ 交於 J
4. 連 $\overline{BG}$ 、 $\overline{AH}$ 、 $\overline{CF}$ 。



【求證過程】

先證明其中兩組三角形面積相等，也不難發現其中有兩組全等的三角形。再透過面積分割就可以得到大正三角形的面積會等於兩個小正三角形的面積和，推導出畢氏定理的關係式。

1. 先證明三角形 CIE 與三角形 BIG 面積相等，再同理可得 $\Delta CDJ = \Delta AHJ$ ：

   因為 $\overline{BC}$ 平行於 $\overline{GE}$ (內錯角相等)，所以 $\Delta EGC = \Delta EGB$ (同底等高), 因此

   $$\Delta CIE = \Delta EGC - \Delta EIG = \Delta EGB - \Delta EIG = \Delta BIG,$$

   同理，因為 $\overline{CA}$ 平行於 $\overline{DH}$ ，所以

   $$\Delta CDJ = \Delta AHJ.$$

2. 不難發現三角形 CAF 與三角形 EAB 全等，同理可證三角形 CBF 與三角形 DBA 全等，以下我們給出證明：

   因為

   $$\overline{CA} = \overline{EA} \text{(正三角形邊長)},$$

   且

$$\overline{BA}=\overline{FA}\,(\text{正三角形邊長}),$$

又

$$\begin{aligned}\angle CAF &= \angle CAB + 60^\circ \\ &= \angle EAB,\end{aligned}$$

因此

$$\Delta CAF \cong \Delta EAB\,(\text{SAS 全等}).$$

同理可證

$$\Delta CBF \cong \Delta DBA.$$

3. 接著就可以推導面積關係式：

$$\begin{aligned}\Delta ABF &= \Delta ACF + \Delta BCF - \Delta ABC \\ &= \Delta EAB + \Delta DAB - \Delta ABC \\ &= \left(\Delta EAI + \Delta ABG + \Delta BIG\right) + \left(\Delta BDJ + \Delta ABH + \Delta HAJ\right) - \Delta ABC \\ &= \left(\Delta EAI + \frac{1}{2}\Delta ABC + \Delta EIC\right) + \left(\Delta BDJ + \frac{1}{2}\Delta ABC + \Delta CJD\right) - \Delta ABC \\ &= \left(\Delta EAI + \Delta EIC\right) + \left(\Delta DBJ + \Delta DJC\right) \\ &= \Delta ACE + \Delta BCD,\end{aligned}$$

再透過相似形面積比為邊長平方比關係得

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2.$$

此即為畢氏定理關係式。

【註與心得】

1. 來源：此證明是作者 Loomis 在 1900 年寫下的，使用了非正方形的其它多邊形。收錄在 Loomis 的《勾股定理》中幾何篇的編號第 239 號
2. 心得：這個證明用到了比較不易觀察到的特性，梯形的對角線兩側的三角形面積會均等。以及用了旋轉的想法來觀察三角形的全等。另外在同理可證的部分也可以供給學生當作練習。我想這些都是教學上很棒的材料。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●		

4. 補充：在數學能力指標中，有這麼幾項：

   S-4-09：能理解三角形的全等定理，並應用於解題和推理。

   以及

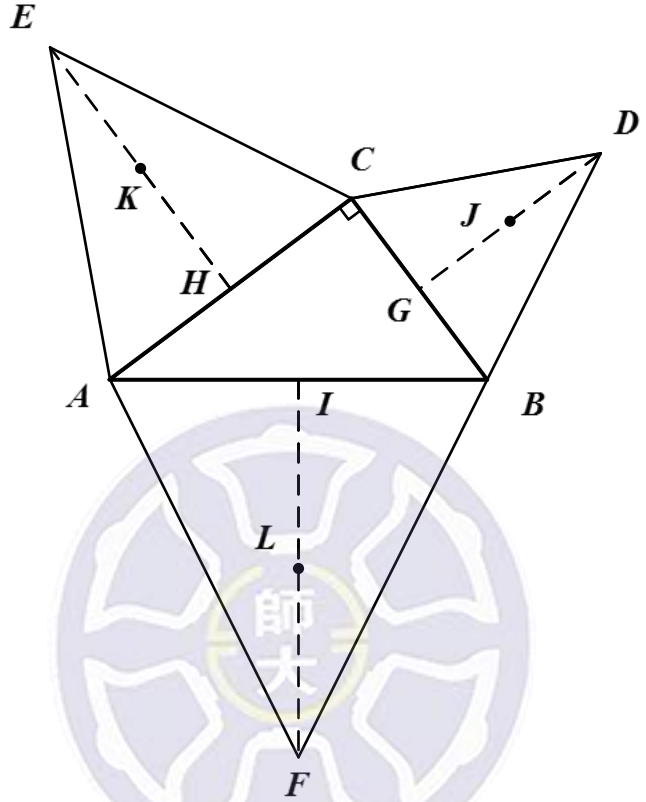
   N-3-22 及 S-3-06：能運用切割重組，理解三角形、平行四邊形與梯形的面積公式。

   此證明正是利用圖形的分割，以及三角形的全等來推理出畢氏定理關係式。

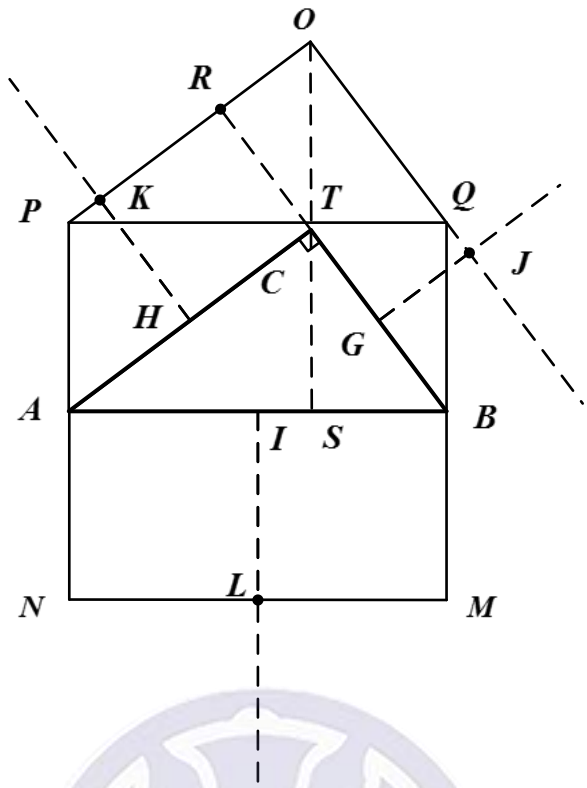
勾股定理證明-G241

【作輔助圖】

1. 在直角三角形 ABC 的三邊上分別以三邊為底邊作相似的等腰三角形 $\Delta BCD, \Delta ACE, \Delta ABF$ 。
2. 作三等腰三角形的高，分別為 $\overline{DG}, \overline{EH}, \overline{FI}$ 。
3. 在三個高上分別取中點 J, K, L 。



4. 以 $\overline{AB}$ 邊為長方形的一邊，L 為對邊上的一點，作 $\square ABML$ 。
5. 接著過 J, K 分別作平行於 $\overline{BC}, \overline{AC}$ 的平行線，交於 O ，並連 $\overline{OC}$ 並延伸交 $\overline{AB}$ 於 S ，交 $\overline{PQ}$ 於 T 。
6. 最後分別過 A, B 作 $\overline{OC}$ 的平行線，交過 K, J 平行於 $\overline{AC}, \overline{BC}$ 的平行線於 P, Q ，連 $\overline{PQ}$ 。其中四邊形 $ACOP$ 及 $BCOQ$ 為平行四邊形。及過 C 作 $\overline{OP}$ 的垂直線，垂足 R 。



【求證過程】

先證明作圖的方式製造出來的三邊上的長方形及平行四邊形，分別與三邊上的相似等腰三角形的面積相等。因此我們要證明的目標就可以轉變為兩個平行四邊形面積和等於長方形面積。接著透過平行四邊形的特性以及相似三角形的邊長成比例，我們就可以證明它們的面積關係式。最後因為我們知道相似三角形的面積比就是邊長平方比，也就證明了畢氏定理。

1. 證明三角形面積與對應的四邊形面積相等：

   我們有

$$\Delta BCD=\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{GD}=\overline{BC}\times\left(\frac{1}{2}\overline{GD}\right)=\overline{BC}\times\overline{GJ}=\square BCOQ,$$

   還有

$$\Delta ACE=\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{HE}=\overline{AC}\times\left(\frac{1}{2}\overline{HE}\right)=\overline{AC}\times\overline{HP}=\square ACOP,$$

   以及

$$\Delta ABF=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{IF}=\overline{AB}\times\left(\frac{1}{2}\overline{IF}\right)=\overline{AB}\times\overline{IL}=\square ABMN.$$

2. 接著我們證明 $\Delta PQO,\Delta ABC$ 為全等的直角三角形：

   因為

$$\overline{AC}=\overline{PO}\left(\because\square ACOP\right),$$

   並且

$$\overline{BC}=\overline{QO}\left(\because\square BCOQ\right),$$

以及

$$\begin{aligned}\angle POQ &= \angle POC + \angle QOC \\ &= (180^\circ - \angle ACO) + (180^\circ - \angle BCO) \quad (\because \square ACOP, \square BCOQ) \\ &= 360^\circ - \angle ACO - \angle BCO \\ &= \angle ACB,\end{aligned}$$

所以

$$\Delta ABC \cong \Delta PQO \text{ (SAS 全等)}.$$

3. 證明 $\Delta COR, \Delta ABC$ 為相似三角形：

因為

$$\angle CRO = 90^\circ = \angle ACB,$$

並且

$$\frac{\overline{CR}}{\overline{OR}} = \frac{\overline{HK}}{\overline{GJ}} = \frac{\frac{1}{2}\overline{HE}}{\frac{1}{2}\overline{GD}} = \frac{\overline{HE}}{\overline{GD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} \quad (\because \Delta BCD \sim \Delta ACE),$$

所以我們有

$$\Delta COR \sim \Delta ABC \text{ (SAS 相似)}.$$

4. 證明 $\overline{OC}$ 與 $\overline{IL}$ 等長：

因為

$$\frac{\overline{OC}}{\overline{RC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} (\because \Delta ABC \sim \Delta COR),$$

並且

$$\begin{aligned}\frac{\overline{KH}}{\overline{AC}} &= \frac{1}{2}\frac{\overline{EH}}{\overline{AC}} \\ &= \frac{1}{2}\frac{\overline{FI}}{\overline{AB}} (\because \Delta ACE \sim \Delta ABF) \\ &= \frac{\overline{IL}}{\overline{AB}},\end{aligned}$$

所以我們可以推得

$$\overline{OC} = \frac{\overline{RC}}{\overline{AC}} \cdot \overline{AB} = \frac{\overline{KH}}{\overline{AC}} \cdot \overline{AB} = \frac{\overline{IL}}{\overline{AB}} \cdot \overline{AB} = \overline{IL}.$$

5. 證明平行四邊形四邊形 $ABQP$ 為長方形：

因為

$$\begin{aligned}\angle PAB &= \angle PAC + \angle CAB \\ &= \angle COR + \angle OCR (\because \square ACOP \text{對角相等以及} \Delta ABC \sim \Delta COR) \\ &= 90^\circ,\end{aligned}$$

又四邊形 $ABQP$ 為平行四邊形, 所以它為長方形.

6. 最後讓我們來證明面積關係式：

$$
\begin{aligned}
\Delta ACE+\Delta BCD &= \square PACO+\square QBCO \\
&= \square PAST+\square QBST \quad (\because \text{同底等高}) \\
&= \square PABQ \\
&= \overline{PA}\times\overline{PQ} \\
&= \overline{CO}\times\overline{AB} \quad (\because \square PACO \text{以及} \Delta ABC\cong\Delta PQO) \\
&= \overline{IL}\times\overline{AB} \\
&= \square ABMN \\
&= \Delta ABF.
\end{aligned}
$$

又因為相似形的面積比就是邊長平方比,

$$k\cdot\overline{BC}^2+k\cdot\overline{AC}^2=k\cdot\overline{AB}^2,$$

也就可以得到畢氏定理關係式,

$$\overline{BC}^2+\overline{AC}^2=\overline{AB}^2.$$

【註與心得】

1. 來源：此證明源自於 Loomis，他在《勾股定理》一書中提到他在 1933 年十月寫下這個證明，在那之前他不曾聽過看過以直角三角形三邊上任意高的相似等腰三角形來證明畢氏定理。收錄在 Loomis 的《勾股定理》中幾何篇的編號第 241 號
2. 心得：這個證明在《勾股定理》幾何篇中特別具有意義，我們可以把一些看似困難的直角三角形邊上相似形面積證明題，先利用等面積作圖變成邊上的相似等腰三角形，再引述這個證明的過程，即可以證明畢氏定理。例如接下來的篇號 242，他原先的問題是邊上的相似五邊形或是正五邊形，都可以變換成這個問題。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●		

4. 補充：在數學能力指標中，有這麼幾項：

   S-4-09：能理解三角形的全等定理，並應用於解題和推理。

   以及

   N-3-22 及 S-3-06：能運用切割重組，理解三角形、平行四邊形與梯形的面積公式。

   此證明正是利用圖形的分割，以及三角形的全等來推理出畢氏定理關係式。

勾股定理證明-G242-1

【作輔助圖】

1. 在直角三角形的三邊上作相似的五邊形 $ACDEF$ ，五邊形 $CBD'E'F'$ 及五邊形 $BAD''E''F''$ 。

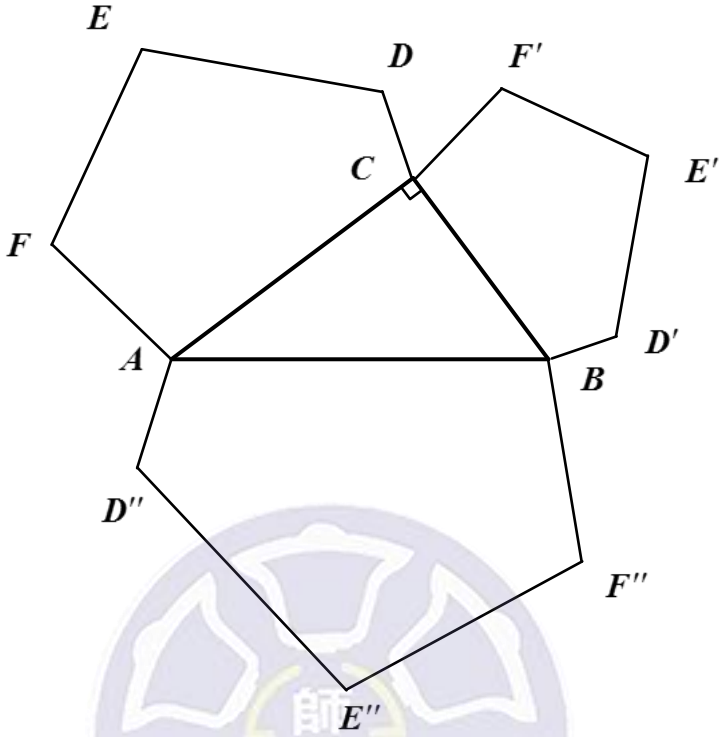


Fig. 1

接著我們以五邊形 $ACDEF$ 為示範作圖：

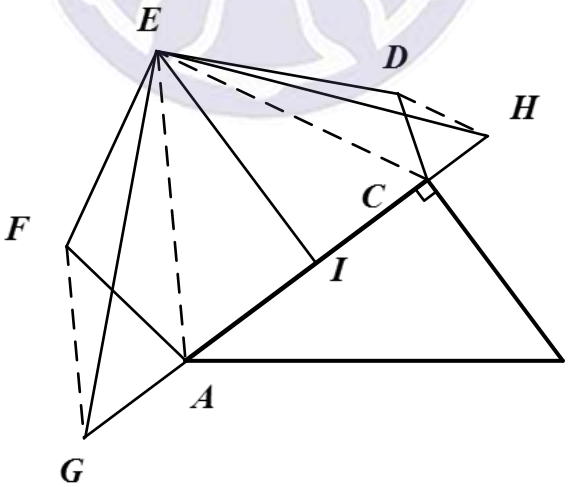


Fig. 2

2. 連 $\overline{EA},\overline{EC}$ ，並過 F 作平行於 $\overline{EA}$ 的直線，交 $\overline{AC}$ 延伸線於 G ；過 D 作平行於 $\overline{EC}$ 的直線，交 $\overline{AC}$ 延伸線於 H 。連 $\overline{EG},\overline{EH}$ 。
3. 過 E 作 $\overline{GH}$ 的垂直線，垂足 I 。

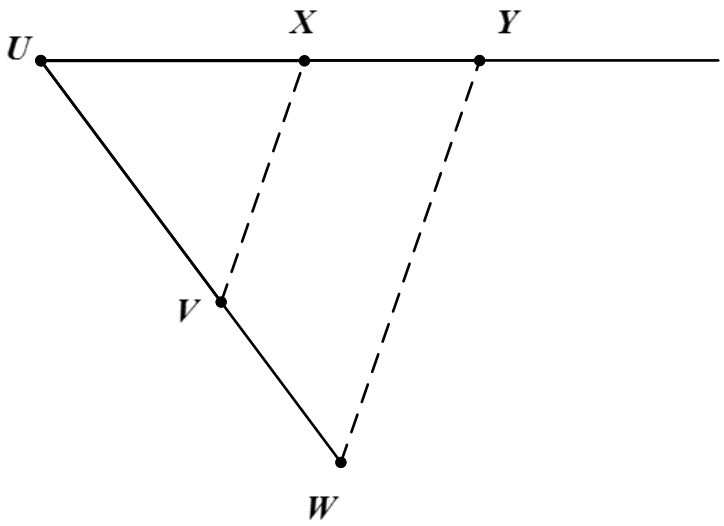


Fig. 3

4. 在平面上作一$\overline{UV}$與$\overline{AC}$等長，並在$\overline{UV}$延伸線上取一點W使得$\overline{UW}=\overline{GH}$。
5. 過U作與$U-V-W$不共線之一線，並在線上取一點X使得$\overline{UX}=\overline{EI}$。連$\overline{VX}$。
6. 過W作平行於$\overline{VX}$的直線，交$\overline{UX}$延伸線於Y。

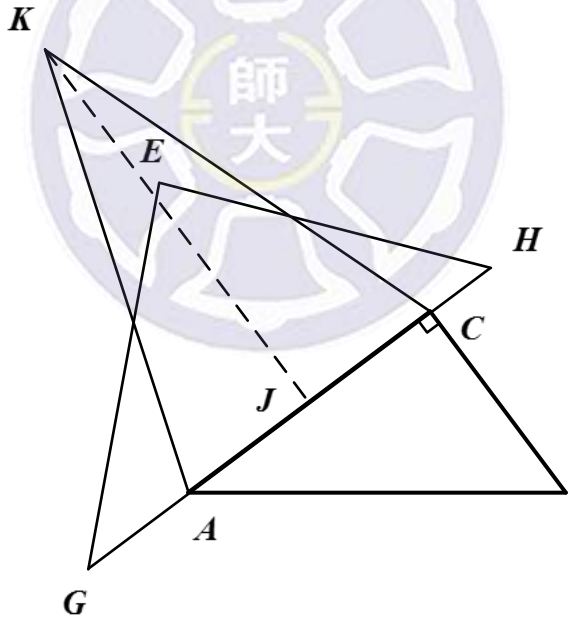


Fig. 4

7. 作$\overline{AC}$中垂線與$\overline{AC}$交於J，並在中垂線上取一點K使得$\overline{JK}=\overline{UY}$。接著連$\overline{KA},\overline{KC}$。

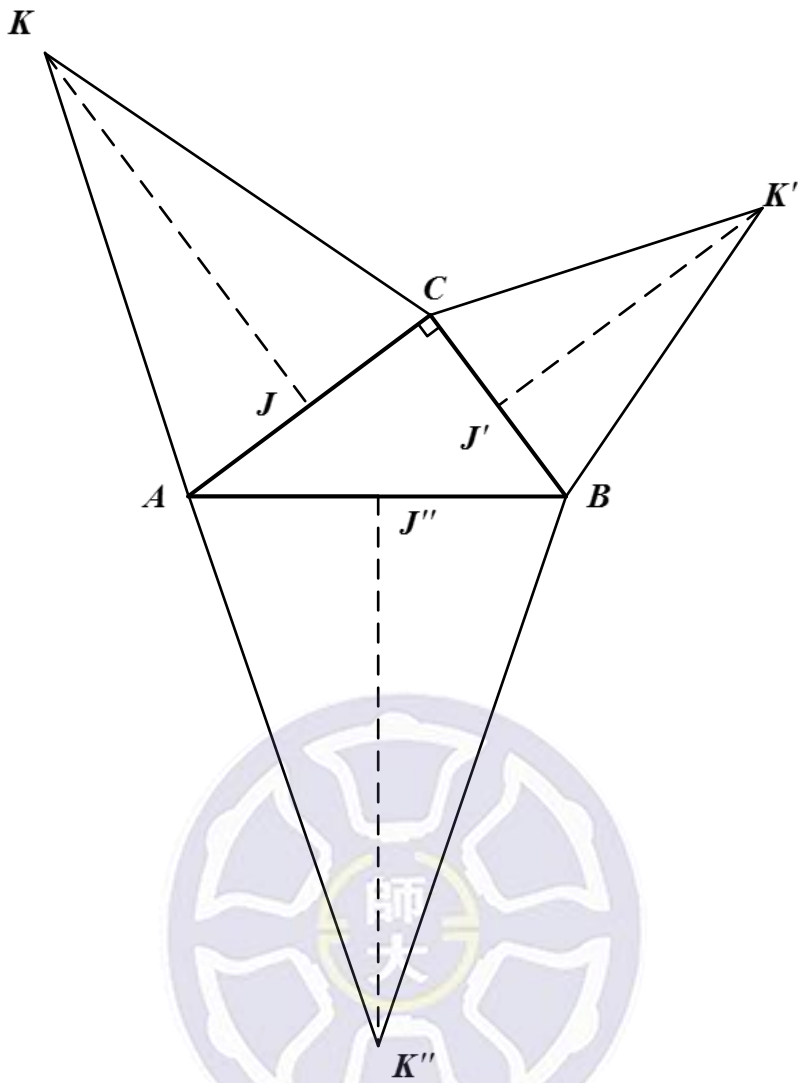


Fig. 5

8. 最後分別在 $\overline{BC},\overline{AB}$ 如上述操作，可以得到 K',K'' ，並連接 $\overline{K'B},\overline{K'C},\overline{K''A},\overline{K''B}$ 。

【求證過程】

以上面程序作輔助線，目的是在每邊上製造面積與邊上的五邊形相等的等腰三角形。其中利用到了推移的技巧，以及尺規作圖中乘法、伸縮的技巧。完成作圖後我們只要說明三邊上較小的兩個等腰的三角形的面積和，等於較大的等腰三角形的面積。而這個性質剛好我們在之前已經有了證明，也就完成了畢氏定理了證明。

1. 證明 Fig. 2 上的五邊形 $ACDEF$ 面積等於 ΔEGH 面積：
   因為 $\overline{AE}$ 平行於 $\overline{FG}$ ，所以 ΔAEF 與 ΔAEG 是同底等高，
   $$\Delta AEF = \Delta AEG \text{ ；}$$
   而同理可以得到
   $$\Delta CDH = \Delta CHE .$$

也因此

$$\begin{aligned}\text{五邊形}ACDEF &= \Delta AEF + \Delta ACE + \Delta CDE \\ &= \Delta AEG + \Delta ACE + \Delta CEH \\ &= \Delta EGH.\end{aligned}$$

2. 在 Fig. 3 上用這樣的方式作出 $\Delta UVX \sim \Delta UWY$, 所以

$$\frac{\overline{UX}}{\overline{UY}} = \frac{\overline{UV}}{\overline{UW}},$$

因此可以推得

$$\overline{UX} \cdot \overline{UW} = \overline{UV} \cdot \overline{UY}.$$

3. 證明在 Fig. 4 上的 ΔACK 面積等於 ΔEGH 面積：

$$\begin{aligned}\Delta EHG &= \frac{1}{2} \cdot \overline{GH} \cdot \overline{EI} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \overline{UW} \cdot \overline{UX} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \overline{UV} \cdot \overline{UY} \\ &= \frac{1}{2} \overline{AC} \cdot \overline{JK} \\ &= \Delta ACK.\end{aligned}$$

4. 綜合以上可以得到五邊形 $ACDEF = \Delta ACK$ ，再以同樣的道理可以證明 $CBD'E'F' = \Delta BCK'$ 以及 $BAD''E''F'' = \Delta BAK''$.

5. 而 $\Delta ACK, \Delta BCK', \Delta BAK''$ 為三邊上相似的等腰三角形，根據《勾股定理》幾何篇編號第 241 號中的過程，即可得到 $\Delta ACK + \Delta BCK' = \Delta BAK''$, 也就是

$$ACDEF + BCD'E'F' = BAD''E''F'',$$

又由於他們是相似的五邊形，我們就可以得到畢氏定理關係式

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

【註與心得】

1. 來源：此證明為 Loomis 於 1933 年所著，收錄在《勾股定理》一書幾何篇編號第 242 號。
2. 心得：這個證明用到了不少作圖的技巧，問題等同是如何在一個固定底邊上製造面積等於任意五邊形的等腰三角形。而為了達到這樣的目的，使用到了平行線推移以及平行線伸縮的技巧。最後再引述已知的過程，即可證明畢氏定理關係式。但實際教學上，若我們以此方法來證明畢氏定理，目的會是在作圖技巧而非畢氏定理本身。因為若想要證明直角三角形邊上的相似圖形小面積和會等於大面積，我們會使用「已知」的畢氏定理搭配面積比例特性來證明。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●	●	

4. 補充：在數學能力指標裡，有這麼一項：

   S-4-10：能根據直尺、圓規操作過程的敘述，完成尺規作圖。

   在這個證明當中我們可以學習到尺規作圖的技術：

   「給定一多邊形，能利用尺規作圖製造面積相等的三角形。」

   而另一項能力指標：

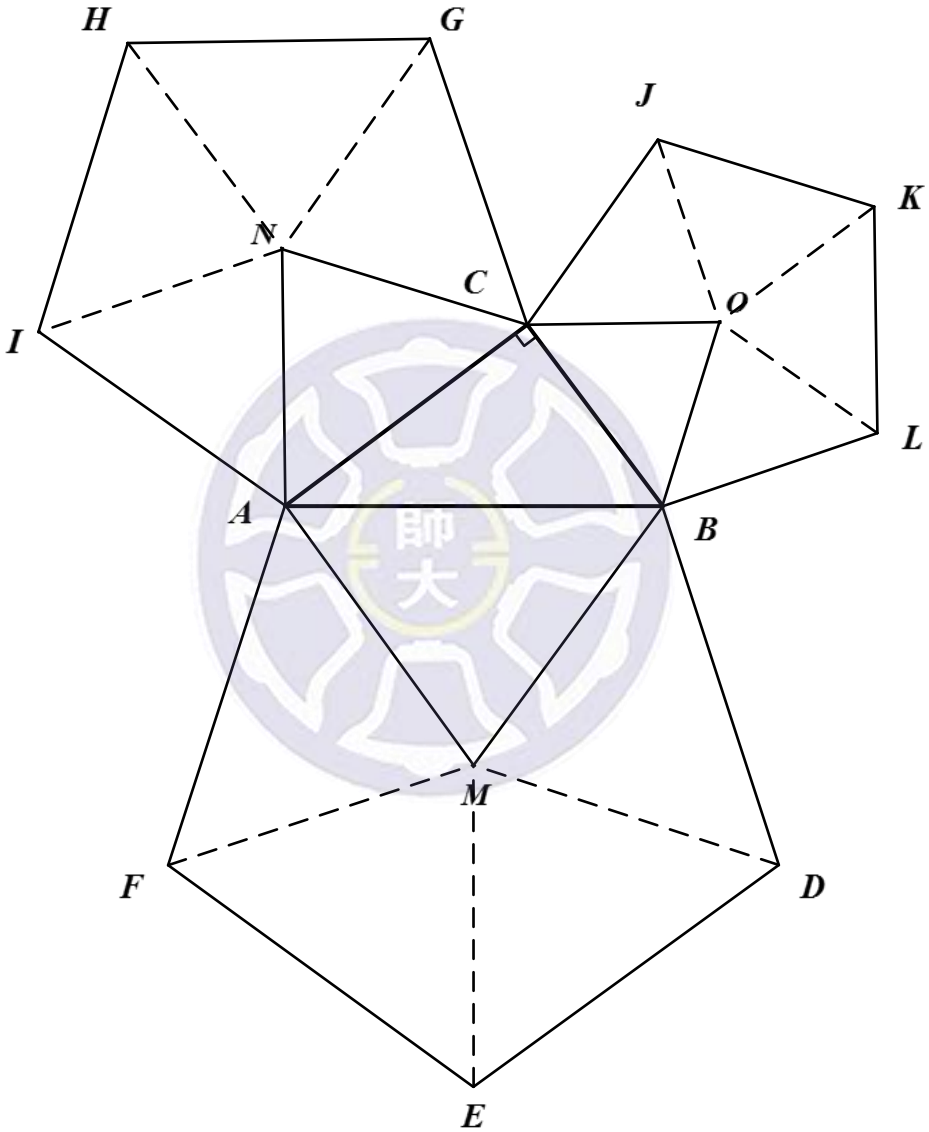
   C-S-01 ：能分解複雜的問題為一系列的子題。

   在這個證明中我們也看到很好的示範，前段的作圖部分，先製造指定面積的三角形，再製造指定底並且同面積的三角形，再利用前面已經完成的預備定理，即可完成整個證明。這樣的模式在高等數學教科書中經常出現。

勾股定理證明-G242-2

【作輔助圖】

1. 以直角三角形 ABC 的三邊為正五邊形的一邊，分別向外作正五邊形 $ABDEF$ 、正五邊形 $ACGHI$ 及正五邊形 $BCJKL$ 。(如何作出正五邊形不在此處討論)
2. 而正五邊形的中心分別為 M,N,O 。(可以作任意兩邊的中垂線交點找任意正多邊形的中心)
3. 連 $\overline{AM},\overline{BM},\overline{AN},\overline{CN},\overline{CO}$ 以及 $\overline{BO}$ 。



【求證過程】

我們要證明二個較小的正五邊形的面積和為較大的正五邊形的面積，再透過相似形的面積比，就是對應邊長的平方比的性質，就可以證明畢氏定理。而我們的做法是以正五邊形的中心將每個正五邊形分成五個全等的等腰三角形，接著就只需要證明這二小一大的相似等腰三角形的面積關係即可。

1. 我們知道$\Delta ABM, \Delta ACN, \Delta BCO$為相似的等腰三角形，因為正五邊形的每個內角皆為$108^\circ$，而分割成五個全等的等腰三角形皆為$54^\circ, 54^\circ, 72^\circ$的三內角，所以必為相似的三角形。
2. 透過《勾股定理》中的 G241 我們已經證明了直角三角形三邊上的相似等腰三角形有面積的關係式，$\Delta ACN + \Delta BCO = \Delta ABM$，因此我們得到正五邊形也同樣符合面積關係式，因為

$$\begin{aligned} \text{正五邊形}ABDEF &= 5\Delta ABM \\ &= 5\left(\Delta ACN + \Delta BCO\right) \\ &= 5\Delta ACN + 5\Delta BCO \\ &= \text{正五邊形}ACGHI + \text{正五邊形}BCJKL. \end{aligned}$$

3. 又相似形的面積比即為邊長平方比，因此

$$k \cdot \overline{AB}^2 = k \cdot \overline{AC}^2 + k \cdot \overline{BC}^2,$$

也就是畢氏定理關係式

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：此證明為 Loomis 於 1933 年所著，收錄在《勾股定理》一書幾何篇編號第 242 號。
2. 心得：此證明的重要意義在於他利用相似等腰的角形的面積關係式，推廣到所有直角三角形邊上的正多邊形，都可以用來證明畢氏定理，只要以中心切割成全等的三角形即可。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●			●	

4. 補充：在數學能力指標裡有幾項：

S-4-15：能理解三角形和多邊形的相似性質，並應用於解題和推理。

以及

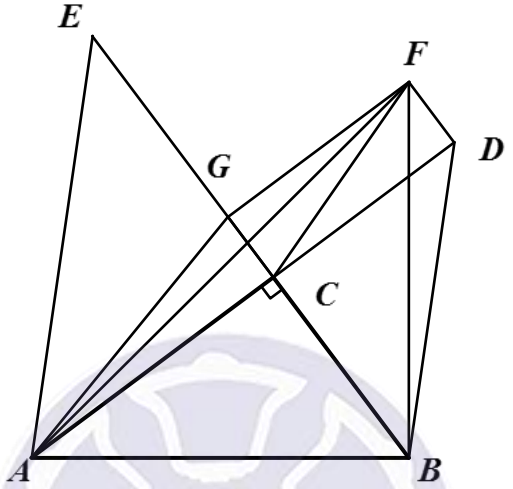
C-S-03：能瞭解如何利用觀察、分類、歸納、演繹、類比等方式來解決問題

這個證明的最後讓我們得到一個想法，可以在直角三角形的邊上接上同邊數的正多邊形，只要這麼做，同樣地也就可以證明畢氏定理關係式。

勾股定理證明-G243

【作輔助圖】

1. 直角三角形ΔABC，過C作$\overline{BC}$垂直線$\overline{CD}$，使$\overline{CD}=\overline{BC}$；並過$C$作$\overline{AC}$垂直線$\overline{CE}$，使$\overline{CE}=\overline{AC}$；同樣地過$B$作$\overline{AB}$垂直線$\overline{BF}$，使$\overline{BF}=\overline{AB}$。
2. 接著過F向$\overline{EC}$作垂足G，連$\overline{FG}$。
3. 最後連$\overline{FA}$、$\overline{FC}$、$\overline{GA}$、$\overline{AE}$、$\overline{BD}$。



【求證過程】

從直角三角形ABC開始以三邊向適當方向作三個等腰直角三角形，再利用一組全等三角形以及同底等高則三角形面積會相同的特性，將大等腰直角三角形的面積分割成兩個小等腰直角三角形的面積和，進而推出畢氏定理的關係式。

1. 首先不難看出ΔABC與ΔBFG全等，以下給出證明，並從中推得其邊長關係：

   因為
   $$\overline{AB}=\overline{BF},$$
   且
   $$\angle CAB=90^\circ-\angle CBA$$
   $$=\angle GBF,$$
   以及
   $$\angle ACB=90^\circ=\angle BGF,$$
   所以可推得
   $$\Delta FEC\cong\Delta ABC\ \text{(AAS 全等)},$$
   也因此可以得到
   $$\overline{CB}=\overline{GF}=\overline{CD}\ \text{且}\ \overline{BG}=\overline{AC}=\overline{EC}.$$
2. 因為同底等高的三角形面積相同，所以有
   $$\Delta FCB=\Delta DCB,$$
   且

$$\Delta ACF = \Delta ACG.$$

3. 又因為同高且 $\overline{BC} = \overline{GE}$，所以

$$\Delta ABC = \Delta AGE.$$

4. 因此

$$\begin{aligned}\Delta ABF &= \Delta ABC + \Delta FCB + \Delta ACF \\ &= \Delta AGE + \Delta DCB + \Delta ACG \\ &= \Delta ACE + \Delta BCD,\end{aligned}$$

即 $\frac{\overline{AB}^2}{2} = \frac{\overline{AC}^2}{2} + \frac{\overline{BC}^2}{2}$ 可得畢氏定理

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2.$$

【註與心得】

1. 來源：此證明來自 Edwards' Geom., 1895, p. 158, fig.(20)。收錄在 Loomis 的《勾股定理》中幾何篇的編號第 243 號
2. 心得：此證明作適當的輔助線，再透過同底等高面積相等的特性來證明畢氏定理。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●	●	●		

4. 補充：在數學能力指標中，有這麼幾項：

S-4-09：能理解三角形的全等定理，並應用於解題和推理。

以及

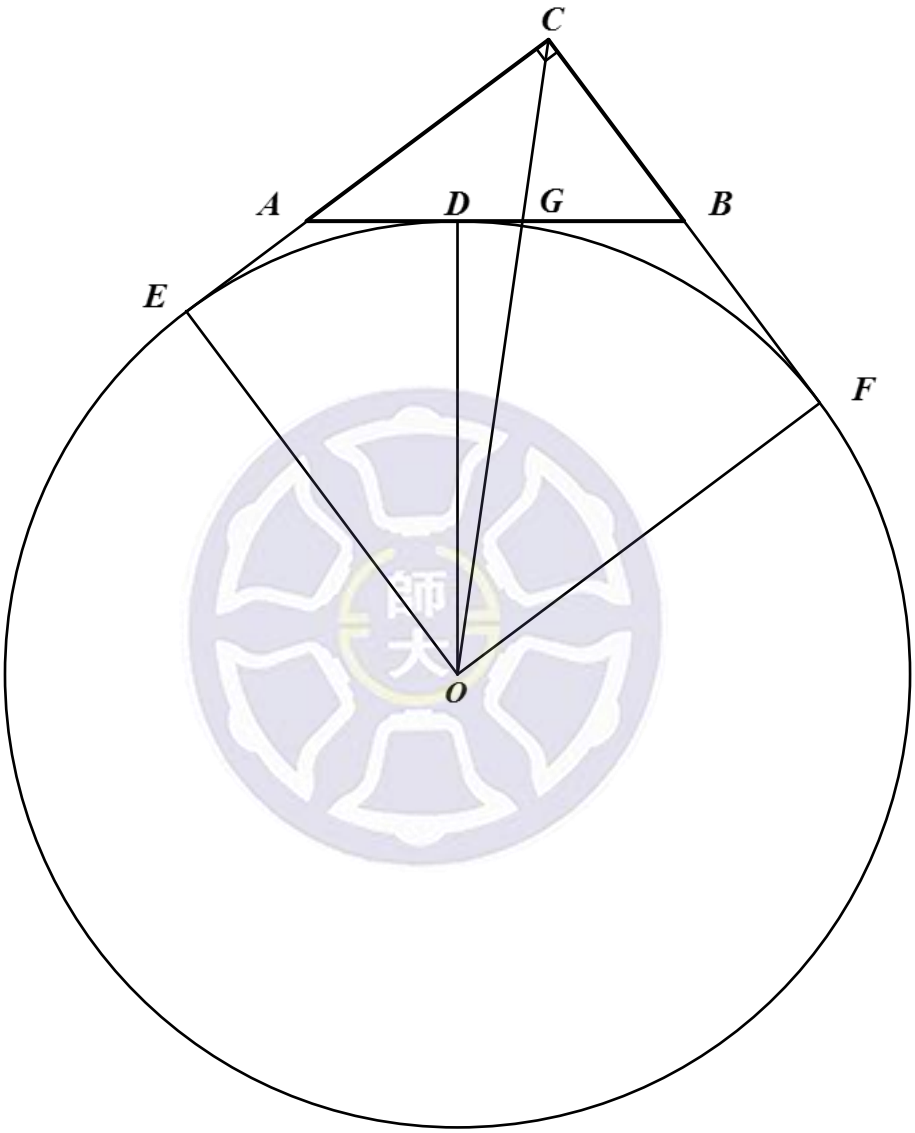
N-3-22 及 S-3-06：能運用切割重組，理解三角形、平行四邊形與梯形的面積公式。

證明正是利用圖形的分割，以及三角形的全等來推理出畢氏定理關係式。

勾股定理證明-G246

【作輔助圖】

1. 延伸$\overline{CA}$、$\overline{CB}$，然後作直角三角形ABC的旁切圓，圓心O，並與$\overline{AB}$切於D，與$\overline{CA}$、$\overline{CB}$分別與圓O切於E、F。
2. 連$\overline{OC}$與$\overline{AB}$交於G。
3. 連$\overline{OE}$、$\overline{OF}$。



【求證過程】

利用旁切圓及兩切線段長相等性質，再以兩種方法求正方形$CEOF$面積所得的面積等式，透過一些代數運算性質，即可推得畢氏定理關係式。

1. 先由切線長性質得到$\overline{AD}=\overline{AE}$及$\overline{BD}=\overline{BF}$

2. 接著分析面積：

   令圓O的半徑為r, $\overline{AB}=c$, $\overline{AC}=b$且$\overline{BC}=a$,

則 $\Delta OAE = \Delta OAD = \frac{1}{2}\overline{AD} \times r$ 且 $\Delta OBD = \Delta OBF = \frac{1}{2}\overline{BG} \times r$.

3. 考慮正方形 $CEOF$ 面積：

$$\begin{aligned}\square CEOF &= 2\times(\Delta OAD) + 2\times(\Delta ODB) + \Delta ABC \\ &= r\times\overline{DA} + r\times\overline{DB} + \frac{1}{2}ab \\ &= r\times c + \frac{1}{2}ab.\end{aligned}$$

4. 接著推導周長跟圓半徑關係式：

$$\begin{aligned}c+a+b &= \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC} \\ &= \overline{AD} + \overline{DB} + \overline{BC} + \overline{AC} \\ &= \left(\overline{AC} + AE\right) + \left(\overline{BC} + \overline{BF}\right) \\ &= \overline{CE} + \overline{CF} \\ &= 2r\end{aligned}$$

5. 再綜合以上由正方形 $CEOF$ 面積的兩種算法：

$$\square CEOF = r^2 = \frac{1}{2}ab + c\times r = \square CEOF,$$

也就是

$$\frac{1}{4}(a+b+c)^2 = \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}c\times(a+b+c),$$

再整理出

$$\frac{1}{4}\left(a^2+b^2+c^2\right) = \frac{1}{2}c^2,$$

最後移項可得

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

此即為畢氏定理關係式。

【註與心得】

1. 來源：此證明是 B. F. Yanney，Wooster University 的教授所證。收錄在 Loomis 的《勾股定理》中幾何篇的編號第 246 號
2. 心得：這個證明很特別地使用到了圓形，使證明增加了不少美感。其中用到了圓的切線段性質，以及旁切圓半徑的計算方法。再透過簡單的代數處理，就可以得證。在中學教學時也算是個複習圓的特性的好時機。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●		●

4. 補充：在數學能力指標中，有這麼一項：

   S-4-17 ：能理解圓的幾何性質。

   在這個證明中，輔助線的選擇上是非常特殊的，除了適當地選擇了旁切圓以外，我們還要對圓的幾何性質有更多的了解。

   能力指標中的另一項：

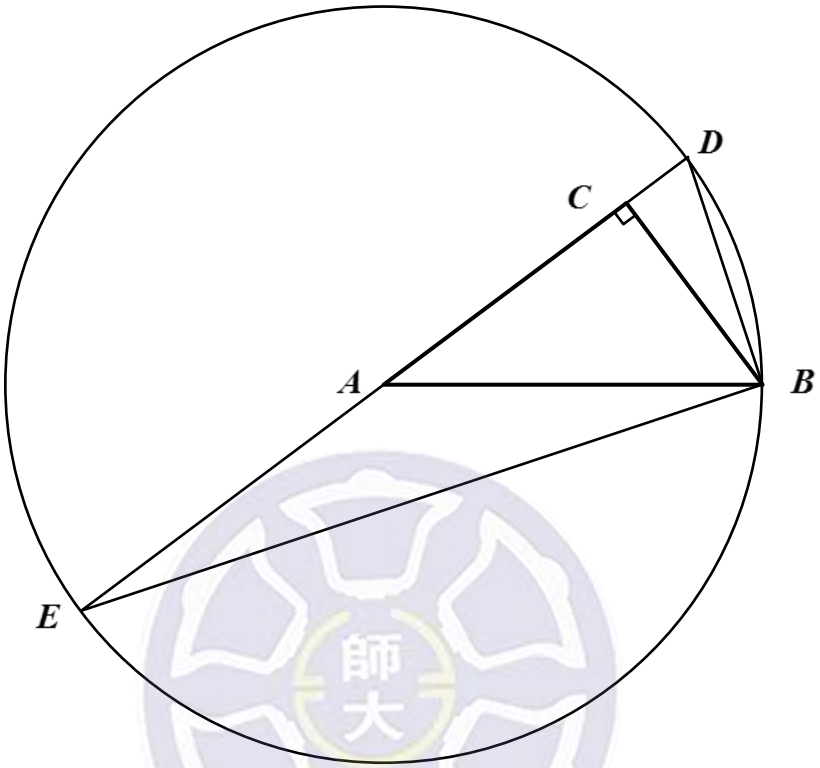
   A-4-13：能熟練乘法公式。

   這個證明也是練習三項和平方公式的好機會。

勾股定理證明-G247

【作輔助圖】

1. 以 A 為圓心，$\overline{AB}$ 為半徑作圓 Γ，並延伸 $\overrightarrow{AC}$ 交 Γ 於 D，另一邊延伸 $\overrightarrow{CA}$ 交 Γ 於 E，因此 $\overline{DE}$ 為圓的直徑。
2. 連 $\overline{BD}$、$\overline{BE}$。



【求證過程】

我們利用直徑所對的圓周角是直角的特性，再透過子母相似性質，加上一點簡單的代數操作，就可以輕易地得到畢氏定理的關係式。

1. 令 $\overline{AB}=c$, $\overline{BC}=a$, $\overline{AC}=b$, 因為 $\Delta EBC \sim \Delta BDC$ (子母相似), 所以我們有
$$\overline{EC}/\overline{BC}=\overline{BC}/\overline{CD}.$$
2. 又其中 $\overline{EC}=\overline{EA}+\overline{AC}=c+b$, 以及 $\overline{CD}=\overline{AD}-\overline{AC}=c-b$.
4. 我們可以得到 $\overline{EC}/\overline{BC}=\overline{BC}/\overline{CD}$,

   接著作出以下推論：
$$\Rightarrow c+b/a=a/c-b$$
$$\Rightarrow (c+b)(c-b)=a\cdot a$$
$$\Rightarrow c^2-b^2=a^2$$
$$\Rightarrow a^2+b^2=c^2,$$

   此即為畢氏定理關係式.

【註與心得】

1. 來源：由 Loomis 的《勾股定理》，幾何篇中的編號第 247 號化簡的結果。
2. 心得：此證明利用到圓及子母相似形，並且使用到一點代數的操作，是相當適合國高中學生學習的一個證明方式。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●		

4. 補充：在數學能力指標中，有這麼一項：

   S-4-17：能理解圓的幾何性質。

   以及另一項：

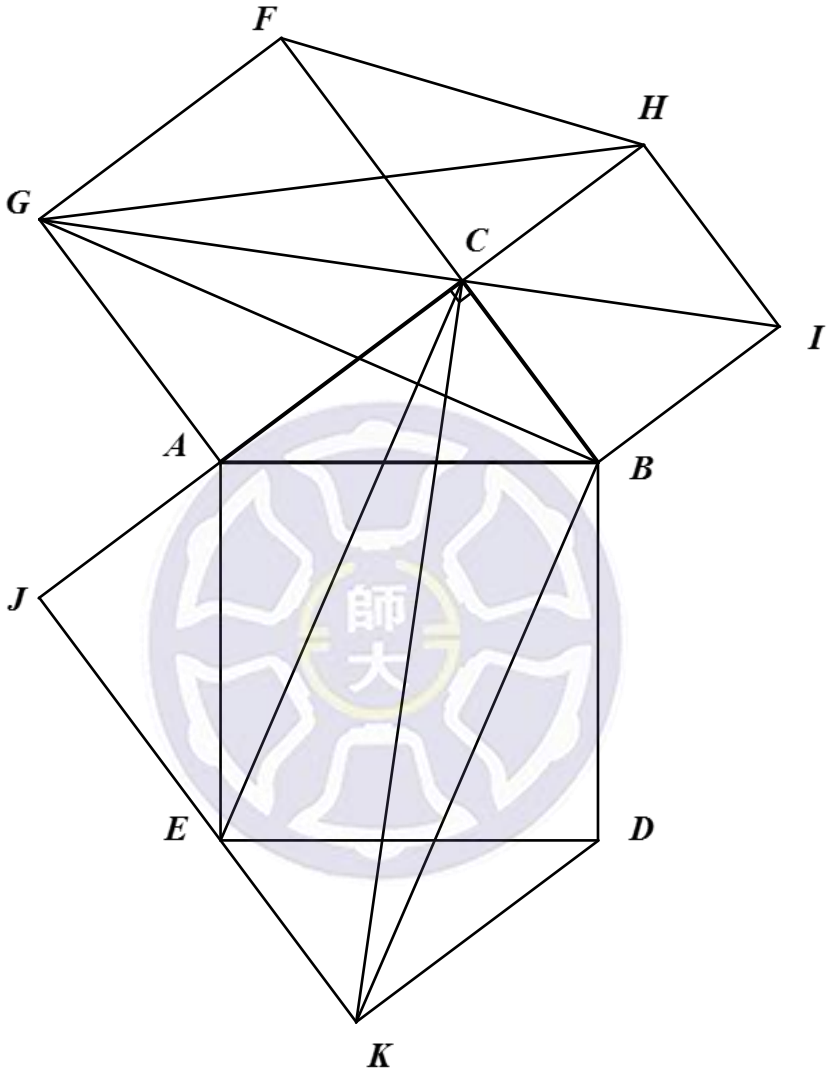
   S-4-15：能理解三角形和多邊形的相似性質，並應用於解題和推理。

   這個證明輕巧簡潔的關鍵就在應用圓的性質以及相似形的已知性質。

勾股定理證明-G248

【作輔助圖】

1. 以直角三角形 ABC 的三邊為正方形一邊，向外作正方形 $ABDE$，$ACFH$ 及 $BCHI$，並連 $\overline{HF},\overline{HG},\overline{BG},\overline{IG}$ 以及 $\overline{EC}$。
2. 在 $\overline{CA}$ 延伸線上取一點 J，使得 $\overline{AJ}$ 與 $\overline{BC}$ 等長，並連 $\overline{JE}$。
3. 在 $\overline{JE}$ 延伸線上取一點 K，使得 $\overline{EK}$ 與 $\overline{BC}$ 等長，並連 $\overline{KD},\overline{BK}$ 及 $\overline{CK}$。



【求證過程】

先在直角三角形的三邊上向外作出三個正方形，並作輔助線將圖形切割及延長，如圖所示。其中我們先將大塊的正方形加上兩塊全等的直角三角形所形成的六邊形以另一種方式切成四塊，而這四塊剛好可以拼出以兩個較小正方形及兩個全等直角三角形組合的六邊形。透過全等的方式證明拼片面積對應相等，最後再以等量原理得到面關係式，也就是畢氏定理關係式。

1. 不難看出 $\Delta ABC,\Delta EAJ,\Delta DEK,\Delta FHC$ 為全等三角形，以下我們給出證明：

   其中 $\Delta ABC,\Delta EAJ$ 是因為

$$\overline{BC}=\overline{AJ},$$

並且

$$\overline{AB}=\overline{AE}\text{ (正方形的邊)},$$

以及

$$\angle CBA=90^{\circ}-\angle CAB=\angle EAJ,$$

所以

$$\Delta ABC\cong\Delta EAJ\text{ (SAS 全等)}.$$

另一組考慮$\Delta ABC,\Delta DEK$是因為

$$\overline{AB}=\overline{DE}\left(\because\text{ 正方形的邊}\right),$$

並且

$$\overline{EK}=\overline{BC},$$

以及

$$\begin{aligned}\angle CBA&=\angle JAE\left(\because\Delta ABC\cong\Delta EAJ\right)\\&=90^{\circ}-\angle AEJ=\angle DEK,\end{aligned}$$

所以

$$\Delta ABC\cong\Delta DEK\text{ (SAS 全等)}.$$

還有一組$\Delta ABC,\Delta FHC$是因為

$$\overline{CA}=\overline{CF}\left(\because\text{ 正方形的邊}\right),$$

並且

$$\overline{CB}=\overline{CH}\left(\because\text{ 正方形的邊}\right),$$

以及

$$\angle ACB=90^{\circ}=\angle FCH,$$

所以

$$\Delta ABC\cong\Delta FHC\text{ (SAS 全等)}.$$

因此有$\Delta ABC\cong\Delta EAJ\cong\Delta DEK\cong\Delta FHC.$

2. 另外$\Delta CAE,\Delta GAB,\Delta GFH,\Delta KDB$亦為全等的三角形，在這裡給出它們的證明：

其中$\Delta CAE,\Delta GAB$是因為

$$\overline{AE}=\overline{AB}\left(\because\text{ 正方形的邊}\right),$$

並且

$$\overline{AC}=\overline{AG}\left(\because\text{ 正方形的邊}\right),$$

以及

$$\angle CAE=90^{\circ}+\angle CAB=\angle GAB,$$

所以

$$\Delta CAE\cong\Delta GAB\text{ (SAS 全等)}.$$

另一組$\Delta CAE,\Delta KDB$是因為

$$\overline{AC}=\overline{DK}\left(\because\Delta ABC\cong\Delta DEK\right),$$

並且

$$\overline{AE}=\overline{BD}\left(\because \text{正方形的邊}\right),$$

以及

$$\begin{aligned}\angle CAE &= 90^{\circ}+\angle CAB\\ &= 90^{\circ}+\angle KDE\left(\because \Delta ABC\cong\Delta DEK\right)\\ &= \angle KDB,\end{aligned}$$

所以

$$\Delta CAE\cong\Delta KDB\,(\text{SAS 全等}).$$

還有一組 $\Delta GAB,\Delta GFH$ 是因為

$$\overline{AG}=\overline{FG}\left(\because \text{正方形的邊}\right),$$

並且

$$\overline{AB}=\overline{FH}\left(\because \Delta ABC\cong\Delta FHC\right),$$

以及

$$\begin{aligned}\angle GAB &= 90^{\circ}+\angle CAB\\ &= 90^{\circ}+\angle CFH\left(\because \Delta ABC\cong\Delta FHC\right)\\ &= \angle GFH,\end{aligned}$$

所以

$$\Delta GAB\cong\Delta GFH\ (\text{SAS 全等}).$$

也就是 $\Delta CAE\cong\Delta GAB\cong\Delta GFH\cong\Delta KDB$.

3. 最後我們考慮 $\Delta CEK,\Delta KCB,\Delta GIB,\Delta GIH$ 為全等的三角形，同樣地給出證明：

其中 $\Delta GIB,\Delta GIH$ 是因為

$$\overline{GI}=\overline{GI}\ (\text{共用邊}),$$

並且

$$\overline{BI}=\overline{HI}\ (\text{正方形的邊}),$$

以及

$$\angle BIG=45^{\circ}=\angle HIG,$$

所以

$$\Delta GIB\cong\Delta GIH\ (\text{SAS 全等}).$$

接著考慮 $\Delta GIB,\Delta CKE$ 是因為

$$\begin{aligned}\overline{BI} &= \overline{BC}\left(\because \text{正方形的邊}\right)\\ &= \overline{EK}\left(\because \Delta ABC\cong\Delta DEK\right),\end{aligned}$$

並且

$$\overline{BG}=\overline{EC}\left(\because \Delta CAE\cong\Delta GAB\right),$$

以及

$$\angle BIG=45^{\circ}=\angle EKC\left(\because \Delta CJK\text{為等腰直角三角形}\right),$$

所以

$$\Delta GIB \cong \Delta CKE \text{ (SAS 全等)}.$$

再考慮　是因為

$$\overline{BC} = \overline{BI} \left(\because \text{正方形的邊}\right),$$

並且

$$\overline{KC} = \overline{IG} \left(\because \Delta GIB \cong \Delta CKE\right),$$

以及

$$\begin{aligned} \angle BIG &= 45^\circ \\ &= 90^\circ - \angle KCJ \\ &= \angle BCK, \end{aligned}$$

所以

$$\Delta GIB \cong \Delta KCB \text{ (SAS 全等)}.$$

也就是 $\Delta CEK \cong \Delta KCB \cong \Delta GIB \cong \Delta GIH$.

4. 綜合以上我們可以推導以下面積關係式：

$$\begin{aligned} \Delta ABC + \square ABDE + \Delta DEK &= \text{六邊形} ACBDKE \\ &= \Delta CAE + \square BCEK + \Delta KDB \\ &= \Delta GAB + \text{四邊形} BGHI + \Delta GFH \\ &= \text{六邊形} ABIHFG \\ &= \square ACFG + \square BCHI + \Delta ABC + \Delta FHC, \end{aligned}$$

再透過等量原理可以得到

$$\square ABDE = \square ACFG + \square BCHI,$$

此即為畢氏定理關係式

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：此證明來自一名高中生 Joseph Zelson 原創，在 1939 年交給 Loomis，記載於《勾股定理》的幾何篇編號第 248 號。
2. 心得：同樣是推導正方形面積的等式，有一類的證明方式是先把週遭幾個三角形一起加進來考慮分割，最後會變成兩個小正方形加上同樣面積的分割圖形。透過等量公理就可以得到面積關係式。而這一個證明方式就是其中之一，有點像是我們化學反應中的催化劑，過程或許參與了反應，但產物與催化劑是無關的，可以加速得到我們想要的結果。我們可以透過這一個證明方式，讓學生接觸這樣的想法在證明中的實際狀況。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●		

4. 補充：在數學能力指標中，有這麼幾項：

   S-4-09：能理解三角形的全等定理，並應用於解題和推理。

   以及

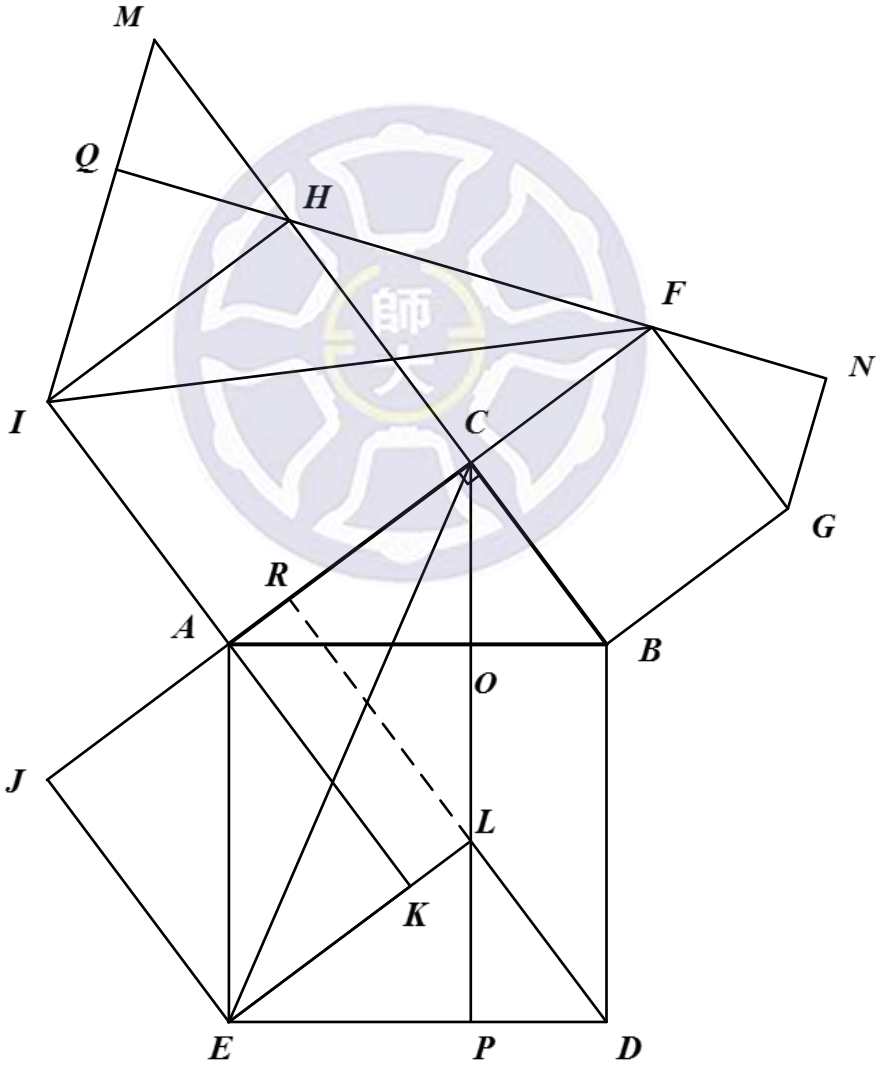
   N-3-22 及 S-3-06：能運用切割重組，理解三角形、平行四邊形與梯形的面積公式。

   此證明正是利用圖形的分割，以及三角形的全等來推理出畢氏定理關係式。

勾股定理證明-G249

【作輔助圖】

1. 分別以直角三角形 ABC 的三邊為正方形的邊，向外作正方形 $ABDE$ 、正方形 $BCFG$ 及正方形 $ACHI$ 。
2. 在 $\overline{CA}$ 延伸線上取一點 J 使得 $\overline{AJ}$ 與 $\overline{BC}$ 等長，並連 $\overline{JE}$ 。
3. 過 E 作 $\overline{JE}$ 的垂直線，並在線上取一點 L 使得 $\overline{EL}$ 與 $\overline{AC}$ 等長，連 $\overline{LD}$ 。並延伸 $\overline{IA}$ 與 $\overline{LE}$ 交於 K 。
4. 在 $\overline{CH}$ 延伸線上取一點 M 使得 $\overline{HM}$ 與 $\overline{BC}$ 等長，連 $\overline{MI}$ 。
5. 連 $\overline{FH}$ ，並延伸 $\overline{FH}$ 與 $\overline{MI}$ 相交於 Q 。再延伸 $\overline{HF}$ ，並在其延伸線上取一點 N 使得 $\overline{FN}$ 與 $\overline{HQ}$ 等長，連 $\overline{NG}$ 。
6. 接著連 $\overline{CL}$ ，並延伸 $\overline{CL}$ 與 $\overline{AB}$ 及 $\overline{ED}$ 分別交於 O 及 P 。最後延伸 $\overline{DL}$ 與 $\overline{CJ}$ 交於 R 。



【求證過程】

先以適當的輔助線將直角三角形 ABC 及三邊上的正方形包進五邊形 $BCJED$ 及六邊形 $ACBGNQI$ 中。其中這個五邊形面積與六邊形面積是相等的。並且五邊形面積為大正方形面積加上兩個直角三角形，而六邊形面

積則為兩個小正方形面積加上兩個同樣的直角三角形面積，因此可以證明出大正方形面積為兩個小正方形面積的和，也就是畢氏定理的關係式。

1. 可以從圖中看出 $\Delta ABC, \Delta IMH, \Delta HFC, \Delta EAJ, \Delta AEK, \Delta EDL$ 為全等的直角三角形，以下我們給出它們的證明：
   其中 $\Delta ABC, \Delta EAJ$ 是因為
   $$\overline{AB} = \overline{AE}\,(\because \text{正方形的邊}),$$
   並且
   $$\overline{AJ} = \overline{BC},$$
   以及
   $$\begin{aligned}\angle CBA &= 90^\circ - \angle CAB \\ &= \angle JAE,\end{aligned}$$
   所以
   $$\Delta ABC \cong \Delta EAJ \text{ (SAS 全等)}.$$

   再來看 $\Delta ABC, \Delta EDL$ 這一組，是因為
   $$\overline{AB} = \overline{ED}\,(\because \text{正方形的邊}),$$
   並且
   $$\overline{AC} = \overline{EL},$$
   以及
   $$\begin{aligned}\angle CAB &= \angle AEJ\,(\because \Delta ABC \cong \Delta EAJ) \\ &= 90^\circ - \angle AEL \\ &= \angle LED,\end{aligned}$$
   所以
   $$\Delta ABC \cong \Delta EDL \text{ (SAS 全等)}.$$

   下一組是 $\Delta ABC, \Delta IMH$，因為
   $$\overline{AC} = \overline{IH}\,(\because \text{正方形的邊}),$$
   並且
   $$\overline{CB} = \overline{HM},$$
   以及
   $$\angle ACB = 90^\circ = \angle IHM,$$
   所以
   $$\Delta ABC \cong \Delta IMH \text{ (SAS 全等)}.$$
   再下一組是 $\Delta ABC, \Delta HFC$，因為
   $$\overline{CA} = \overline{CH}\,(\because \text{正方形的邊}),$$
   並且
   $$\overline{CB} = \overline{CF}\,(\because \text{正方形的邊}),$$

以及

$$\angle ACB = 90^\circ = \angle HCF,$$

所以

$$\Delta ABC \cong \Delta HFC \text{ (SAS 全等)}.$$

接著考慮 $\Delta ABC, \Delta AEK$ 的全等：

因為

$$\overline{AB} = \overline{AE} \left(\because \text{正方形的邊}\right),$$

並且

$$\angle CAB = 90^\circ - \angle BAK = \angle EAK,$$

以及

$$\angle ACB = 90^\circ = \angle AKE,$$

所以

$$\Delta ABC \cong \Delta HFC \text{ (AAS 全等)}.$$

2. 我們也可以證明 $\Delta CEJ, \Delta FIA$ 為全等三角形：

其中因為

$$\begin{aligned}\overline{IA} &= \overline{AC} \left(\because \text{正方形的邊}\right)\\ &= \overline{EJ} \left(\because \Delta ABC \cong \Delta EAJ\right),\end{aligned}$$

並且

$$\angle FAI = 90^\circ = \angle CJE,$$

以及

$$\begin{aligned}\overline{CJ} &= \overline{CA} + \overline{AJ}\\ &= \overline{AC} + \overline{CF} \left(\because \Delta EAJ \cong \Delta HFC\right)\\ &= \overline{AF},\end{aligned}$$

所以有

$$\Delta CEJ \cong \Delta FIA \text{ (SAS 全等)}.$$

3. 而因為 $\overline{AC} = \overline{EL} \left(\because \Delta ABC \cong \Delta EDL\right)$ 且 $\overline{AC}$ 平行於 $\overline{EL}$, 所以四邊形 $ACLE$ 為平行四邊形, 故有 $\overline{AE}$ 與 $\overline{CL}$ 平行且等長. 而因為 $\overline{AE}$ 與 $\overline{CL}$ 平行且等長, 且 $\overline{AE}, \overline{BD}$ 亦為平行且等長, 則 $\overline{CL}, \overline{BD}$ 也是行平且等長. 所以四邊形 $BCLD$ 是平行四邊形. 因為 $\overline{CP}$ 平行於 $\overline{BD}$, 所以

$$\begin{aligned}\angle CPD &= 180^\circ - \angle BDP \left(\because \text{同側內角互補}\right)\\ &= 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ.\end{aligned}$$

4. 同樣地可以看出 $\Delta HMQ, \Delta FGN, \Delta LDP$ 三個三角形也是全等的三角形，以下是證明：

其中 $\Delta HMQ, \Delta FGN$ 是因為

$$\overline{HQ} = \overline{FN},$$

並且

$$\begin{aligned}\overline{FG} &= \overline{BC} \left(\because \text{正方形的邊}\right)\\ &= \overline{HM},\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}\angle MHQ &= \angle FHC\left(\because \text{對頂角相等}\right)\\ &= 90^{\circ} - \angle HFC\\ &= \angle GFN,\end{aligned}$$

所以

$$\Delta HMQ \cong \Delta FGN \text{ (SAS 全等)}.$$

另一組$\Delta HMQ, \Delta LDP$則是因為

$$\overline{HM} = \overline{LD},$$

並且

$$\angle HMQ = \angle LDP\left(\because \Delta IMH \cong \Delta EDL\right),$$

以及

$$\angle HQM = 90^{\circ} = \angle LPD,$$

所以

$$\Delta HMQ \cong \Delta LDP \text{ (AAS 全等)}.$$

5. 考慮$\Delta FIQ, \Delta CEP$亦為全等的三角形，同樣地給出它的證明：
其中因為

$$\overline{FI} = \overline{CE}\left(\because \Delta FIA \cong \Delta CEJ\right),$$

並且

$$\angle CPE = 90^{\circ} = \angle FQI,$$

以及

$$\begin{aligned}\overline{FQ} &= \overline{FH} + \overline{HQ}\\ &= \overline{AE} + \overline{LP}\left(\because \Delta HFC \cong \Delta AEK \text{且} \Delta HMQ \cong \Delta LDP\right)\\ &= \overline{CL} + \overline{LP}\left(\because \text{平行四邊形} ACLE\right)\\ &= \overline{CP},\end{aligned}$$

所以

$$\Delta FIQ \cong \Delta CEP \text{ (RHS 全等)}.$$

6. 所以就可以證明正方形$BCFG$面積等於平行四邊形$BCLD$面積：
其中因為

$$\square BCFG = \overline{BC} \times \overline{BC},$$

又有

$$\square BCLD = \overline{BC} \times \overline{CR},$$

而其中

$$\begin{aligned}\overline{CR} &= \overline{CJ} - \overline{RJ}\\ &= \overline{CJ} - \overline{CA}\left(\because \text{四邊形} ELRJ \text{為正方形}\right),\\ &= \overline{AJ} = \overline{BC},\end{aligned}$$

所以

$$\square BCLD = \square BCFG.$$

7. 最後我們推導面積關係式：

$$\begin{aligned}\square ABDE &= \text{五邊形}CBDEJ - \Delta EAJ - \Delta ABC \\ &= \left(\Delta CEJ + \Delta CEP + \square BCLD + \Delta LDP\right) - \Delta EAJ - \Delta ABC \\ &= \left(\Delta FIA + \Delta FIQ + \square BCFG + \Delta FGN\right) - \Delta EAJ - \Delta ABC \\ &= \text{四邊形}AFQI + \square BCFG + \Delta FGN - \Delta EAJ - \Delta ABC \\ &= \square ACHI + \square BCFG + \Delta HFC + \Delta IHQ + \Delta FGN - \Delta EAJ - \Delta ABC \\ &= \square ACHI + \square BCFG,\end{aligned}$$

此即為畢氏定理關係式

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：此證明來自 Joseph Zelson 在 1939 年交給 Loomis，而 Loomis 也將它放在《勾股定理》一書中的幾何篇的編號第 249 號。
2. 心得：此證明使用到的是面積的割補證法，證明由斜邊上的正方形面積等於兩股上的正方形面積之和，這證明的作者 Joseph 多採用這樣的方式來證明畢氏定理。我們看這次的過程當中的缺點同樣在於沒有完全使用全等的拼片以拼圖式證明來說明面積的等式，其中一處用到了平行四邊形與正方形面積的相等。若我們在另一邊的平行四邊形與正方形面積上也做了同理地證明相等後，事實上就可以更直接地得到面積等式。這種證明方式的不一致性在教學上我想應該要避免以免學生有理解上的困難。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●	●			

4. 補充：在數學能力指標中，有這麼幾項：

   S-4-09：能理解三角形的全等定理，並應用於解題和推理。

   以及

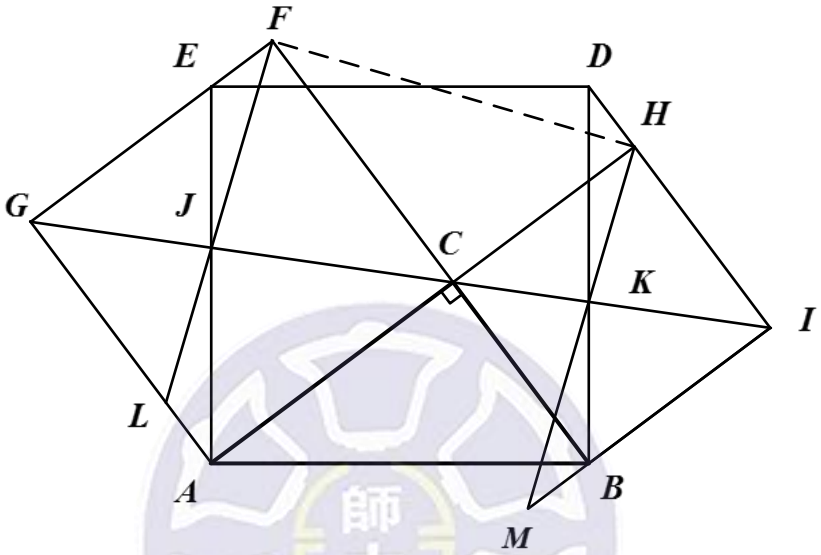
   N-3-22 及 S-3-06：能運用切割重組，理解三角形、平行四邊形與梯形的面積公式。

   此證明正是利用圖形的分割，以及三角形的全等來推理出畢氏定理關係式。

勾股定理證明-G250

【作輔助圖】

1. 以ΔABC的$\overline{AB}$為邊，向內作正方形$ABDE$；再分別以$\overline{AC}$及$\overline{BC}$為邊，向外作正方形$ABFG$及正方形$BCHI$。其中我們將會說明E會落在$\overline{FG}$線段上，且$I-H-D$共線。
2. 連$\overline{GC}$及$\overline{CI}$，分別交$\overline{AE}$於J，交$\overline{BD}$於K。
3. 接著連接$\overline{FJ}$並延伸交$\overline{GA}$於L，連接$\overline{HK}$並延伸至M，使得$\overline{FL}=\overline{HM}$。最後連接$\overline{FH}$。



【求證過程】

在作完輔助圖後，我們不難看出ΔABC與另外六個直角三角形全等，在給出證明之後。我們將兩個小正方形面積視為是包含它們的六邊形扣掉兩個直角三角形，再將六邊形拆解，可以重新拼湊出大正方形，也就證明了畢氏定理的關係式。

1. 不難看出$\Delta ABC,\Delta AEG,\Delta DBI,\Delta FHC$為全等的三角形，以下給出證明：其中$\Delta ABC,\Delta AEG$是因為

$$\overline{AB}=\overline{EA}(\because \text{正方形的邊}),$$

並且

$$\angle CAB=90^\circ-\angle EAC=\angle GAE,$$

以及

$$\overline{AC}=\overline{AG}(\because \text{正方形的邊}),$$

所以

$$\Delta ABC\cong\Delta AEG\ (\text{SAS 全等}).$$

另一組考慮$\Delta ABC,\Delta DBI$的全等, 因為

$$\overline{AB}=\overline{BD}(\because \text{正方形的邊}),$$

並且

$$\angle CBA=90^\circ-\angle DBC=\angle DBI,$$

以及

$$\overline{BC}=\overline{BI}\left(\because \text{正方形的邊}\right),$$

所以

$$\Delta ABC\cong\Delta DBI\ (\text{SAS 全等}).$$

接著考慮$\Delta ABC,\Delta FHC$的全等, 因為

$$\overline{AC}=\overline{FC}\left(\because \text{正方形的邊}\right),$$

並且

$$\overline{BC}=\overline{HC}\left(\because \text{正方形的邊}\right),$$

以及

$$\angle ACB=90^{\circ}=\angle FCH,$$

所以

$$\Delta ABC\cong\Delta FHC\ (\text{SAS 全等}).$$

綜合以上可得此結論

$$\Delta ABC\cong\Delta AEG\cong\Delta DBI\cong\Delta FHC\ .$$

2. 也不難發現$\Delta GJA,\Delta GJF$為全等的三角形，以下給個證明：
因為

$$\overline{GJ}=\overline{GJ}\ (\text{共用邊}),$$

並且

$$\overline{GA}=\overline{GF}\left(\because \text{正方形的邊}\right),$$

以及

$$\angle AGJ=45^{\circ}=\angle FGJ\ ,$$

所以

$$\Delta GJA\cong\Delta GJF\ (\text{SAS 全等}).$$

3. 我們也可以證明$\Delta BIK,\Delta HIK$為全等三角形：
因為

$$\overline{KI}=\overline{KI}\ (\text{共用邊}),$$

並且

$$\overline{BI}=\overline{HI}\left(\because \text{正方形的邊}\right),$$

以及

$$\angle BIKJ=45^{\circ}=\angle HIK\ ,$$

所以

$$\Delta BIK\cong\Delta HIK\ (\text{SAS 全等}).$$

4. 可以看出$\Delta FLG,\Delta AEG,\Delta DBI,\Delta MHI$亦為全等的三角形，以下是證明：
其中$\Delta FLG\cong\Delta AEG$的全等是因為

$$\overline{GF}=\overline{GA}\left(\because \text{正方形的邊}\right),$$

並且

$$\angle GFL=\angle GAE\left(\because \Delta GJF\cong\Delta GJA\right),$$

以及

$$\angle FGL = 90^\circ = \angle EGA \text{(共用角)},$$

所以

$$\Delta AEG \cong \Delta FLG \text{ (ASA 全等)}$$

另外一個組合 $\Delta DBI, \Delta MHI$ 是因為：

$$\overline{BI} = \overline{HI} \left(\because \text{正方形的邊}\right),$$

並且

$$\angle DBI = \angle MHI \left(\because \Delta BIK \cong \Delta HIK\right),$$

以及

$$\angle BID = \angle HIM \text{ (共用角)},$$

所以

$$\Delta DBI \cong \Delta MHI .$$

綜合以上我們知道

$$\Delta FLG \cong \Delta AEG \cong \Delta DBI \cong \Delta MHI ,$$

因此我們有

$$\overline{HM} = \overline{FL} = \overline{DB} \left(\because \Delta FLG \cong \Delta DBI\right).$$

5. 可以從輔助圖上看到 $G-E-F$ 共線及 $I-H-D$ 共線，在這裡給個證明：

因為

$$\angle AGE = 90^\circ = \angle AGF ,$$

所以

$$G-E-F \text{ 三點共線}.$$

另一方面, 因為

$$\angle BIH = 90^\circ = \angle BID ,$$

所以

$$I-H-D \text{ 三點共線}.$$

6. 考慮 $\Delta GEJ, \Delta IHK$ 為全等的三角形，以下給個證明：

因為

$$\overline{GE} = \overline{IH} \left(\because \Delta AEG \cong \Delta MHI\right),$$

並且

$$\angle GEJ = \angle IHK \left(\because \Delta AEG \cong \Delta MHI\right),$$

以及

$$\angle EGJ = 45^\circ = \angle HIK,$$

所以

$$\Delta GEJ \cong \Delta IHK \text{ (SAS 全等)}.$$

$$\Delta FEJ \cong \Delta DHK .$$

7. 其中 $\Delta FEJ, \Delta DHK$ 亦為全等的三角形，以下是它的證明：

因為

$$\angle EFJ = \angle HDK \left(\because \Delta FLG \cong \Delta DBI\right),$$

並且

$$\begin{aligned}\angle FEJ &= 180^\circ - \angle GEA \\ &= 180^\circ - \angle IHM \left(\because \Delta AEG \cong \Delta MHI\right) \\ &= \angle DHK,\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}\overline{EF} &= \overline{GF} - \overline{GE} \\ &= \overline{ID} - \overline{IH} \left(\because \Delta AEG \cong \Delta ELG \cong \Delta DBI \cong \Delta MHI\right) \\ &= \overline{DH},\end{aligned}$$

所以

$$\Delta FEJ \cong \Delta DHK \text{ (ASA 全等)}.$$

8. 接著我們就可以推導面積關係式如下：

$$\begin{aligned}\square ACFG + \square BCHI &= \text{六邊形}FGABIH - \Delta FCH - \Delta ABC \\ &= \text{六邊形}FGABIH - 2\Delta ABC \\ &= \text{梯形}FJKH + \text{梯形}JABK + \Delta FEJ + \Delta EAG + \text{四邊形}KBIH - 2\Delta ABC \\ &= \text{梯形}FJKH + \text{梯形}JABK + \Delta EAG + \left(\Delta DHK + \text{四邊形}KBIH\right) - 2\Delta ABC \\ &= \text{梯形}FJKH + \text{梯形}JABK \\ &= \square ABDE,\end{aligned}$$

此即為畢氏定理關係式

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

【註與心得】

1. 來源：此證明由 Joseph Zelson 於 1939 年寄給作者，收錄在《勾股定理》一書中的幾何篇編號第 250 號。
2. 心得：此證明的過程作的輔助線相對是比較特別的，也用到了梯形面積公式以及一些代數運算規則，在教學是相對較複雜的選擇。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●				

4. 補充：在數學能力指標中，有這麼幾項：

S-4-09：能理解三角形的全等定理，並應用於解題和推理。

以及

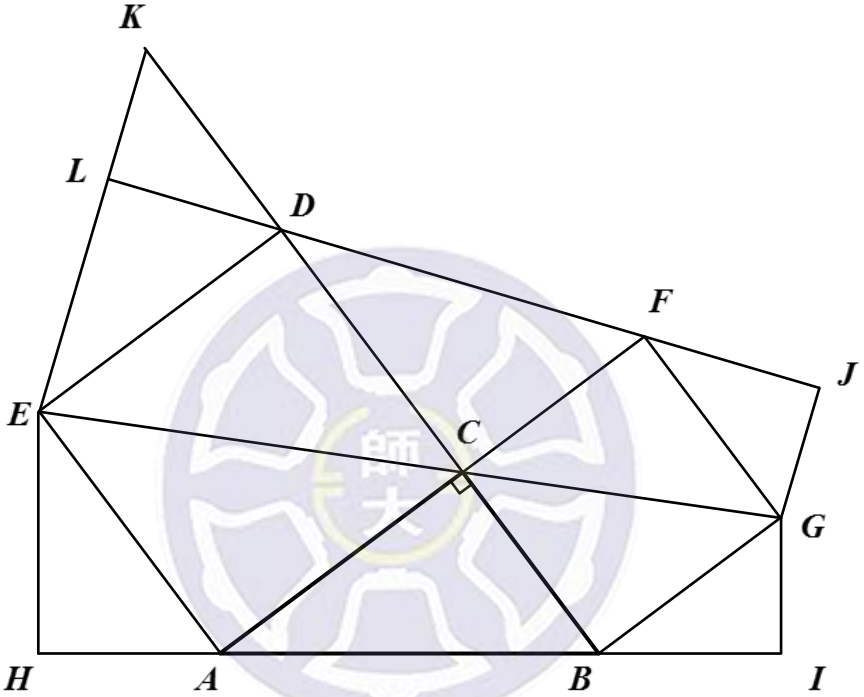
N-3-22 及 S-3-06：能運用切割重組，理解三角形、平行四邊形與梯形的面積公式。

此證明正是利用圖形的分割，以及三角形的全等來推理出畢氏定理關係式。

勾股定理證明-G251

【作輔助圖】

1. 分別以直角三角形 ABC 的 $\overline{AC},\overline{BC}$ 為正方形的一邊，向外作正方形 $ACDE$ 及正方形 $BCFG$。連 $\overline{DF}$、$\overline{EG}$。
2. 在 $\overline{BD}$ 延伸線上取一點 K 使 $\overline{DK}$ 與 $\overline{BC}$ 等長，並連 $\overline{EK}$。接著延伸 $\overline{FD}$ 與 $\overline{EK}$ 交於 L。
3. 在 $\overline{BA}$ 延伸線上取一點 H 使 $\overline{AH}$ 與 $\overline{DL}$ 等長，並連 $\overline{DE}$。接著在 $\overline{AB}$ 延伸線上取一點 I 使 $\overline{BI}$ 與 $\overline{DL}$ 等長，並連 $\overline{IG}$。最後在 $\overline{DF}$ 延伸線上取一點 J 使 $\overline{FJ}$ 與 $\overline{DL}$ 等長，並連 $\overline{JG}$。



【求證過程】

先作適當的輔助線將直角三角形 ABC 及其兩股上的正方形包進兩個梯形中。我們可以看到這兩個梯形是由兩個正方形及六個直角三角形所組成，而其中，左右的兩個直角三角形可以拼成與中間一樣的較大的直角三角形。接著如果我們去計算兩個梯形的面積，就會發現上底加下底為直角三角形的斜邊長，而高是斜邊長加上以斜邊為底的高。因此分配律展開後可以得到的就是斜邊自乘，加上四個直角三角形面積。其中斜邊自乘就可以看成是大的正方形面積，也就證明了畢氏定理關係式。

1. 不難看出 $\Delta ABC,\Delta DFC,\Delta EKD$ 為全等三角形，以下給出證明：
   其中 $\Delta ABC,\Delta DFC$ 的全等是因為
   $$\overline{CA}=\overline{CD}\left(\because \text{正方形的邊}\right),$$
   並且
   $$\overline{CB}=\overline{CF}\left(\because \text{正方形的邊}\right),$$
   以及

$$\angle ACB = 90^\circ = \angle DCF,$$

所以

$$\Delta ABC \cong \Delta DFC \text{ (SAS 全等)}.$$

另一組 $\Delta ABC, \Delta EKD$ 的全等是因為

$$\overline{AC} = \overline{DE} \left(\because \text{正方形的邊}\right),$$

並且

$$\overline{DE} = \overline{BC},$$

以及

$$\angle ACB = 90^\circ = \angle EDK,$$

所以

$$\Delta ABC \cong \Delta EKD \text{ (SAS 全等)}.$$

因此可以推得

$$\Delta ABC \cong \Delta DFC \cong \Delta EKD.$$

2. 而 $\Delta DKL, \Delta FGJ, \Delta BGI$ 為全等三角形，以下是證明：

其中 $\Delta BGI, \Delta FGJ$ 的全等是因為

$$\overline{GB} = \overline{GF} \left(\because \text{正方形的邊}\right),$$

並且

$$\overline{BI} = \overline{LD} = \overline{FJ},$$

以及

$$\begin{aligned}\angle GBI &= 90^\circ - \angle CBA \\ &= 90^\circ - \angle CFD \left(\because \Delta ABC \cong \Delta DFC\right) \\ &= \angle GFJ,\end{aligned}$$

所以

$$\Delta BGI \cong \Delta FGJ \text{ (SAS 全等)}.$$

另一組考慮 $\Delta BGI, \Delta EDL$ 亦為全等三角形，是因為

$$\overline{BI} = \overline{LD},$$

並且

$$\begin{aligned}\overline{DK} &= \overline{BC} \\ &= \overline{BG} \left(\because \text{正方形的邊}\right),\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}\angle GBI &= 90^\circ - \angle CBA \\ &= \angle CAB \\ &= \angle CDF \left(\because \Delta ABC \cong \Delta DFC\right) \\ &= \angle KDL \left(\because \text{對頂角相等}\right),\end{aligned}$$

所以

$$\Delta BGI \cong \Delta EDL \text{ (SAS 全等)}.$$

因此可以推得

$$\Delta DKL \cong \Delta FGJ \cong \Delta BGI.$$

3. 可以看出 $\Delta EDL, \Delta EAH$ 為全等三角形，以下是證明：

因為

$$\overline{ED}=\overline{EA}(\because \text{正方形的邊}),$$

並且

$$\overline{DL}=\overline{HA},$$

以及

$$\begin{aligned}\angle LDE&=90^{\circ}-\angle FDC\\&=90^{\circ}-\angle BAC(\because \Delta ABC\cong\Delta DFC)\\&=\angle HAE,\end{aligned}$$

所以

$$\Delta EDL\cong\Delta EAH\ (\text{SAS 全等}).$$

4. 綜合以上，我們可以推導面積關係式：

$$\begin{aligned}&\square ACDE+\square BCFG+4\times\Delta EKD\\&=\square ACDE+\square BCFG+\Delta ABC+\Delta DFC+\Delta EDL+\Delta EAH+\Delta FGJ+\Delta BGI\\&=\text{六邊形}LEHIGJ\\&=\text{梯形}LEGJ+\text{梯形}HEGI\end{aligned}$$

接著以梯形面積公式計算推導, 可得

$$\begin{aligned}&\text{梯形}LEGJ+\text{梯形}HEGI\\&=\frac{1}{2}\left[\left(\overline{JG}+\overline{LE}\right)\times\overline{LJ}\right]+\frac{1}{2}\left[\left(\overline{EH}+\overline{GI}\right)\times\overline{HI}\right],\end{aligned}$$

然後繼續整理,

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\left[\left(\overline{JG}+\overline{LE}\right)\times\overline{LJ}\right]+\frac{1}{2}\left[\left(\overline{EH}+\overline{GI}\right)\times\overline{HI}\right]\\&=\left(\overline{JG}+\overline{LE}\right)\times\overline{LJ}\\&=\left(\overline{KL}+\overline{LE}\right)\times\left(\overline{LD}+\overline{DF}+\overline{FJ}\right)\\&=\left(\overline{KE}\right)\times\left(\overline{DF}+2\times\overline{LD}\right)\\&=\overline{KD}\times\overline{DF}+2\times\overline{KE}\times\overline{LD}\\&=\overline{AB}^{2}+4\cdot\left(\frac{1}{2}\times\overline{KE}\times\overline{LD}\right)\\&=\overline{AB}\text{為邊的正方形面積}+4\times\Delta EKD,\end{aligned}$$

因此

$$\square ACDE+\square BCFG=\overline{AB}\text{為邊的正方形面積},$$

此即為畢氏定理關係式

$$a^2+b^2=c^2.$$

【註與心得】

1. 來源：此證明同樣來自高中生 Joseph Zelson, 他將證明過程於 1939 年寄給了 Loomis。而 Loomis 將這個證明記載於他的《勾股定理》一書中幾何篇的編號第 251 號。
2. 心得：這個證明過程將一個六邊形可以視為兩個梯形及兩個正方形加上四個六個三角形，透過梯形面積公式及簡單的代數運算技巧就可以得證。也可惜了不像拼片的幾何證明方式這麼直觀，要透過梯形面積公式來做轉換，也沒有顯而易見的大正方形於圖形中，在教學上將提升難度。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●				

4. 補充：在數學能力指標中，有這麼幾項：

   S-4-09：能理解三角形的全等定理，並應用於解題和推理。

   以及

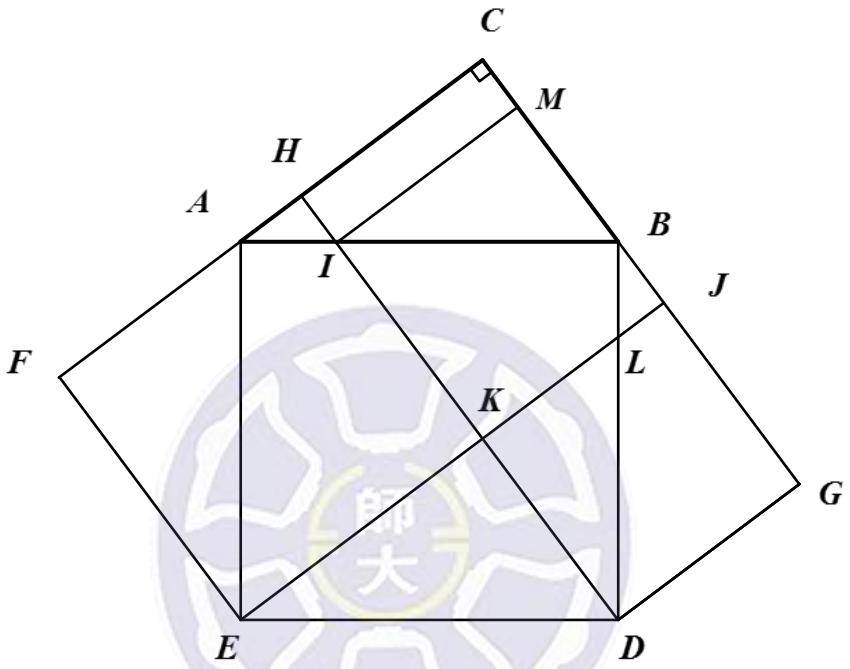
   N-3-22 及 S-3-06：能運用切割重組，理解三角形、平行四邊形與梯形的面積公式。

   此證明正是利用圖形的分割，以及三角形的全等來推理出畢氏定理關係式。

勾股定理證明-G252

【作輔助圖】

1. 以直角三角形 ABC 的 $\overline{AB}$ 為邊向外作正方形 $ABDE$ 。
2. 並過 E 作 $\overline{CA}$ 垂直線交 $\overline{CA}$ 延伸線於 F ；過 D 作 $\overline{CB}$ 垂直線交 $\overline{CB}$ 延伸線於 G ；過 D 作 $\overline{CF}$ 垂直線交 $\overline{CF}$ 於 H ，交 $\overline{AB}$ 於 I ；過 E 作 $\overline{CG}$ 垂直線交 $\overline{CG}$ 於 J ，交 $\overline{DH}$ 於 K ，交 $\overline{BD}$ 於 L ；最後過 I 作 $\overline{CB}$ 垂直線交 $\overline{CB}$ 於 M 。



【求證過程】

不難發現輔助中有四個直角三角形是全等的直角三角形以及外也有兩個直角三角形全等，在給出證明之後，就可以透過大正方形面積可以拆成小正方形面積和的面積關係式推導，得到畢氏定理關係式。

1. 不難看出 ΔABC 、 ΔEAF 、 ΔEDK 和 ΔBDG 是全等的直角三角形，以下我們給出證明：

   因為正方形 $ABDE$ ，所以有

$$\overline{AB}=\overline{BD}=\overline{DE}=\overline{EA},$$

   且

$$\angle ACB=\angle EFA=\angle DKE=\angle BGD=90^{\circ},$$

   以及

$$\begin{aligned}\angle CAB&=90^{\circ}-\angle FAE\\&=\angle FEA,\end{aligned}$$

   也同理我們有 $\angle CAB=\angle FEA=\angle KED=\angle GBD$,

   因此

$$\Delta ABC\cong\Delta EAF\cong\Delta EDK\cong\Delta BDG\ \text{(AAS 全等)}.$$

2. 也不難看出ΔAIH和ΔBLJ全等，以下我們給出證明：
因為

$$\angle CAB = \angle GBD \left(\because \Delta ABC \cong \Delta BDG\right),$$

並且

$$\begin{aligned}\overline{AH} &= \overline{AC} - \overline{HC} \\ &= \overline{BG} - \overline{JG}\ , \\ &= \overline{BJ},\end{aligned}$$

以及

$$\angle AHI = 90^\circ = \angle BJL,$$

所以

$$\Delta AIH \cong \Delta BLJ \ \text{(AAS 全等)}.$$

3. 接著考慮ΔIBM與ΔDLK全等，以下給出證明：
因為

$$\begin{aligned}\overline{MB} &= \overline{CB} - \overline{CM} \\ &= \overline{KJ} - \overline{LJ}\left(\because \Delta AIH \cong \Delta BLJ\right) \\ &= \overline{LK},\end{aligned}$$

且

$$\angle IMB = 90^\circ = \angle LKD,$$

以及

$$\overline{IM} = \overline{KD},$$

所以可以推得

$$\Delta IBM \cong \Delta DLK \ \text{(SAS 全等)}.$$

4. 接著證明四邊形$IBLK$及三角形BDG面積相同：
因為$\Delta IBD = \frac{1}{2}\square IMDB = \Delta IBM + \Delta BDG$，可以得到

$$\begin{aligned}IBLK &= \Delta IBD - \Delta KLD \\ &= \left(\Delta IBM + \Delta BDG\right) - \Delta KLD \\ &= \Delta BDG.\end{aligned}$$

5. 綜合以上可以得到：

$$\begin{aligned}\square ABDE &= AIKE + \Delta EKD + \Delta DKL + IBLK \\ &= AIKE + \Delta AFE + \Delta DKL + \Delta BDG \\ &= AIKE + \Delta AFE + \Delta DKL + DGJL + \Delta BDL \\ &= \left(AIKE + \Delta AFE + \Delta AHI\right) + \left(\Delta DKL + DGJL\right) \\ &= \square EFHK + \square DKJG,\end{aligned}$$

此即為畢氏定理關係式

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 .$$

【註與心得】

1. 來源：此證明是作者 Loomis 在 1940 設計給出的。收錄在 Loomis 的《勾股定理》中幾何篇的編號第 251 號
2. 心得：此證明中最大關鍵是證明其中一個四邊形面積會等於另一個三角形面積，再用面積的等式來證明畢氏定理。在教學上要特別留意學生可能容易誤以為是要證明圖中的梯形全等。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●		

4. 補充：在數學能力指標中，有這麼幾項：

   S-4-09：能理解三角形的全等定理，並應用於解題和推理。

   以及

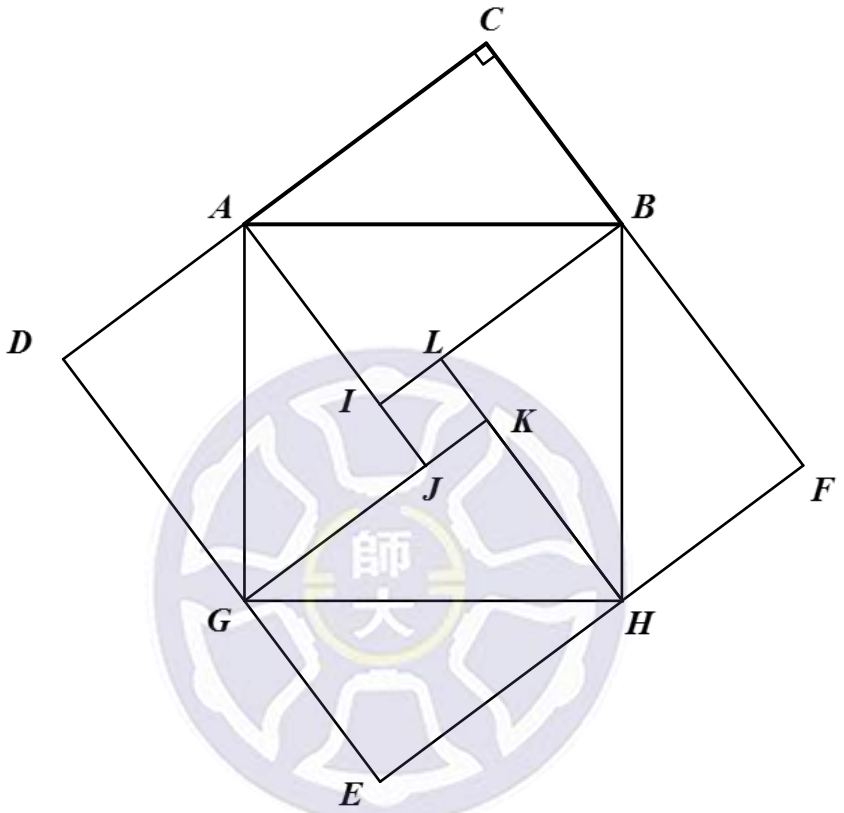
   N-3-22 及 S-3-06：能運用切割重組，理解三角形、平行四邊形與梯形的面積公式。

   此證明正是利用圖形的分割，以及三角形的全等來推理出畢氏定理關係式。

勾股定理證明-G253

【作輔助圖】

1. 直角三角形ΔABC作$\overline{CA}$延長線上一點D使$\overline{AD}=\overline{CB}$。
2. 以$\overline{CD}$為邊向下作正方形$CDEF$。
3. 過A作$\overline{AB}$垂直線，交$\overline{DE}$於G，過G作$\overline{AG}$垂直線，交$\overline{EF}$於H，連$\overline{HB}$。
4. 過A作$\overline{AC}$垂直線，過B作$\overline{CB}$垂直線，交於I；同理作出J,K,L。



【求證過程】

不難看出輔助圖中的幾個直角三角形全等，在給出證明之後，也可以得知四邊形$ABHG$是正方形。再利用大的正方形的面積的兩種算法，就可以整理得到畢氏定理關係式。

1. 不難看出$\Delta ABC\cong\Delta GAD\cong\Delta HGE\cong\Delta BHG$，以下我們給出證明：
   首先考慮$\Delta ABC\cong\Delta GAD$是因為
   $$\angle BCA=90^\circ=\angle ADG,$$
   且
   $$\overline{BC}=\overline{AD},$$
   又
   $$\angle CAB=90^\circ-\angle DAG=\angle DGA,$$
   所以
   $$\Delta ABC\cong\Delta GAD\,(\text{AAS 全等}).$$
   接著考慮$\Delta GAD\cong\Delta HGE$，以下是證明：

因為

$$\angle GDA = 90° = \angle HEG,$$

並且

$$\begin{aligned}\angle AGD &= 90° - \angle AGD \\ &= \angle HGE,\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}\overline{AD} &= \overline{CD} - \overline{CA} \\ &= \overline{DE} - \overline{DG}\left(\because \text{正方形}CDEF\text{以及}\Delta ABC \cong \Delta GAD\right) \\ &= \overline{GE},\end{aligned}$$

所以可以得到

$$\Delta GAD \cong \Delta HGE \text{ (ASA 全等)}.$$

同理即可以證明 $\Delta HGE \cong \Delta BHG$ ，綜合以上就可以得到

$$\Delta ABC \cong \Delta GAD \cong \Delta HGE \cong \Delta BHG.$$

2. 不難看出四邊形 $ABHG$ 是正方形，以下我們給出證明：
因為有上述的全等條件

$$\Delta ABC \cong \Delta GAD \cong \Delta HGE \cong \Delta BHG,$$

所以

$$\overline{AB} = \overline{BH} = \overline{HG} = \overline{GA},$$

又

$$\angle BAG = \angle AGH = \angle GHB = \angle HBA = 90^{\circ},$$

所以有四邊都等長，四個角都直角得到四邊形 $ABHG$ 是正方形。

3. 接著由於大正方形的面積有兩個算法：

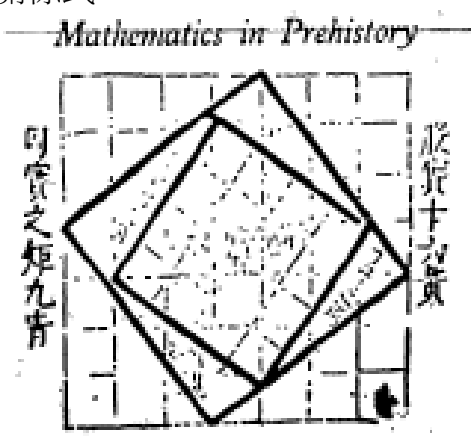
$$\square CDEF = \overline{CD}^2 = \left(\overline{CA} + \overline{BC}\right)^2 = b^2 + a^2 + 2ab,$$

$$\square CDEF = \square ABHG + 4 \times \Delta ABC = c^2 + 4 \times \left(\frac{1}{2}ab\right) = c^2 + 2ab,$$

比較整理後可得

$$c^2 = a^2 + b^2,$$

此即為畢氏定理關係式。



【註與心得】

1. 來源：此證明是來自中國的證明，出自《周髀算經》，成書於公元前 1 世紀，記載公元前 11 世紀周公與商高的問答。上圖即為三國時代趙爽的《弦圖》。收錄在 Loomis 的《勾股定理》中幾何篇的編號第 253 號
2. 心得：若是知道了這張圖及這個定理被知悉的年代，會令人好奇在千年之前的人們對數學的認識有著什麼樣的認識？在教學時只要給學生看看這張圖，順便談談這一段故事，順便談談中國數學與西方數學的差異，相信會有不錯的效果。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●		●

4. 補充：在數學能力指標中，有著這麼一項：

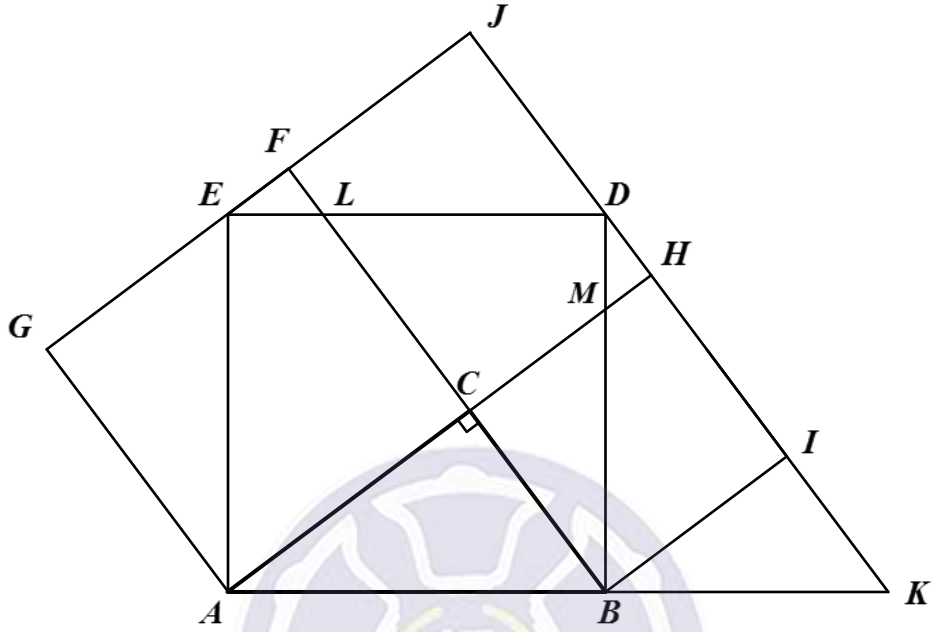
   C-R-04：能知道數學在促進人類文化發展上的具體例子。

   在距今二千至三千年前的東方人是這樣看勾股定理，有別於西方歐氏幾何體系所要求。由一個定理證明，一個例子就可以引起學生的好奇心，探索數學發展史中東方世界佔有什麼樣的角色。

勾股定理證明-G254

【作輔助圖】

1. 分別以直角三角形 ΔABC 三邊 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 、 $\overline{BC}$ 為正方形的邊，分別向內作正方形 $ABDE$ ，向外作正方形 $ACFG$ 及正方形 $BCHI$ 。
2. 接著延伸 $\overline{GF}$ 及 $\overline{IH}$ 交於 J ，延伸 $\overline{HI}$ 及 $\overline{AB}$ 交於 K 。



【求證過程】

作完輔助圖後不難發現五組全等的直角三角形，在我們給出證明之後，就可以將大正方形拆成兩個小正方形面積之和，也就證明了畢氏定理關係式。

1. 不難發現 ΔAEG 和 ΔABC 是全等的，以下我們給出證明：
   因為
   $$\overline{AB} = \overline{AE} \text{ (正方形 } ABDE \text{ 兩邊)},$$
   且
   $$\overline{AC} = \overline{AG} \text{ (正方形 } ACFG \text{ 兩邊)},$$
   且
   $$\angle AGE = 90° = \angle ACB,$$
   所以
   $$\Delta ABC \cong \Delta AEG \text{ (RHS 全等)}.$$

2. 接著也不難發現 ΔBDL 和 ΔDBK 全等，以下給出證明：
   因為
   $$\angle DBL = \angle BDK \text{ (平行的內錯角相等)},$$
   且
   $$\angle BDL = 90° = \angle DBK,$$
   以及

$$\overline{DB} = \overline{BD},$$

所以

$$\Delta BDL \cong \Delta DBK \text{ (ASA 全等)}.$$

3. 再來考慮 ΔBCM 和 ΔBIK 全等的，以下是證明：
因為

$$\overline{BC} = \overline{BI} \text{ (正方形 } BCHI \text{ 的邊)},$$

且

$$\angle BCM = 90° = \angle BIK,$$

又因為

$$\angle CBM + \angle MBI = 90^\circ = \angle MBI + \angle IBK,$$

所以

$$\angle CBM = \angle IBK,$$

因此

$$\Delta BCM \cong \Delta BIK \text{ (AAS 全等)}.$$

4. 其中 ΔEDJ 和 ΔDBI 亦為全等的直角三角形，以下給出證明：
因為

$$\overline{ED} = \overline{DB} \text{ (正方形 } ABDE \text{ 的邊)},$$

且

$$\angle EJD = 90° = \angle DIB,$$

且因為

$$\angle EDJ + \angle BDI = 90^\circ = \angle EDJ + \angle DEJ,$$

所以

$$\angle BDI = \angle DEJ,$$

因此

$$\Delta EDJ \cong \Delta DBI \text{ (AAS 全等)}.$$

5. 最後一組我們可以看出 ΔELF 和 ΔDMH 全等，以下給出證明：
因為

$$\begin{aligned}\overline{EF} &= \overline{EJ} - \overline{FJ} \\ &= \overline{DI} - \overline{HI} \ \left(\because \Delta EDJ \cong \Delta DBI\right) \\ &= \overline{DH},\end{aligned}$$

且

$$\angle LEF = \angle MDH \left(\because \Delta EDJ \cong \Delta DBI\right),$$

又

$$\angle EFL = 90° = \angle DHM,$$

因此

$$\Delta ELF \cong \Delta DMH \text{ (AAS 全等)}.$$

6. 利用以上五組三角形全等，再透過面積等式就可以推導出以下關係式：

$$\begin{aligned}\square ABDE &= \Delta ABC + \Delta BDL + ACLE \\ &= \Delta AGE + \Delta DBK + ACLE \\ &= \Delta AGE + \Delta DMH + \Delta BIK + HMBI + ACLE \\ &= \Delta AGE + \Delta EFL + ACLE + \Delta CMB + HMBI \\ &= \square ACFG + \square BCHI,\end{aligned}$$

此即為畢氏定理

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2.$$

【註與心得】

1. 來源：由 Fred. W. Martin，印第安納州南本德中心中學的學生給出的。收錄在 Loomis 的《勾股定理》中幾何篇的編號第 254 號
2. 心得：先選擇性地以直角三角形三個邊作正方形，再以移動全等三角形的方式從大正方形去拼出兩個小正方形，對國、高中生來說都是容易看懂的。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●	●	●		

4. 補充：在數學能力指標中，有這麼幾項：

   S-4-09：能理解三角形的全等定理，並應用於解題和推理。

   以及

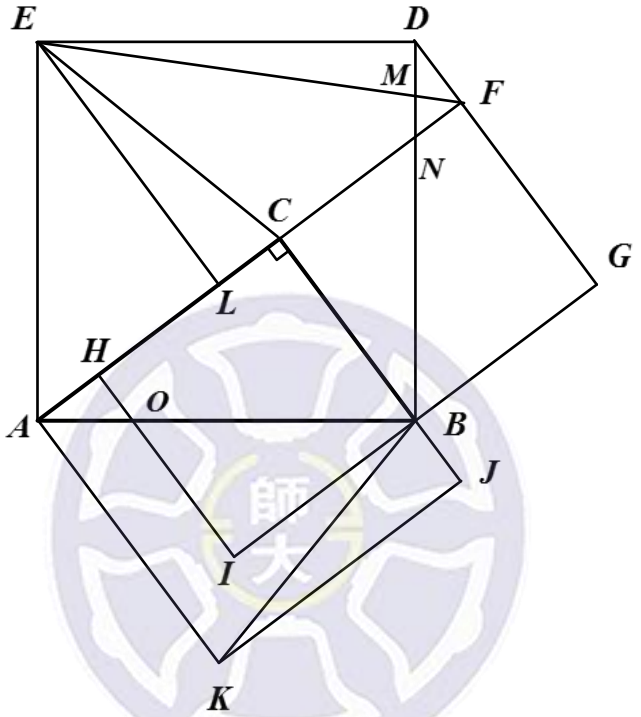
   N-3-22 及 S-3-06：能運用切割重組，理解三角形、平行四邊形與梯形的面積公式。

   此證明正是利用圖形的分割，以及三角形的全等來推理出畢氏定理關係式。

勾股定理證明-G255

【作輔助圖】

1. 以直角三角形 ΔABC 的 $\overline{AB}$ 為邊向內作正方形 $ABDE$ ，再以為邊 $\overline{BC}$ 向外作正方形 $BCFG$ ，然後向內作正方形 $BCHI$ ，以 $\overline{AC}$ 為邊向內作正方形 $ACJK$ 。連 $\overline{DF}$ 。
2. 接著從 E 作 $\overline{AC}$ 的垂線，交 $\overline{AC}$ 於 L ；
3. 最後連 $\overline{EF}$ 與 $\overline{DN}$ 交於 M ； $\overline{BD}$ 與 $\overline{CF}$ 交於 N ； $\overline{IH}$ 與 $\overline{AB}$ 交於 O ；連 $\overline{BK}$ 。



【求證過程】

不難發現其中三個直角三角形是全等的，在給出證明後分別利用全等及同底等高來證明圖中三個三角形的面積相等，最後從大正方形面積的等式推導，可以拆成兩個小正方形的面積之和，也就從中得到畢氏定理的關係式。

1. 首先不難看出 $\Delta ABC \cong \Delta DBG \cong \Delta EAL$ ，以下我們給出證明：
   其中我們先考慮 $\Delta ABC \cong \Delta DBG$ ，是因為
   $$\overline{AB} = \overline{BD} \ (\because \text{正方形的邊}),$$
   而且
   $$\angle ABC = 90^\circ - \angle NBC$$
   $$= \angle DBG,$$
   以及
   $$\angle ACB = 90^\circ = \angle DGB,$$
   所以可以推得
   $$\Delta ABC \cong \Delta DBG \ (\text{AAS 全等})；$$

再來看 $\Delta ABC \cong \Delta EAL$ 的全等證明：
因為

$$\overline{AB} = \overline{AE} \ \ (\because \text{正方形的邊}),$$

而且

$$\begin{aligned}\angle CAB &= 90^\circ - \angle EAL \\ &= \angle AEL,\end{aligned}$$

以及

$$\angle ACB = 90^\circ = \angle AALE,$$

所以可以推得

$$\Delta ABC \cong \Delta EAL \ \ (\text{AAS 全等})；$$

因此我們已經證明了

$$\Delta ABC \cong \Delta DBG \cong \Delta EAL\,.$$

2. 接著來證明 $\Delta EAC \cong \Delta BAK$ ：
因為

$$\overline{EA} = \overline{BA} \ \ (\because \text{正方形的邊}),$$

而且

$$\overline{AK} = \overline{AC} \ \ (\because \text{正方形的邊}),$$

以及

$$\angle EAC = 90^\circ - \angle CAB = \angle BAK,$$

所以可以推得

$$\Delta EAC \cong \Delta BAK \ (\text{SAS 全等}).$$

3. 現在我們要以同底等高證明 ΔCFE 的面積等於 ΔBGD 的面積：
因為 $\overline{CF} = \overline{BG}$ $(\because$ 正方形的邊$)$ 而且 $\overline{CF}$ 的高為
$\overline{EL} = \overline{DG}$ $(\because \Delta EAL \cong \Delta DBG)$，所以可以推得
ΔCFE 的面積等於 ΔBGD 的面積 (同底等高)

4. 另外也是因為同底等高可以看出 ΔDFE 的面積等於 ΔBJK 的面積，以下給出證明：
因為

$$\begin{aligned}\overline{DF} &= \overline{DG} - \overline{FG} \\ &= \overline{AC} - \overline{CB} \ \ (\because \Delta DBG \cong \Delta ABC \text{且考慮正方形的邊}) \\ &= \overline{CJ} - \overline{CB} \ \ (\because \text{正方形的邊}) \\ &= \overline{BJ},\end{aligned}$$

而且

$$\begin{aligned}\overline{FL} &= \overline{FC}+\overline{CL}\\ &= \overline{CB}+\overline{CL}\ \ (\because \text{正方形的邊})\\ &= \overline{AL}+\overline{CL}\ \ (\because \Delta EAL \cong \Delta ABC)\\ &= \overline{AC}=\overline{JK}\ \ (\because \text{正方形的邊}),\end{aligned}$$

以上所述，也就是 ΔDFE 及 ΔBJK 中，底 $\overline{DF}=\overline{BJ}$ ，高 $\overline{DF}=\overline{JK}$ ，所以 ΔDFE 的面積等於 ΔBJK 的面積 (同底等高)

5. 綜合以上，再經由面積的關係可以推導以下等式：

$$\begin{aligned}\square ABDE &= \Delta ABC+\Delta ACE+(\Delta FCE+\Delta DFE-\Delta DNF)+\Delta CNB\\ &= \Delta ABC+\Delta AKB+\Delta DBG+\Delta BJK-\Delta DNF+\Delta CNB\\ &= (\Delta ABC+\Delta AKB+\Delta BJK)+(\Delta BDG-\Delta DNF+\Delta CNB)\\ &= \square ACJK+\square BCFG,\end{aligned}$$

也就是畢氏定理關係式

$$c^2=a^2+b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：此證明是由 Bob Chillag 一位 Central Junior-Senior High School, of South Bend, Indiana 的學生於 1940 年所證。收錄在 Loomis 的《勾股定理》中幾何篇的編號第 155 號
2. 心得：此證明用到了同底等高則三角形面積相等的性質，而這兩組三角形的面積相等並不是這麼好察覺。所以我想在教學上要強調的是如何透過觀察找到全等三角形，以及若要證明三角形面積相等，在沒有全等的狀況下，可以證明同底等高。在這樣巧妙的安排下就可以輕鬆地證明畢氏定理。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●	●	

4. 補充：在數學能力指標中，有這麼幾項：

   S-4-09：能理解三角形的全等定理，並應用於解題和推理。

   以及

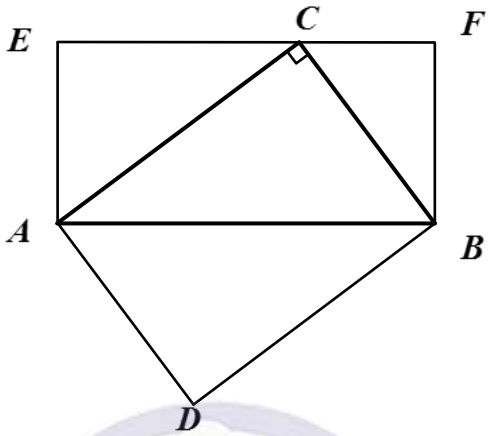
   N-3-22 及 S-3-06：能運用切割重組，理解三角形、平行四邊形與梯形的面積公式。

   此證明正是利用圖形的分割，以及三角形的全等來推理出畢氏定理關係式。

勾股定理證明-Bog008

【作輔助圖】

1. 直角三角形 ABC ，從 B 作 $\overline{AC}$ 的平行線，並從 A 作 $\overline{BC}$ 平行線，兩線交於 D 。
2. 分別過 A,B 作 $\overline{AB}$ 的垂直線，並過 C 作 $\overline{AB}$ 的平行線，與兩垂直線交於 E,F 。



【求證過程】

先以直角三角形 ABC 的 $\overline{AB}$ 為長方形的一邊，作長方形使直角三角形的頂點落在長方形的對邊上。另外以 $\overline{AB}$ 為長方形的對角線，再作一個長方形。我們可以先證明輔助線切割出來的四個三角形皆為相似的直角三角形，再利用大五邊形的兩種面積拆解計算方式，再透過簡單的代數運算整理，即可得到畢氏定理的關係式。

1. 不難發現 $\Delta ABC,\Delta BAD$ 為全等的直角三角形，以下我們給個證明：
   因為
   $$\overline{AB}=\overline{BA}\ (\text{共用邊}),$$
   而且
   $$\angle CAB=\angle DBA\ (\text{平行線}\ \overline{AC},\overline{BD}\ \text{的內錯角相等}),$$
   以及
   $$\angle CBA=\angle DAB\ (\text{也是因為平行線}\ \overline{AC},\overline{BD}\ \text{的內錯角相等}),$$
   所以
   $$\Delta ABC\cong\Delta BAD\ (\text{ASA 全等}),$$
   也因此四邊形 $ACBD$ 為長方形.
2. 接著看出 $\Delta ABC,\Delta CAE,\Delta BCF$ 為相似三角形，以下是它的證明：
   其中 $\Delta ABC,\Delta CAE$ 相似是因為
   $$\angle CAB=\angle ECA\ (\text{因為平行線}\ \overline{AB},\overline{EF}\ \text{的內錯角相等}),$$
   並且
   $$\angle CAE=90^{\circ}-\angle CAB=\angle CBA,$$
   所以
   $$\Delta ABC\sim\Delta CAE\ (\text{AA 相似}).$$

同理有 $\Delta ABC \sim \Delta BCF$.

3. 在這裡為了代數運算方便我們將直角三角形 ABC 的三邊長分別以 $\overline{BC}=a,\ \overline{AC}=b,\ \overline{AB}=c$ 表示。

然後就可以利用相似形的特性，也就是因為有 $\Delta CAE \sim \Delta ABC$, 所以

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} \Rightarrow \overline{AE}=\frac{ab}{c},\ \frac{\overline{EC}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} \Rightarrow \overline{EC}=\frac{b^2}{c}.$$

同理因為 $\Delta BCF \sim \Delta ABC$, 所以 $\frac{\overline{CF}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} \Rightarrow \overline{CF}=\frac{a^2}{c}$.

4. 最後由五邊形 $ADBFE$ 面積的兩種拆解法推出畢氏定理關係式：

第一，

$$\text{五邊形 } ADBFE = \square ABFE + \Delta ABD .$$

第二，

$$\text{五邊形 } ADBFE = \square ACBD + \Delta BCF + \Delta CAE .$$

而這兩個方式所得到的面積必然相同，可以得到以下關係式：

$$\frac{ab}{c}\cdot\left(\frac{a^2}{c}+\frac{b^2}{c}\right)+\frac{1}{2}a\cdot b = ab+\frac{1}{2}\cdot\frac{ab}{c}\cdot\frac{a^2}{c}+\frac{1}{2}\cdot\frac{ab}{c}\cdot\frac{b^2}{c},$$

左右同乘 $2c^2/ab$ 後可以得到

$$2a^2+2b^2+c^2=2c^2+a^2+b^2,$$

最後移項整理可得

$$a^2+b^2=c^2.$$

此即為畢氏定理關係式.

【註與心得】

1. 來源：此證明收錄在網站(Cut the Knot)中 Pythagorean Theorem Proof #08。
2. 心得：這個證明過程使用到的技巧在我們國中的課程裡就已經學習過，所以可以提供給國中生參考，可以熟悉相似形的邊長計算方式。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●	●			

4. 補充：在數學能力指標中，有這麼幾項：

   S-4-09：能理解三角形的全等定理，並應用於解題和推理。

   以及

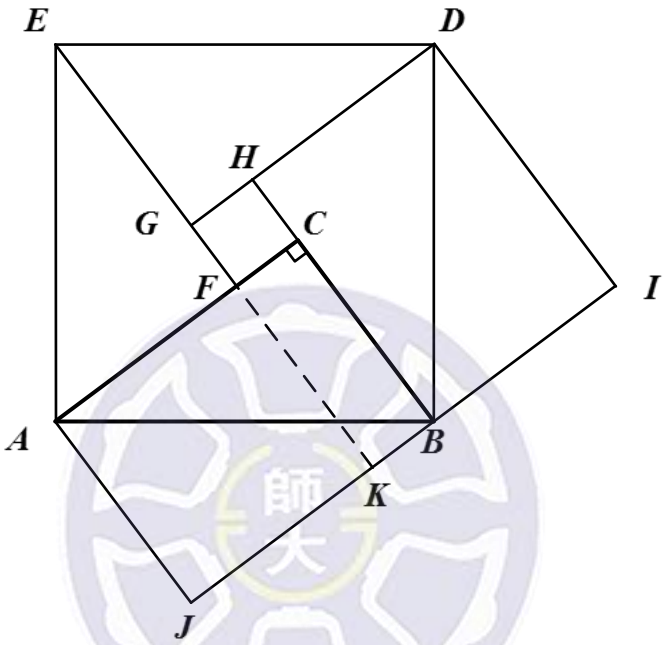
   N-3-22 及 S-3-06：能運用切割重組，理解三角形、平行四邊形與梯形的面積公式。

   此證明正是利用圖形的分割，以及三角形的全等來推理出畢氏定理關係式。

勾股定理證明-Bog010

【作輔助圖】

1. 先以直角三角形 ABC 以 $\overline{AB}$ 為向內作正方形 $ABDE$ 。
2. 接著過 E 對 $\overline{AC}$ 作垂直線，並交 $\overline{AC}$ 於 F ，再過 D 對 $\overline{AF}$ 作垂直線，並交 $\overline{AF}$ 於 G 。然後延伸 $\overline{BC}$ 交 $\overline{DG}$ 於 H 。
3. 接著過 D 作 $\overline{HB}$ 的平行線，並過 B 作 $\overline{GD}$ 的平行線，交於 I 。
4. 以及過 A 作 $\overline{HB}$ 的平行線，交 $\overline{IB}$ 的延伸線於 J 。
5. 最後延伸 $\overline{EF}$ 交 $\overline{BJ}$ 於 K 。



【求證過程】

先將直角三角形 ABC 以斜邊為邊向內作正方形，接著若以適當的輔助線將大正方形切割，經過切割能得到四個全等的直角三角形及一個正方形；接著想像我們可以移動其中兩塊直角三角形，移動後非常清楚地它們恰好會變成兩個小的正方形。也就證明了畢氏定理的關係式。

1. 不難發現 $\Delta ABC, \Delta EAF, \Delta DEG$ 為全等的直角三角形，以下我們給出證明：

   因為

   $$\overline{AB} = \overline{AE} = \overline{DE} \ (\because \text{正方形的邊}),$$

   而且

   $$\angle ACB = \angle EFA = \angle DGE = 90^\circ,$$

   以及

   $$\begin{aligned}\angle CAB &= 90^\circ - \angle EAF = \angle AEF \\ &= 90^\circ - \angle DEG = \angle EDG,\end{aligned}$$

   所以可以推得

   $$\Delta ABC \cong \Delta EAF \cong \Delta DEG \ (\text{AAS 全等}).$$

2. 也可以發現 $\Delta ABC, \Delta BDH$ 為全等，我們給個證明：
因為
$$\overline{AB} = \overline{BD},$$
而且
$$\angle CAB = 90^\circ - \angle CBA = \angle DBH,$$
以及
$$\begin{aligned}\angle CBA &= 90^\circ - \angle CAB \\ &= 90^\circ - \angle GDE \ \left(\because \Delta ABC \cong \Delta DEG\right) \\ &= \angle DBH,\end{aligned}$$
所以可以推得
$$\Delta ABC \cong \Delta BDH \text{ (ASA 全等)}.$$

3. 接著發現 $\overline{DI} = \overline{HB}$ 且 $\overline{DH} = \overline{BI}$ ，以下是它們的證明：
因為
$$\angle DHB = 90^\circ = \angle HDI \ \left(\because \overline{HB}\text{平行於}\overline{DI}, \text{ 同側內角互補}\right),$$
而且
$$\angle DIB = 90^\circ = \angle HBI \ \left(\because \overline{BI}\text{平行於}\overline{GD}, \text{ 同側內角互補}\right),$$
所以四邊形 $HDIB$ 是長方形，也就可以得到 $\overline{DI} = \overline{HB}$, $\overline{DH} = \overline{BI}$.

4. 考慮 $\Delta BHD, \Delta DBI$ 的全等，證明如下：
因為
$$\overline{BD} = \overline{DB} \ (\because \text{共用邊}),$$
而且
$$\overline{DI} = \overline{HB},$$
以及
$$\overline{DH} = \overline{BI},$$
所以可以推得
$$\Delta BHD \cong \Delta DBI \text{ (SSS 全等)}.$$

5. 也不難發現 $\overline{AJ} = \overline{CB}$ 以下給個證明：
因為
$$\angle ACB = 90^\circ = \angle CAJ \ \left(\because \overline{AJ}\text{平行於}\overline{CB}, \text{ 同側內角互補}\right),$$
而且
$$\angle CBJ = 90^\circ = \angle JBC \ \left(\because \overline{AJ}\text{平行於}\overline{BC}, \text{ 同側內角互補}\right),$$
所以四邊形 $ACBJ$ 是長方形，因此 $\overline{AJ} = \overline{BC}$ 且 $\overline{AC} = \overline{JB}$.

6. 還有 $\Delta ABC, \Delta BAJ$ 亦為全等的直角三角形, 以下給出證明：
因為

$$\overline{AJ}=\overline{BC},$$

而且

$$\overline{AC}=\overline{JB},$$

以及

$$\overline{AB}=\overline{BA}\ (\because \text{共用邊}),$$

所以可以推得

$$\Delta ABC\cong\Delta BAJ\ (\text{SSS 全等}).$$

7. 不難發現四邊形 $AFKJ$ 及四邊形 $DGKI$ 皆為正方形, 這是因為四邊形 $AFKJ$ 是長方形$(\because$四個角皆直角$)$，而且 $\overline{AF}=\overline{AJ}\ (\because \Delta EAF\cong\Delta BAJ)$, 所以就可以推論出四邊形 $AFKJ$ 是正方形。
   也同理因為四邊形 $DIKG$ 是長方形$(\because$四個角皆直角$)$，而且 $\overline{GD}=\overline{DI}\ (\because \Delta DEG\cong\Delta DBI)$, 也就可以推論出四邊形 $DGKI$ 是正方形。
8. 最後從面積等式推導出畢氏定理：

$$\begin{aligned}\square ABDE &= \Delta ABC+\Delta EAF+\Delta DEG+\Delta BDH+CFGH\\ &= \Delta ABC+\Delta BAJ+\Delta DBI+\Delta BDH+CFGH\\ &= (\Delta ABC+\Delta BAJ-BCFK)+(BCFK+\Delta DBI+\Delta BDH+CFGH)\\ &= \square AFJK+\square DGKI,\end{aligned}$$

也就是畢氏定理關係式

$$c^2=a^2+b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：此證明是一本 1830 年《算法新書》所記載，作者是十八、十九世紀的日本數學家千葉胤秀與其師長谷川寬。收錄在網站(Cut the Knot)中 Pythagorean Theorem Proof #10。
2. 心得：在教學現場中這個證明可以搭配動態的方式來呈現，不論是以拼圖或是以電腦輔助都是很好的選擇。撇開較嚴格地證明這些三角形會全等，重新拼湊而得的圖形是兩個正方形，事實上都是學生們直觀且容易接受的。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●	●	

4. 補充：在數學能力指標中，有這麼幾項：

   S-4-09：能理解三角形的全等定理，並應用於解題和推理。

   以及

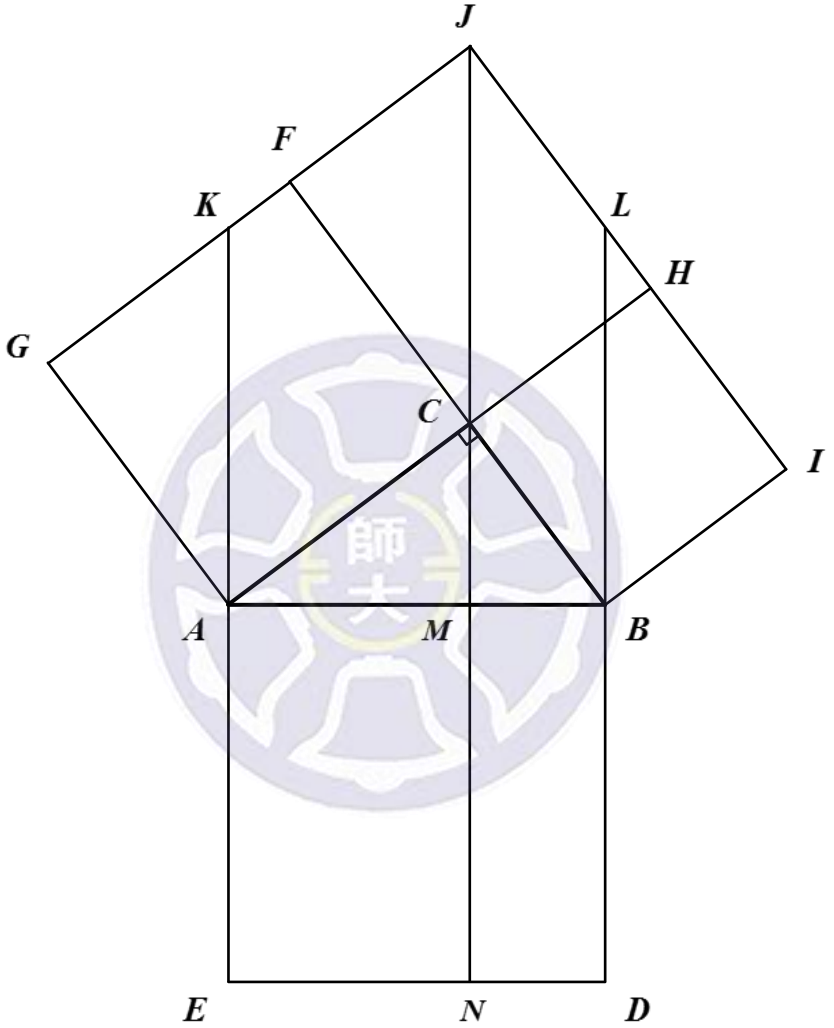
   N-3-22 及 S-3-06：能運用切割重組，理解三角形、平行四邊形與梯形的面積公式。

   此證明正是利用圖形的分割，以及三角形的全等來推理出畢氏定理關係式。

勾股定理證明-Bog012

【作輔助圖】

1. 分別以直角三角形 ABC 的 $\overline{AB},\overline{AC},\overline{BC}$ 三邊為邊，向外作正方形 $ABDE$ 、正方形 $ACFG$ 以及正方形 $BCHI$ 。
2. 接著延伸 $\overline{GF}$ 及延伸 $\overline{IH}$ 相交於 J 。
3. 然後延伸 $\overline{EA}$ 交 $\overline{GJ}$ 於 K ，並且延伸 $\overline{DB}$ 交 $\overline{IJ}$ 於 L 。
4. 最後連 $\overline{JC}$ 並延伸，與 $\overline{AB}$ 交於 M ，與 $\overline{DE}$ 交於 N 。



【求證過程】

直角三角形 ABC 的三邊為邊往外作三個正方形，並作適當的輔助線後，我們要證明那二塊小正方形的面積和等於大正方形的面積。而為了達到這個目的我們必須先證明一組直角三角形的全等。

接著以推移的概念說明兩個小正方形各別有對應的平行四邊形面積和他們相等，並且這兩個平行四邊形的面積也各別與大正方形分割出的兩個長方形面積相等，也就可以推論出小正方形的面積和等於大正方形，因此得到了畢氏定理的關係式。

1. 不難發現 $\Delta ABC,\Delta CJF$ 為全等的三角形，以下給個證明：

因為

$$\overline{AC}=\overline{CF}\ \ (\because \text{正方形的邊}),$$

而且

$$\overline{BC}=\overline{CH}\ \ (\because \text{正方形的邊})$$
$$=\overline{FJ}\ \ (\because \text{長方形的邊}),$$

以及

$$\angle ACB=90^\circ=\angle CFJ,$$

所以可以推得

$$\Delta ABC\cong\Delta CJF\ (\text{SAS 全等}).$$

2. 可以看到$\overline{KA}$平行於$\overline{JC}$, 因為有

$$\begin{aligned}\angle KAC&=90^\circ-\angle CAB\\&=90^\circ-\angle JCF\ \ (\because \Delta ABC\cong\Delta CJF)\\&=90^\circ-(\angle ACJ-90^\circ)\\&=180^\circ-\angle ACJ,\end{aligned}$$

所以可以利用同側內角互補來說明$\overline{KA}$平行於$\overline{JC}$.

3. 接著考慮正方形$ACFG$與平行四邊形$ACJK$面積相等，以下是它的證明：

因為

$$\overline{KJ}\text{平行於}\overline{AC}$$

並且

$$\overline{AK}\text{平行於}\overline{CJ},$$

所以

四邊形 $ACJK$ 是平行四邊形。

若我們以平行四邊形 $ACJK$ 的 $\overline{AC}$ 邊為底，可以推得

$$▱ACJK=\overline{AC}\cdot\overline{CF}=\overline{AC}\cdot\overline{AC}=□ACFG,$$

也就是正方形 $ACFG$ 的面積。也可以同理證明正方形$BCHI$與平行四邊形$BCJL$面積相等。

4. 也不難發現平行四邊形$ACJK$與長方形 $AENM$ 面積相等，同樣地我們寫下證明：

若以平行四邊形$ACJK$的$\overline{JC}$邊為底，就可以求得

$$\begin{aligned}▱KACJ&=\overline{JC}\cdot\overline{AM}=\overline{AB}\cdot\overline{AM}\ \ (\because \Delta ABC\cong\Delta CJF)\\&=\overline{AE}\cdot\overline{AM}\ \ (\because \text{正方形的邊})\\&=▭AENM,\end{aligned}$$

再同理可得到平行四邊形$BCJL$與長方形 $BDNM$ 面積相等的證明。

5. 最後再透過面積等式的推導：

$$\square ABDE = \square AMNE + \square BMND$$
$$= \square AKJC + \square LBJC$$
$$= \square ACFG + \square BCHI,$$

這也就是畢氏定理的關係式

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明可以在美國數學家 Howard Eves 的書《*In Mathematical Circles*》裡的找到。收錄在網站(Cut the Knot)中 Pythagorean Theorem Proof #12。
2. 心得：這個證明用到了長方形與平行四邊形面積相等。如果可以再加上動態的方式呈現，會使得過程更顯得有趣且活潑。就像是把兩個小正方形的面積透過 Cavalieri 原理推移成平行四邊形，再將平行四邊形推移成兩個長方形，剛好可以拼出大正方形。這是個介紹推移不影響面積及 Cavalieri 原理的絕佳機會。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●	●	

4. 補充：在數學能力指標中，有這麼幾項：

S-4-09：能理解三角形的全等定理，並應用於解題和推理。

以及

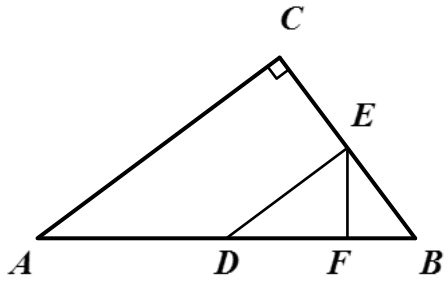
N-3-22 及 S-3-06：能運用切割重組，理解三角形、平行四邊形與梯形的面積公式。

此證明正是利用圖形的分割，以及三角形的全等來推理出畢氏定理關係式。

勾股定理證明-Bog013

【作輔助圖】

1. 直角三角形 ABC 中，在 $\overline{AB}$ 上任取一點 D，並且從 D 作 $\overline{AC}$ 的平行線，與 $\overline{BC}$ 相交於 E。
2. 再過 E 作 $\overline{BD}$ 的垂直線，與 $\overline{AB}$ 相交於 F。



【求證過程】

不難發現這些直角三角形均為相似形，就可以利用相似形的邊長成比例性質，推導出畢氏定理關係式。

1. 我們可以發現 $\Delta ABC \sim \Delta DEB$，以下給出證明：
   因為
   $$\angle CAB = \angle EDB \left(\because \overline{DE}\text{平行於}\overline{AC},\ \text{同位角相等}\right),$$
   以及
   $$\angle ACB = \angle DEB \left(\because \overline{DE}\text{平行於}\overline{AC},\ \text{同位角相等}\right),$$
   所以
   $$\Delta ABC \sim \Delta DEB\ \ (\text{AA 相似}).$$

2. 也可以看出 $\Delta DEF \sim \Delta BDE$，同樣地給出證明：
   因為
   $$\angle EFD = 90^\circ = \angle BED,$$
   以及
   $$\angle EDF = \angle BDE \left(\because \text{共角}\right),$$
   所以
   $$\Delta DEF \sim \Delta BDE\ (\text{AA 相似}).$$
   同理我們可以證明 $\Delta EBF \sim \Delta BDE$.也因此現在我們有
   $$\Delta ABC \sim \Delta DEB \sim \Delta EFD \sim \Delta BFE\ .$$

3. 接著利用相似形的性質, 推導邊長比例可以得到一個關係式如下：
   由
   $$\frac{\overline{FB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{BE}}{\overline{AB}} \left(\because \Delta ABC \sim \Delta BFE\right)$$
   且

$$\frac{\overline{DF}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{DE}}{\overline{AB}}\ \left(\because \Delta ABC\sim\Delta EFD\right),$$

整理可得

$$\begin{cases}\overline{AB}\cdot\overline{FB}=\overline{BC}\cdot\overline{BE}....(1)\\ \overline{AB}\cdot\overline{FD}=\overline{AC}\cdot\overline{DE}....(2),\end{cases}$$

然後將(1)式+(2)式可得

$$\overline{AB}\cdot\left(\overline{FB}+\overline{FD}\right)=\overline{BC}\cdot\overline{BE}+\overline{AC}\cdot\overline{DE}$$

$$\Rightarrow \overline{AB}\cdot\overline{DB}=\overline{BC}\cdot\overline{BE}+\overline{AC}\cdot\overline{DE},$$

也就是若兩個直角三角形為相似形，對應的斜邊乘積會等於對應的邊長乘積和。

我們可以將它寫成：

$c\cdot c'=a\cdot a'+b\cdot b'$ (其中a,b,c及a',b',c'分別表示相似三角形的邊長).

4. 最後若考慮$\Delta ABC\sim\Delta ABC$也就是取$a=a',b=b',c=c'$, 而上述關係式也就可以變成

$$c^2=a^2+b^2,$$

即為畢氏定理關係式。

【註與心得】

1. 來源：此證明來自網站(Cut the Knot)中 Pythagorean Theorem Proof #13.
2. 心得：這個證明可以說是更一般化的畢氏定理，可以使用在兩個相似的直角三角形中。至於一個直角三角形的畢氏定理我們可以利用「極限」的概念或是「兩個全等的三角形」的概念來詮釋，而在教學上就可以利用這個機會讓學生思考這些想法。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●			●	●

4. 補充：在數學能力指標中，有這麼一項：

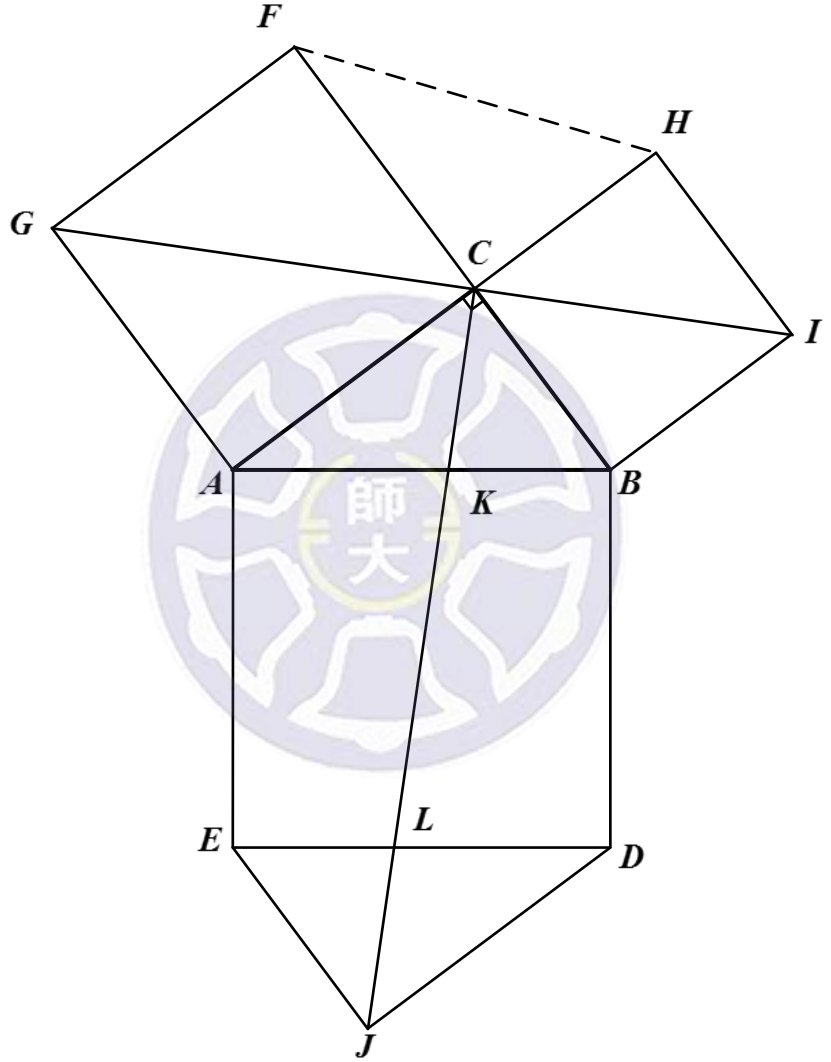
S-4-15：能理解三角形和多邊形的相似性質，並應用於解題和推理。

此證明正是利用三角形的相似來推理出畢氏定理關係式。

勾股定理證明-Bog016

【作輔助圖】

1. 分別以直角三角形 ABC 的三邊為邊，向外作正方形 $ABDE$ 、正方形 $ACFG$ 以及正方形 $BCHI$ 。
2. 然後連接 $\overline{GC}$ 且連接 $\overline{GI}$ 。這裡不難發現 $G-C-I$ 三點共線。
   $(\because$ 對頂角相等 $=45^\circ)$
3. 接著過 E 作 $\overline{CB}$ 的平行線，並過 D 作 $\overline{CA}$ 的平行線，相交於 J 。
4. 最後連 $\overline{CJ}$ ，與 $\overline{AB}$ 及 $\overline{DE}$ 分別交於 K 及 L 。



【求證過程】

我們先證明輔助圖中上下兩個直角三角形全等，然後證明另一組四個四邊形全等，再透過面積的算式推導即可得到畢氏定理關係式。

1. 不難發現 $\Delta ABC, \Delta DEJ$ 為全等三角形，以下我們給個證明：
   因為
   $$\overline{AB}=\overline{DE}\ \ (\because \text{正方形的邊}),$$
   而且

$$\angle BAC = \angle EDJ \ \left(\because \overline{AC}\text{平行於}\overline{DJ}, \text{且}\overline{BC}\text{平行於}\overline{EJ}\right),$$

以及

$$\angle ABC = \angle DEJ \ \left(\because \overline{AC}\text{平行於}\overline{DJ}, \text{且}\overline{BC}\text{平行於}\overline{EJ}\right),$$

所以

$$\Delta ABC \cong \Delta DEJ \text{ (ASA 全等)}.$$

2. 接著也可以看出四邊形$CAEJ$,四邊形$GABI$ 的全等，以及四邊形$JDBC$,四邊形$GABI$ 的全等，而四邊形$CAEJ$,四邊形$GABI$ 全等，以下給出它們的證明：

因為

$$\overline{CA} = \overline{GA}, \text{ 並且 } \overline{AE} = \overline{AB}, \text{ 以及 } \overline{EJ} = \overline{BI} \ (\because \text{正方形的邊}),$$

又有

$$\angle CAE = 90^\circ + \angle CAB = \angle GAB,$$

加上

$$\begin{aligned}\angle AEJ &= 90^\circ + \angle DEJ \\ &= 90^\circ + \angle CBA \ (\because \Delta ABC \cong \Delta DEJ) \\ &= \angle ABI,\end{aligned}$$

所以就可以得證

$$\text{四邊形}CAEJ \cong \text{四邊形}GABI \text{ (SASAS 全等)}.$$

接著同理可以證明四邊形$JDBC \cong$四邊形$GABI$.

3. 不難發現另一組四邊形$GFHI$,四邊形$GABI$ 也是全等圖形，是因為

$$\overline{GF} = \overline{GA}, \text{ 並且 } \overline{HI} = \overline{BI} \ (\because \text{正方形的邊}), \text{ 以及 } \overline{GI} = \overline{GI} \ (\because \text{共用邊}),$$

又有

$$\angle IGF = \angle GIH = 45^\circ = \angle GIB = \angle IGA,$$

所以可以得證

$$\text{四邊形}GFHI \cong \text{四邊形}GABI \text{ (SASAS 全等)}.$$

4. 最後推導面積的關係式就可以得到：

$$\begin{aligned}\square ABDE &= ACJE + BCJD - \Delta ABC - \Delta DEJ \\ &= AGIB + HIGF - \Delta ABC - \Delta CHF \\ &= \square ACFG + \square BCHI,\end{aligned}$$

此即為畢氏定理關係式 $c^2 = a^2 + b^2$.

【註與心得】

1. 來源：此證明是知名的文藝復興時期人物達文西(Leonardo da Vinci)所給出，記載於網站(Cut the Knot)中 Pythagorean Theorem Proof #16。
2. 心得：這是個相當著名的畢氏定理證明，由文藝復興時期的達文西留下。在教學上我們可以透過名人對數學的探索故事，來引導學生增進對數學的興趣。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●	●	●

4. 補充：達文西，十五世紀義大利文藝復興時期的代表人物、博學者，他在繪畫、音樂、建築、數學、解剖、生理、動物、植物、天文、氣象、地質、物理、土木、設計等領域都有知名的成就。特別地，他在藝術創作中融入幾何學的，早了現代設計師幾百年的時間。

   而在數學能力指標中，有這麼一項：

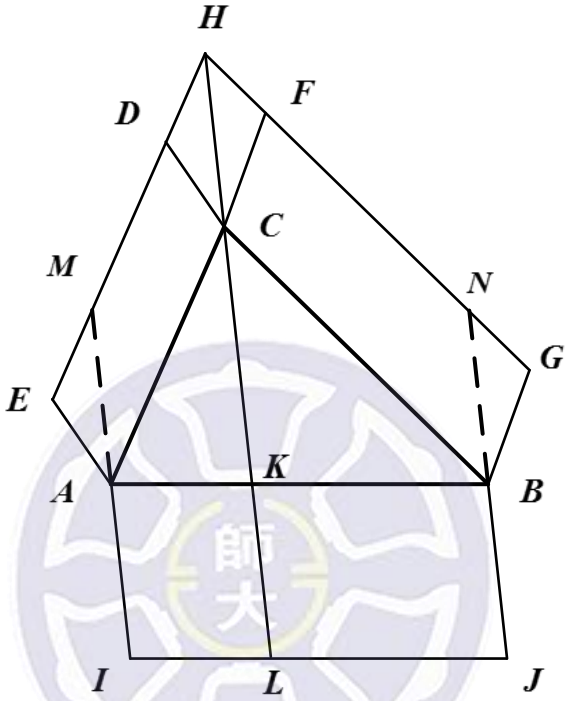
   C-R-04：能知道數學在促進人類文化發展上的具體例子。

   或許達文西在這裡所給出的勾股定理證明方法並不是特別地令人驚嘆，但這是一個介紹達文西與數學的好機會，一位被現代世人認為在藝術方面有重大成就的藝術家，他並不將數學拒於千里之外，而是擁抱它，並且嘗試將它們完美地結合。這可能正是他的藝術創作不朽的原因之一。

勾股定理證明-Bog017

【作輔助圖】

1. 以任意三角形 ABC 的 $\overline{AC},\overline{BC}$ 為平行四邊形的一邊，分別向外作平行四邊形 $ACDE$ 及平行四邊形 $BCFG$ 。並延伸 $\overline{ED},\overline{GF}$ 交於 H 。
2. 連 $\overline{HC}$ ；然後過 A,B 向外作與 $\overline{HC}$ 平行且等長的線段 $\overline{AI}$ 及 $\overline{BJ}$ ，連成平行四邊形 $BAIJ$ 。再延伸 $\overline{HC}$ 分別與 $\overline{AB}$ 及 $\overline{IJ}$ 交於 K,L 。
3. 最後延伸 $\overline{IA}$ 及 $\overline{JB}$ ，分別與 $\overline{ED}$ 及 $\overline{GF}$ 交於 M,N 。



【求證過程】

這個證明不只是在證明畢氏定理，而是更廣義的狀況：任意三角形二邊上任意作平行四邊形，只要再以上述方式作第三邊上的平行四邊形，則兩個平行四邊形的面積和必等於第三個平行四邊形面積。我們使用推移的方式來證明，先將大平行四邊形分成兩塊，其中每一塊分別可以推移兩次後得到小的平行四邊形。也就證明了這個定理。而如果我們一開始將三角形設定為直角三角形，用完全一樣的方式即可證明畢氏定理。

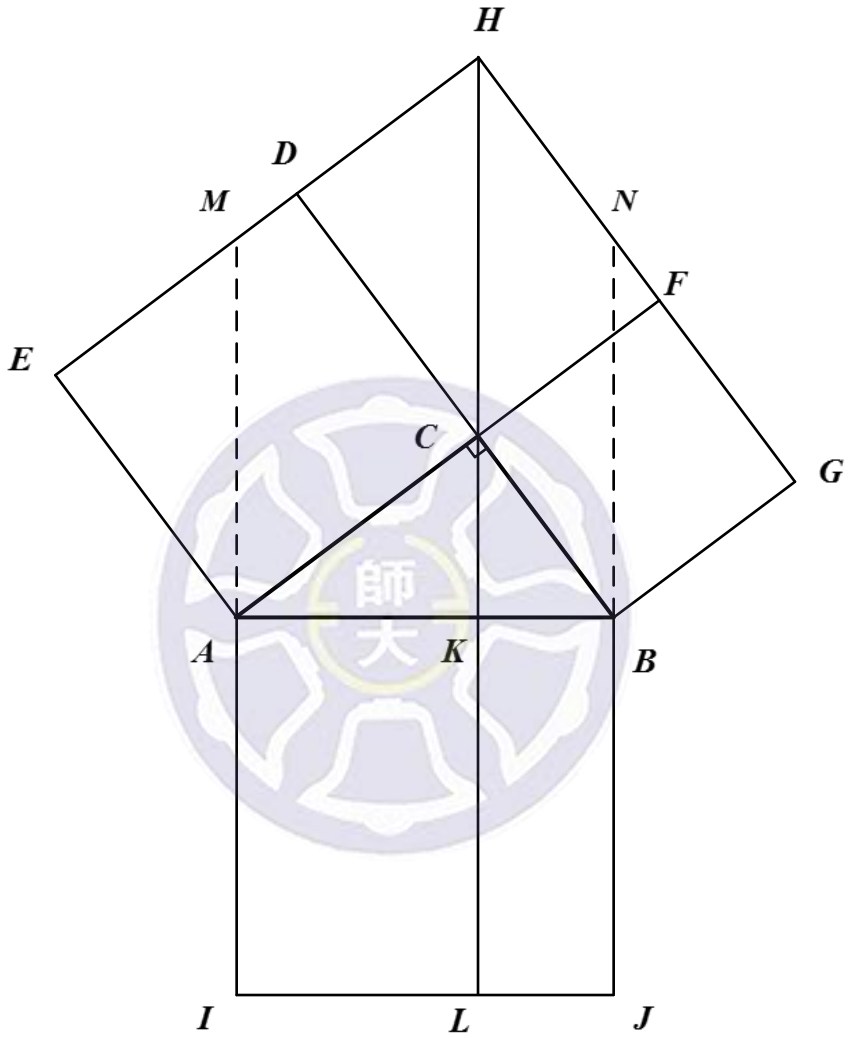
1. 不難發現 $AILK$ 為平行四邊形，因為 $\overline{AI}$ 平行於 $\overline{HC}$ ，並且 $\overline{AB}$ 平行於 $\overline{IJ}$ 。也不難以同理證明 $ACHM$ 亦為平行四邊形，再加上 $\overline{AI}=\overline{HC}$, 就可以由平行四邊形 $ACHM$ 與平行於邊形 $AILK$ 同底同高，得知它們的面積相等；再同理得到平行四邊形 $BKLJ$ 的面積等於平行四邊形 $BCHN$ 的面積。
2. 另一方面，平行四邊形 $ACHM$ 與平行四邊形 $ACDE$ 共用 $\overline{AC}$ 邊，顯然為同底高的平行四邊形，因此它們的面積相等。而再承上題的同理得到平行四邊形 $BCHN$ 的面積等於平行四邊形 $BCFG$ 的面積。

3. 最後綜合以上敘述可以分割加上推移得證：

$$\begin{aligned}\square ABJI &= \square AKLI + \square BKLJ \\ &= \square ACHM + \square BCHN \\ &= \square ACDE + \square BCFG.\end{aligned}$$

這裡稱作證明了廣義的畢氏定理。

4. 若要證明直角三角形的畢氏定理，我們只要將原本的三角形設定為直角的三角形，其中平行四邊形改為正方形即可，如下圖：



可以得到

$$\begin{aligned}\square ABJI &= \square AKLI + \square BKLJ \\ &= \square ACHM + \square BCHN \\ &= \square ACDE + \square BCFG,\end{aligned}$$

這也就是畢氏定理關係式

$$c^2 = a^2 + b^2 .$$

【註與心得】

1. 來源：此證明是西元 300 年的 Pappus 所寫下，被收錄在網站(Cut the Knot)中 Pythagorean Theorem Proof #17。
2. 心得：這個證明使用到同底同高的平行四邊形面積相等的推移證法，並且可以以動態的方式呈現。除了直角三角形的狀況外更是一般化地證了所有三角形的狀況，可以說是結合了美學與教學的經典範例。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●	●	●

4. 補充：在數學能力指標中，有這麼一項：

   C-E-03：能經闡釋及審視情境，重新評估原來的轉化是否得宜，並做必要的調整。

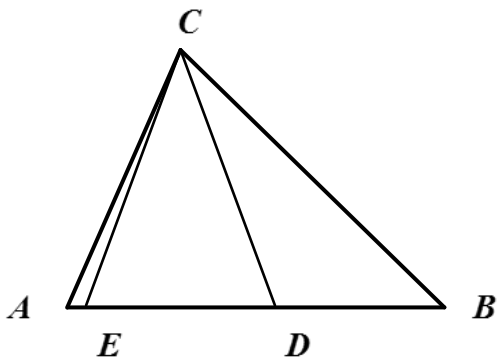
   根據這個指標所敘述，我認為這是一個很好的機會幫助學生達成這項能力。首先是由於它是由一般三角形及平行四邊形的一般化狀況而進而得到直角三角形及正方形的特例，也就得到了勾股定理的證明。

   而另一方面，當我們看完這個靜態的文本證明過程之後，只要留下一個問題，這個過程有沒有更好的呈現方式？自然地學生開始重新評估，再經過適當的引導，就可以以動態方式呈現推移面積的證明思路，這也是記得這個證明過程的最佳方式。

勾股定理證明-Bog018

【作輔助圖】

1. 任意三角形 ABC ，於 $\overline{AB}$ 邊上取一點 D 使得 $\angle ADC = \angle ACB$ ；另外在 $\overline{AB}$ 邊上取一點 E 使得 $\angle BEC = \angle ACB$ 。



【求證過程】

先作任意三角形，在長邊上取共角使得到兩個相似的三角形。接著我們可以透過相似形的邊長成比例的特性，輕易地得到廣義畢氏定理關係式。若要證明畢氏定理關係式，只要將一開始的三角形設定為直角三角形即可完成。

1. 我們可以看出 $\Delta ABC, \Delta ACD, \Delta CBE$ 為相似三角形，以下是它們的證明：

   其中 $\Delta ABC, \Delta ACD$, 因為有

   $$\angle CAB = \angle DAC \text{ (共角)},$$

   並且有

   $$\angle ACB = \angle ADC,$$

   所以

   $$\Delta ABC \sim \Delta ACD \text{ (AA 相似)}.$$

   另外我們看 $\Delta ABC, \Delta CBE$, 因為有

   $$\angle CBA = \angle EBC \text{ (共角)},$$

   並且有

   $$\angle BCA = \angle BEC,$$

   所以可以推得

   $$\Delta ABC \sim \Delta CBE \text{ (AA 相似)}.$$

2. 我們將 ΔABC 的三邊分別以 $\overline{BC} = a,\ \overline{AC} = b,\ \overline{AB} = c$ 方便計算,

   其中因為 $\Delta ABC \sim \Delta ACD$, 所以有

   $$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AC}},$$

   可以推得

   $$\overline{AC}^2 = \overline{AD} \cdot \overline{AB}.$$

   同理因為 $\Delta ABC \sim \Delta CBE$, 所以可以推得

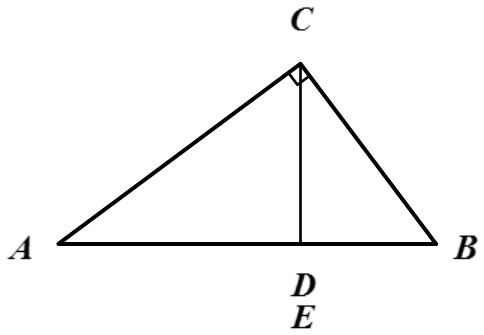
   $$\overline{BC}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{BE}.$$

3. 綜合以上可得

$$\overline{AC}^2+\overline{BC}^2=\overline{AB}\times\left(\overline{AD}+\overline{BE}\right).$$

這就是廣義的畢氏定理，可以用於任意三角形。

4. 若是我們想使用來證明畢氏定理，只要將一開始的三角形設定為直角三角形且 $\angle ACB$ 為直角即可。如下圖所示：



其中 D,E 為 C 對 $\overline{AB}$ 作垂直線的唯一垂足，再透過剛剛的廣義定理可以得到

$$\begin{aligned}\overline{AC}^2+\overline{BC}^2&=\overline{AB}\times\left(\overline{AD}+\overline{BE}\right)\\&=\overline{AB}\times\left(\overline{AD}+\overline{BD}\right)\\&=\overline{AB}\times\overline{AB}=\overline{AB}^2,\end{aligned}$$

此即為畢氏定理關係式

$$a^2+b^2=c^2.$$

【註與心得】

1. 來源：這是阿拉伯泰比特．伊本．奎拉 (Thabit ibn Qurra, 826-901)的證明，收錄在網站(Cut the Knot)中 Pythagorean Theorem Proof #18
2. 心得：這個證明方式用到了較特殊的手法，作了共角製造相似的三角形，並且由廣入狹地證明了畢氏定理。這樣的手法就像是經典的托勒密定理也是由作共角及相似形開始的，可以提供學生學習這類證明技巧的重要範例。
3. 評量：

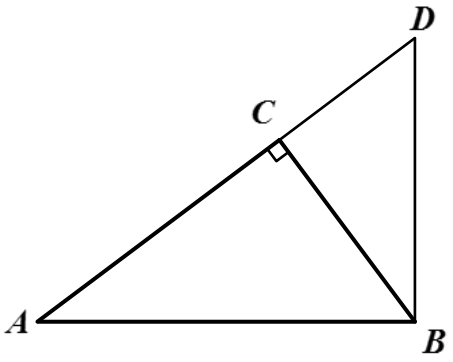
國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●	●	

4. 補充：在數學能力指標中，有這麼一項：
   S-4-15：能理解三角形和多邊形的相似性質，並應用於解題和推理。
   此證明正是利用相似三角形來推理出畢氏定理關係式。

勾股定理證明-Bog019

【作輔助圖】

1. 直角三角形 ABC 中，延長 $\overline{AC}$ 並過 B 作 $\overline{AB}$ 的垂直線，兩線相交於 D。



【求證過程】

先證明 ΔABC 、 ΔADB 及 ΔBDC 為相似三角形，再利用兩個小三角形的面積和為大三角形面積，以及相似形的邊形成比例的特性，即可證明畢氏定理的關係式。

1. 不難看出 ΔABC 及 ΔADB 為相似的三角形，以下我們給出證明：
   因為 $\angle CAB = \angle BAD$ 且 $\angle ACB = 90^\circ = \angle ABD$ ，所以可以得到
   ΔABC 相似於 ΔADB (AA 相似).
2. 也可以看出 ΔABC 相似於 ΔBDC ，同樣地我們給個證明：
   因為 $\angle CAB = \angle CBD$ 且 $\angle ACB = 90^\circ = \angle BCD$ ，所以可以得到
   ΔABC 相似於 ΔBDC (AA 相似).
3. 利用相似形的特性來得到邊長的關係式：
   因為 $\Delta BDC \sim \Delta ABC$ ，所以 $\overline{CD}/\overline{BC} = \overline{BC}/\overline{AC}$ ，可以推得 $\overline{CD} = \overline{BC}^2/\overline{AC}$.
4. 也可以得到另一組邊長關係式：
   因為 $\Delta BDC \sim \Delta ABC$ ，所以 $\overline{BD}/\overline{BC} = \overline{BA}/\overline{AC}$ ，可以推得 $\overline{BD} = \overline{BC}\cdot\overline{BA}/\overline{AC}$.
5. 因為 $\Delta ABD = \Delta ABC + \Delta DBC$ ，可以得到 $\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{BD} = \frac{1}{2}\overline{AC}\cdot\overline{BC} + \frac{1}{2}\overline{CD}\cdot\overline{CB}$

$$\Rightarrow \overline{AB}\cdot\overline{BD} = \overline{AC}\cdot\overline{BC} + \overline{CD}\cdot\overline{CB} \quad (\text{等號左右式同乘2})$$

$$\Rightarrow \overline{AB}\cdot\frac{\overline{BC}\cdot\overline{BA}}{\overline{AC}} = \overline{AC}\cdot\overline{BC} + \frac{\overline{BC}^2}{\overline{AC}}\cdot\overline{BC} \quad (\text{將推論的結果代入})$$

$$\Rightarrow \overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 \quad \left(\text{等號左右式同乘}\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}\right)$$

此即為畢氏定理關係式 $c^2 = a^2 + b^2$.

【註與心得】

1. 來源：此證明來自網站(Cut the Knot)中 Pythagorean Theorem Proof #19.
2. 心得：用簡單的輔助線搭配相似形的邊長特性來證明，沒有複雜的面積拆解及面積相等的證明過程。是同時用到基本的幾何特性及基本的代數技巧的好證明。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●		

4. 補充：在數學能力指標中，有這麼幾項：

   S-4-15：能理解三角形和多邊形的相似性質，並應用於解題和推理。

   以及

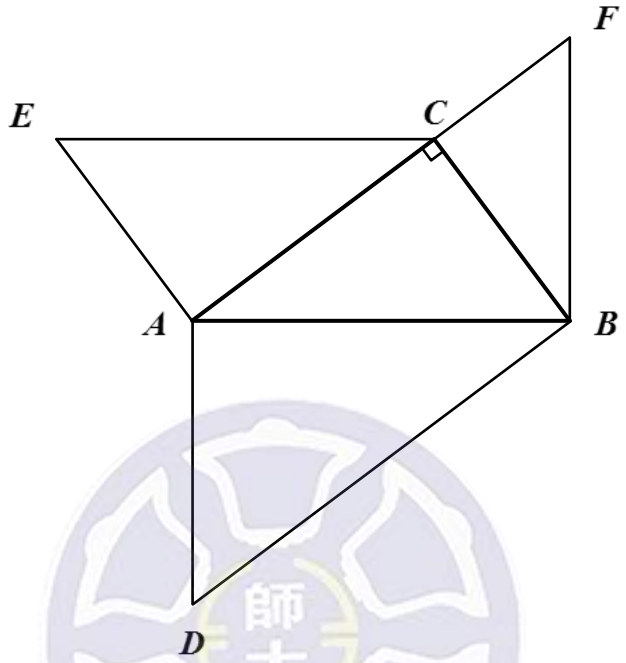
   A-4-05：能理解等量公理的意義，並做應用。

   此證明正是利用三角形的相似再搭配等量公理來推理出畢氏定理關係式。

勾股定理證明-Bog020

【作輔助圖】

1. 直角三角形 ABC 中，作 $\overline{AC}$ 的延伸線並過 B 作 $\overline{AB}$ 的垂直線，兩線相交於 F 。
2. 接著過 A 向外作 $\overline{AB}$ 的垂直線，並取一點 D 使得 $\overline{AD}=\overline{BF}$ ，連 $\overline{BD}$ 。
3. 最後過 A 向外作 $\overline{AC}$ 的垂直線，並取一點 E 使得 $\overline{AE}=\overline{BC}$ ，連 $\overline{CE}$



【求證過程】

先以直角三角形的三邊為邊為中邊，向外作相似於原直角三角形的直角三角形。可以以全等方式證明最大的直角三角形恰好為兩個小直角三角形的面積之和。再透過相似形邊長成比例的性質，並利用到等量乘法原理的代數操作，即可證明畢氏定理關係式。

1. 不難發現 $\Delta ABC, \Delta CEA$ 為全等的三角形，以下我們給出證明：
   因為
   $$\overline{AC}=\overline{CA}\,(\text{共用邊}),$$
   並且
   $$\overline{AE}=\overline{CB},$$
   以及
   $$\angle ACB=90^{\circ}=\angle CAE,$$
   所以
   $$\Delta ABC\cong\Delta CEA(\text{SAS 全等}).$$
2. 接著也可以看出 $\Delta AFB, \Delta BDA$ 為全等三角形，以下是它的證明：
   因為
   $$\overline{AB}=\overline{BA}\,(\text{共用邊}),$$
   並且

$$\overline{AD}=\overline{BF},$$

以及

$$\angle ABF=90^{\circ}=\angle BAD,$$

所以

$$\Delta AFB\cong\Delta BDA\,(\text{SAS 全等}).$$

3. 再來我們看 $\Delta ABC,\Delta BFC,\Delta CEA,\Delta BDA$ 這四個三角形為相似三角形，以下給出它們的證明：

其中 $\Delta ABC,\Delta BFC$ 是因為

$$\angle ACB=90^{\circ}=\angle BCF \text{ 並且 } \angle CAB=90^{\circ}-\angle CBA=\angle CBF,$$

所以

$$\Delta ABC\sim\Delta BFC\,(\text{AA 相似}).$$

再來看 $\Delta ABC,\Delta BDA$, 因為

$$\angle BAD=90^{\circ}=\angle ACB,$$

並且

$$\begin{aligned}\angle ABD&=\angle FAB\left(\because \Delta BDA\cong\Delta FAB\right)\\&=\angle CAB,\end{aligned}$$

所以

$$\Delta ABC\sim\Delta BDA\,(\text{AA 相似}).$$

又我們知道 $\Delta ABC\cong\Delta CEA$, 因此可以得到

$\Delta ABC\cong\Delta CEA\sim\Delta BFC\sim\Delta BDA$.

4. 綜合以上我們推導面積關係式：

$$\begin{aligned}\Delta BDA&=\Delta AFB\\&=\Delta ABC+\Delta BFC\\&=\Delta CEA+\Delta BFC,\end{aligned}$$

也就是

$$\overline{AB}\cdot\overline{AD}=\overline{AC}\cdot\overline{AE}+\overline{BC}\cdot\overline{CF},$$

因為相似形的邊長成比例，所以可以得到

$$\overline{AB}\cdot\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}\cdot\overline{BC}=\overline{AC}\cdot\overline{BC}+\overline{BC}\cdot\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}\cdot\overline{BC},$$

透過等量乘法原理就可以得到畢氏定理關係式

$$\overline{AB}\cdot\overline{AB}=\overline{AC}\cdot\overline{AC}+\overline{BC}\cdot\overline{BC}.$$

【註與心得】

1. 來源：此證明來自網站(Cut the Knot)中 Pythagorean Theorem Proof #20.
2. 心得：此證明的輔助圖形簡單，利用到相似形及面積拆解，在教學上正好能讓國中學生練習中學生應有的邊長比例性質及等量原理的技巧。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●		

4. 補充：在數學能力指標中，有這麼幾項：

   S-4-15：能理解三角形和多邊形的相似性質，並應用於解題和推理。

   以及

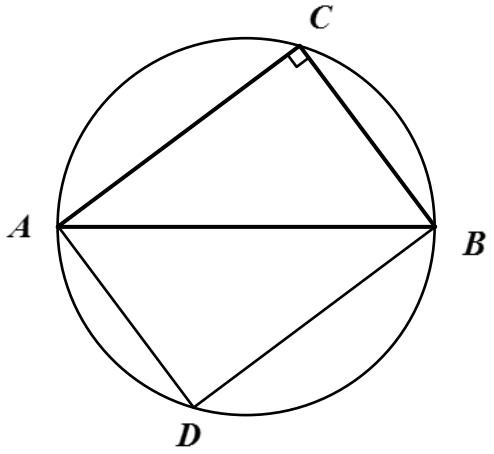
   A-4-05：能理解等量公理的意義，並做應用。

   此證明正是利用三角形的相似再搭配等量公理來推理出畢氏定理關係式。

勾股定理證明-Bog021

【作輔助圖】

1. 以直角三角形 ABC 的斜邊 $\overline{AB}$ 為直徑作圓。
2. 過 A 作直線平行於 $\overline{BC}$，交圓於 D，連 $\overline{BD}$。



【求證過程】

先以輔助線作出圓及其內接長方形 $ACBD$，根據托勒密定理 (Ptolemy's Theorem)，圓內接任意四邊形的兩組對邊乘積和等於對角形的乘積。就可以輕易地證出畢氏定理關係式。

1. 因為 $\overline{AB}$ 是圓的直徑，所以 $\angle ADB = 90^\circ$.
2. 因為 $\overline{AD}$ 與 $\overline{BC}$ 平行，所以
$$\angle CBA = \angle BAD \text{ (內錯角相等)}.$$
3. 因為
$$\angle CAD = \angle CAB + \angle BAD = \angle CAB + \angle ABC = 90^\circ,$$
所以四邊形 $ACBD$ 為長方形，並且 $\overline{CD} = \overline{AB}$.
4. 根據托勒密定理,
$$\overline{AC} \times \overline{BD} + \overline{AD} \times \overline{BC} = \overline{AB} \times \overline{CD},$$
但因為四邊形為長方形, 所以有
$$\overline{AC} \times \overline{AC} + \overline{BC} \times \overline{BC} = \overline{AB} \times \overline{AB},$$
也就是畢氏定理關係式
$$\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2.$$

【註與心得】

1. 來源：此證明收錄在網站(Cut the Knot)中 Pythagorean Theorem Proof #21。
2. 心得：根據現在的中學課程綱要，數學科當中沒有學習托勒密定理。所以如果以這個證明的教學來說，主要應該是要先能教學生托勒密定理，再來引述這個定理輕鬆地證明畢氏定理。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
		●	●	

4. 補充：在數學能力指標當中，有這麼幾項：

   S-4-17：能理解圓的幾何性質。

   以及

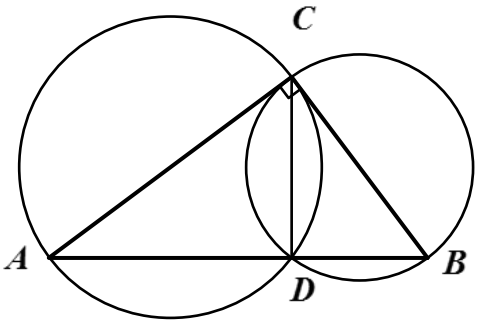
   S-4-13 ：能理解特殊四邊形(如正方形、矩形、平行四邊形、菱形、梯形)與正多邊形的幾何性質。

   而托勒密定理正是圓內接四邊形的幾何性質，這裡適合利用這個機會向學生補充，也可以透過勾股定理對這個定理的敘述加強記憶。

勾股定理證明-Bog022

【作輔助圖】

1. 過直角三角形 ABC 的 C 點作 $\overline{AB}$ 的高，垂足 D。
2. 以 $\overline{AC}$ 為直徑作圓 Γ_1，並以 $\overline{BC}$ 為直徑作圓 Γ_2。



【求證過程】

作直角三角形斜邊上的高，並以直角三角形的兩股為直徑作圓，利用圓的切割線定理，再將兩個切線段平方加起來，即可透過簡單的代數運算性質得證畢氏定理關係式。

1. 其中 $\overline{AC}$ 為直徑，且 $\angle ADC = 90^\circ$，因此 D 落在圓 Γ_1 上。同理因為 $\overline{BC}$ 為直徑，且 $\angle BDC = 90^\circ$，因此 D 落在圓 Γ_2 上。
2. 因為 $\angle ACB = 90^\circ$ 且 $\overline{AC}$ 為圓 Γ_1 的直徑，所以 $\overline{CB}$ 為切線段。可以根據切割線定理, 得到
$$\overline{BC}^2 = \overline{BD} \times \overline{BA}.$$
3. 同理因為 $\angle BCA = 90^\circ$ 且 $\overline{BC}$ 為圓 Γ_2 的直徑，所以 $\overline{CA}$ 為切線段。可以根據切割線定理, 得到
$$\overline{CA}^2 = \overline{AD} \times \overline{AB}.$$
4. 綜合以上可得,
$$\overline{BC}^2 + \overline{CA}^2 = \overline{BD} \times \overline{BA} + \overline{AD} \cdot \overline{AB} = \overline{AB} \times \left(\overline{BD} + \overline{DA}\right) = \overline{AB}^2,$$
此即為畢氏定理關係式
$$a^2 + b^2 = c^2.$$

【註與心得】

1. 來源：此證明由 B. F. Yanney 及 J. A. Calderhead 發表在《*Am Math Monthly*》一書中的第 24 頁。並收錄在網站(Cut the Knot)中 Pythagorean Theorem Proof #22。
2. 心得：這個證明特別之處就是在於它使用到了圓及切割線定理，事實上它就等同是使用到了子母相似直角三角形的關係式，但若是加上兩個圓形當作輔助，將可以更清楚地顯示出畢氏定理與相似三角形的關係證法。我想這在教學上將是個重要的啟發，我們經常在講使用更高的視角去看待一些問題，不論是記憶上或理解上將都會有所突破。
3. 評量：

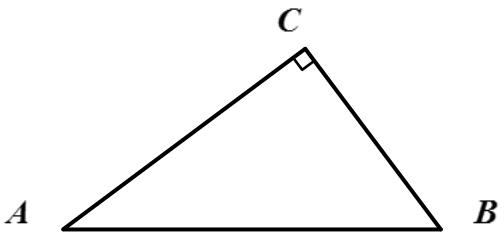
國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●	●	

4. 補充：在數學能力指標當中，有這麼一項：
   S-4-17 能理解圓的幾何性質。
   而切割線定理就是圓的切線與割線的幾何性質，這也是補充切割線定理的好機會。

勾股定理證明-Bog023

【作輔助圖】

1. 此證明不需要加作輔助線。



【求證過程】

直接兩種不同的方式計算直角三角形面積，一是使用海龍公式(Heron's Formula)，另一是使用底乘高除以二計算。再透過代數運算整性質整理，即可得到畢氏定理關係式。

為了方便代數計算，我們令 $\overline{AB}=c,\ \overline{BC}=a,\ \overline{AC}=b.$

1. 使用海龍公式計算三角形面積：

$$\Delta ABC=\sqrt{\left(\frac{\overline{AB}+\overline{AC}+\overline{BC}}{2}\right)\left(\frac{\overline{AB}+\overline{AC}-\overline{BC}}{2}\right)\left(\frac{\overline{AB}-\overline{AC}+\overline{BC}}{2}\right)\left(\frac{-\overline{AB}+\overline{AC}+\overline{BC}}{2}\right)}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{c+b+a}{2}\right)\left(\frac{c+b-a}{2}\right)\left(\frac{c-b+a}{2}\right)\left(\frac{-c+b+a}{2}\right)}.$$

2. 使用底乘高除以二計算三角形面積：

$$\Delta ABC=\frac{1}{2}ab.$$

3. 兩個方法所計算的面積相等：

$$\frac{1}{2}ab=\sqrt{\left(\frac{c+b+a}{2}\right)\left(\frac{c+b-a}{2}\right)\left(\frac{c-b+a}{2}\right)\left(\frac{-c+b+a}{2}\right)},$$

左右同平方可得

$$\frac{1}{4}a^2b^2=\frac{\left[(c+b)^2-a^2\right]\left[a^2-(b-c)^2\right]}{16},$$

左右同乘 16 並展開部分括號可得

$$4a^2b^2=\left(b^2+c^2-a^2+2bc\right)\left(a^2-b^2-c^2+2bc\right),$$

再將全部展開

$$4a^2b^2=4b^2c^2-b^4-c^4-a^4-2b^2c^2+2a^2b^2+2a^2c^2,$$

整理至同一側

$$a^4+b^4+c^4+2a^2b^2-2a^2c^2-2b^2c^2=0,$$

恰巧是完全平方式

$$\left(a^2+b^2-c^2\right)^2=0,$$

所以最後可以推得畢氏定理關係式

$$a^2+b^2=c^2.$$

【註與心得】

1. 來源：此證明收錄在網站(Cut the Knot)中 Pythagorean Theorem Proof #23。
2. 心得：這個證明使用到了高中課程內正式提及的定理，直接以三邊長得到三角形面積的方式。在高中數學中我們證明這個定理的方式多使用餘弦定理以及使用到正弦的面積公式。也因此如果在高中要利用海龍公式證明畢氏定理，不免有循環論證的問題存在，因為餘弦定理中就可以輕易得到畢氏定理。而三角函數關係中使用到畢氏定理的也不在少數。這個部分在教學上要特別留意，除非我們以一個更純粹的方式證明了海龍公式，而過程沒有使用到任何的畢氏定理，那使用海龍公式來證明畢氏定理的邏輯才不會有問題。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
	●		●	

4. 補充：在數學能力指標中，有這麼一項：

   A-4-13 能熟練乘法公式。

   在這裡我們先不論海龍面積公式如何被證明，在假設它是正確並可以使用的狀況下，我們可以利用來寫下勾股定理的證明過程，也將這兩個公式之間連上了一些關係。但推論過程當中，要試著將存在三個變數的式子不斷地整理成我們關係式，是練習乘法公式的絕佳機會。

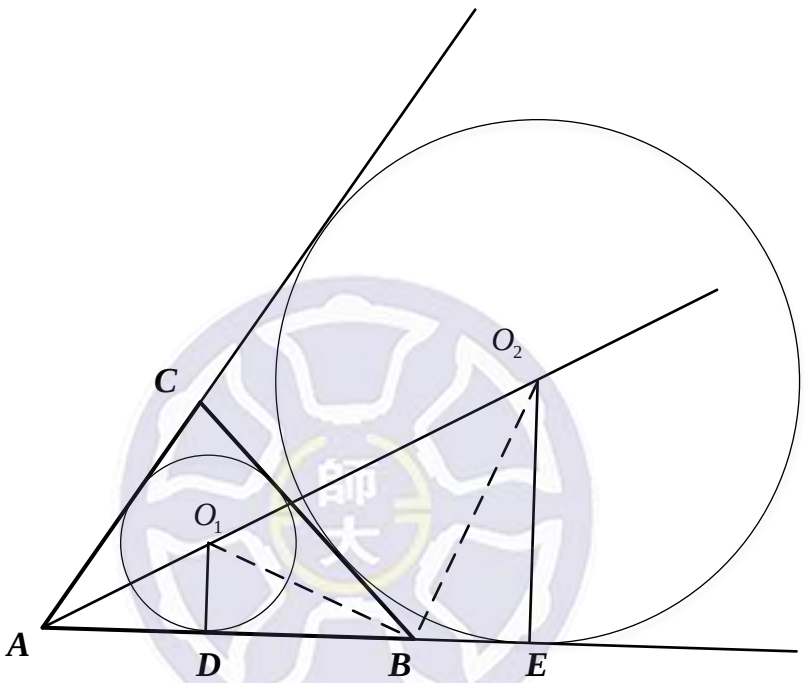
   以下補充海龍公式證明，其中不使用到勾股定理，以避免循環論證。

海龍公式證明

【作輔助圖】

1. 任意三角形 ABC ,，延伸 $\overline{AB}$ 及 $\overline{AC}$ 。

2. 並作 ΔABC 的內切圓 O_1 ，及 $\overline{BC}$ 邊上的旁切圓 O_2 。其中 O_1 與 $\overline{AB}$ 切於 D ，且 O_2 與 $\overline{AB}$ 延伸線切於 E 。
3. 連 $\overline{O_1B}$ 以及 $\overline{O_2B}$ 。



【求證過程】

首先將切線段長以三角形 ABC 的邊長表示，再利用兩組相似三角形，即可以推導出三角形面積與切線段長之間的關係式，也就是海龍定理關係式。

1. 首先我們令 $\overline{AB}=c,\ \overline{BC}=a,\ \overline{AC}=b,\ s=\dfrac{a+b+c}{2}$ ，並且令內切圓 O_1 半徑為 r ，以及旁切圓 O_2 半徑為 R 。接著可以由內切圓、外切圓的性質，得到

$$\overline{AE}=s,$$

且

$$\overline{AD}=s-a,$$

且

$$\overline{BD}=s-b,$$

還有

$$\overline{BE}=s-c.$$

2. 因為 $\Delta ADO_1 \sim \Delta AEO_2$, 所以可以得到 $\overline{AD}/\overline{O_1D} = \overline{AE}/\overline{O_2E}$ ，也就是

$$\frac{s-a}{r} = \frac{s}{R},$$

可以推得

$$R(s-a) = rs.$$

3. 又因為 $\Delta BDO_1 \sim \Delta O_2EB$, 所以 $\overline{BD}/\overline{O_1D} = \overline{O_2E}/\overline{BE}$, 也就是

$$\frac{s-b}{r} = \frac{R}{s-c},$$

可以推得

$$R = \frac{(s-b)(s-c)}{r}.$$

4. 綜合以上可以得到

$$rs = \frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{r},$$

再將等式左右同乘 rs ，得到

$$(rs)^2 = s(s-a)(s-b)(s-c),$$

又已知 $\Delta = rs$,
因此

$$\Delta^2 = s(s-a)(s-b)(s-c),$$

即

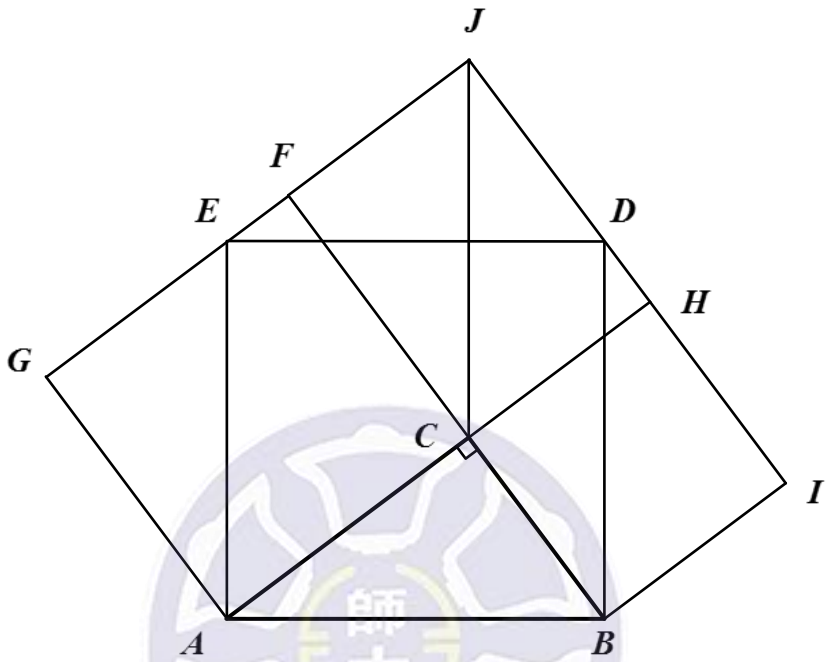
$$\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

也就是海龍公式關係式。

勾股定理證明-Bog024

【作輔助圖】

1. 以直角三角形 ABC 的三邊 $\overline{AB},\overline{AC},\overline{BC}$ 為正方形的一邊，分別向內、向外、向外作正方形 $ABDE, ACFG, BCHI$ 。其中 $E-G-F$ 共線且 $I-H-D$ 共線會在底下證明。
2. 延伸 $\overline{GF},\overline{IH}$ 交於 J ，並連 $\overline{CJ}$ 。



【求證過程】

先以輔助線在三邊上製造正方形，並延伸成五邊形。在證明過其中六個直角三角形為全等的直角三角形後，以兩種分割方式看五邊形，就可以看出大正方形面積為兩個小正方形面積之和，也就證明了畢氏定理關係式。

1. 我們可以發現 $\Delta ABC,\Delta DBI,\Delta AEG,\Delta CLF,\Delta LCH,\Delta EDL$ 皆為全等的直角三角形，以下是它們的證明：

   其中先 $\Delta ABC,\Delta DBI$,

   因為

   $$\overline{AB}=\overline{BD}\left(\because \text{正方形的邊}\right),$$

   並且

   $$\overline{BC}=\overline{BI}\left(\because \text{正方形的邊}\right),$$

   以及

   $$\angle CBA=90^{\circ}-\angle CBD=\angle DBI,$$

   所以

   $$\Delta ABC\cong\Delta DBI\ (\text{SAS 全等}).$$

   再看 $\Delta ABC,\Delta AEG$,

   因為

$$\overline{AB}=\overline{AE}\left(\because \text{正方形的邊}\right),$$

並且

$$\overline{AC}=\overline{AG}\left(\because \text{正方形的邊}\right),$$

以及

$$\angle CAB=90^{\circ}-\angle EAC=\angle EAG,$$

所以

$$\Delta ABC\cong\Delta AEG\ (\text{SAS 全等}).$$

到這裡我們可以發現$\angle AGE=90^{\circ}=\angle AGF$, 因此$G-E-F$三點共線. 同理$I-H-D$也共線，也可以發現四邊形$CFLH$為長方形。

接著看$\Delta ABC,\Delta CLF$,

因為

$$\overline{AC}=\overline{CF}\left(\because \text{正方形的邊}\right),$$

並且

$$\begin{aligned}\overline{BC}&=\overline{CH}\left(\because \text{正方形的邊}\right)\\&=\overline{FL}\left(\because \text{長方形的邊}\right),\end{aligned}$$

以及

$$\angle ACB=90^{\circ}=\angle CFL,$$

所以

$$\Delta ABC\cong\Delta CLF\ (\text{SAS 全等}).$$

再來是$\Delta ABC,\Delta LCH$,

因為

$$\begin{aligned}\overline{AC}&=\overline{CF}\left(\because \text{正方形的邊}\right)\\&=\overline{HL}\left(\because \text{長方形的邊}\right),\end{aligned}$$

並且

$$\overline{BC}=\overline{CH}\left(\because \text{正方形的邊}\right),$$

以及

$$\angle ACB=90^{\circ}=\angle LHC,$$

所以

$$\Delta ABC\cong\Delta LCH\ (\text{SAS 全等}).$$

最後一組我們看$\Delta ABC,\Delta EDL$, 因為

$$\begin{aligned}\angle CAB&=\angle IDB\left(\because \Delta ABC\cong\Delta DBI\right)\\&=90^{\circ}-\angle LDE\\&=\angle LED,\end{aligned}$$

並且

$$\begin{aligned}\angle CBA&=\angle AEG\left(\because \Delta ABC\cong\Delta AEG\right)\\&=90^{\circ}-\angle LED\\&=\angle LDE,\end{aligned}$$

以及

$$\overline{AB}=\overline{DE}\,(\because \text{正方形的邊}),$$

所以

$$\Delta ABC \cong \Delta EDL \text{ (ASA 全等)}.$$

綜合以上可以推得

$$\Delta ABC \cong \Delta DBI \cong \Delta AEG \cong \Delta CLF \cong \Delta LCH \cong \Delta EDL\,.$$

2. 接著我們就可以推導面積關係式：

$$\square ABDE+\Delta DBI+\Delta EDL+\Delta AEG=\text{五邊形}ABILG$$
$$=\square ACFG+\square BCHI+\Delta ABC+\Delta CFL+\Delta LCD,$$

其中左式的三個直角三角形與右式的三個直角三角形是全等的, 因此

$$\square ABDE=\square ACFG+\square BCHI\,,$$

此即為畢氏定理關係式

$$c^2=a^2+b^2\,.$$

【註與心得】

1. 來源：此證明是阿拉伯泰比特・伊本・奎拉 (Thabit ibn Qurra, 826-901) 的兩個證明之一。記載在網站(Cut the Knot)中 Pythagorean Theorem Proof #24.
2. 心得：這個證明若能以動態的方式呈現，將會是很好的畢氏定理教學教材。想像如圖所示的五邊形內，可以透過移動三個全等的直角三角形去得到大正方形或是兩個小正方形，也就不言自明地證明了畢氏定理。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●	●	●

4. 補充：在數學能力指標中，有這麼幾項：

   S-4-09：能理解三角形的全等定理，並應用於解題和推理。

   以及

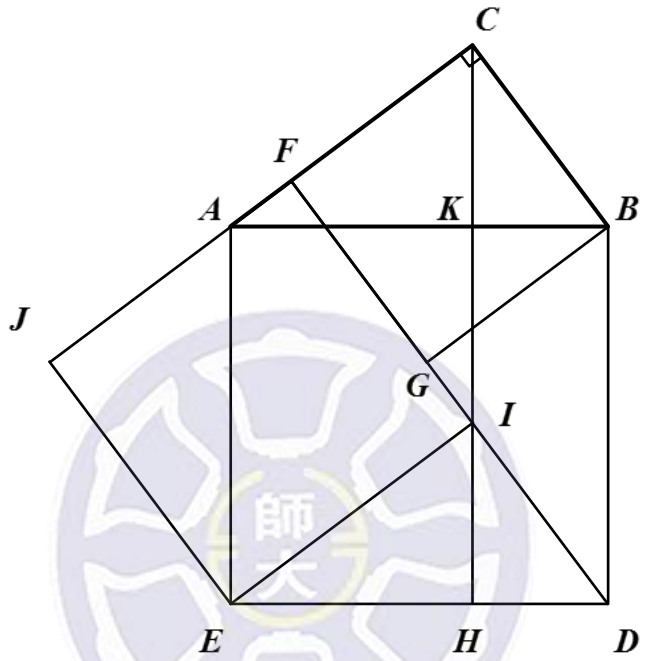
   N-3-22 及 S-3-06：能運用切割重組，理解三角形、平行四邊形與梯形的面積公式。

   此證明正是利用圖形的分割，以及三角形的全等來推理出畢氏定理關係式。

勾股定理證明-Bog025

【作輔助圖】

1. 以直角三角形 ABC 的 $\overline{AB}$ 為正方形的一邊，向外作正方形 $ABDE$ ；另外以 $\overline{BC}$ 為正方形的一邊，向內作正方形 $BCFG$ 。並且連 $\overline{GD}$ 。
2. 接著過 C 對 $\overline{DE}$ 作垂直線，垂足 H 。過 E 對 $\overline{GD}$ 作垂直線，垂足 I 。
3. 最後以 $\overline{EI}$ 為正方形的一邊，向上作正方形 $IEJF'$ 。以下我們將證明 F' 與 F 會是同一點。 $\overline{AB}$ 與 $\overline{CH}$ 的交點為。



【求證過程】

先以輔助線分別製作以直角三角形三邊長之一為邊的正方形，並將大正方形以輔助線切成兩個長方形。接著我們利用推移的方式將兩個長方形都推成長方形後，再將兩個長方形都移成兩個小正方形。因為我們知道推移後的面積不變，也就可以利用面積的等式來證明畢氏定理的關係式。

1. 不難發現 $\Delta ABC, \Delta DBG, \Delta EDI, \Delta EAJ$ 為全等的直角三角形，以下我們給個證明：

   首先看 $\Delta ABC, \Delta DBG$, 因為

   $$\overline{AB} = \overline{DB} \left(\because \text{正方形的邊}\right),$$

   並且

   $$\overline{BC} = \overline{BG} \left(\because \text{正方形的邊}\right),$$

   以及

   $$\angle CBA = 90^{\circ} - \angle ABG = \angle GBD,$$

   所以

   $$\Delta ABC \cong \Delta DBG \,(\text{SAS 全等}).$$

也因此有 $\angle BGD = 90^\circ = \angle BGF$, 推得 $B-G-F$ 三點共線.

繼續看 $\Delta ABC, \Delta EDI$, 是因為

$$\overline{AB} = \overline{ED} \left(\because \text{正方形的邊}\right),$$

並且

$$\begin{aligned}\angle CBA &= 90^\circ - \angle CAB \\ &= 90^\circ - \angle GDB \left(\because \Delta ABC \cong \Delta DBG\right),\end{aligned}$$

以及

$$\angle ACB = 90^\circ = \angle EID,$$

所以

$$\Delta ABC \cong \Delta EDI \text{ (AAS 全等)}.$$

接著看 $\Delta ABC, \Delta EAJ$, 因為

$$\overline{AB} = \overline{EA} \left(\because \text{正方形的邊}\right),$$

並且

$$\begin{aligned}\angle CAB &= \angle IED \left(\because \Delta ABC \cong \Delta EDI\right) \\ &= 90^\circ - \angle AEI \\ &= \angle AEJ,\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}\overline{AC} &= \overline{EI} \left(\because \Delta ABC \cong \Delta EDI\right) \\ &= EJ \left(\because \text{正方形的邊}\right),\end{aligned}$$

所以

$$\Delta ABC \cong \Delta EAJ \text{ (SAS 全等)}.$$

因此

$$\angle EJA = 90^\circ = \angle EJF',$$

可以推得

$$J-A-F' \text{ 三點共線}.$$

又因為

$$\angle JAE + \angle EAB + \angle BAC = 180^\circ,$$

所以

$$J-A-C \text{ 三點共線}.$$

又因為 $\angle EIF = 90^\circ = \angle EIF'$ 並且 I, F, F' 三點共線，以及

$$
\begin{aligned}
\overline{IF} &= \overline{DF} - \overline{DI} \\
&= \overline{DF} - \overline{BC}\left(\because \Delta ABC \cong \Delta EDI\right) \\
&= \overline{DF} - \overline{GF}\left(\because \text{正方形的邊}\right) \\
&= \overline{DG} \\
&= \overline{IE}\left(\because \Delta EDI \cong \Delta DBG\right) \\
&= \overline{IF'}\left(\because \text{正方形的邊}\right),
\end{aligned}
$$

所以

$$F = F'.$$

2. 我們可以發現四邊形 $BDHK$ 為長方形, $BDIC$ 為平行四邊形, 而 $BCFG$ 為正方形。另一方面四邊形 $AEHK$ 為長方形, $AEIC$ 為平行四邊形, 而 $EIFJ$ 為正方形。
3. 綜合以上就可以推導面積關係式：

$$
\begin{aligned}
\square ABDE &= \square BDHK + \square AEHK \\
&= \square BDIC + \square AEIC \\
&= \square\text{正方形}BCFG + \square EIFJ,
\end{aligned}
$$

也就是畢氏定理關係式

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：此證明是 B. F. Yanney 給出，收錄在網站(Cut the Knot)中 Pythagorean Theorem Proof #25。
2. 心得：推移指的是一種變換，而在此變換下的圖形的面積不變。這個證明是少數用到推移的概念的面積證法。如果以更貼近國中生的概念是同底等高的平行四邊形的面積相等，在教學上可以透過這個畢氏定理的證明來讓學生更熟悉這個技巧的使用。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●	●	

4. 補充：在數學能力指標中，有這麼幾項：

   S-4-09：能理解三角形的全等定理，並應用於解題和推理。

   以及

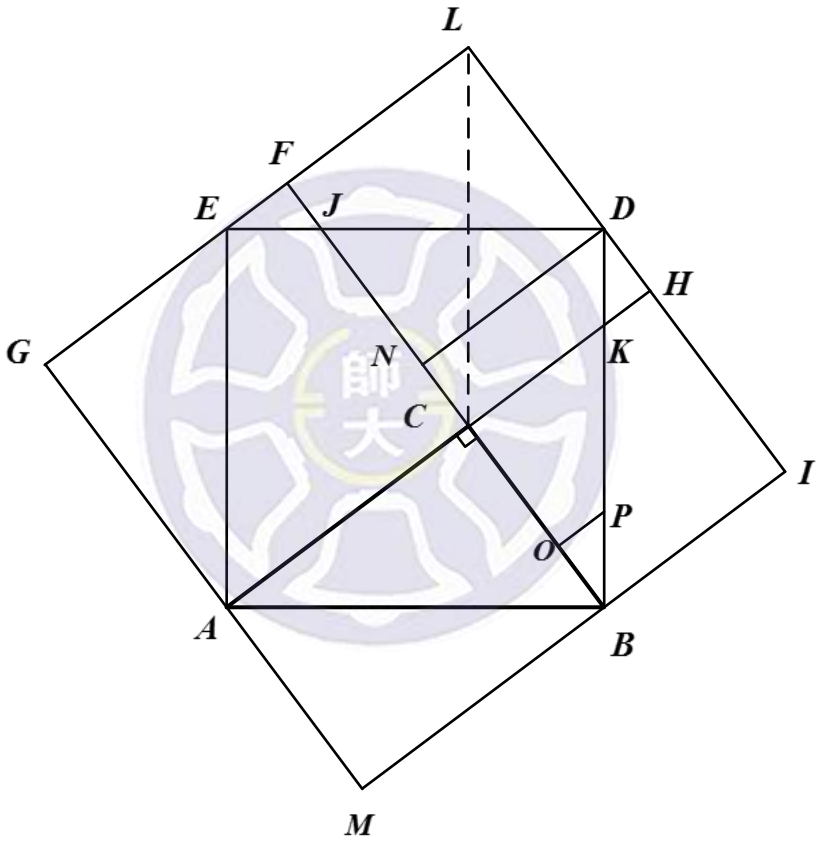
   N-3-22 及 S-3-06：能運用切割重組，理解三角形、平行四邊形與梯形的面積公式。

   此證明正是利用圖形的分割，以及三角形的全等來推理出畢氏定理關係式。

勾股定理證明-Bog026

【作輔助圖】

1. 以直角三角形 ABC 的 $\overline{AB},\overline{AC},\overline{BC}$ 邊為正方形的一邊，分別向內、向外、向外作正方形 $ABDE$ 、 $ACFG$ 、 $BCHI$ 。其中 $\overline{CF}$ 與 $\overline{DE}$ 交於 J ，另外 $\overline{CH}$ 與 $\overline{BD}$ 交於 K 。(在作圖時將會發現 $G-E-F$ 及 $I-H-D$ 共線，我們在以下說明。)
2. 延伸 $\overline{BF},\overline{IH}$ 交於 L ；延伸 $\overline{GA},\overline{IB}$ 交於 M 。
3. 過 D 對 $\overline{BF}$ 作垂直線，垂足 N 。
4. 最後在 $\overline{BD}$ 上取一點 P 使得 $\overline{BP}$ 與 $\overline{EJ}$ 等長，再過 P 對 $\overline{BC}$ 作垂直線，垂足 O 。



【求證過程】

先以輔助線在直角三角形 ABC 的三邊上作正方形並延伸，接著適當地切割大正方形成五塊。在證明過這五塊圖形與兩個小正方形內的五塊圖形對應全等後，就可以以拼圖的方式證明它們的面積關係式，也就證明了畢氏定理。

1. 不難發現 $\Delta ABC,\Delta AEG,\Delta DBI,\Delta EDL$ 為全等的三角形，以下我們給出它們的證明：

   其中考慮 $\Delta ABC,\Delta DBI$, 因為

$$\overline{AB}=\overline{BD}\left(\because \text{正方形的邊}\right),$$

並且

$$\overline{BC}=\overline{BI}\left(\because \text{正方形的邊}\right),$$

以及

$$\angle CBA=90^{\circ}-\angle CBD=\angle DBI,$$

所以

$$\Delta ABC\cong\Delta DBI\ (\text{SAS 全等}).$$

接著看 $\Delta ABC,\Delta AEG$, 因為

$$\overline{AB}=\overline{AE}\left(\because \text{正方形的邊}\right),$$

並且

$$\overline{AC}=\overline{AG}\left(\because \text{正方形的邊}\right),$$

以及

$$\angle CAB=90^{\circ}-\angle EAC=\angle EAG,$$

所以

$$\Delta ABC\cong\Delta AEG\ (\text{SAS 全等}).$$

在這裡我們可以發現 $\angle AGE=90^{\circ}=\angle AGF$, 因此 $G-E-F$ 三點共線. 同理地 $I-H-D$ 也共線.

再來我們考慮 $\Delta ABC,\Delta CLF$, 因為

$$\overline{AC}=\overline{CF}\left(\because \text{正方形的邊}\right),$$

並且

$$\begin{aligned}\overline{BC}&=\overline{CH}\left(\because \text{正方形的邊}\right)\\&=\overline{FL}\left(\because \text{長方形的邊}\right),\end{aligned}$$

以及

$$\angle ACB=90^{\circ}=\angle CFL,$$

所以

$$\Delta ABC\cong\Delta CLF\ (\text{SAS 全等}).$$

換成考慮 $\Delta ABC,\Delta EDL$, 其中因為

$$\begin{aligned}\angle CAB&=\angle IDB\left(\because \Delta ABC\cong\Delta DBI\right)\\&=90^{\circ}-\angle LDE\\&=\angle LED,\end{aligned}$$

並且

$$\begin{aligned}\angle CBA&=\angle AEG\left(\because \Delta ABC\cong\Delta AEG\right)\\&=90^{\circ}-\angle LED\\&=\angle LDE,\end{aligned}$$

以及

$$\overline{AB}=\overline{DE}\left(\because \text{正方形的邊}\right),$$

所以

$$\Delta ABC\cong\Delta EDL\ (\text{ASA 全等}).$$

2. 接著也可以發現$\Delta BPO, \Delta EJF$為全等的三角形，以下給個證明：
因為
$$\overline{BP} = \overline{EJ},$$
並且
$$\angle BOP = 90^{\circ} = \angle EFJ,$$
以及
$$\begin{aligned}\angle PBO &= 90^{\circ} - \angle CBA \\ &= 90^{\circ} - \angle GEA (\because \Delta ABC \cong \Delta AEG) \\ &= \angle JEF,\end{aligned}$$
所以
$$\Delta BPO \cong \Delta EJF \text{ (AAS 全等)}.$$
3. 而$\Delta DJN, \Delta BKC$亦為全等的三角形，以下是它的證明：
因為四邊形$CNDH$的四個角均為直角，所以四邊形$CNDH$為長方形。
因此我們有
$$\begin{aligned}\overline{DN} &= \overline{HC} (\because \text{長方形的邊}) \\ &= \overline{CB} (\because \text{正方形的邊}),\end{aligned}$$
並且
$$\angle DNJ = 90^{\circ} = \angle BCK,$$
以及
$$\begin{aligned}\angle DJN &= \angle FJE (\because \text{對頂角相等}) \\ &= \angle OPB (\because \Delta EJF \cong \Delta BPO) \\ &= 90^{\circ} - \angle PBO = \angle CKB,\end{aligned}$$
所以可以得到
$$\Delta DJN \cong \Delta BKC \text{ (AAS 全等)}.$$
4. 另外梯形$POND$,梯形$KHIB$為全等的四邊形，我們利用五個條件證明四邊形的全等：
因為有
$$\overline{DN} = \overline{IB} (\because \text{長方形}BIDN\text{的對邊}),$$
並且
$$\begin{aligned}\overline{NO} &= \overline{NB} - \overline{OB} \\ &= \overline{DI} - \overline{EF} (\because \square BNDI \text{及} \Delta EJF \cong \Delta BPO) \\ &= \overline{EL} - \overline{EF} (\because \Delta DBI \cong \Delta EDL) \\ &= \overline{FL} \\ &= \overline{BI} (\because \square BFLI \text{的對邊}) \\ &= \overline{IH} (\because \text{正方形的兩邊}),\end{aligned}$$
以及

$$\begin{aligned}\angle NDP &= 90^\circ - \angle JND \\ &= 90^\circ - \angle KBC\left(\because \Delta DJN \cong \Delta BKC\right) \\ &= \angle KBI,\end{aligned}$$

加上

$$\angle DNO = \angle NOP = 90^\circ = \angle BIH = \angle KHI\ ,$$

所以可以推得

$$\text{四邊形}\ POND \cong \text{四邊形}KHIB\ (\text{ASASA 全等}).$$

5. 透過上面的全等證明，現在就可以推導面積關係式：
   以拼圖方式證明如下

$$\begin{aligned}\square ABDE &= \Delta ABC + ACJE + \Delta DJN + POND + \Delta BPO \\ &= \Delta AEG + ACJE + \Delta BKC + KHIB + \Delta EJF \\ &= \left(\Delta AEG + ACJE + \Delta EJF\right) + \left(\Delta BKC + KHIB\right) \\ &= \square ACFG + \square BCHI,\end{aligned}$$

   此即為畢氏定理關係式

$$c^2 = a^2 + b^2\ .$$

【註與心得】

1. 來源：此證明來自網站(Cut the Knot)中 Pythagorean Theorem Proof #26.
2. 心得：若不去檢查每組拼片的全等性，這個證明事實上不難理解。在教學上若我們是提供拼片給學生拼湊的話，雖然嚴謹程度是不足的，但對於學生的理解是會有幫助的。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●		

4. 補充：在數學能力指標中，有這麼幾項：
   S-4-09：能理解三角形的全等定理，並應用於解題和推理。
   以及

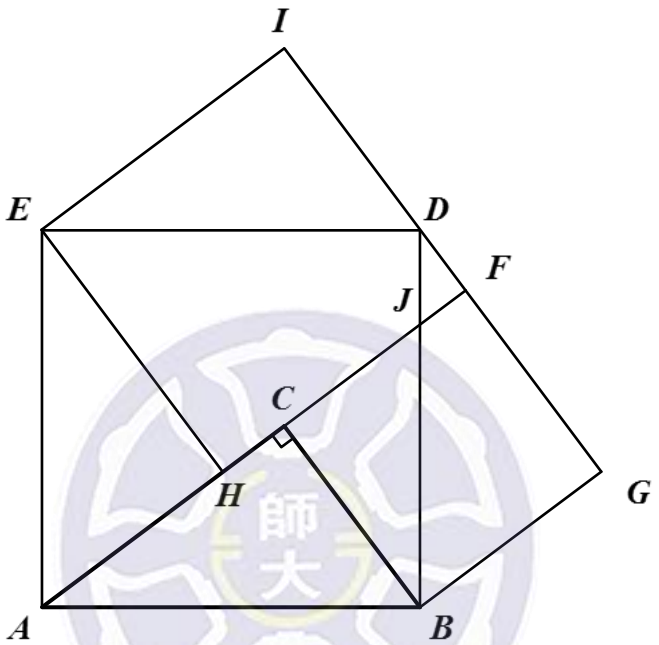
   N-3-22 及 S-3-06：能運用切割重組，理解三角形、平行四邊形與梯形的面積公式。

   此證明正是利用圖形的分割，以及三角形的全等來推理出畢氏定理關係式。

勾股定理證明-Bog027

【作輔助圖】

1. 以直角三角形 ABC 的 $\overline{AB}$ 邊為正方形的一邊，向內作正方形 $ABDE$ ；再以 $\overline{BC}$ 為正方形的一邊，向外作正方形 $BDFG$ 。其中 $\overline{BD}$ 與 $\overline{CF}$ 交於 J 。
2. 過 E 作 $\overline{AC}$ 的垂直線，垂足為 H 。
3. 以 $\overline{EH}$ 為正方形的一邊，向外作正方形 $HEIF'$ 。其中 F' 將與 F 共點，將在以下說明。



【求證過程】

先以適當的輔助線各別得到以直角三角形的邊為一邊的三個正方形，其中大正方形有部分與兩個小正方形重疊，而剩下來的部分為兩個對應全等的直角三角形，可以直接以拼圖的方式補滿兩個小正方形留下的空。可以透過這樣的想法來證明大正方形面積等於兩個小正方形面積的和，也就可以得到畢氏定理的關係式。

1. 不難發現 $\Delta ABC, \Delta EDI, \Delta EAH, \Delta DBG$ 為全等的直角三角形，以下我們給出證明：

   其中 $\Delta ABC, \Delta EAH$ ：

   因為

   $$\overline{AB} = \overline{EA} (\because \text{正方形的邊}),$$

   並且

   $$\angle EHA = 90^\circ = \angle ACB,$$

   以及

   $$\angle EAH = 90^\circ - \angle CAB = \angle CBA,$$

   所以

   $$\Delta ABC \cong \Delta EAH \text{ (AAS 全等)}.$$

再看$\Delta EDI, \Delta EAH$，因為

$$\overline{ED} = \overline{EA}(\because \text{正方形的邊}),$$

並且

$$\overline{EH} = \overline{EI}(\because \text{正方形的邊}),$$

以及

$$\angle IED = 90^\circ - \angle DEH = \angle AEH,$$

所以

$$\Delta EAH \cong \Delta EDI \text{ (SAS 全等)}.$$

由於$\angle EID = 90^\circ = \angle EIF'$，$I - D - F'$三點共線。

接著看$\Delta ABC, \Delta DBG$：

因為

$$\overline{AB} = \overline{BG}(\because \text{正方形的邊}),$$

並且

$$\overline{BC} = \overline{EI}(\because \text{正方形的邊}),$$

以及

$$\angle CBA = 90^\circ - \angle CBJ = \angle DBG,$$

所以

$$\Delta ABC \cong \Delta DBG \text{ (SAS 全等)}.$$

由於$\angle BGD = 90 = \angle BGF$，$G - F - D$三點共線.

綜合以上我們證明了

$$\Delta ABC \cong \Delta EDI \cong \Delta EAH \cong \Delta DBG.$$

2. 而因為有

$$\begin{aligned}\overline{AF} &= \overline{AC} + \overline{CF} \\ &= \overline{EH} + \overline{BG}(\because \Delta ABC \cong \Delta EAH \text{以及正方形的邊}) \\ &= \overline{HF'} + \overline{AH}(\because \text{正方形的邊以及}\Delta DBG \cong \Delta EAH) \\ &= \overline{AF'},\end{aligned}$$

所以F, F'為同一點.

3. 最後我們可以推導面積關係式：

$$\begin{aligned}\square ABDE &= \text{四邊形}DEHJ + \Delta EAH + \Delta ABC + \Delta BCJ \\ &= (\text{四邊形}DEHJ + \Delta EDI) + (\Delta DBG + \Delta BCJ) \\ &= \square EIFH + \square BCFG,\end{aligned}$$

此即為畢氏定理關係式$c^2 = a^2 + b^2$.

【註與心得】

1. 來源：此證明由 B. F. Yanney 及 J. A. Calderhead 發表在《*Am Math Monthly*》一書中的第 33 頁。並收錄在網站(Cut the Knot)中 Pythagorean Theorem Proof #27.
2. 心得：這個證明由簡單的割補方式得到了面積的等式，是很簡潔的證明。在教學上過程較不繁雜的證明可以降低學生的負擔，提高學生對證明的接受度。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●	●	●		

4. 補充：在數學能力指標中，有這麼幾項：

   S-4-09：能理解三角形的全等定理，並應用於解題和推理。

   以及

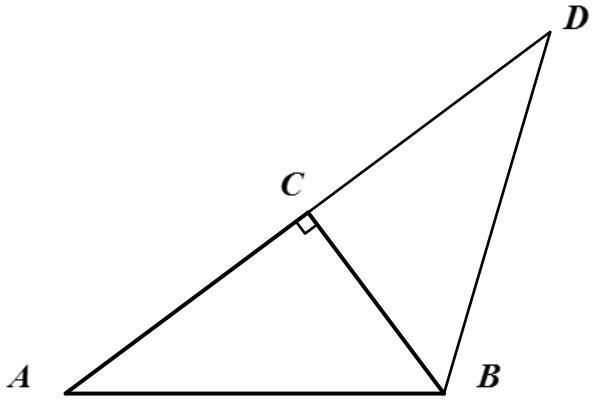
   N-3-22 及 S-3-06：能運用切割重組，理解三角形、平行四邊形與梯形的面積公式。

   此證明正是利用圖形的分割，以及三角形的全等來推理出畢氏定理關係式。

勾股定理證明-Bog075

【作輔助圖】

1. 延伸直角三角形 ABC 的 $\overline{AC}$ ，並在線上上取一點 D ，使得 $\overline{CD}$ 與 $\overline{AC}$ 等長。連 $\overline{DB}$ 。



【求證過程】

在直角三角形 ABC 的短邊上製造一個全等的直角三角形，使它擴充成一個等腰三角形。接著我們使用兩種方法計算這個等腰三角形的面積，一是使用海龍公式(Heron's Formula)，另一是使用底乘高除以二。從這兩個面積等式中我們可以透過代數操作整理出畢氏定理關係式。

1. 不難發現 $\Delta ABC, \Delta DBC$ 為全等的直角三角形，以下我們給出證明：
   因為
   $$\overline{AC} = \overline{DC},$$
   並且
   $$\overline{BC} = \overline{BC} \text{ (共用邊)},$$
   以及
   $$\angle ACB = 90^{\circ} = \angle DCB,$$
   所以
   $$\Delta ABC \cong \Delta DBC \text{ (SAS 全等)}.$$
2. 使用海龍公式(Heron's Formula)計算 ΔADB 面積：
   (為了方便代數計算，我們令 $\overline{AB} = c,\ \overline{BC} = a,\ \overline{AC} = b.$)
   $$\Delta ABD = \sqrt{\left(\frac{\overline{AB}+\overline{BD}+\overline{AD}}{2}\right)\left(\frac{\overline{AB}+\overline{BD}-\overline{AD}}{2}\right)\left(\frac{\overline{AB}-\overline{BD}+\overline{AD}}{2}\right)\left(\frac{-\overline{AB}+\overline{BD}+\overline{AD}}{2}\right)}$$
   $$= \sqrt{\left(\frac{c+c+2b}{2}\right)\left(\frac{c+c-2b}{2}\right)\left(\frac{c-c+2b}{2}\right)\left(\frac{-c+c+2b}{2}\right)}$$
   $$= \sqrt{(c+b)(c-b)(b)(b)} = b\sqrt{c^2-b^2}.$$
3. 使用底乘高除以二計算 ΔADB 面積：
   $$\Delta ABD = \frac{1}{2}\cdot\overline{AD}\times\overline{CB} = \frac{1}{2}\cdot(2b)\cdot(a) = ab.$$
4. 因為海龍公式計算的面積與底乘高除以二的面積必須相等，所以可以

得到一個面積等式：

$$\begin{aligned}\Delta_{海} = b\sqrt{c^2-b^2} &= ab = \Delta_{底高}\\ \Rightarrow b^2\left(c^2-b^2\right) &= a^2b^2\\ \Rightarrow c^2-b^2 &= a^2\\ \Rightarrow c^2 &= a^2+b^2.\end{aligned}$$

也就得到了畢氏定理關係式.

【註與心得】

1. 來源：此證明收錄在網站(Cut the Knot)中 Pythagorean Theorem Proof #75。
2. 心得：這個證明使用到了高中課程內正式提及的定理，直接以三邊長得到三角形面積的方式。在高中數學中我們證明這個定理的方式多使用餘弦定理以及使用到正弦的面積公式。也因此如果在高中要利用海龍公式證明畢氏定理，不免有循環論證的問題存在，因為餘弦定理中就可以輕易得到畢氏定理。而三角函數關係中使用到畢氏定理的也不在少數。這個部分在教學上要特別留意，除非我們以一個更純粹的方式證明了海龍公式，而過程沒有使用到任何的畢氏定理，那使用海龍公式來證明畢氏定理的邏輯才不會有問題。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
	●		●	

4. 補充：在數學能力指標中，有這麼一項：

   A-4-13：能熟練乘法公式。

   在這裡我們先不論海龍面積公式如何被證明，在假設它是正確並可以使用的狀況下，我們可以利用來寫下勾股定理的證明過程，也將這兩個公式之間連上了一些關係。但推論過程當中，要試著將存在三個變數的式子整理成我們關係式，是練習乘法公式的絕佳機會。

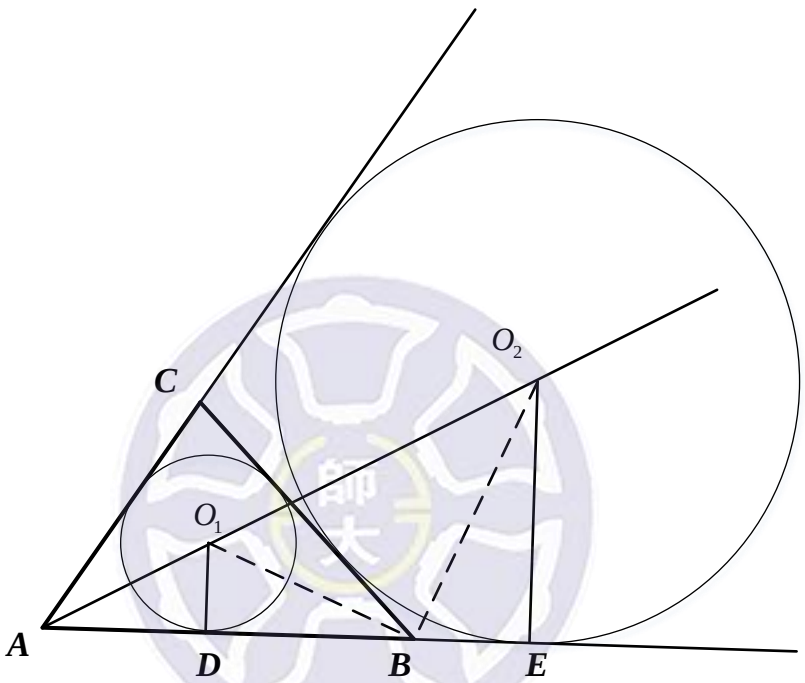
   以下補充海龍公式證明，其中不使用到勾股定理，以避免循環論證。

海龍公式證明

【作輔助圖】

4. 任意三角形 ABC ,，延伸 $\overline{AB}$ 及 $\overline{AC}$ 。

5. 並作 ΔABC 的內切圓 O_1 ，及 $\overline{BC}$ 邊上的旁切圓 O_2 。其中 O_1 與 $\overline{AB}$ 切於 D ，且 O_2 與 $\overline{AB}$ 延伸線切於 E 。
6. 連 $\overline{O_1B}$ 以及 $\overline{O_2B}$ 。



【求證過程】

首先將切線段長以三角形 ABC 的邊長表示，再利用兩組相似三角形，即可以推導出三角形面積與切線段長之間的關係式，也就是海龍定理關係式。

5. 首先我們令 $\overline{AB}=c,\ \overline{BC}=a,\ \overline{AC}=b,\ s=\dfrac{a+b+c}{2}$ ，並且令內切圓 O_1 半徑為 r ，以及旁切圓 O_2 半徑為 R 。接著可以由內切圓、外切圓的性質，得到

$$\overline{AE}=s,$$

且

$$\overline{AD}=s-a,$$

且

$$\overline{BD}=s-b,$$

還有

$$\overline{BE}=s-c.$$

6. 因為$\Delta ADO_1 \sim \Delta AEO_2$, 所以可以得到$\overline{AD}/\overline{O_1D} = \overline{AE}/\overline{O_2E}$，也就是

$$\frac{s-a}{r} = \frac{s}{R},$$

可以推得

$$R(s-a) = rs.$$

7. 又因為$\Delta BDO_1 \sim \Delta O_2EB$, 所以$\overline{BD}/\overline{O_1D} = \overline{O_2E}/\overline{BE}$, 也就是

$$\frac{s-b}{r} = \frac{R}{s-c},$$

可以推得

$$R = \frac{(s-b)(s-c)}{r}.$$

8. 綜合以上可以得到

$$rs = \frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{r},$$

再將等式左右同乘rs，得到

$$(rs)^2 = s(s-a)(s-b)(s-c),$$

又已知$\Delta = rs$,
因此

$$\Delta^2 = s(s-a)(s-b)(s-c),$$

即

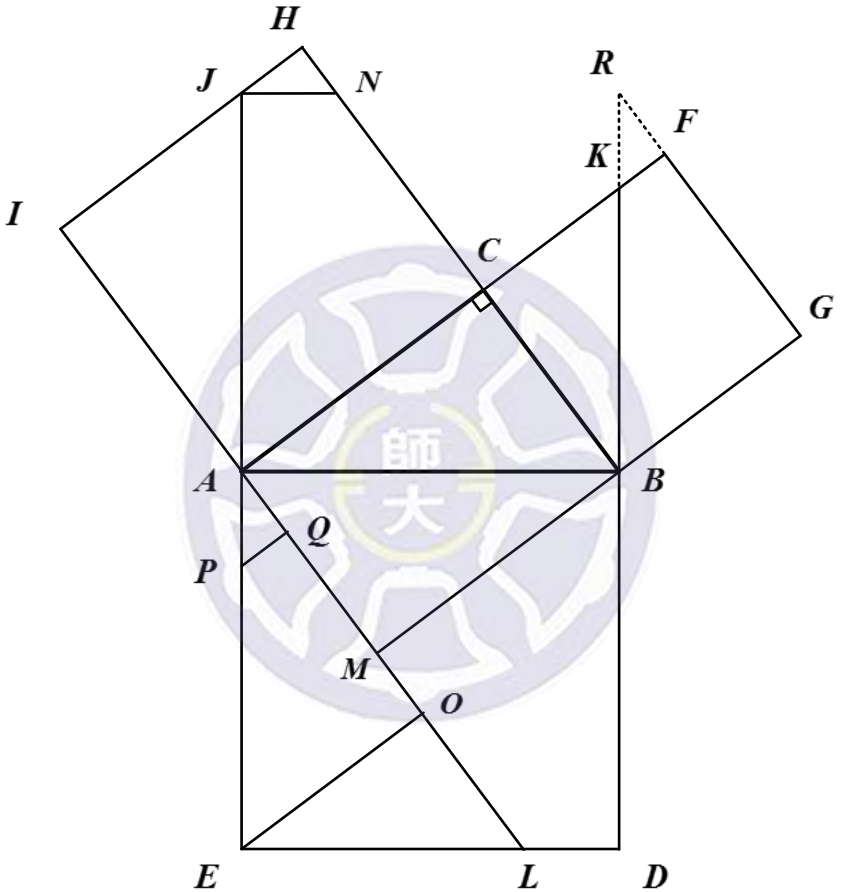
$$\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

也就是海龍公式關係式。

勾股定理證明-華蘅芳 01

【作輔助圖】

1. 以直角三角形 ABC 的 $\overline{AB}$ 、 $\overline{BC}$ 、 $\overline{AC}$ 三邊為邊，分別向外作正方形 $ABDE$ ，正方形 $BCFG$ ，及正方形 $ACHI$ 。
2. 接著延伸 $\overline{EA}$ 交 $\overline{IH}$ 於 J ；延伸 $\overline{DB}$ 交 $\overline{CF}$ 於 K ；延伸 $\overline{IA}$ 交 $\overline{DE}$ 於 L ；延伸 $\overline{GB}$ 交 $\overline{AL}$ 於 M 。
3. 然後過 J 作 $\overline{AJ}$ 的垂線，交 $\overline{CH}$ 於 N ；從 E 作 $\overline{AL}$ 的垂線，交 $\overline{AL}$ 於 O 。
4. 在 $\overline{AL}$ 上取 Q 點使 $\overline{AQ}=\overline{JH}$ ；並過 Q 作 $\overline{AL}$ 的垂線，交 $\overline{AE}$ 於 P 。
5. 延伸 $\overline{BK}$ ，延伸 $\overline{GF}$ ，交於 R 。



【求證過程】

以上輔助圖將一大兩小的正方形切割，在證明對應的拼片都是全等的圖形後，就能直接以拼圖的方式拼出大正方形。從這拼圖式的面積關係推導中，就可以得到畢氏定理關係式。

1. 不難發現 $\Delta AJI,\Delta ABC,\Delta BAM,\Delta AEO,\Delta RBG$ 為全等的直角三角形，以下給出證明：

   其中先考慮 $\Delta ABC,\Delta BAM$ ，因為我們知道 $\overline{AF}$ 平行於 $\overline{MG}$ ，則

   $$\angle CAB=\angle MBA\,(\text{內錯角相等}),$$

   並且

   $$\angle CBA=\angle MAB\,(\text{內錯角相等}),$$

以及

$$\overline{AB}=\overline{AB}\text{ (共用邊)},$$

所以就可推得

$$\Delta ABC\cong\Delta BAM\text{ (ASA 全等)}.$$

再來看 $\Delta ABC,\Delta AJI$ ，因為有

$$\overline{AC}=\overline{AI},$$

而且

$$\angle JAI=90^\circ-\angle JAI=\angle BAC,$$

以及

$$\angle AIJ=90^\circ=\angle ACB,$$

所以可以推得

$$\Delta ABC\cong\Delta AJI\text{ (ASA 全等)}.$$

接著考慮 $\Delta ABC,\Delta AEO$ 的全等，其中因為

$$\overline{AB}=\overline{AE}\text{ (正方形的兩邊)},$$

而且

$$\angle ACB=90^\circ=\angle AOE,$$

以及

$$\angle CAB=90^\circ-\angle BAM=\angle OAE,$$

所以

$$\Delta ABC\cong\Delta AEO\text{ (AAS 全等)}.$$

再來看 $\Delta AEO,\Delta RBG$ 的全等，其中因為

$$\begin{aligned}\overline{EO}&=\overline{CB}\ (\because\Delta AEO\cong\Delta ABC)\\&=\overline{BG}\ (\text{正方形的兩邊}),\end{aligned}$$

而且

$$\angle AOE=90^\circ=\angle RGB,$$

以及

$$\begin{aligned}\angle AEO&=\angle CBA\ (\text{因為}\Delta ABC\cong\Delta AEO)\\&=90^\circ-\angle KBC\\&=\angle KBG,\end{aligned}$$

所以可以推得

$$\Delta AEO\cong\Delta RBG\text{ (ASA 全等)}.$$

綜合以上我們完成了

$$\Delta AJI\cong\Delta ABC\cong\Delta BAM\cong\Delta AEO\cong\Delta RBG\text{ 。}$$

2. 接著來證明 $\Delta APQ\cong\Delta JNH$ ：
   這是因為

$$\overline{AQ}=\overline{JH},$$

而且

$$\angle HJN = 90^\circ - \angle AJI$$
$$= \angle JAI = \angle QAP \text{ (對頂角相等)},$$

以及

$$\angle JHN = 90^\circ = \angle AQP,$$

所以就可以推得

$$\Delta APQ \cong \Delta JNH \text{ (ASA 全等)}.$$

3. 接著我們給出 $\Delta ELO \cong \Delta BKC$ 的證明：
   這是因為

$$\overline{EO} = \overline{BC} \text{ (因為 } \Delta AEO \cong \Delta ABC \text{)},$$

而且

$$\angle LEO = 90^\circ - \angle AEO$$
$$= 90^\circ - \angle ABC \text{ (因為} \Delta ABC \cong \Delta AEO\text{)}$$
$$= \angle KBC,$$

以及

$$\angle EOL = 90^\circ = \angle BCK,$$

因此可以推得

$$\Delta ELO \cong \Delta BKC \text{ (AAS 全等)}.$$

4. $\Delta APQ, \Delta RKF$ 是全等三角形，這裡給出證明

$$\overline{RF} = \overline{RG} - \overline{FG}$$
$$= \overline{IA} - \overline{CB} \text{ (因為} \Delta RGB \cong \Delta AIJ \text{及正方形的兩個邊)}$$
$$= \overline{IH} - \overline{IJ} \text{ (因為正方形的兩邊以及} \Delta ABC \cong \Delta AJI\text{)}$$
$$= \overline{HJ} = \overline{AQ},$$

而且

$$\angle PAQ = \angle EAO$$
$$= \angle BRG \text{ (因為} \Delta AEO \cong \Delta RBG\text{)},$$
$$= \angle KRF,$$

以及

$$\angle AQP = 90^\circ = \angle AFK,$$

所以可推得

$$\Delta APQ \cong \Delta RKF \text{ (ASA 全等)}.$$

5. 也不難發現四邊形 $BGKF$ 全等於四邊形 $EOPQ$，以下我們用五個對應相等的條件，來證明這個事實：
   在 $\Delta APQ \cong \Delta RKF$ 中

$$\overline{PQ} = \overline{KF},$$

並且我們有

$$\begin{aligned}\overline{QO} &= \overline{AO} - \overline{AQ} \\ &= \overline{RG} - \overline{RF} \ \left(\text{因為}\Delta AEO \cong \Delta RBG, \Delta APQ \cong \Delta RKF\right) \\ &= \overline{FG},\end{aligned}$$

而且

$$\overline{EO} = \overline{BG} \ \left(\Delta AEO \cong \Delta RBG\right),$$

以及加上對應角的相等：

$$\angle PQO = \angle QOE = \angle KFG = \angle FGB = 90^\circ,$$

所以可以推得

$$\text{四邊形}BGKF \cong \text{四邊形}EOPQ \ \text{(SASAS 全等)}.$$

6. 最後四邊形 $JNCA$ 亦全等於四邊形 $DLMB$，同樣地我們以五個對應相等的條件給出證明：

因為

$$\overline{MB} = \overline{AC} \ \left(\text{因為}\Delta BAM \cong \Delta ABC\right),$$

而且有

$$\begin{aligned}\overline{BD} &= \overline{AB} \ \left(\text{正方形的兩邊}\right) \\ &= \overline{AJ} \ \left(\text{因為}\Delta ABC \cong \Delta AJI\right),\end{aligned}$$

以及有

$$\begin{aligned}\overline{LD} &= \overline{ED} - \overline{EL} \\ &= \overline{AB} - \overline{KB} \ \left(\text{正方形的兩邊以及因為}\Delta ELO \cong \Delta BKC\right) \\ &= \overline{RB} - \overline{KB} \ \left(\text{因為}\Delta ABC \cong \Delta RBG\right) \\ &= \overline{RK} \\ &= \overline{JN} \ \left(\text{因為}\Delta RKF \cong \Delta JNH\right),\end{aligned}$$

以及兩組對應角相等：

$$\begin{aligned}\angle MBD &= 90^\circ - \angle ABM \\ &= 90^\circ - \angle JAI \ \left(\text{因為}\Delta ABM \cong \Delta JAI\right) \\ &= \angle JAC,\end{aligned}$$

和

$$\angle BDL = 90^\circ = \angle AJN,$$

所以就可以推得

$$\text{四邊形}JNCA \cong \text{四邊形}DLMB \ \text{(SASAS 全等)}.$$

7. 綜合以上全等的證明，就可以以面積等式來推導關係式：

$$\begin{aligned}\square ABDE &= \Delta APQ + PQOE + \Delta EOL + \Delta AMB + MBDL \\ &= \Delta JHN + KFGB + \Delta KBC + \Delta IAJ + ACNJ \\ &= \left(\Delta IJA + \Delta JHN + JNCA\right) + \left(\Delta CKB + KFGB\right) \\ &= \square ACHI + \square BCFG,\end{aligned}$$

此即為畢氏定理關係式

$$c^2 = a^2 + b^2 .$$

【註與心得】

1. 來源：此證明來自於清末數學家華蘅芳(1833-1902)二十二個勾股證明之一，除此之外還收錄於以下書籍：
   Edwards, George C.(1895). 《*Elements of Geometry*》(p.161). NewYork : Macmilla and co.
2. 心得：此證明屬於拼圖式的證明，任意直角三角形以三邊為邊分別作三個正方形，只要採正確的方法作輔助線切割，即可得到拼片來證明畢氏定理，這也是這類證明最精采的地方。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●	●	

4. 補充：華蘅芳簡介：
   華蘅芳(1833-1902)清末數學家，在《雙套句股》提供了二十二種精彩的勾股定理證明，其證明方式皆為圖形的割補；華蘅芳同時也為機械工程專家，與徐壽製成中國第一台蒸氣機，少年時酷愛數學，遍覽當時各種數學書籍，與李善蘭相善，在數學研究、科技著作、書籍翻譯都有出色的表現，使高等數學的基礎知識及方法得以進一步傳播，中國早期掌握和傳播近代科技的代表人物之一。

   另外在數學能力指標中，有這麼幾項：
   S-4-09：能理解三角形的全等定理，並應用於解題和推理。
   以及

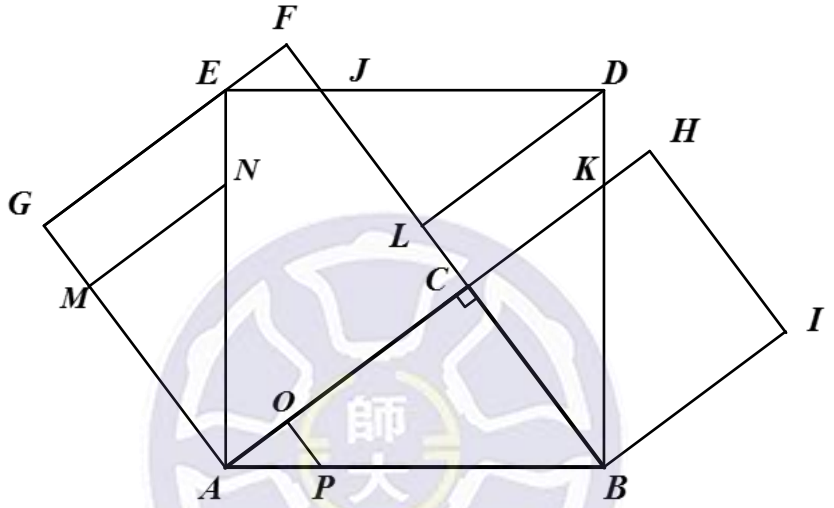
   N-3-22 及 S-3-06：能運用切割重組，理解三角形、平行四邊形與梯形的面積公式。

   此證明正是利用圖形的分割，以及三角形的全等來推理出畢氏定理關係式。

勾股定理證明-華蘅芳 04

【作輔助圖】

1. 以直角三角形 ABC 的 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 、 $\overline{BC}$ 三邊為邊，分別向內、向外、向外作正方形。可以得到正方形 $ABDE$ 、正方形 $ACFG$ 、正方形 $BCHI$ 。此處會發現 E 必落在 $\overline{GF}$ 上，也就是 $G-E-F$ 三點共線，將在後面給出證明。
2. 其中 $\overline{CF}$ 與 $\overline{ED}$ 的交於 J ， $\overline{CH}$ 與 $\overline{BD}$ 的交於 K 。
3. 過 D 作 ΔBJD 的高線，垂足 L 。
4. 在 $\overline{GA}$ 上取 M 使 $\overline{GM}=\overline{CL}$ ，再過 M 作 $\overline{GA}$ 的垂直線交 $\overline{AE}$ 於 N 。
5. 在 $\overline{AC}$ 上取 O 使 $\overline{AO}=\overline{EF}$ ，再過 O 作 $\overline{AC}$ 的垂直線交 $\overline{AB}$ 於 P 。



【求證過程】

我們先證明 $G-E-F$ 三點共線，以確定這個圖的正確性。接著會發現大正方形被這些輔助線切割成六個拼片，其中二個不用移動，而我們將證明另外四個拼片與相對應的四拼片個是全等的。接著再推導面積關係式即可以證明畢氏定理。

1. 首先我們給出 $\Delta ABC \cong \Delta AEG$ 的證明：
   因為
   $$\overline{AC}=\overline{AG}\text{(正方形中兩邊)},$$
   而且
   $$\overline{AB}=\overline{AE}\ \text{(正方形中兩邊)},$$
   以及
   $$\angle BAC = 90^\circ - \angle EAC = \angle EAG\ ,$$
   所以可以推得
   $$\Delta ABC \cong \Delta AEG\ .$$

2. 不難發現 $G-E-F$ 共線，以下給個證明：
   為了得到 $G-E-F$ 共線，我們要先說明 $\angle AGE = \angle AGF$ ，其中 $\angle AGE$ 是

三角形 EGA 的一內角，而 $\angle AGF$ 是正方形 $ACFG$ 的一內角。而我們已知 $\angle AGF = 90^\circ$，因為是正方形的一個角，故只要證明 $\angle EGA = 90^\circ$ 即可。

而因為 1.的證明我們知道

$$\Delta ABC \cong \Delta AEG,$$

所以可以確定

$$\angle EGA = \angle BCA = 90^\circ,$$

因此

$$G - E - F \text{ 共線.}$$

3. 接著給出 $\Delta AOP \cong \Delta EFJ$ 的證明：

因為

$$\overline{AO} = \overline{EF},$$

而且

$$\begin{aligned}\angle OAP &= 90^\circ - \angle EAO \\ &= 90^\circ - \angle AEG \text{ (平行線}\overline{AC}, \overline{GE}\text{的內錯角)} \\ &= \angle FEJ,\end{aligned}$$

以及

$$\angle AOP = 90^\circ = \angle EFJ,$$

所以可以推得

$$\Delta AOP \cong \Delta EFJ \text{ (ASA 全等).}$$

4. 不難發現 $\Delta MNA \cong \Delta CKB \cong \Delta LJD$, 以下我們給出證明：

這裡我們先證明 $\Delta ABC \cong \Delta BDL$ ：

其中因為

$$\overline{AB} = \overline{DB} \text{ (正方形兩邊),}$$

而且

$$\angle ACB = 90^\circ = \angle DLB,$$

以及

$$\angle CAB = 90^\circ - \angle CBA = \angle DBL,$$

所以可以推得

$$\Delta ABC \cong \Delta BDL \text{ (AAS 全等).}$$

再由 $\Delta ABC \cong \Delta BDL \cong \Delta AEG$, 因此可以得到 $\overline{GA} = \overline{LB}$ ；

接著考慮 $\Delta MNA, \Delta CKB$ 的全等，因為有

$$\overline{AM} = \overline{GA} - \overline{GM} = \overline{LB} - \overline{LC} = \overline{BC},$$

而且

$$\angle MAN = \angle GAE = \angle LBD = \angle CBK,$$

以及

$$\angle NMA = 90^\circ = \angle KCB,$$

所以

$$\Delta MNA \cong \Delta CKB \text{ (ASA 全等).}$$

而$\Delta CKB, \Delta LJD$的全等證明如下，因為

$$\overline{DL} = \overline{CB}\,(\text{全等三角形的邊}),$$

而且

$$\angle JLD = 90^\circ = \angle KCB,$$

以及

$$\begin{aligned}\angle BKC &= \angle BDL\left(\text{平行線}\overline{DL}, \overline{HC}\text{的同位角}\right)\\ &= 90^\circ - \angle JDL\\ &= \angle DJL,\end{aligned}$$

，所以可以推得

$$\Delta CKB \cong \Delta LJD\,(\text{AAS 全等}).$$

綜合以上我們就證明了

$$\Delta MNA \cong \Delta CKB \cong \Delta LJD.$$

5. 接著不難發現四邊形$GENM \cong LDKC$, 以下我們使用五個對應相等來證明這個事實：

因為

$$\overline{GM} = \overline{LC},$$

而且

$$\overline{GE} = \overline{LD}\,(\text{全等三角形的對應邊}),$$

以及

$$\overline{MN} = \overline{CK}\,(\text{全等三角形的對應邊}),$$

到這裡我們就已經證明三個邊等長了！

再加上這三邊的兩個夾角對應相同，

$$\angle EGM = \angle NMG = 90^\circ = \angle DLC = \angle KCL,$$

所以可以推得

$$\text{四邊形}GENM \cong \text{四邊形}LDKC\,(\text{SASAS 全等}).$$

6. 接著證明四邊形$POCB \cong KHIB$，同樣地要有三邊及兩角的相同，以下是證明：

因為

$$\overline{CB} = \overline{BI}\,(\text{正方形的兩邊}),$$

而且

$$\begin{aligned}
\overline{KB} &= \overline{DB} - \overline{DK} \\
&= \overline{AB} - \overline{EN} \quad \left(\begin{array}{l}\overline{DB} = \overline{AB}\text{是因為}\Delta ABC \cong \Delta BDL, \\ \overline{DK} = \overline{EN}\text{是因為四邊形}GENM \cong LDKC。\end{array}\right) \\
&= \overline{AB} - \left(\overline{EA} - \overline{NA}\right) \\
&= \overline{AB} - \left(\overline{ED} - \overline{JD}\right) \quad \left(\begin{array}{l}\overline{EA} = \overline{ED}\text{是因為正方形的兩邊，} \\ \overline{NA} = \overline{JD}\text{是因為}\Delta MNA \cong \Delta LJD。\end{array}\right) \\
&= \overline{AB} - \overline{EJ} \\
&= \overline{AB} - \overline{AP} \quad \left(\overline{EJ} = \overline{AP}\text{是因為}\Delta AOP \cong \Delta EFJ\right) \\
&= \overline{PB},
\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}
\overline{OC} &= \overline{AC} - \overline{AO} \\
&= \overline{GF} - \overline{EF} \quad \left(\begin{array}{l}\overline{AC} = \overline{GF}\text{是因為正方形的兩邊} \\ \overline{AO} = \overline{EF}\text{是因為}\Delta AOP \cong \Delta EFJ\end{array}\right) \\
&= \overline{GE} = \overline{LD} = \overline{CB} \ \left(\text{因為}\Delta AGE \cong \Delta BLD \cong \Delta ACB\right) \\
&= \overline{HI},
\end{aligned}$$

再加上兩個夾角對應相等，

$$\angle POC = \angle OCB = 90^\circ = \angle HIB = \angle KHI\ ,$$

所以我們可以推得

$$\text{四邊形}\ POCB \cong \text{四邊形}KHIB\,(\text{SASAS 全等}).$$

7. 綜合以上證明了對應拼片的全等，再利用面積等式的推導，可以得到關係式：

$$\begin{aligned}
\square ABDE &= \Delta APO + PBCO + \Delta BCK + CKDL + \Delta DLJ + EJCA \\
&= \Delta EFJ + BIHK + \Delta BCK + GMNE + \Delta AMN + EJCA \\
&= \left(\Delta EFJ + EJCA + GMNE + \Delta AMN\right) + \left(\Delta BCK + BIHK\right) \\
&= \square ACFG + \square BCHI,
\end{aligned}$$

這也就是畢氏定理關係式

$$c^2 = a^2 + b^2\,.$$

【註與心得】

1. 來源：此證明來自於清末數學家華蘅芳(1833-1902)二十二個勾股證明之一，除此之外還收錄於以下書籍：
   Edwards, George C.(1895). 《*Elements of Geometry*》(p.161). NewYork : Macmilla and co.
2. 心得：此證明屬於拼圖式的證明，任意直角三角形以三邊為邊分別作三個正方形，只要採正確的方法作輔助線切割，即可得到拼片來證明畢氏定理，這也是這類證明最精采的地方。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●	●	

4. 補充：華蘅芳簡介：
   華蘅芳(1833-1902)清末數學家，在《雙套句股》提供了二十二種精彩的勾股定理證明，其證明方式皆為圖形的割補；華蘅芳同時也為機械工程專家，與徐壽製成中國第一台蒸氣機，少年時酷愛數學，遍覽當時各種數學書籍，與李善蘭相善，在數學研究、科技著作、書籍翻譯都有出色的表現，使高等數學的基礎知識及方法得以進一步傳播，中國早期掌握和傳播近代科技的代表人物之一。

   另外在數學能力指標中，有這麼幾項：
   S-4-09：能理解三角形的全等定理，並應用於解題和推理。
   以及

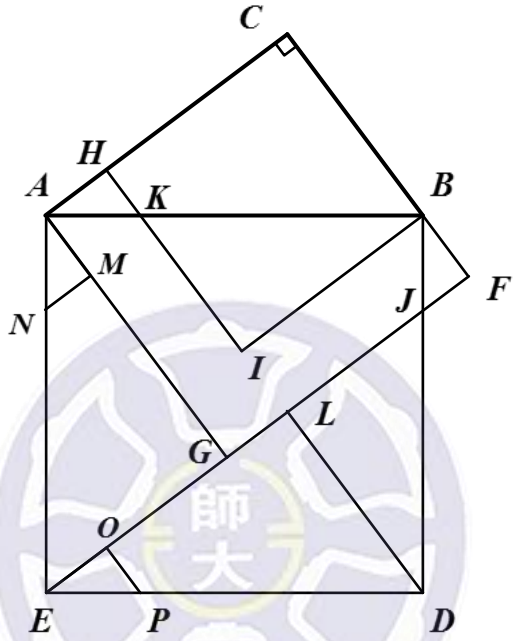
   N-3-22 及 S-3-06：能運用切割重組，理解三角形、平行四邊形與梯形的面積公式。

   此證明正是利用圖形的分割，以及三角形的全等來推理出畢氏定理關係式。

勾股定理證明-華蘅芳 07

【作輔助圖】

1. 以 $\overline{AB},\overline{AC},\overline{BC}$ 三邊為邊分別向外、向內、向內作正方形 $ABDE, ACFG, BCHI$ 。
2. 其中 $\overline{BD}$ 與 $\overline{FG}$ 交於 J ，而 $\overline{HI}$ 與 $\overline{AB}$ 交於 K 。
3. 過 D 作 $\overline{EJ}$ 的垂直線交 $\overline{EJ}$ 於 L 。
4. 在 $\overline{AG}$ 上取 M 使 $\overline{AM}=\overline{AH}$ ，再過 M 作 $\overline{AG}$ 的垂直線交 $\overline{AE}$ 於 N 。
5. 在 $\overline{EL}$ 上取 O 使 $\overline{EO}=\overline{AH}$ ，再過 O 作 $\overline{EL}$ 的垂直線交 $\overline{ED}$ 於 P 。



【求證過程】

以直角三角形的斜邊為邊作出的大正方形可以透過輔助線將之切割成七片拼片。我們不難證明大正方形中的拼片與兩個小正方形中的拼片對應全等，再透過面積的等式推導，就可以得到畢氏定理關係式。

1. 首先我們給出 $\Delta ABC \cong \Delta AEG \cong \Delta EDL$ 的證明：

   因為

$$\overline{AB}=\overline{AE}=\overline{ED}\ (\text{正方形的邊}),$$

   而且

$$\begin{aligned}\angle CAB &= 90^\circ - \angle BAG\\ &= \angle GAE\\ &= 90^\circ - \angle AEG\\ &= \angle LED,\end{aligned}$$

   以及

$$\angle ACB = \angle AGE = \angle ALD = 90^\circ,$$

   所以可以推得

$$\Delta ABC \cong \Delta AEG \cong \Delta EDL\ (\text{AAS 全等}).$$

2. 不難發現 $\Delta AKH, \Delta ANM, \Delta EPO, \Delta BJF$ 也都是全等的直角三角形, 以下給出證明：

因為

$$\begin{aligned}\overline{AH} &= \overline{CA} - \overline{CH} \\ &= \overline{CF} - \overline{CB} \ (\text{正方形的邊}) \\ &= \overline{BF},\end{aligned}$$

還有

$$\overline{AH} = \overline{AM} = \overline{EO},$$

而且

$$\angle HAK = \angle MAN = \angle OEP \ (\because \Delta ABC \cong \Delta AEG \cong \Delta EDL)\text{；}$$

因為

$$\angle HAK = 90^\circ - \angle CBA = \angle JBF\ ,$$

再加上

$$\angle AHK = \angle AME = \angle EOP = \angle BFJ = 90^\circ,$$

所以可以推得

$$\Delta AKH \cong \Delta ANM \cong \Delta EPO \cong \Delta BJF \ (\text{ASA 全等}).$$

3. 接著證明 $\Delta BKI \cong \Delta DJL$ ：

因為

$$\begin{aligned}\overline{BI} &= \overline{BC} \ (\because \text{正方形的邊}) \\ &= \overline{LD} \ (\because \Delta ABC \cong \Delta EDL),\end{aligned}$$

而且

$$\begin{aligned}\angle KBI &= 90^\circ - \angle CBA \\ &= 90^\circ - \angle LDE \ (\because \Delta ABC \cong \Delta EDL) \\ &= \angle JDL,\end{aligned}$$

以及

$$\angle BIK = 90^\circ = \angle DLJ\ ,$$

所以可以推得

$$\Delta BKI \cong \Delta DJL \ (\text{ASA 全等}).$$

4. 也不難發現 $NMGE \cong KHCB \cong PQLD$, 以下我們以五個條件來證明四邊形的全等：

因為

$$\overline{HK} = \overline{NM} = \overline{OP} \ (\because \Delta AKH \cong \Delta ANM \cong \Delta EPO),$$

而且

$$\begin{aligned}\overline{CH} &= \overline{AC} - \overline{AH} \\ &= \overline{AG} - \overline{AM} \ (\because \text{正方形的邊以及} \Delta AKH \cong \Delta ANM) \\ &= \overline{MG},\end{aligned}$$

另一方面

$$\begin{aligned}\overline{CH} &= \overline{AC} - \overline{AH} \\ &= \overline{EL} - \overline{EO} \ \left(\because \Delta ABC \cong \Delta EDL \text{且} \Delta AKH \cong \Delta EPO\right) \\ &= \overline{OL},\end{aligned}$$

還有

$$\overline{CB} = \overline{EG} = \overline{DL},$$

再加上

$$\angle KHC = \angle HCB = \angle NMG = \angle MGE = \angle POL = \angle OLD = 90^\circ,$$

所以可以推得

$$\text{四邊形}NMGE \cong \text{四邊形}KHCB \cong \text{四邊形}PQLD \ (\text{SASAS 全等}).$$

5. 綜合以上的全等證明，就可以從面積等式中推導關係式：

$$\begin{aligned}\square ABDE &= \Delta AMN + MNEG + \Delta EOP + OPDL + \Delta JLD + AGJB \\ &= \Delta AHK + HKBC + \Delta BJF + HKBC + \Delta KIB + AGJB \\ &= \left(\Delta AHK + HKBC + AGJB + BJF\right) + \left(HKBC + \Delta KIB\right) \\ &= \square ACFG + \square BCHI,\end{aligned}$$

即畢氏定理關係式

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：此證明來自於清末數學家華蘅芳(1833-1902)二十二個勾股證明之一，除此之外還收錄於以下書籍：
   Edwards, George C.(1895). 《*Elements of Geometry*》(p.161). NewYork : Macmilla and co.
2. 心得：此證明屬於拼圖式的證明，任意直角三角形以三邊為邊分別作三個正方形，只要採正確的方法作輔助線切割，即可得到拼片來證明畢氏定理，這也是這類證明最精采的地方。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●	●	

4. 補充：華蘅芳簡介：
   華蘅芳(1833-1902)清末數學家，在《雙套句股》提供了二十二種精彩的勾股定理證明，其證明方式皆為圖形的割補；華蘅芳同時也為機械工程專家，與徐壽製成中國第一台蒸氣機，少年時酷愛數學，遍覽當時各種數學書籍，與李善蘭相善，在數學研究、科技著作、書籍翻譯都有出色的表現，使高等數學的基礎知識及方法得以進一步傳播，中國早期掌握和傳播近代科技的代表人物之一。

   另外在數學能力指標中，有這麼幾項：
   S-4-09：能理解三角形的全等定理，並應用於解題和推理。
   以及

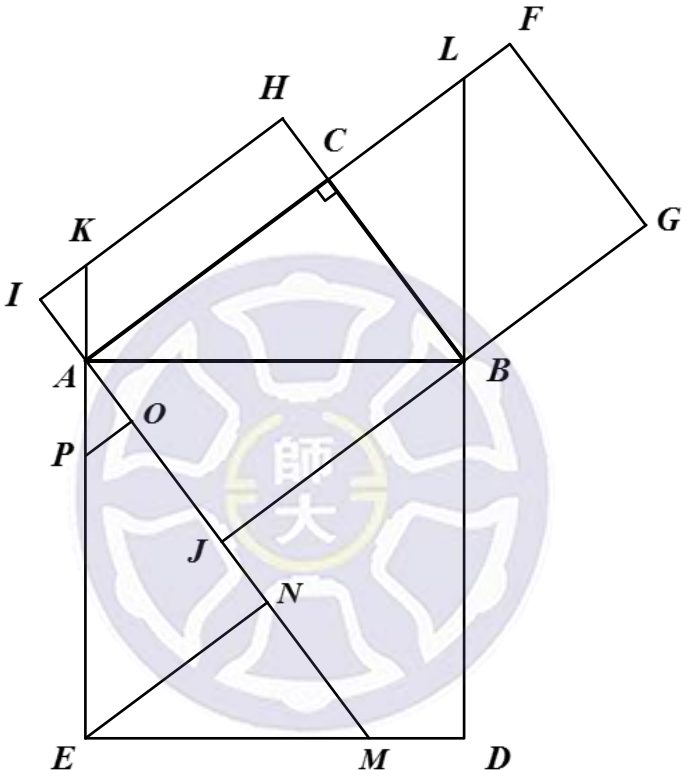
   N-3-22 及 S-3-06：能運用切割重組，理解三角形、平行四邊形與梯形的面積公式。

   此證明正是利用圖形的分割，以及三角形的全等來推理出畢氏定理關係式。

勾股定理證明-華蘅芳 10

【作輔助圖】

1. 以直角三角形 ABC 的 $\overline{AB}$ 為邊，向外作正方形 $ABDE$ ；再以 $\overline{BC}$ 為邊，向外作正方形 $BCFG$ ；接著取一點 H 於 $\overline{BC}$ 延伸線上，使 $\overline{BH}=\overline{AC}$ ，再以 $\overline{BH}$ 為邊向內作正方形 $BHIJ$ 。
2. 延伸 $\overline{EA}$ 交 $\overline{HI}$ 於 K ；然後延伸 $\overline{DB}$ 交 $\overline{CF}$ 於 L ；再延伸 $\overline{IJ}$ 交 $\overline{ED}$ 於 M 。
3. 過 E 作 ΔAEM 的高，以 N 為垂足。
4. 最後在 $\overline{AM}$ 上取一點 O ，使得 $\overline{AO}=\overline{AI}$ ，再過 O 作 $\overline{AM}$ 的垂直線，交 $\overline{AE}$ 於 P 。



【求證過程】

以上輔助圖中，大正方形被輔助線切割成五塊拼片，不難發現這五塊拼片與兩個小正方形內的拼片對應全等，因此可以以這五塊拼片拼得兩個小正方形。再利用面積等式的推導，即可輕易得到畢氏定理的關係式。

1. 首先來證明 $\Delta ABC \cong \Delta BAJ \cong \Delta AEN$ ：

   因為

$$\overline{AB}=\overline{AB}=\overline{AE}\ (\text{共用邊及正方形的邊}),$$

   而且

$$\begin{aligned}\angle CAB &= 90^\circ - \angle BAJ \\ &= \angle EAN,\end{aligned}$$

   並且

$$\angle CAB = 90^\circ - \angle BAJ$$
$$= \angle ABJ,$$

以及

$$\angle ACB = \angle ANE = \angle AJB = 90^\circ,$$

所以可以推得

$$\Delta ABC \cong \Delta BAJ \cong \Delta AEN \text{ (AAS 全等)}.$$

2. 接著證明$\Delta LCB \cong \Delta MNE$：

因為

$$\overline{CB} = \overline{NE} \ (\because \Delta ABC \cong \Delta AEN),$$

而且

$$\begin{aligned}\angle LBC &= 90^\circ - \angle CBA \\ &= 90^\circ - \angle NEA \ (\because \Delta ABC \cong \Delta AEN) \\ &= \angle NEM,\end{aligned}$$

以及

$$\angle LCB = 90^\circ = \angle ENM,$$

所以可以推得

$$\Delta LCB \cong \Delta MNE \text{ (ASA 全等)}.$$

3. 不難發現$\Delta AKI \cong \Delta APO$, 以下我們同樣地給出證明：

因為

$$\overline{AI} = \overline{AO},$$

而且

$$\angle KAI = \angle OAP \ (\because \text{對頂角}),$$

以及

$$\angle KIA = 90^\circ = \angle POA,$$

所以可以推得

$$\Delta AKI \cong \Delta APO \text{ (ASA 全等)}.$$

4. 再來證明四邊形$JMDB \cong$四邊形$HKAB$，我們以五個條件寫下它的證明：

因為

$$\overline{AB} = \overline{BD} \ (\because \text{正方形的邊}),$$

而且

$$\overline{BH} = \overline{BJ} \ (\because \text{正方形的邊}),$$

以及

$$\angle MDB = 90^\circ = \angle KAB,$$

和

$$\angle DBJ = 90^\circ - \angle ABJ = \angle HBA,$$

還有

$$\angle BJM = 90^\circ = \angle BHK,$$

所以可以推得

$$\text{四邊形}JMDB \cong \text{四邊形}HKAB\,(\text{ASASA 全等}).$$

5. 最後一塊拼片要證明四邊形$PONE \cong$四邊形$LFGB$，同樣地我們使用五個條件證明它：

因為

$$\overline{EN} = \overline{BC} = \overline{BG}\ \left(\because \Delta AEN \cong \Delta ABC\text{以及正方形的兩邊}\right),$$

而且

$$\begin{aligned}\overline{ON} &= \overline{AN} - \overline{AO}\\ &= \overline{BJ} - \overline{IA}\ \left(\because \Delta AEJ \cong \Delta BAJ\right)\\ &= \overline{BH} - \overline{CH}\ \left(\because \text{正方形的邊及長方形}IACH\text{的邊}\right)\\ &= \overline{BC}\\ &= \overline{FG}\ \left(\because \text{正方形的邊}\right),\end{aligned}$$

以及以下的三個角對應相等，

$$\begin{aligned}\angle PEN &= \angle AEN\ \left(\because \text{共角}\right)\\ &= 90^\circ - \angle NEM\\ &= 90^\circ - \angle CBL\ \left(\because \Delta EMN \cong \Delta BLC\right)\\ &= \angle LBG,\end{aligned}$$

還有

$$\angle ENO = \angle NOP = 90^\circ = \angle BGF = \angle GFL,$$

所以我們可以推得

$$\text{四邊形}PONE \cong \text{四邊形}LFGB\,(\text{ASASA 全等}).$$

6. 綜合以上拼片對應全等的證明，以下我們從面積等式中推導：

$$\begin{aligned}\square ABDE &= \Delta APO + PONE + \Delta ENM + \Delta AJB + JBDM\\ &= \Delta AKI + LFGB + \Delta BLC + \Delta AJB + HBAK\\ &= \left(\Delta BLC + LFGB\right) + \left(\Delta AKI + HBAK + \Delta AJB\right)\\ &= \square BCFG + \square BHIJ\end{aligned}$$

即為畢氏定理關係式

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：此證明來自於清末數學家華蘅芳(1833-1902)二十二個勾股證明之一，除此之外還收錄於以下書籍：
   Edwards, George C.(1895). 《*Elements of Geometry*》(p.161). NewYork : Macmilla and co.
2. 心得：此證明屬於拼圖式的證明，任意直角三角形以三邊為邊分別作三個正方形，只要採正確的方法作輔助線切割，即可得到拼片來證明畢氏定理，這也是這類證明最精采的地方。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●	●	

4. 補充：華蘅芳簡介：
   華蘅芳(1833-1902)清末數學家，在《雙套句股》提供了二十二種精彩的勾股定理證明，其證明方式皆為圖形的割補；華蘅芳同時也為機械工程專家，與徐壽製成中國第一台蒸氣機，少年時酷愛數學，遍覽當時各種數學書籍，與李善蘭相善，在數學研究、科技著作、書籍翻譯都有出色的表現，使高等數學的基礎知識及方法得以進一步傳播，中國早期掌握和傳播近代科技的代表人物之一。

   另外在數學能力指標中，有這麼幾項：
   S-4-09：能理解三角形的全等定理，並應用於解題和推理。
   以及

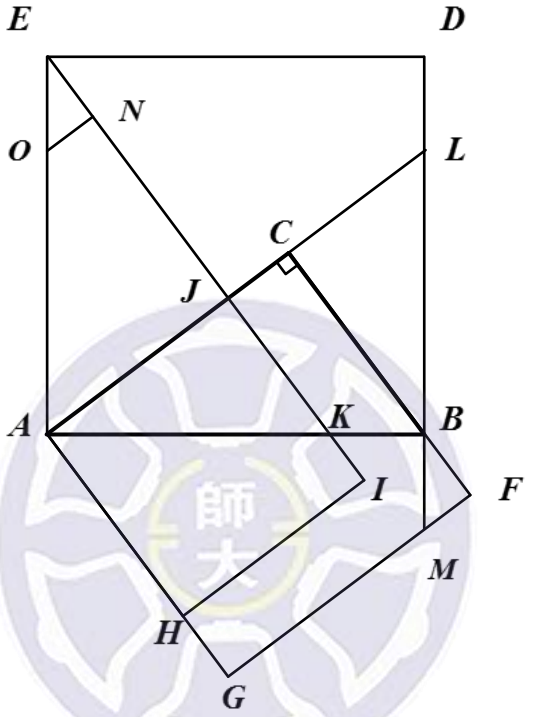
   N-3-22 及 S-3-06：能運用切割重組，理解三角形、平行四邊形與梯形的面積公式。

   此證明正是利用圖形的分割，以及三角形的全等來推理出畢氏定理關係式。

勾股定理證明-華蘅芳 12

【作輔助圖】

1. 以直角三角形 ABC 的 $\overline{AB}$ 為邊，向內作正方形 $ABDE$ ；再以 $\overline{AC}$ 為邊，向內作正方形 $ACFG$ ；接著取一點 H 於 $\overline{AG}$ 上，使 $\overline{AH}=\overline{BC}$ ，再以 $\overline{AH}$ 為邊向內作正方形 $AHIJ$ 。其中 $\overline{JI}$ 與 $\overline{AB}$ 交於 K 。連 $\overline{EJ}$ 。
2. 延伸 $\overline{AC}$ 交 $\overline{BD}$ 於 L ；並延伸 $\overline{DB}$ 交 $\overline{FG}$ 於 M 。
3. 最後在 $\overline{EJ}$ 上取一點 N ，使得 $\overline{EN}=\overline{BF}$ ，再過 N 作 $\overline{EJ}$ 的垂直線，交 $\overline{AE}$ 於 O 。



【求證過程】

以上輔助圖中，大正方形被輔助線切割成五塊拼片，不難證明這五塊拼片與兩個小正方形內的拼片對應全等，因此可以以這五塊拼片拼得兩個小正方形。再利用面積等式的推導，即可輕易得到畢氏定理的關係式。

1. 首先來證明 $\Delta ABC \cong \Delta EAJ$ ：

   因為

$$\overline{AB}=\overline{AE}\ \left(\because \text{正方形的邊}\right),$$

   而且

$$\begin{aligned}\angle CAB &= 90^\circ - \angle EAJ \\ &= \angle AEJ,\end{aligned}$$

   以及

$$\angle ACB = 90^\circ = \angle EJA,$$

   所以可以推得

$$\Delta ABC \cong \Delta EAJ\ \ (\text{AAS 全等}).$$

2. 接著考慮$\Delta BLC, \Delta AKJ$的全等：

因為

$$\overline{AJ} = \overline{BC} \ \left(\because \Delta ABC \cong \Delta EAJ\right),$$

而且

$$\begin{aligned}\angle JAK &= 90^\circ - \angle CBA \\ &= \angle LBC,\end{aligned}$$

以及

$$\angle AJK = 90^\circ = \angle BCL,$$

所以可以推得

$$\Delta BLC \cong \Delta AKJ \ \text{(ASA 全等)}.$$

3. 然後要證明$\Delta EON \cong \Delta BMF$ ：

因為

$$\overline{EN} = \overline{BF},$$

而且

$$\begin{aligned}\angle OEN &= \angle AEJ \\ &= \angle CAB \ \left(\because \Delta AEJ \cong \Delta ABC\right) \\ &= \angle JAK \\ &= \angle CBL \ \left(\because \Delta JAK \cong \Delta CBL\right) \\ &= \angle FBM \ \left(\because \text{對頂角}\right),\end{aligned}$$

以及

$$\angle ENO = 90^\circ = \angle BFM \ ,$$

所以可以推得

$$\Delta EON \cong \Delta BMF \ \text{(ASA 全等)}.$$

4. 不難發現四邊形$ONJA \cong$四邊形$KIHA$, 以下我們用五個條件給出證明：

因為

$$\overline{AJ} = \overline{AH} \ \left(\because \text{正方形的邊}\right),$$

而且

$$\begin{aligned}\overline{NJ} &= \overline{EJ} - \overline{EN} \\ &= \overline{AC} - \overline{BF} \ \left(\because \Delta ENO \cong \Delta BFM\right) \\ &= \overline{CF} - \overline{BF} \ \left(\because \text{正方形的邊}\right) \\ &= \overline{BC} \\ &= \overline{AJ} \ \left(\because \Delta ABC \cong \Delta EAJ\right) \\ &= \overline{HI} \ \left(\because \text{正方形的邊}\right),\end{aligned}$$

以及

$$\angle OAJ = 90^\circ - \angle JAK = \angle KAH,$$

和

$$\angle AJN = \angle JNO = 90^\circ = \angle AHI = \angle HIK,,$$

所以可以推得

$$\text{四邊形}ONJA \cong \text{四邊形}KIHA \text{ (ASASA 全等).}$$

5. 最後一塊拼片要考慮四邊形$EDLN \cong$四邊形$ABMG$, 同樣地我們使用五個條件給出證明：

因為

$$\overline{ED} = \overline{AB} \ (\because \text{正方形的邊}),$$

而且

$$\begin{aligned}\overline{EJ} &= \overline{CA} \ (\because \Delta AEJ \cong \Delta BAC) \\ &= \overline{AG} \ (\because \text{正方形的邊}),\end{aligned}$$

以及以下的三個角對應相等，

$$\angle LJE = 90^\circ = \angle MGA,$$

和

$$\begin{aligned}\angle JED &= 90^\circ - \angle AEJ \\ &= 90^\circ - \angle CAB \ (\because \Delta AEJ \cong \Delta BAC) \\ &= \angle GAB,\end{aligned}$$

還有

$$\angle EDL = 90^\circ = \angle ABM,$$

所以可以推得

$$\text{四邊形}EDLN \cong \text{四邊形}ABMG \text{ (ASASA 全等).}$$

6. 綜合以上拼片對應全等的證明，以下我們從面積等式中推導：

$$\begin{aligned}\square ABDE &= \Delta EON + ONJA + EDLJ + \Delta ABC + \Delta LCB \\ &= \Delta BMF + AKIH + ABMG + \Delta ABC + \Delta AJK \\ &= (\Delta BMF + ABMG + \Delta ABC) + (\Delta AJK + AKIH) \\ &= \square ACFG + \square AHIJ\end{aligned}$$

即為畢氏定理關係式

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：此證明來自於清末數學家華蘅芳(1833-1902)二十二個勾股證明之一，除此之外還收錄於以下書籍：
   Edwards, George C.(1895). 《*Elements of Geometry*》(p.161). NewYork : Macmilla and co.
2. 心得：此證明屬於拼圖式的證明，任意直角三角形以三邊為邊分別作三個正方形，只要採正確的方法作輔助線切割，即可得到拼片來證明畢氏定理，這也是這類證明最精采的地方。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●	●	

4. 補充：華蘅芳簡介：
   華蘅芳(1833-1902)清末數學家，在《雙套句股》提供了二十二種精彩的勾股定理證明，其證明方式皆為圖形的割補；華蘅芳同時也為機械工程專家，與徐壽製成中國第一台蒸氣機，少年時酷愛數學，遍覽當時各種數學書籍，與李善蘭相善，在數學研究、科技著作、書籍翻譯都有出色的表現，使高等數學的基礎知識及方法得以進一步傳播，中國早期掌握和傳播近代科技的代表人物之一。

   另外在數學能力指標中，有這麼幾項：
   S-4-09：能理解三角形的全等定理，並應用於解題和推理。
   以及

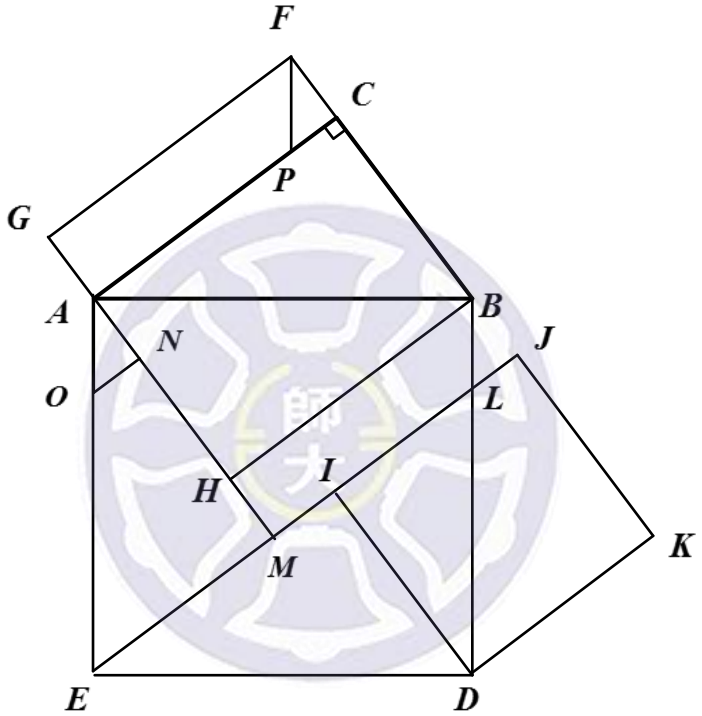
   N-3-22 及 S-3-06：能運用切割重組，理解三角形、平行四邊形與梯形的面積公式。

   此證明正是利用圖形的分割，以及三角形的全等來推理出畢氏定理關係式。

勾股定理證明-華蘅芳 14

【作輔助圖】

1. 以直角三角形 ABC 的 $\overline{AB}$ 為邊，向外作正方形 $ABDE$ 。
2. 在 $\overline{BC}$ 延伸線上取 F ，使得 $\overline{BF}=\overline{CA}$ ，再以 $\overline{BF}$ 為邊向內作正方形 $BFGH$ 。
3. 過 E 向內作 $\overline{AC}$ 的平行線 $\overline{EI}$ ，使得 $\overline{AC}=\overline{EI}$ ；連 $\overline{ID}$ ，然後以 $\overline{DI}$ 為邊作正方形 $DIJK$ ，其中 $\overline{IJ}$ 與 $\overline{BD}$ 交於 L 。
4. 延伸 $\overline{AH}$ 交 $\overline{EI}$ 於 M 。
5. 最後在 $\overline{AM}$ 上取一點 N ，使得 $\overline{AN}=\overline{FC}$ ，再過 N 作 $\overline{AM}$ 的垂直線，交 $\overline{AE}$ 於 O 。並在 $\overline{CA}$ 上取一點 P ，使得 $\overline{CP}=\overline{NO}$ ，連 $\overline{PF}$ 。



【求證過程】

以上輔助圖中，大正方形被輔助線切割成六塊拼片，我們不難證明這六塊拼片與兩個小正方形內的拼片對應全等，因此可以以這六塊拼片拼得兩個小正方形。再利用面積等式的推導，即可輕易得到畢氏定理的關係式。

1. 證明 $\Delta ABC,\Delta BAH,\Delta AEM,\Delta EDI$ 皆為全等的直角三角形：
   其中我們先證明 $\Delta ABC\cong\Delta BAH$ ，是因為
   $$\overline{AB}=\overline{BA}\ (\because \text{共用邊}),$$
   而且
   $$\begin{aligned}\angle ABC&=90^\circ-\angle ABH\\&=\angle BAH,\end{aligned}$$
   以及
   $$\angle ACB=90^\circ=\angle BHA,$$

所以可以推得

$$\Delta ABC \cong \Delta BAH \text{ (AAS 全等)；}$$

再看 $\Delta ABC, \Delta AEM$ ，不難證明它們的全等：

因為

$$\overline{AB} = \overline{AE} \ (\because \text{正方形的邊}),$$

而且

$$\begin{aligned}\angle CAB &= 90^\circ - \angle CBA \\ &= 90^\circ - \angle BAH \ (\because \Delta ABC \cong \Delta BAH) \\ &= \angle MAE,\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}\angle AME &= \angle MAC \ (\because \text{平行線的內錯角}) \\ &= \angle HAB + \angle BAC \\ &= \angle CBA + \angle BAC \ (\because \Delta ABC \cong \Delta BAH) \\ &= 90^\circ = \angle ACB,\end{aligned}$$

所以可以推得

$$\Delta ABC \cong \Delta AEM \text{ (AAS 全等)；}$$

接著看 $\Delta ABC, \Delta EDI$ ：

因為

$$\overline{AB} = \overline{ED} \ (\because \text{正方形的邊}),$$

而且

$$\begin{aligned}\angle CAB &= 90^\circ - \angle AEM \ (\because \Delta ABC \cong \Delta AEM) \\ &= \angle IED,\end{aligned}$$

以及

$$\overline{AC} = \overline{EI},$$

所以可以推得

$$\Delta ABC \cong \Delta EDI \text{ (SAS 全等)；}$$

因此我們完全證明

$$\Delta ABC \cong \Delta BAH \cong \Delta AEM \cong \Delta ADI .$$

2. 不難發現 $\Delta FCP, \Delta ANO$ 亦為全等的直角三角形, 以下我們給出證明：

因為

$$\overline{FC} = \overline{AN},$$

而且

$$\overline{ON} = \overline{PC},$$

以及

$$\angle ANO = \angle FCP = 90^\circ,$$

所以可以推得

$$\Delta FCP \cong \Delta ANO \text{ (SAS 全等).}$$

3. 再來我們以五個條件證明四邊形$ONME \cong$四邊形$LJKD$：

因為

$$\overline{EM} = \overline{ID} \ (\because \Delta AEM \cong \Delta EDI),$$

而且

$$\begin{aligned}\overline{NM} &= \overline{AM} - \overline{AN} \\ &= \overline{BH} - \overline{FC} \ (\because \Delta AEM \cong \Delta BAH) \\ &= \overline{FB} - \overline{FC} \ (\because \text{正方形的邊}) \\ &= \overline{BC} \\ &= \overline{ID} \ (\because \Delta ABC \cong \Delta EDI) \\ &= \overline{JK} \ (\because \text{正方形的邊}),\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}\angle OEM &= \angle IDE \ (\because \Delta AEM \cong \Delta EDI) \\ &= 90^\circ - \angle IDL \\ &= \angle LDK,\end{aligned}$$

和

$$\angle EMN = \angle MNO = 90^\circ = \angle DKJ = \angle KJL,$$

所以可以推得

四邊形$ONME \cong$四邊形$LJKD$ (ASASA 全等).

4. 最後一塊拼片要考慮四邊形$AGFP$,四邊形$MHBL$的全等, 同樣地我們找五個條件給出證明：

因為

$$\overline{GF} = \overline{HB} \ (\because \text{正方形的邊}),$$

而且

$$\begin{aligned}\overline{GA} &= \overline{HG} - \overline{HA} \\ &= \overline{BH} - \overline{HA} \ (\because \text{正方形的邊}) \\ &= \overline{AM} - \overline{HA} \ (\because \Delta AEM \cong \Delta BAH) \\ &= \overline{HM},\end{aligned}$$

以及以下的三個角對應相等，

$$\angle PAG = \angle AGF = 90^\circ = \angle LMH = \angle MHB,$$

和

$$\begin{aligned}\angle GFP &= 90^\circ - \angle PFC \\ &= 90^\circ - \angle OAN \ (\because \Delta PFC \cong \Delta OAN) \\ &= 90^\circ - \angle EAM \\ &= 90^\circ - \angle ABH \ (\because \Delta AEM \cong \Delta BAH) \\ &= \angle HBL,\end{aligned}$$

所以可以推得

四邊形$AGFP \cong$四邊形$MHBL$ (ASASA 全等).

5. 綜合以上拼片對應全等的證明，以下我們從面積等式中推導：

$$\begin{aligned}\square ABDE &= \Delta AON + ONME + \Delta EDI + \Delta BAH + MHBL + \Delta LID \\ &= \Delta FPC + LJKD + \Delta ABC + \Delta BAH + AGFP + \Delta LID \\ &= \left(\Delta FPC + AGFP + \Delta ABC + \Delta BAH\right) + \left(LJKD + \Delta LID\right) \\ &= \square BFGH + \square DIJK\end{aligned}$$

即為畢氏定理關係式

$$c^2 = a^2 + b^2 .$$

【註與心得】

1. 來源：此證明來自於清末數學家華蘅芳(1833-1902)二十二個勾股證明之一，除此之外還收錄於以下書籍：
   Edwards, George C.(1895). 《*Elements of Geometry*》(p.161). NewYork : Macmilla and co.
2. 心得：此證明屬於拼圖式的證明，任意直角三角形以三邊為邊分別作三個正方形，只要採正確的方法作輔助線切割，即可得到拼片來證明畢氏定理，這也是這類證明最精采的地方。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●	●	

4. 補充：華蘅芳簡介：
   華蘅芳(1833-1902)清末數學家，在《雙套句股》提供了二十二種精彩的勾股定理證明，其證明方式皆為圖形的割補；華蘅芳同時也為機械工程專家，與徐壽製成中國第一台蒸氣機，少年時酷愛數學，遍覽當時各種數學書籍，與李善蘭相善，在數學研究、科技著作、書籍翻譯都有出色的表現，使高等數學的基礎知識及方法得以進一步傳播，中國早期掌握和傳播近代科技的代表人物之一。

   另外在數學能力指標中，有這麼幾項：
   S-4-09：能理解三角形的全等定理，並應用於解題和推理。
   以及

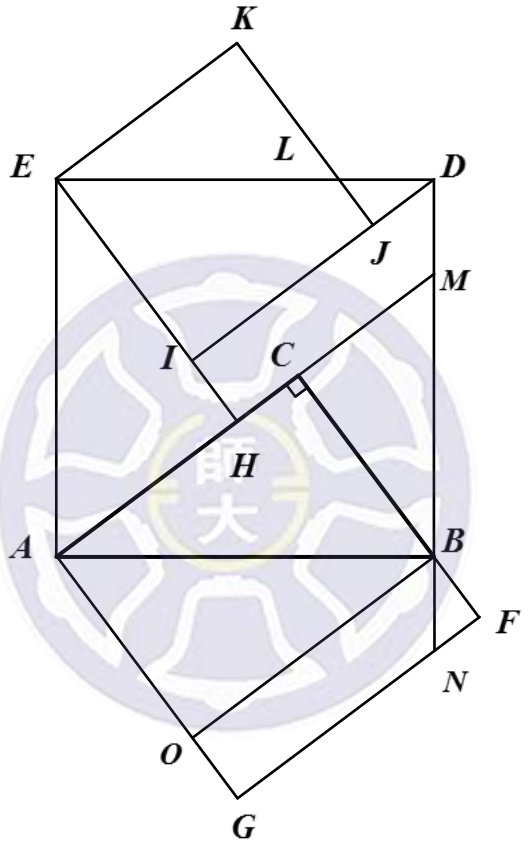
   N-3-22 及 S-3-06：能運用切割重組，理解三角形、平行四邊形與梯形的面積公式。

   此證明正是利用圖形的分割，以及三角形的全等來推理出畢氏定理關係式。

勾股定理證明-華蘅芳 15

【作輔助圖】

1. 以直角三角形 ABC 的 $\overline{AB}$ 為邊，向內作正方形 $ABDE$ ；再以 $\overline{AC}$ 為邊，向內作正方形 $ACFG$ 。
2. 接著過 E 作 $\overline{AC}$ 的垂直線，交 $\overline{AC}$ 於 H 。
3. 然後過 D 作 $\overline{EH}$ 的垂直線，交 $\overline{EH}$ 於 I ，再以 $\overline{EI}$ 為邊向外作正方形 $EIJK$ (如圖所示)，其中 $\overline{KJ}$ 與 $\overline{DE}$ 交於 L 。
4. 並延伸 $\overline{AC}$ 交 $\overline{BD}$ 於 M ，接著延伸 $\overline{DB}$ 交 $\overline{GF}$ 於 N 。
5. 最後過 B 作 $\overline{AG}$ 的垂直線，交 $\overline{AG}$ 於 O 。



【求證過程】

以上輔助圖中，大正方形被輔助線切割成六塊拼片，不難證明這六塊拼片與兩個小正方形內的拼片對應全等，因此可以以這六塊拼片拼得兩個小正方形。再利用面積等式的推導，即可得到畢氏定理的關係式。

1. 首先我們證明 $\Delta ABC, \Delta BAO, \Delta EAI, \Delta DEI$ 為全等的直角三角形：
   其中我們先證明 $\Delta ABC \cong \Delta BAO$ ，是因為
   $$\overline{AB} = \overline{BA} \ (\because \text{共用邊}),$$
   而且
   $$\begin{aligned} \angle ABC &= 90^\circ - \angle ABO \\ &= \angle BAO, \end{aligned}$$

以及

$$\angle ACB = 90^\circ = \angle BOA,$$

所以可以推得

$$\Delta ABC \cong \Delta BAO \text{ (AAS 全等)；}$$

再看 $\Delta ABC \cong \Delta EAH$ ：

因為有

$$\overline{AB} = \overline{AE} \ (\because \text{正方形的邊}),$$

而且

$$\begin{aligned}\angle CBA &= 90^\circ - \angle CAB \\ &= \angle EAH,\end{aligned}$$

以及

$$\angle ACB = 90^\circ = \angle EHA,$$

所以可以推得

$$\Delta ABC \cong \Delta EAH \text{ (AAS 全等)；}$$

接著看 $\Delta EAH \cong \Delta DEI$ ：

因為

$$\overline{EA} = \overline{DE} \ (\because \text{正方形的邊}),$$

而且

$$\begin{aligned}\angle AEH &= 90^\circ - \angle DEI \\ &= \angle EDI,\end{aligned}$$

以及

$$\angle EHA = 90^\circ = \angle DIE,$$

所以可以推得

$$\Delta EAH \cong \Delta DEI \text{ (AAS 全等)；}$$

因此我們就完成證明得到

$$\Delta ABC \cong \Delta BAO \cong \Delta EAI \cong \Delta DEI .$$

2. 不難證明 $\Delta BMC, \Delta ELK$ 的全等：

因為

$$\begin{aligned}\overline{BC} &= \overline{EI} \\ &= \overline{EK} \ (\because \text{正方形的邊}),\end{aligned}$$

而且

$$\angle MCB = 90^\circ = \angle LKE ,$$

以及

$$\begin{aligned}\angle CBM &= 90^\circ - \angle CBA \\ &= 90^\circ - \angle EAH \ \left(\because \Delta ABC \cong \Delta EAH\right) \\ &= \angle AEH \\ &= 90^\circ - \angle DEH \\ &= \angle KEL,\end{aligned}$$

所以可以推得

$$\Delta BMC \cong \Delta ELK \ \text{(ASA 全等)}.$$

3. 接著要證明$\Delta LDJ, \Delta NBF$的全等：

因為

$$\begin{aligned}\overline{DJ} &= \overline{DI} - \overline{JI} \\ &= \overline{AC} - \overline{EI} \ \left(\because \text{正方形的邊而且}\Delta DEI \cong \Delta ABC\right) \\ &= \overline{CF} - \overline{CB} \ \left(\because \text{正方形的邊而且}\Delta DEI \cong \Delta ABC\right) \\ &= \overline{BF},\end{aligned}$$

而且

$$\angle LJD = 90^\circ = \angle BFN,$$

以及

$$\begin{aligned}\angle LDJ &= 90^\circ - \angle DLJ \\ &= 90^\circ - \angle ELK \ \left(\because \text{對頂角}\right) \\ &= 90^\circ - \angle CMB \ \left(\because \Delta ELK \cong \Delta BMC\right), \\ &= \angle MBC \\ &= \angle FBN \ \left(\because \text{對頂角}\right),\end{aligned}$$

所以可以推得

$$\Delta LDJ \cong \Delta NBF \ \text{(ASA 全等)}.$$

4. 最後一塊拼片我們以五個條件證明四邊形$OGNB \cong$四邊形$IHMD$：

因為

$$\overline{OB} = \overline{ID} \ \left(\because \Delta BAO \cong \Delta DEI\right),$$

而且

$$\begin{aligned}\overline{OG} &= \overline{AG} - \overline{AO} \\ &= \overline{AC} - \overline{EI} \ \left(\because \text{正方形的邊而且}\Delta BAO \cong \Delta DEI\right), \\ &= \overline{EH} - \overline{EI} \left(\because \Delta ABC \cong \Delta EAH\right) \\ &= \overline{IH},\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}\angle OBN &= 90^\circ - \angle NBF \\ &= 90^\circ - \angle LDJ \ \left(\because \Delta NBF \cong \Delta LDJ\right) \\ &= \angle IDM,\end{aligned}$$

和

$$\angle MHI = \angle HID = 90^\circ = \angle NGO = \angle GOB,$$

所以可以推得

$$\text{四邊形}OGNB \cong \text{四邊形}IHMD \ \text{(ASASA 全等)}.$$

5. 綜合以上拼片對應全等的證明，以下我們從面積等式推導：

$$\begin{aligned}\square ABDE &= \Delta ABC + \Delta BCM + HIDM + \Delta LDJ + ELJI + \Delta EAH \\ &= \Delta ABC + \Delta EKL + GOBN + \Delta NBF + ELJI + \Delta BAO \\ &= \left(\Delta ABC + \Delta BAO + GOBN + \Delta NBF\right) + \left(ELJI + \Delta EKL\right) \\ &= \square ACFG + \square EJIK\end{aligned}$$

即為畢氏定理關係式

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：此證明來自於清末數學家華蘅芳(1833-1902)二十二個勾股證明之一，除此之外還收錄於以下書籍：
   Edwards, George C.(1895). 《*Elements of Geometry*》(p.161). NewYork : Macmilla and co.
2. 心得：此證明屬於拼圖式的證明，任意直角三角形以三邊為邊分別作三個正方形，只要採正確的方法作輔助線切割，即可得到拼片來證明畢氏定理，這也是這類證明最精采的地方。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●	●	

4. 補充：華蘅芳簡介：
   華蘅芳(1833-1902)清末數學家，在《雙套句股》提供了二十二種精彩的勾股定理證明，其證明方式皆為圖形的割補；華蘅芳同時也為機械工程專家，與徐壽製成中國第一台蒸氣機，少年時酷愛數學，遍覽當時各種數學書籍，與李善蘭相善，在數學研究、科技著作、書籍翻譯都有出色的表現，使高等數學的基礎知識及方法得以進一步傳播，中國早期掌握和傳播近代科技的代表人物之一。

   另外在數學能力指標中，有這麼幾項：
   S-4-09：能理解三角形的全等定理，並應用於解題和推理。
   以及

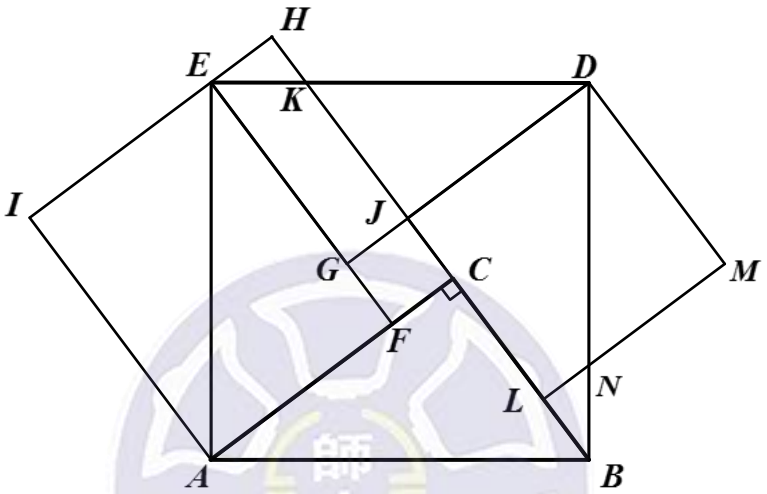
   N-3-22 及 S-3-06：能運用切割重組，理解三角形、平行四邊形與梯形的面積公式。

   此證明正是利用圖形的分割，以及三角形的全等來推理出畢氏定理關係式。

勾股定理證明-李善蘭

【作輔助圖】

1. 以直角三角形ΔABC的$\overline{AB}$為邊向內作正方形，得到正方形$ABDE$。
2. 並從E作$\overline{AC}$的垂直線，會交$\overline{AC}$於F；從D作$\overline{EF}$的垂直線，會交$\overline{EF}$於G。
3. 再以$\overline{AC}$為邊向外作正方形，可以得到正方形$ACHI$。其中$\overline{CH}$與$\overline{DG}$的交於J，而$\overline{CH}$與$\overline{BD}$的交於K。
4. 最後以$\overline{DJ}$為邊向外作正方形，可以得到正方形$DJLM$，其中$\overline{LM}$與$\overline{BD}$交於N。



可以從輔助圖中看到大正方形被這些輔助線切割成幾個拼片，可以拿來重新組合兩個小正方形，在證明完它們各個拼片的對應全等後，就可以從面積等式中推導得到畢氏定理。

1. 首先證明$\Delta ABC \cong \Delta EAF \cong \Delta DEG \cong \Delta BDJ \cong \Delta AEI$：
   其中我們先證明$\Delta ABC \cong \Delta EAF$，是因為
   $$\overline{AB} = \overline{AE} \ (\because \text{正方形的邊}),$$
   而且
   $$\begin{aligned}\angle CAB &= 90^\circ - \angle EAF \\ &= \angle AEF,\end{aligned}$$
   以及
   $$\angle ACB = 90^\circ = \angle EFA,$$
   所以可以推得
   $$\Delta ABC \cong \Delta EAF \ (\text{AAS 全等})；$$
   再看$\Delta DEG \cong \Delta EAF$：
   因為
   $$\overline{EA} = \overline{ED} \ (\because \text{正方形的邊}),$$
   而且

$$\angle AEF = 90^\circ - \angle DEG$$
$$= \angle EDG,$$

以及

$$\angle AFE = 90^\circ = \angle EGD,$$

所以可以推得

$$\Delta DEG \cong \Delta EAF \text{ (AAS 全等)；}$$

接著看 $\Delta DEG \cong \Delta BDJ$ ：

因為

$$\overline{ED} = \overline{DB} \ (\because \text{正方形的邊}),$$

而且

$$\angle EDG = 90^\circ - \angle BDJ$$
$$= \angle DBJ,$$

以及

$$\angle AFE = 90^\circ = \angle EGD,$$

所以可以推得

$$\Delta DEG \cong \Delta BDJ \text{ (AAS 全等)；}$$

還有 $\Delta ABC \cong \Delta AEI$ ：

因為

$$\overline{AB} = \overline{AE} \ (\because \text{正方形的邊}),$$

而且

$$\angle BAC = 90^\circ - \angle EAF$$
$$= \angle IAE,$$

以及

$$\angle ACB = 90^\circ = \angle AIE,$$

所以可以推得

$$\Delta ABC \cong \Delta AEI \text{ (AAS 全等).}$$

綜合以上我們就完成證明了

$$\Delta ABC \cong \Delta EAF \cong \Delta DEG \cong \Delta BDJ \cong \Delta AEI .$$

2. 不難發現 $\Delta DKJ \cong \Delta DNM$ ，以下給出證明：

因為

$$\overline{DJ} = \overline{DM} \ (\because \text{正方形的邊}),$$

而且

$$\angle KDJ = 90^\circ - \angle DJN$$
$$= \angle NDM,$$

以及

$$\angle KJD = 90^\circ = \angle DMN,$$

所以可以推得

$$\Delta DKJ \cong \Delta DNM \text{ (ASA 全等).}$$

3. 也可以發現$\Delta EKH \cong \Delta BNL$，同樣地我們給出證明：
因為

$$\begin{aligned}\overline{EK} &= \overline{DE} - \overline{DK} \\ &= \overline{DB} - \overline{DN} \ (\because \text{正方形的邊以及}\Delta DKJ \cong \Delta DNM) \\ &= \overline{BN},\end{aligned}$$

而且

$$\begin{aligned}\angle HKE &= \angle DKJ \ (\because \text{對頂角}) \\ &= \angle DNM \ (\because \Delta DKJ \cong \Delta DNM) \\ &= \angle LNB \ (\because \text{對頂角}),\end{aligned}$$

以及

$$\angle EHK = 90^\circ = \angle NLB,$$

所以可以推得

$$\Delta EKH \cong \Delta BNL \ \text{(AAS 全等)}.$$

4. 最後再利用拼圖式的面積關係式：

$$\begin{aligned}\square ABDE &= \Delta ABC + \Delta EAF + EGJK + \Delta KDJ + CFGJ + DJLN + \Delta BNL \\ &= \Delta AEI + \Delta EAF + EGJK + \Delta NDM + CFGJ + DJLN + \Delta EKH \\ &= (\Delta AEI + \Delta EAF + EGJK + CFGJ + \Delta EKH) + (DJLN + \Delta DNM) \\ &= \square ACHI + \square DMLJ\end{aligned}$$

這也就是畢氏定理關係式

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：此證明來自於清代著名數學家李善蘭(1810-1882)的證明。
2. 心得：此證明屬於拼圖式的證明，任意直角三角形三邊作三正方形只要採正確的方法作輔助線切割，即可得到拼片來證明畢氏定理，這也是這類證明最精采的地方。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●	●	

4. 補充：李善蘭簡介：

李善蘭(1810-1882)中國清代數學家，近代科學的先趨者。撰《四元解》、《麟德術解》、《弧矢啟秘》、《萬圓闡幽》及《對數探源》等，聲名大起。與英人偉烈亞力合譯《幾何原本》後九卷，完成明末徐光啟、利瑪竇未竟之業。又與偉烈亞力、艾約瑟等合譯《代微積拾級》、《重學》、《談天》等多種西方數學及自然科學書籍。李善蘭以《測圓海鏡》為基本教材，培養人才甚多。他學通古今，融中西數學於一堂。著有《則古昔齋算學》十三種二十四卷，其中對尖錐求積術的探討，已初具積分思想，於三角函數與對數的冪級數展開式、高階等差級數求和等題解的研究，皆卓然有得，達到中國傳統數學的很高水平。繼梅文鼎之後，成為清代數學史上的又一傑出代表。他一生翻譯西方科技書籍甚多，將近代科學最主要的幾門知識從天文學到植物細胞學的最新成果介紹傳入中國，對促進近代科學的發展作出卓越貢獻。

另外在數學能力指標中，有這麼幾項：

S-4-09：能理解三角形的全等定理，並應用於解題和推理。

以及

N-3-22 及 S-3-06：能運用切割重組，理解三角形、平行四邊形與梯形的面積公式。

此證明正是利用圖形的分割，以及三角形的全等來推理出畢氏定理關係式。

第四章　參考文獻

一、中文部份

左台益（ 2014 ）。 國民中學數課本（第三冊臺南一）。

林炎全、洪萬生黃俊瑋蘇鴻（譯）（ 2015 ）。畢氏定理四千年（原作者：E Eli Maor ）。台北市：三民書局。

洪有情（ 2014 ）。 國民中學數課本（第三冊臺北：康軒）

張幼賢（ 2014）。 國民中學數課本（第三冊臺南：翰林）

嚴喆民（1998）。寂寞的天才-達文西之謎。三民書局。

華蘅芳（1882）。算學筆談。

李俨（1928）。李善蘭年譜。清華學報。

王渝生（1990）。李善蘭研究。南京。江蘇教育出版。334-408。

二、英文部份

Loomis, Elisha Scott. (1968) The Pythagorean Proposition. Reston, Va. : National Council of Teachers of Mathematic.

John C. Sparks. (2008) The Pythagorean Theorem, Crown Jewel of Mathematics. U.S.

Gila Hanna. (1996) The Ongoing Value of Proof, Journal für Mathematik-Didaktik. 171-185. Toronto, Ontario, Canada.

三、網路資源

中國數學史上最先完成畢氏定理證明的家趙爽，科普博覽。取自 http://159.226.2.2:82/gate/big5/www.kepu.net.cn/gb/basic/szsx/3/3_24/3_24_1002.htm

洪明賢（ 2001 ），畢氏定理探源， HPM 通訊， 4(10) 。取自 http://math.ntnu.edu.tw/~horng/letter/vol4no10c.htm

洪萬生（ 2004 ），HPM 隨筆（三）: 2004 勾股定理的『非常』遐想，HPM 通訊 7(1) 取自 http://math.ntnu.edu.tw/~horng/letter/vol7no1a.htm

畢氏定理（商高）的介紹， 數學科習補帖 8。取自 http://www.kut.com.tw/upload/faq/%E5%AD%B8%E7%BF%92%E8%A3%9C%96%288%29_20061208.pdf

蘇俊鴻（ 2011 ），畢氏定理，《科學發展》459 ，12 -17 。取自

http://203.145.193.110/NSC_INDEX/Journal/EJ0001/10003/10003-02.pdf

蘇意雯（ 1999 ），畢氏定理淺談， HPM 通訊， 2(7) 。取自 http://math.ntnu.edu.tw/~horng/letter/vol2no7a.htm

Alexander Bogomolny(2006). Pythagorean Theorem and its many proofs, from http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/