# 第肆章　高一學生解一元二次不等式的主要錯誤類型及其原因

本章主要探討兩個重點，一為高一學生在正常的課堂教學後，對於一元二次不等式的解題上，有哪些主要的錯誤類型？二是這些主要的錯誤類型產生原因為何？

為了配合本章的研究目的與研究問題，本章以下列方式呈現：

第一節　學生在「一元二次不等式的解題測驗」的結果分析

第二節　學生在一元二次不等式的解題上，有哪些主要的錯誤類型及其錯誤產生的原因

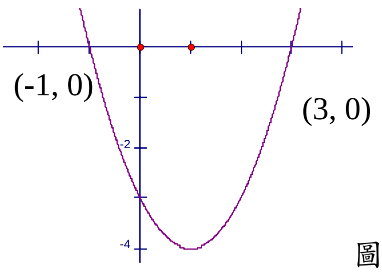
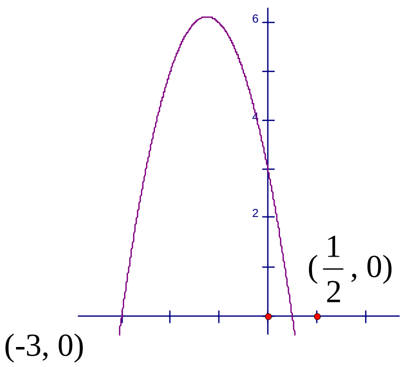
## 第一節「一元二次不等式解題測驗」的結果分析

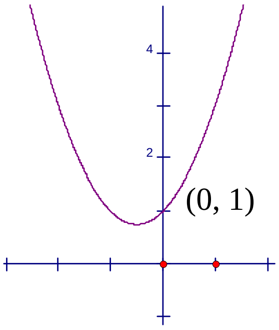
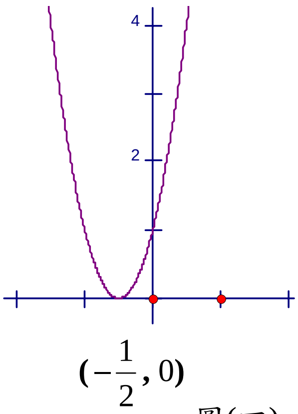
本研究在 92 學年上學期期末，利用研究者自編的「一元二次不等式的解題測驗」(附錄一)，對 118 位高一學生進行一元二次不等式單元的學習情形調查。學生的答題資料，按其答題情形整理、歸納、分析如下：

### 一、　各題的答對率及空白率

**【表 4-1-1】各題的答對率及空白率**

| 題目 | 答對率(%) | 空白率(%) |
|---|---|---|
| 一、1. 下列哪一個數為不等式 $3x^3-2x^2-5>x^2-4x+4$ 的解？ (A) －3 (B) －2　(C) －1 (D)　2 | 60.17 | 2.54 |
| 一、2. 若 $x=-2$ 為 $2x^2-3x+2\le 4x^2+3ax-4$ 之解，求 $a$ 之範圍為？ | 39.83 | 1.69 |
| 一、3. 投擲一骰子，骰子之點數為 $x$，$x$ 代表 1,2,3,4,5,6，若 $x$ 使 $x^2-2x+3>19$，則 $x$＝？ | 75.42 | 3.39 |

| 題　目 | 答對率(%) | 空白率(%) |
|---|---|---|
| 一、4. 若 $x$ 為實數、滿足 $x^2-4x-5<0$ 的 $x$ 有多少個解？ | 16.10 | 4.24 |
| 二、1. 解不等式 $\frac{1}{2}(2x-1)(3x+4)<0$ | 55.93 | 2.54 |
| 二、2. 解不等式 $x^2>6$ | 21.19 | 1.69 |
| 二、3. 解不等式 $-3x^2+5x\geq 0$ | 12.71 | 9.32 |
| 二、4. 解不等式 $x^2-2x-2>0$ | 44.07 | 6.78 |
| 二、5. 解不等式 $9x^2+6x+1>0$ | 20.34 | 1.69 |
| 二、6. 解不等式 $4x^2-4x+1\leq 0$ | 25.42 | 2.54 |
| 二、7. 解不等式 $x^2-2x+4<0$ | 10.17 | 9.32 |
| 二、8. 解不等式 $x^2+3x+4>2x^2+5x+1$ | 60.17 | 5.93 |
| 二、9. 解不等式 $\sqrt{3}x^2-x-\sqrt{3}>0$ | 14.41 | 39.83 |
| 二、10. 解不等式 $(2x-3)^2<9$ | 38.98 | 6.78 |
| 三、1. $y=ax^2+bx+c$ 的圖形為圖(一)，求不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解 $x$ 之範圍為？<br><br><br>圖(一) | 66.10 | 5.08 |
| 三、2. $y=ax^2+bx+c$ 的圖形為圖(二)，求不等式 $ax^2+bx+c\leq 0$ 的解 $x$ 之範圍為？<br><br><br>圖(二) | 11.86 | 15.25 |

| 題　目 | 答對率(%) | 空白率(%) |
|---|---|---|
| 三、3. $y=ax^2+bx+c$ 的圖形為圖(三)，求不等式<br>$ax^2+bx+c\le 0$ 的解 $x$ 之範圍為？<br><br><br>圖(三) | 52.54 | 26.27 |
| 三、4. $y=ax^2+bx+c$ 的圖形為圖(四)，求不等式<br>$ax^2+bx+c>0$ 的解 $x$ 之範圍為？<br><br><br>圖(四) | 50.84 | 22.87 |
| 四、1. 設 $ax^2+bx+1>0$ 之解為 $-\frac{1}{3}<x<\frac{1}{2}$，求 $a$、<br>$b$＝？ | 50.84 | 16.95 |
| 四、2. 設 $m$ 為實數，$f(x)=x^2-2mx+2m+3$，若對<br>所有實數 $x$，$f(x)>0$ 恆成立，求 $m$ 的範圍＝？ | 52.54 | 10.17 |
| 四、3. 設二次函數 $y=x^2-2mx+3m$ 的圖形在直線<br>$y=-2$ 上方，則 $m$ 之範圍＝？ | 6.78 | 16.10 |

由表 4-1-1 可以看出學生在「一元二次不等式的解題測驗」各題中的作答情形。大致上來說，學生的答對率普遍都不高，甚至有些題目的答對率不到 20%，顯示出學生在一元二次不等式的學習上確實存在相當大的問題。我們將分下列幾點對學生在「一元二次不等式的解題測驗」中答題情形作進一步的探討：

(一) 各類型題目表現如下：

1. 與不等式解相關的題目有 4 題：

一、1. 下列哪一個數為不等式$3x^3-2x^2-5>x^2-4x+4$的(A) －3 (B) －2 (C) －1 (D) 2

一、2. 若$x=-2$為$2x^2-3x+2\le 4x^2+3ax-4$之解，求 $a$ 之範圍為？

一、3. 投擲一骰子，骰子之點數為 $x$，$x$ 代表 1, 2, 3, 4, 5, 6，若 $x$ 使 $x^2-2x+3>19$，則 $x$＝？

一、4. 若 $x$ 為實數、滿足$x^2-4x-5<0$的 $x$ 有多少個解？

在這四題的答題中，其中一、1 與一、3 兩題答對率高於 60%，顯見大多數的學生都能明白「不等式的解的意義」。但是對於同樣是與不等式的解有關的問題，如一、2 與一、4 兩題，其答對率卻不是很理想，我們將在這一節的第二部分釐清其原因。

2. 完全平方型的題目有 4 題：

二、2. 解不等式 $x^2>6$

二、5. 解不等式 $9x^2+6x+1>0$

二、6. 解不等式$4x^2-4x+1\le 0$

二、10. 解不等式 $(2x-3)^2<9$

由表 4-1-1 可以發現完全平方型的一元二次不等式的答對率相較其它題目偏低，如：二、2.為 21.19%；二、5.為 20.34%；二、6.為 25.42%。顯示出學生對於解這類的問題確實存在許多困難。但是對於同樣是完全平方型的二、10.解不等式 $(2x-3)^2<9$這個題目，其答對率(38.98%)卻比上述幾個問題高出許多，詳細原因將在後面作進一步探討。

3. 與開口向下的拋物線有關的題目有 2 題：

二、3. 解不等式 $-3x^2+5x\ge 0$

三、2. $y=ax^2+bx+c$ 的圖形為圖(二) (如 p. 52)，求不等式 $ax^2+bx+c\le 0$的解 $x$ 之範圍為？

由表 4-1-1 可以發現學生對於與開口向下的拋物線有關的題目的答對率均低於 20%，顯見這類型的問題對學生而言，是屬於容易犯錯的題目。

4. 利用二次函數圖形找出一元二次不等式解的題目有 4 題：

三、1. $y = ax^2 + bx + c$ 的圖形為圖(一) (如 p. 52)，求不等式 $ax^2 + bx + c > 0$ 的解 $x$ 之範圍為？

三、2. $y = ax^2 + bx + c$ 的圖形為圖(二) (如 p. 52)，求不等式 $ax^2 + bx + c \leq 0$ 的解 $x$ 之範圍為？

三、3. $y = ax^2 + bx + c$ 的圖形為圖(三) (如 p. 53)，求不等式 $ax^2 + bx + c \leq 0$ 的解 $x$ 之範圍為？

三、4. $y = ax^2 + bx + c$ 的圖形為圖(四) (如 p. 53)，求不等式 $ax^2 + bx + c > 0$ 的解 $x$ 之範圍為？

雖然這四個題目類似，但是學生的答題結果卻不太一致：三、1 答對率(66.10%)最高，三、3(52.54%)及三、4(50.84%)其次，而三、2 答對率(11.86%)則為最低。觀察這四題的圖形，除了三、2 的圖形為開口向下的拋物線之外，其餘小題的圖形均為開口向上的拋物線。由此可見學生對開口向下的拋物線的解題有比較大的困難度。且觀察三、3 及三、4 的「有寫答對率」和「空白率」均相當高，似乎可看出學生對圖形與不等式聯結的學習呈現兩極化的情形。若「聯結正確」，學生可從圖形上直接看出一元二次不等式的解或利用題目所給的二次函數圖形來找出 $y = ax^2 + bx + c$ 的係數 $a$、$b$、$c$，再求出不等式的解，因此答對率高。相反的，若「聯結不正確」，則學生無從下手，所以空白率高。

5. 可因式分解的題目有 6 題：

二、1. 解不等式 $\frac{1}{2}(2x-1)(3x+4) < 0$

二、3. 解不等式 $-3x^2 + 5x \geq 0$

二、6. 解不等式 $4x^2 - 4x + 1 \leq 0$

二、5. 解不等式 $9x^2+6x+1>0$

二、8. 解不等式 $x^2+3x+4>2x^2+5x+1$

二、10.解不等式 $(2x-3)^2<9$

雖然這六個題目都可被因式分解，但是學生的答題結果卻不盡相同。二、1 和二、8 的答對率都高於 55%，其餘的答對率則偏低，究其原因是其它的題目是屬於完全平方型或 $x^2$ 項係數為負數的題型。

6. 與 $ax^2+bx+c$ 恆為正數或恆為負數的充要條件相關的題目有 2 題：

四、2. 設 $m$ 為實數，$f(x)=x^2-2mx+2m+3$，若對所有實數 $x$，$f(x)>0$ 恆成立，求 $m$ 的範圍＝？

四、3. 設二次函數 $y=x^2-2mx+3m$ 的圖形在直線 $y=-2$ 上方，則 $m$ 之範圍＝？

學生在這兩題的答對率有相當大的差距。四、2 小題答對的比率為 52%，但四、3 的答對率卻只有 6%。分析這兩個問題的解題方法，我們發現四、2 小題只需利用 $ax^2+bx+c$ 恆為正數的充要條件 $\begin{cases} a>o \\ b^2-4ac<0 \end{cases}$，就可以解題。而四、3 小題則必須先平移後，再利用 $ax^2+bx+c$ 恆為正數的充要條件 $\begin{cases} a>o \\ b^2-4ac<0 \end{cases}$ 才能處理。但檢視學生卷面的答題過程，發現有不少學生對於這二個題目，都採取同一作法。學生解題的想法的確值得我們在後面作更進一步的了解。

(二) 由表 4-1-1 得知係數具有根號的不等式：如「二、10 解不等式 $\sqrt{3}x^2-x-\sqrt{3}>0$」和判別式 $<0$ 的一元二次不等式如「二、7 解不等式 $x^2-2x+4<0$」其答對率均低於 20%，顯示這些問題似乎對學生來說是屬於困難度很高的題目。

(三) 出乎意料地，學生對於一些老師們普遍認為相當簡單的一元二次不等式，如有缺項的不等式(如：二、2. $x^2>6$；二、3. 解不等式 $-3x^2+5x\geq 0$)其答對率相當低，顯然學生在一元二次不等式的解題表現與老師們的認知有很大的

差距。

(四) 我們發現領導係數的正負值對學生的答對率有極大的影響。當解領導係數為正且可分解成兩相異因式的一元二次不等式，如：二、1.解不等式 $\frac{1}{2}(2x-1)(3x+4)<0$，答對率為 55.93%。然若解領導係數為負且可分解成兩相異因式的題目，如二、3.解不等式 $-3x^2+5x\geq 0$，其答對率相較於領導係數為正的題目大為降低，為 12.71%。至於二、8. 解不等式 $x^2+3x+4>2x^2+5x+1$，看似領導係數為負，其答對率卻相當高，為 60.17%。深究學生答題過程，發現學生偏向將此題化為 $2x^2+5x+1-x^2-3x-4<0$ 來處理，讓領導係數處於「正」的狀態，因此答對率明顯偏高。

## 二、 各題答題的錯誤類型及犯錯原因

本單元試圖統整、分析、歸納所有受試學生在「一元二次不等式的解題測驗」中每一題答題的情形，並找出其錯誤類型。且把五個人以上有相同的錯誤答案型態歸類於同一類型。若學生的回答內容與本研究有強烈相關者，即使該類型的學生未滿五人，也自成一類提出討論；而犯相同型式之錯誤人數若低於五人者，則歸納成「其他錯誤」的類型。

為求瞭解學生犯錯的確實原因，除了借助學生卷面的答題過程分析外，必要時並與具有代表性的學生進行面談。面談內容係針對學生在測驗中每一題的答題情況，透過晤談以了解學生在解題時的想法，並進一步分析學生犯錯的可能原因。

一.1 小題的錯誤類型：

| 題目 | 下列哪一個數為不等式 $3x^3-2x^2-5>x^2-4x+4$ 的解？<br>(A) －3 (B) －2 (C) －1 (D) 2 | 人 數 |
| --- | --- | --- |
| 錯誤類型 | 一、將 $3x^3-2x^2-5>x^2-4x+4$ 化簡成 $3x^3-3x^2+4x-9>0$ 後，無法解出。 | 18 |
| | 二、將 $x$ 值逐一代入不等式 $3x^3-2x^2-5>x^2-4x+4$ (或 $3x^3-3x^2+4x-9>0$)，運算過程計算錯誤，但答案正確。 | 12 |
| | 三、將 $x$ 值逐一代入不等式 $3x^3-2x^2-5>x^2-4x+4$ (或 $3x^3-3x^2+4x-9>0$)檢查是否滿足時，運算過程計算錯誤，因而答案出錯。 | 9 |
| | 四、其它錯誤的答案 | 5 |

錯誤類型原因之探討：

(1)類型一：(a)受到學習經驗中解不等式的影響，認為解不等式就是設法找出解的範圍。(b)不懂不等式解的意義。

<u>**(a)面談實例**</u>：

老師：妳這題怎麼會這樣解？

學生 B：我想移項後解出不等式，但是作不出來。

老師：你怎麼沒想到，把每一個 $x$ 值逐一代入不等式，檢驗是否滿足不等式？

學生 B：我只是想說，上課時不都是把不等式解出來嗎？……

<u>**(b)面談實例**</u>：

老師：妳這題怎麼化成 $3x^3-3x^2+4x-9>0$ 就沒了？

學生 A：不知道怎麼寫啊！

老師：你知不知道什麼叫作不等式的解？

學生 A：不曉得。

(2)類型二：運算不小心。

(3)類型三：運算不小心。

**一.** 2 小題的錯誤類型：

| 題目 | 若 $x=-2$ 為 $2x^2-3x+2\le 4x^2+3ax-4$ 之解，求 $a$ 之範圍為？ | 人數 |
|---|---|---|
| 錯誤類型 | 一、將 $x=-2$ 代入 $2x^2-3x+2\le 4x^2+3ax-4$，得 $16\le 12-6a$ 後，作不等式兩邊除以負數時，忽略不等式的符號必須變號，而得解 $a\ge -\frac{2}{3}$ 或 $-\frac{2}{3}\le a$，或者沒約分的 $a\ge -\frac{4}{6}$ 或 $-\frac{4}{6}\le a$。 | 18 |
| | 二、未將 $x$ 以 $-2$ 代入不等式，求得 $a$ 之範圍。 | 6 |
| | 三、將 $x=-2$ 代入 $2x^2-3x+2\le 4x^2+3ax-4$，得 $16\le 12-6a$ 後，只將答案化簡至 $6a+4\le 0$，未得最後的解。 | 5 |
| | 四、其他錯誤的答案。 | 40 |

錯誤類型原因之探討：

(1)類型一：(a)對不等式的除法運算不熟悉。

(b)認為解不等式和解方程式一樣，只是改個符號。

**<u>(a)面談實例</u>**：

老師：妳當初這題是怎樣算的。

學生 F：將 $-2$ 帶入不等式化簡就可以算出。

老師：那我們來看一下你計算的過程，$4\le -6a$ 怎麼變成 $-\frac{2}{3}\le a$。

學生 F：除以 $-6$。

老師：兩邊同除以 $-6$ 嗎？需不需要作什麼？

學生 F：啊！忘記變號了嗎？

老師：你知道作錯了嗎？不等式除以負數時，不等式兩邊要作什麼？

學生 F：小於要改成大於。

**<u>(b)面談實例：</u>**

老師：妳當初這個題目是怎樣做的？這個第二題。

學生 C：就把那個移項。

老師：什麼叫移項？

學生 C：就是 $x$ 平方一起，它們都是 $x$ 平方放在合併在一起，

| |
|---|
| 然後算出後 $x$ 等於 $-2$ 帶入，然後算出 $a$ 。<br>老師：好，那我問你 $-6a \geq 4$ 變成 $a \geq -\frac{2}{3}$ ，你怎麼變的？。<br>學生 C：嗯，就把它移項啊！<br>老師：OK 是不是把 $-6$ 除過去，對嗎？<br>學生 C：對啊，就把它想成等於。 |

(2)類型二：不懂不等式解的意義。

(3)類型三：解題不完全。

一.3 小題的錯誤類型：

| 題目 | 投擲一骰子，骰子之點數為 $x$，$x$ 代表 1、2、3、4、5、6，若 $x$ 使 $x^2-2x+3>19$ 則 $x$＝？ | 人 數 |
|---|---|---|
| 錯誤類型 | 一、直接解不等式 $x^2-2x+3>19$，未能解出或解題過程發生錯誤。 | 19 |
| | 二、將 $x$ 值以 1、2、3、4、5、6 分別代入不等式 $x^2-2x+3>19$ (或 $x^2-2x-16>0$ 或 $x(x-2)>16$)，計算錯誤。 | 5 |
| | 三、其他錯誤的答案。 | 2 |

錯誤類型原因之探討：：

(1)類型一：運算不小心或不會解一元二次不等式 $x^2-2x-16>0$ 。

(2)類型二：計算錯誤。

一.4 小題的錯誤類型：

| 題目 | 若 $x$ 為實數、滿足 $x^2-4x-5<0$ 的 $x$ <u>有多少個解</u>？ | 人 數 |
|---|---|---|
| 錯誤類型 | 一、將 $-1<x<5$ 中 $x$ 為實數的解，寫成 $x=0$、1、2、3、4 五個解。 | 51 |
| | 二、$\because b^2-4ac=(-4)^2-4\cdot1\cdot(-5)>0$ $\therefore$ 有 2 個解。 | 11 |
| | 三、答案只寫 $-1<x<5$ 。 | 9 |
| | 四、其他錯誤的答案。 | 23 |

錯誤類型原因之探討：

(1)類型一：對整數和實數的定義不清。

**面談實例**：

| |
|---|
| 老師：請問介於(-1)和 5 之間的實數有幾個？ |
| 學生 C：實數是不是小數也算？分數也算？ |
| 老師：對！連根號也算。 |
| 學生 C：無限多個。 |
| 老師：你那時這題過程怎麼寫 $-1<x<5$ ，所以 $x=0,1,2,3,4$ ？ |
| 學生 C：我以為是問幾個解，就是算整數。 |
| 老師： 所以你忽略 $x$ 為實數的條件？ |
| 學生 C：算是吧！ |

(2)類型二：將判斷一元二次方程式根的個數的方法錯誤類推至解一元二次不等式。

**面談實例**：

| |
|---|
| 老師：妳這題怎麼會寫兩個解？ |
| 學生 D：因為 $b^2-4ac>0$ 。 |
| 老師：就是一元二次方程式，當 $b^2-4ac>0$ 所以有兩根。 |
| 學生 D：沒錯，不是嗎？ |
| 老師：你認為這個題目問有幾個解，就可以用 $b^2-4ac$ 是否大於 0 來看嗎？ |
| 學生 D：好像吧！ |

(3)類型三：忽視條件導致解題不完全。

二. 1 小題的錯誤類型：

| 題目 | 解不等式$\frac{1}{2}(2x-1)(3x+4)<0$ | 人 數 |
|---|---|---|
| 錯誤類型 | 一、$x>\frac{1}{2}$或$x<-\frac{4}{3}$。 | 6 |
| | 二、其他錯誤的答案。 | 40 |

錯誤類型原因之探討：

(1)類型一：背錯一元二次不等式的求解公式，以為$\alpha,\beta$為實數且$\alpha<\beta$，則不等式$(x-\alpha)(x-\beta)<0$的解為$x>\beta$或$x<\alpha$。

**<u>面談實例</u>**：

老師：請問你第 1 題怎麼寫出$x>\frac{1}{2}$或$x<-\frac{4}{3}$這個答案？

學生 E：我想一下…就在那兩個根外面，所以$x>\frac{1}{2}$或$x<-\frac{4}{3}$。

老師：你先找出等於 0 兩個根嘛，然後為什麼會在這兩個根外面？

學生 E：憑印象，好像是這樣。

老師：那我如果把題目改成$\frac{1}{2}(2x-1)(3x+4)>0$，那答案為多少？

學生 E：嗯….. $-\frac{4}{3}<x<\frac{1}{2}$。

老師：你是靠記公式來算這些題目的吧！

學生 E：對。

二. 2 小題的錯誤類型：

| 題目 | 解不等式 $x^2>6$ | 人 數 |
|---|---|---|
| 錯誤類型 | 一、得 $x>\pm\sqrt{6}$ (或 $x>\sqrt{6}$ )。 | 50 |
| | 二、得 $x>3$ 或 $x<-3$ 。 | 8 |
| | 三、其他錯誤的答案。 | 33 |

錯誤類型原因之探討：

(1)類型一：(a)把解不等式當成解方程式一樣。

(b)使用“More A　More B”直覺法則，因為 $x^2>6$ 所以直覺地認為 $x>\sqrt{6}$ 。

**<u>(a)面談實例</u>**：

老師：來~我們看個題目好不好？就是那天，請你做的那個題目，我們看你那個 $x^2>6$ 是怎麼做的？………

學生 B：就是…我把它開根號，把那個平方拿掉。

老師：你就把它當成等式來解，只是改個符號而已吧？

學生 B：對！

**<u>(b)面談實例</u>**：

老師：嘿…請問，為什麼這一題的答案為 $x>\sqrt{6}$ ？

學生 G：嗯……就是 $x>\sqrt{6}$ 。

老師：那是不是表示 $x$ 只要比 $\sqrt{6}$ 大，帶進去都會滿足 $x^2>6$ ？

學生 G：對。

老師：負的不行嗎？平方大於 6 的數不是也可以有負數的嗎？比如 $-3$ 的平方是多少？

學生 G：對喔！

老師：那真正的答案為應該為多少？想一下！

學生 G：………好像 $x>\sqrt{6}$ 和 $x<-\sqrt{6}$ 。

老師：沒錯，你那時怎麼會寫 $x>\sqrt{6}$ ？

學生 G：那時候認為很簡單，就直接寫下去了。

(2)類型二：錯認$\sqrt{6}$=3

**面談實例**：

| |
|---|
| 老師：請問$x^2>6$，你答案怎麼會寫$x>3$或$x<-3$？ |
| 學生 L：嗯……那時候也不曉得為什麼把平方等於 6 認為它是 3。 |
| 老師：喔！你那時候認為$\sqrt{6}$=3，是不是？ |
| 學生 L ：對！ |

二.3 小題的錯誤類型：

| 題目 | 解不等式 $-3x^2+5x\geq 0$ | 人 數 |
|---|---|---|
| 錯誤類型 | 一、$-3x^2+5x\geq 0\Rightarrow x(-3x+5)\geq 0\Rightarrow x\geq\frac{5}{3}$ 或 $x\leq 0$ (or $x>\frac{5}{3}$ 或 $x<0$ )。 | 30 |
| | 二、濫用消去律。<br>例：$-3x^2+5x\geq 0\Rightarrow x(-3x+5)\geq 0\Rightarrow -3x+5\geq 0\Rightarrow x\leq\frac{5}{3}$ 。 | 11 |
| | 三、配成完全平方後，再開方。<br>例：$-3x^2+5x\geq 0\Rightarrow (x-\frac{5}{6})^2\leq\frac{25}{36}\Rightarrow x-\frac{5}{6}\leq\pm\frac{5}{6}$ 。 | 8 |
| | 四、其他錯誤的答案。 | 43 |

錯誤類型原因之探討：

(1)類型一：不當的記憶公式，認為若$ax^2+bx+c=0$兩根為實數$\alpha,\beta$，且$\alpha<\beta$，則不等式$ax^2+bx+c\geq 0$的解為$x\leq\alpha$ 或$x\geq\beta$。此錯誤就是將領導係數恆當成正數來處理。

**面談實例**：

| |
|---|
| 老師：………喔，你當初這一題$-3x^2+5x\geq 0$，你怎麼作的？你首先先做什麼工作？ |
| 學生 H：我那時就先分解。 |

老師：OK，很好，再來呢？

學生 H：然後，再來就是……嗯……就是像這樣子畫數線。

老師：OK，你是先做什麼工作，是先解等式兩根嗎？

學生 H：對呀！

老師：解完以後，這個為什麼會得到這個結果？

學生 H：為什麼會……嗯……

老師：是不是就是解出等式兩根以後，式子大或等於 0，所以它就在那兩數的外面？

學生 H：對啊！

老師：就是背解題規則嘛！是不是？ 對，如果小於 0....

學生 H：就是在那兩數範圍裡面嘛!

老師：那你怎麼會記得那個解題公式呢？

學生：老師上課有強調啊!

(2)類型二：對不等式的運算邏輯不清楚。

**<u>面談實例</u>**：

老師：請問 $-3x^2+5x\geq 0$ ，你怎麼解出 $x\leq\frac{5}{3}$ ？

學生 D：先分解成 $x(-3x+5)\geq 0$ ，然後，約去 $x$ 。

老師：你是指兩邊同除以 $x$ 嗎？你認為不等式可以這樣處理？

學生 D：對呀！

老師：再來呢？

學生 D：就解 $-3x+5\geq 0$ 就可以得到 $x\leq\frac{5}{3}$ 。

(3)類型三：錯把解不等式當成解方程式一樣。

**<u>面談實例</u>**：

老師：請問對於解不等式 $-3x^2+5x\geq 0$，當初妳是怎麼解的？

學生 B：就是把它配成 $(x-\frac{5}{6})^2\leq\frac{25}{36}$ ，嗯然後拿掉平方，得

$x-\frac{5}{6}\leq\pm\frac{5}{6}$ 。

| |
|---|
| 老師：你怎麼會想要把式子配成$(x-\frac{5}{6})^2 \le \frac{25}{36}$？<br>學生 B：從以前不都是這樣嗎？<br>老師：你是說國中解一元二次方程式時嗎？<br>學生 B：對！還有畫拋物線時不也是這樣？<br>老師：那妳認為解一元二次不等式和解一元二次方程式一樣嗎？<br>學生 B：好像差不多。<br>老師：沒差別嗎？<br>學生 B：感覺只是改個符號。<br>老師：還有你為什麼最後你答案會為$0 \le x \le \frac{5}{3}$，照你剛才式子應該不會得到$0 \le x \le \frac{5}{3}$？<br>學生 B：我剛剛那個式子就可得$x \le \frac{5}{3}$和$x \ge 0$了。<br>老師：$x-\frac{5}{6} \le \pm\frac{5}{6}$這句話就大有問題了。 |

二. 4 小題的錯誤類型：

| 題目 | 解不等式$x^2-2x-2>0$ | 人 數 |
|---|---|---|
| 錯誤類型 | 一、配成完全平方後，再開方。<br>例：$x^2-2x-2>0 \Rightarrow (x-1)^2>3 \Rightarrow (x-1)>\sqrt{3} \Rightarrow x>1+\sqrt{3}$。 | 18 |
| | 二、$x^2-2x-2>0 \Rightarrow x^2-2x-2=0$，<br>$x=1\pm\sqrt{3} \Rightarrow 1-\sqrt{3}<x<1+\sqrt{3}$。 | 7 |
| | 三、其他錯誤的答案。 | 33 |

錯誤類型原因之探討：

(1)類型一：把解不等式當成解方程式一樣。

**<u>面談實例</u>**：

| |
|---|
| 老師：那老師再請問你**二.** 4 解不等式$x^2-2x-2>0$，妳又是 |

| |
|---|
| 怎麼解的？<br>學生 B：跟剛才那一題一樣先配方。(參考 p.63 二. 3 類型三的面談實例)<br>老師：你的意思是說就跟剛才解不等式 $-3x^2+5x\geq 0$ 一樣？<br>學生 B：對！ |

(2)類型二：背錯一元二次不等式的求解公式，以為 $\alpha,\beta$ 為實數且 $\alpha<\beta$，則不等式 $(x-\alpha)(x-\beta)>0$ 的解為 $\alpha<x<\beta$。

**<u>面談實例</u>**：

| |
|---|
| 老師：再請教你第 4 題解不等式 $x^2-2x-2>0$，妳又是怎麼得 $1-\sqrt{3}<x<1+\sqrt{3}$？<br>學生 E：就一樣。(參考 p.60 二. 1 類型一的面談實例)<br>老師：跟上一題相同，不等式大於 0 的解就在等式的兩根內？<br>學生 E：印象中好像是這樣。 |

二. 5 小題的錯誤類型：

| 題目 | 解不等式 $9x^2+6x+1>0$ | 人 數 |
|---|---|---|
| 錯誤類型 | 一、得 $x>-\frac{1}{3}$。 | 51 |
| | 二、$x\in R$。 | 9 |
| | 三、其他錯誤的答案。 | 32 |

錯誤類型原因之探討：

(1)類型一：(a)錯把解不等式當成解方程式一樣。

(b)使用"More A　More B"直觀法則，認為 $(3x+1)^2>0$，所以直覺地認為 $3x+1>0\Rightarrow x>-\frac{1}{3}$。

**<u>(a)面談實例</u>**：

| |
|---|
| 老師：再請問不等式 $9x^2+6x+1>0$，當初你是怎麼解的？ |

學生 B：就是把它分解成$(3x+1)^2$，嗯然後$3x+1=0$，$x$等於$-\frac{1}{3}$，所以$x$大於$-\frac{1}{3}$。

老師：你就是把它當成$9x^2+6x+1=0$來解，最後再改符號大於吧？

學生 B：應該是吧！

**<u>(b)面談實例</u>**：

老師：ㄝ…請問，為什麼這一題會$(3x+1)(3x+1)>0$，則$x$大於$-\frac{1}{3}$？

學生 K：就是這樣子。喔，我再想一次嘛……

老師：我問妳$a^2>0$，$a$的解為多少？$a$一定大於 0 嗎？

學生 K：不一定，$a$不等於$0$啊！

老師：$(3x+1)^2>0$的解為多少？

學生 K：嗯…所以$3x+1$不等於$0$……$x$不等於$-\frac{1}{3}$。

老師：那妳時候怎麼會那樣寫？

學生 K：沒想到，直接就寫了。

老師：一看到題目沒有仔細考慮就寫了。

學生 K：對啊！

(2)類型二：粗心，未排除$3x+1\neq 0$的情形。認為平方一定大於 0，故$(3x+1)^2$大於 0，未考慮$3x+1=0$時的情況，以致於答案為$x\in R$。

二. 6 小題的錯誤類型：

| 題目 | 解不等式 $4x^2-4x+1\le 0$ | 人 數 |
| --- | --- | --- |
| 錯誤類型 | 一、得 $x\le\frac{1}{2}$（或 $x<\frac{1}{2}$）。 | 47 |
| | 二、答案為無解。 | 8 |
| | 三、其他錯誤的答案 | 30 |

錯誤類型原因之探討：

(1)類型一： (a)錯把解不等式當成解方程式一樣。

(b)使用“More A　More B”直觀法則造成，因為 $(2x-1)^2\le 0$，所以直覺地認為 $2x-1\le 0\Rightarrow x\le\frac{1}{2}$。

**<u>(a)面談實例</u>**：

老師：最後再問你一題，二. 6 解不等式 $4x^2-4x+1\le 0$ 你的作法還是跟剛剛兩題一樣？(參考 p.61 二. 2 類型一(a)的面談實例)

學生 B：對。

老師：還是把它分解後，再拿掉平方？

學生 B：是。

**<u>(b)面談實例</u>**：

老師：我們最後來看這一題 $4x^2-4x+1\le 0$，妳當初怎麼做的？

學生 K：ㄚ就剛那題一樣啊！ (參考 p.66 二. 5 類型一(b)的面談實例)

老師：跟上一題 $9x^2+6x+1>0$ 相同，一樣看到題目，沒考慮就直接寫答案了？

學生 K：嗯…對啊，就沒想…就寫啦！

老師：那現在你認為這一題答案為多少？

學生 K：是無解嗎？喔…所以應該 $2x-1$ 可以為 0，$\frac{1}{2}$，$x=\frac{1}{2}$，對不對？

老師：沒錯，好了，謝謝妳。

(2)類型二：認為平方一定大於 0，故 $(2x-1)^2$ 大於 0，且未考慮 $2x-1=0$ 也合乎要求，以致於答案為無解。

二. 7 小題的錯誤類型：

| 題目 | 解不等式 $x^2-2x+4<0$ | 人 數 |
|---|---|---|
| 錯誤類型 | 一、產生虛數比大小。例：$1-\sqrt{3}i<x<1+\sqrt{3}i$ 。 | 26 |
| | 二、因為產生虛數所以答案為無解。例：$x=\dfrac{2\pm\sqrt{-12}}{2}$ ，答案為無解。 | 16 |
| | 三、配成完全平方後，再開方。<br>例：$x^2-2x+4<0 \Rightarrow (x-1)^2+3<0 \Rightarrow x<1+\sqrt{3}i$ 。 | 11 |
| | 四、其他錯誤的答案。 | 42 |

錯誤類型原因之探討：

(1)類型一：不當的記憶公式，認為若 $ax^2+bx+c=0$ 兩根為 $\alpha,\beta$ ，則不等式 $ax^2+bx+c<0$ 的解為 $\alpha<x<\beta$ 。

<u>**面談實例**</u>：

老師：好，那我再問你，來，第七題你怎麼作的？

學生 H：嗯……就解那兩個根。

老師：先解出那兩個根嘛，然後為什麼它會寫在這兩個之間？

學生 H：為什麼會寫在………

老師：解出來兩個根顯然是 $\dfrac{2-2\sqrt{3}i}{2}$ 跟 $\dfrac{2+2\sqrt{3}i}{2}$ ，這兩個根是 $x^2-2x+4=0$ 的兩根嘛。

學生 H：對。

老師：然後呢？

學生 H：……是它們的範圍吧！

老師：什麼範圍？

學生 H：就是在兩數之間。

| |
|---|
| 老師：解出來以後，然後…為什麼答案為$1-\sqrt{3}i<x<1+\sqrt{3}i$，<br>是因為那個規則嗎？<br>學生 H：對啊！就公式嘛！ |

(2)類型二：受到國中時解一元二次方程式產生無解時的影響，將先前的知識對一元二次不等式作錯誤的類推。

**面談實例**：

| |
|---|
| 老師：請問你第七題$x^2-2x+4<0$，你當初怎麼解的？<br>學生 C：就是先用公式解，然後 $x$ 等於……，就是有 $i$，結果就沒辦法比大小。<br>老師：所以你只要是產生虛數，你就認為無解是嗎？<br>學生 C：對。 |

(3)類型三：錯把解不等式當成解方程式一樣。

二. 8 小題的錯誤類型：

| 題目 | 解不等式 $x^2+3x+4>2x^2+5x+1$ | 人 數 |
|---|---|---|
| 錯誤類型 | 一、變號處理錯誤，使答案寫成相反。<br>例：$x^2+3x+4>2x^2+5x+1\Rightarrow$<br>$x^2+2x-3>0\Rightarrow(x+3)(x-1)>0\Rightarrow$<br>$x^2+2x-3>0\Rightarrow x>1$ 或 $x<-3$。 | 9 |
| | 二、化簡不等式時計算出錯。<br>例：$x^2+3x+4>2x^2+5x+1\Rightarrow x^2-2x-3<0$。 | 8 |
| | 三、分解成二個一次式後，聯立求解時發生錯誤。<br>例：$x^2+3x+4>2x^2+5x+1\Rightarrow(x+3)(x-1)<0\Rightarrow$<br>$x<1$ 且 $x<-3\Rightarrow x<-3$。 | 5 |
| | 四、配成完全平方後，再開方。例：$x^2+3x+4>2x^2+5x+1\Rightarrow$<br>$x^2+2x-3<0\Rightarrow(x+1)^2<4\Rightarrow(x+1)<\pm2$ | 2 |
| | 五、其他錯誤的答案。 | 14 |

錯誤類型原因之探討：：

(1)類型一：對不等式的運算不清楚。

(2)類型二：運算不小心。

(3)類型三：錯以為 $ab<0$ 的條件為 $\begin{cases} a<0 \\ b<0 \end{cases}$，為不合邏輯的推理。

(4)類型四：錯把解不等式當成解方程式一樣。

二. 9 小題的錯誤類型：

| 題目 | 解不等式 $\sqrt{3}x^2-x-\sqrt{3}>0$ | 人 數 |
|---|---|---|
| 錯誤類型 | 一、將不等式兩邊平方後，得四次式，因而無法解題。<br>例：$\sqrt{3}x^2-x-\sqrt{3}>0 \Rightarrow 3x^4-x^2-3>0$ 。 | 17 |
| | 二、因為係數複雜，導致解一元二次方程式兩根時計算錯誤。 | 14 |
| | 三、其他錯誤的答案。 | 23 |

錯誤類型原因之探討：

(1)類型一：受到從前去根號必須平方的觀念影響，產生任意平方的錯誤。

**<u>面談實例</u>**：

老師：請問你第九題 $\sqrt{3}x^2-x-\sqrt{3}>0$ 你那時是怎麼解的？

學生 C：嗯……就是先給它平方。

老師：為什麼要平方？

學生 C：把根號去掉啊！去掉根號就得平方，不是嗎？

老師：但是 $(a-b-c)^2$ 會等於 $a^2-b^2-c^2$ 嗎？而且妳這樣作，不是把式子變成四次式，把式子變得更複雜嗎？知道錯了吧？

學生 C：應該吧！

(2)類型二：運算不小心。

二. 10 小題的錯誤類型：

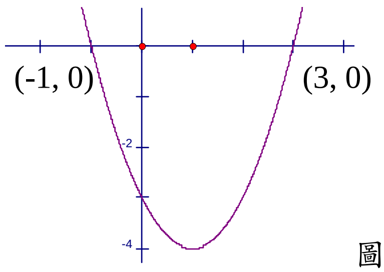
| 題目 | 解不等式 $(2x-3)^2<9$ | 人 數 |
| --- | --- | --- |
| 錯誤類型 | 一、兩邊開方。例：$(2x-3)^2<9\Rightarrow 2x-3<3\Rightarrow x<3$。 | 35 |
| | 二、$(2x-3)^2<9\Rightarrow 4x^2-12x<0\Rightarrow 4x(x-3)<0\Rightarrow x>3$ 或 $x<0$。 | 5 |
| | 三、其他錯誤的答案。 | 24 |

錯誤類型原因之探討：：

(1)類型一：錯把解不等式當成解方程式一樣。

(2)類型二：背錯一元二次不等式的求解公式，以為 $\alpha,\beta$ 為實數且 $\alpha<\beta$，則不等式 $(x-\alpha)(x-\beta)<0$ 的解為 $x>\beta$ 或 $x<\alpha$。

三. 1 小題的錯誤類型：

| 題目 | $y=ax^2+bx+c$ 的圖形為圖(一)，求不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解 $x$ 之範圍為？<br><br><br>圖(一) | 人 數 |
| --- | --- | --- |
| 錯誤類型 | 一、找出二次函數 $y=ax^2+bx+c$ 的係數 $a$、$b$、$c$，再求出不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解時，中間過程計算出錯。 | 22 |
| | 二、其他錯誤的答案。 | 12 |

錯誤類型原因之探討：

類型一：學生無法將 $ax^2+bx+c>0$ 轉化成 $y=ax^2+bx+c>0$，即未能將變數 $x$ 和一元二次不等式的值，對應成函數關係，因此無法由二次函數圖形中看出一元二次不等式的解。換句話說，學生無法將一元二次不等式和二次函數的圖形作正確聯結。

<u>**面談實例**</u>：

老師：來同學老師問你，妳當初這題是怎麼作的？

學生 G：嗯....我想要由圖形求出 $a$、$b$、$c$，然後再找出不等式的解，但是好像算錯了。

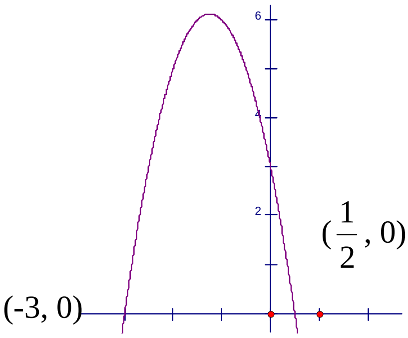
老師：那你怎麼不直接從圖形讀出不等式的解出來呢？

學生 G：可以嗎？我不懂せ！

老師：當然可以啊！不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解，事實上就是 $y=ax^2+bx+c$ 二次函數的圖形上，讓 $y$ 大於的那些 $x$ 值的範圍，你看從圖形上來看不就是 $x>3$ 和 $x<-1$ 的部分，你看很簡單吧！懂了嗎？

學生 G：好像有點模糊。

三.2 小題的錯誤類型：

<table>
<tr><td>題目</td><td>$y=ax^2+bx+c$ 的圖形為圖(二)，求不等式 $ax^2+bx+c\le 0$ 的解 $x$ 之範圍為？<br></td><td>人 數</td></tr>
<tr><td rowspan="3">錯誤類型</td><td>一、由圖形看出不等式的答案，且解與正確的答案恰好相反為 $-3\le x\le\frac{1}{2}$ $(-3<x<\frac{1}{2})$。</td><td>48</td></tr>
<tr><td>二、直接找出二次函數 $y=ax^2+bx+c$ 的係數 $a$、$b$、$c$，再求出不等式 $ax^2+bx+c\le 0$ 的解時，中間過程計算出錯。</td><td>23</td></tr>
<tr><td>三、其他錯誤的答案。</td><td>15</td></tr>
</table>

錯誤類型原因之探討：

(1)類型一：不當的記憶公式，認為若$ax^2+bx+c=0$兩根為實數$\alpha$、$\beta$，且$\alpha<\beta$，則不等式$ax^2+bx+c\le 0$的解$\alpha\le x\le\beta$。換句話說，將領導係數恆當成正數來處理。

**<u>面談實例</u>**：

老師：來同學老師問你，妳這題答案$-3\le x\le\frac{1}{2}$是怎麼來的？

學生 I：看圖的。

老師：那為什麼不寫$x\ge\frac{1}{2}$或$x\le -3$？

學生 I：因為要找$ax^2+bx+c\le 0$的解，所以在兩數裏面。

老師： 那如果要找$ax^2+bx+c\ge 0$的解，答案為何？

學生 I： 兩數外面就是$x\ge\frac{1}{2}$或$x\le -3$。

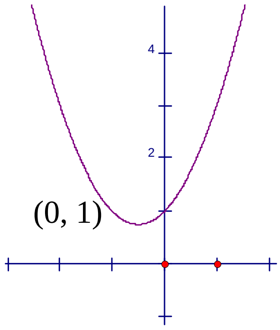
(2)類型二：學生無法將$ax^2+bx+c\le 0$轉化成$y=ax^2+bx+c\le 0$，即未能將變數$x$和一元二次不等式的值，對應成函數關係，因此無法由二次函數圖形中看出一元二次不等式的解。換句話說，學生無法將一元二次不等式和二次函數的圖形作正確聯結。

**<u>面談實例</u>**：

老師：啊……老師再問你，第二題是作法也跟第一題一樣？

學生 G：對呀。(參考 p.72 三. 1 類型一面談實例)

三. 3 小題的錯誤類型：

| 題目 | $y=ax^2+bx+c$ 的圖形為圖(三)，求不等式$ax^2+bx+c\le 0$的解 $x$ 之範圍為？<br> | 人 數 |
|---|---|---|
| 錯誤類型 | 一、找出二次函數 $y=ax^2+bx+c$ 的係數 $a$、$b$、$c$，再求出不等式$ax^2+bx+c\le 0$的解時，中間過程計算出錯。 | 12 |
| | 二、其他錯誤的答案。 | 13 |

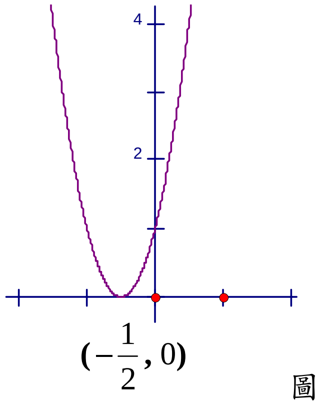
錯誤類型原因之探討：

(1)類型一：學生無法將$ax^2+bx+c\le 0$轉化成$y=ax^2+bx+c\le 0$，即未能將變數$x$和一元二次不等式的值，對應成函數關係，因此無法由二次函數圖形中看出一元二次不等式的解。換句話說，學生無法將一元二次不等式和二次函數的圖形作正確聯結。

**<u>面談實例</u>**：

> 老師：那最後再問一下，第三題跟第四題是不是也是相同作法？
>
> 學生 G：對。(參考 p.72 三、1 類型一的面談實例)

三. 4 小題的錯誤類型：

| 題目 | $y=ax^2+bx+c$ 的圖形為圖(四)，求不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解 $x$ 之範圍為？<br><br><br>圖(四) | 人數 |
|---|---|---|
| 錯誤類型 | 一、由圖形找出二次函數 $y=ax^2+bx+c$，再求出不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解時，中間過程計算出錯。 | 14 |
| | 二、解為 $x>-\frac{1}{2}$。 | 5 |
| | 三、其他錯誤的答案。 | 10 |

錯誤類型原因之探討：

(1)類型一：學生無法將 $ax^2+bx+c>0$ 轉化成 $y=ax^2+bx+c>0$，即未能將變數 $x$ 和一元二次不等式的值，對應成函數關係，因此無法由二次函數圖形中看出一元二次不等式的解。換句話說，學生無法將一元二次不等式和二次函數的圖形作正確聯結。

**面談實例**：

> 老師：那最後再問一下，第三題跟第四題是不是也是相同作法？
>
> 學生 G：對。(參考 p.72 三.1 類型一的面談實例)

(2)類型二：由圖形得不等式為 $(2x+1)^2>0$，再把解不等式當成解方程式一樣，得 $x>-\frac{1}{2}$。

四.1 小題的錯誤類型：

| 題目 | 設 $ax^2+bx+1>0$ 之解為 $-\frac{1}{3}<x<\frac{1}{2}$，求 $a$ 、$b$ ＝？ | 人 數 |
|---|---|---|
| 錯誤類型 | 一、$(x+\frac{1}{3})(x-\frac{1}{2})<0 \Rightarrow x^2-\frac{1}{6}x-\frac{1}{6}<0 \Rightarrow 6x^2-x-1<0 \Rightarrow a=6$，$b$＝－1。 | 12 |
| | 二、其他錯誤的答案。 | 26 |

錯誤類型原因之探討：：

類型一：未考慮不等式的符號應配合，以致所得答案 $a=6$，$b$＝－1 與正確答案($a$＝－6，$b=1$)的符號相反。

四.2 小題的錯誤類型：

| 題目 | 設 $m$ 為實數，$f(x)=x^2-2mx+2m+3$，若對所有實數 $x$，$f(x)>0$ 恆成立，求 $m$ 的範圍＝？ | 人 數 |
|---|---|---|
| 錯誤類型 | 一、將 $f(x)=ax^2+bx+c$ 恆大於 0 的條件當為 $\begin{cases} a>o \\ b^2-4ac>0 \end{cases}$，以致於答案出錯。 | 10 |
| | 二、其他錯誤的答案。 | 34 |

錯誤類型原因之探討：

(1)類型一：不知道用二次函數 $y=ax^2+bx+c$ 的圖形判斷出 $ax^2+bx+c$ 恆為正數或恆為負數的充要條件，只是利用中記憶公式及規則來解題。

**<u>面談實例</u>**：

| |
|---|
| 老師：我們來看一下，妳這一題是怎麼作的？ |
| 學生 I：就是 $(-2m)^2-4\cdot1\cdot(2m+3)>0$ 。 |
| 老師：為什麼是大於 0？ |
| 學生 I：因為 $f(x)>0$ 。 |
| 老師：老師從前是這樣教的嗎？ |
| 學生 I：印象中好像是這樣。 |

四.3 小題的錯誤類型：

<table>
<tr><td>題目</td><td>設二次函數 $y=x^2-2mx+3m$ 的圖形在直線 $y=-2$ 上方，則 $m$ 之範圍＝？</td><td>人 數</td></tr>
<tr><td rowspan="4">錯誤類型</td><td>一、以 $b^2-4ac<-2$ 列式來解，以致於答案出錯。</td><td>14</td></tr>
<tr><td>二、忽略「圖形在直線 $y=-2$ 上方」的條件，直接以二次函數 $y=x^2-2mx+3m$ 圖形在 $x$ 軸上方的情況來解，以致於答案出錯。</td><td>11</td></tr>
<tr><td>三、誤將 $f(x)=ax^2+bx+c$ 恆大於 0 的條件當為 $\begin{cases} a>o \\ b^2-4ac>0 \end{cases}$，以致於答案出錯。</td><td>9</td></tr>
<tr><td>四、其他錯誤的答案。</td><td>57</td></tr>
</table>

錯誤類型原因之探討：

(1)類型一：誤用條件解題。

(2)類型二：受先前類似題目的影響。

<u>**面談實例**</u>：

老師：麻煩一下，我們來看那時候妳這兩題是怎麼作的？先看四、2 那一題。

學生 J：嗯…… $f(x)>0$，所以 $\begin{cases} a>0 \\ b^2-4ac<0 \end{cases}$。

老師：四、3 那一題為什麼是列 $(2m)^2-4\cdot1\cdot3m<0$ 的式子？

學生 J：嗯………這種題目都是 $a>0$ 而且 $b^2-4ac<0$。

老師：圖形在直線 $y=-2$ 上方的條件不用考慮嗎？

學生 J：需要嗎？

老師：當然了！

學生 J：這我不懂了！

(3)類型三：不知道用二次函數 $y=ax^2+bx+c$ 的圖形判斷出 $ax^2+bx+c$ 恆為正數或恆為負數的充要條件，只是利用記憶中公式及規則來解題。

## 第二節 高一學生解一元二次不等式主要錯誤類型及其原

因分析

上一節我們分析了高一學生在「一元二次不等式的解題測驗」中全部 21 個小題的答題錯誤類型，經整理、歸納、統計後，發現學生在某些一元二次不等式題目上犯錯情形相當嚴重，或是某些題目的錯誤具有相同屬性，本文稱這些錯誤類型為「主要錯誤類型」。在此將討論這些主要的錯誤類型及其錯誤的產生原因，對於一些零星或者偶發性的錯誤將不多加著墨。由於錯誤類型與原因沒有必然的一對一關係，且錯誤原因常是錯綜複雜非單一原因所造成的，因此本研究將盡可能釐清學生錯誤原因之處，進而研擬出一套有效的補救教學措施。

## 一、高一學生解一元二次不等式的主要錯誤類型

(一) 任意開方

學生在下列一元二次不等式的試題有如下的表現：

1. 在試題二、2. 解不等式 $x^2 > 6$ 的解題中，總數 118 位學生有多達 50 位作答的答案為 $x > \pm\sqrt{6}$ 或是 $x > \sqrt{6}$
2. 在試題二、5. 解不等式 $9x^2 + 6x + 1 > 0$ 的解題中，也有 51 位學生的答案為 $(3x+1)^2 > 0 \Rightarrow 3x+1 > 0 \Rightarrow x > -\dfrac{1}{3}$
3. 在試題二、6. 解不等式 $4x^2 - 4x + 1 \le 0$ 的解題中，有 47 位學生的作答答案為 $(2x-1)^2 \le 0 \Rightarrow x \le \dfrac{1}{2}$ （或 $x < \dfrac{1}{2}$）
4. 在試題二、10. 解不等式 $(2x-3)^2 < 9$ 的解題中，有 35 位學生在其解題的過程曾寫出下列式子「$(2x-3)^2 < 9 \Rightarrow 2x-3 < 3$」或是「$(2x-3)^2 < 9 \Rightarrow 2x-3 < \pm 3$」
5. 在試題二、3. 解不等式 $-3x^2 + 5x \ge 0$ 的解題中，有 8 位學生其作答的過

程曾寫出下$-3x^2+5x\geq 0 \Rightarrow (x-\frac{5}{6})^2 \leq \frac{25}{36} \Rightarrow x-\frac{5}{6} \leq \frac{5}{6}$ (或$\pm\frac{5}{6}$)

$\Rightarrow x \leq 0$ (或$0 \leq x \leq \frac{5}{3}$)

6. 在試題二、4. 解不等式 $x^2-2x-2>0$的解題中，有 18 位學生其作答的答案為$x^2-2x-2>0 \Rightarrow (x-1)^2>3 \Rightarrow (x-1)>\sqrt{3}$ (或$x-1>\pm\sqrt{3}$)

   $\Rightarrow x>1+\sqrt{3}$ (或$x>1\pm\sqrt{3}$)

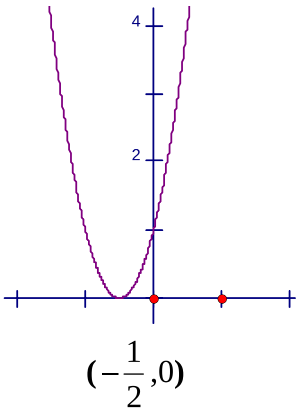
7. 在試題二、7. 解不等式 $x^2-2x+4<0$的解題中，有 11 位學生其作答的答案為$x^2-2x+4<0 \Rightarrow (x-1)^2+3<0 \Rightarrow x<1+\sqrt{3}i$

8. 在試題二、8. 解不等式 $x^2+3x+4>2x^2+5x+1$的解題中，有 2 位學生在作答的過程曾列出如下的式子$x^2+3x+4>2x^2+5x+1 \Rightarrow$

   $x^2+2x-3<0 \Rightarrow (x+1)^2<4 \Rightarrow (x+1)<\pm 2$

9. 三、4.「$y=ax^2+bx+c$的圖形為圖(四)，求不等式$ax^2+bx+c>0$的解$x$之範圍為？」在此題的解題中，有 5 位學生作答的情形為

   $(2x+1)^2>0 \Rightarrow x>-\frac{1}{2}$



圖(四)

分析學生在上面 9 個試題的解題過程，發現有相當多的學生解一元二次不等式時，常使用「任意開方」----未考慮不等式兩邊的正負，而任意將不等式兩邊開方，絲毫沒有考慮其是否合乎不等式運算邏輯，也因為這個「任意開方」的錯誤概念導致其解題發生錯誤。

從上節的錯誤類型分析及學生訪談中，我們發現這類錯誤有些是來自於學生的直覺反應，他們使用了「More A　More B」的直觀法則，認為只要 $a^2 > b^2$，$a$ 必大於 $b$ 或 $a^2 < b^2$，$a$ 必小於 $b$，因而產生錯誤。

此外許多學生在學習解一元一次不等式時，常有一種感覺就是解一元一次不等式如同解一元一次方程式一般，差別的只是將解方程式的等號換成不等式的不等號而已(如下表)，影響所及，就把不等式完全當成方程式來處理。因此有學生在解完全平方式型的一元二次不等式時，會受到解方程式的干擾，很直覺的把解一元二次不等式當成解一元二次方程式，因此造成任意開方的錯誤類型。

**【表 4-2-1】方程式與不等式的類推**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 方程式 | $3x = 6$ <br> $\Rightarrow x = 2$ | $5x = -8$ <br> $\Rightarrow x = -\frac{8}{5}$ | $7x = 9$ <br> $\Rightarrow x = \frac{9}{7}$ | $6x = -7$ <br> $\Rightarrow x = -\frac{7}{6}$ |
| 不等式 | $3x < 6$ <br> $\Rightarrow x < 2$ | $5x > -8$ <br> $\Rightarrow x > -\frac{8}{5}$ | $7x \geq 9$ <br> $\Rightarrow x \geq \frac{9}{7}$ | $6x \leq -7$ <br> $\Rightarrow x \leq -\frac{7}{6}$ |

(二) 變號處理錯誤

以下為學生的作答情形:

1. 在「一、2. 若 $x = -2$ 為 $2x^2 - 3x + 2 \leq 4x^2 + 3ax - 4$ 之解，求 $a$ 之範圍為？」的解題中，發現有 18 位學生有如下錯誤的列式：

   將 $x = -2$ 代入不等式 $2x^2 - 3x + 2 \leq 4x^2 + 3ax - 4$

   $\Rightarrow 8 + 6 + 2 \leq 16 - 6a - 4 \Rightarrow 4 \leq -6a \Rightarrow -\frac{2}{3} \leq a$

2. 在「二、8.解不等式 $x^2 + 3x + 4 > 2x^2 + 5x + 1$」的解題中，發現有 9 位學生有如下錯誤的列式：

   $x^2 + 3x + 4 > 2x^2 + 5x + 1 \Rightarrow x^2 + 2x - 3 > 0 \Rightarrow (x+3)(x-1) > 0$

   $\Rightarrow x^2 + 2x - 3 > 0 \Rightarrow x > 1$ 或 $x < -3$

從上面可以清楚地看出有些學生在不等式的乘除運算中，作不等式除以

或乘以負數的運算時，忽略了不等式的符號必須變號，也就是犯了「變號錯誤」。根據上節學生的錯誤答案及訪談中，得知「變號處理錯誤」的原因，有些來自於學生對不等式的運算不熟悉，更甚者是學生將先前的知識對一元二次不等式作「錯誤的類推」，認為解不等式和解方程式一樣，只是改個符號罷了，也因此造成變號處理錯誤。

(三) 任意平方

在二、9. 解不等式 $\sqrt{3}x^2 - x - \sqrt{3} > 0$ 的解題中，發現有 17 位學生作答的過程為 $\sqrt{3}x^2 - x - \sqrt{3} > 0 \Rightarrow 3x^4 - x^2 - 3 > 0$。顯然學生在此題的解題上受到係數 $\sqrt{3}$ 的影響，為了去除根號而將其平方，因而採取「任意平方」---未考慮是否合乎運算邏輯，而任意將不等式的每一項均平方，也因為這個錯誤概念導致其解題發生錯誤。

從第一節的討論中得知，學生在處理含有根號的不等式時，往往受到先前既有的觀念影響，亦即「要去除根號必須平方」。因此當學生在解不等式時碰到式子中有某一項具有根號時，常任意平方而不管如此的運算是否合乎邏輯，在式子中濫用「$a+b+c>0 \Leftrightarrow a^2+b^2+c^2>0$」。這也是起因於學生對不等式的運算邏輯不清楚，而且將先前平方的觀念對不等式作「錯誤的類推」。

(四) 產生虛數比大小的謬誤

在二、7. 解不等式 $x^2-2x+4<0$ 的解題中，有 26 位學生的答案為 $1-\sqrt{3}i < x < 1+\sqrt{3}i$。分析其解題過程，發現學生在解此一元二次不等式時，也把它當成解方程式來操作，先解 $x^2-2x+4=0$ 得兩根為 $x=1+\sqrt{3}i$ 或 $1-\sqrt{3}i$，然後得解為 $1-\sqrt{3}i < x < 1+\sqrt{3}i$。

從上可明顯地看出學生犯了「虛數比大小的謬誤」，且根據上節的錯誤類型分析及訪談中，發現這種錯誤的產生實因學生受到老師教學口訣、及不當記

憶公式的影響。

細究其原因，我們認為學生可能是因為不當利用教科書中所列的公式而產生錯誤。當談及解一元二次不等式時，有些版本的教科書會列出以下兩個公式：

(a) $\alpha,\beta$ 為實數且 $\alpha<\beta$，則不等式 $(x-\alpha)(x-\beta)<0$ 的解為 $\alpha<x<\beta$。

(b) $\alpha,\beta$ 為實數且 $\alpha<\beta$，則不等式 $(x-\alpha)(x-\beta)>0$ 的解為 $x>\beta$ 或 $x<\alpha$。

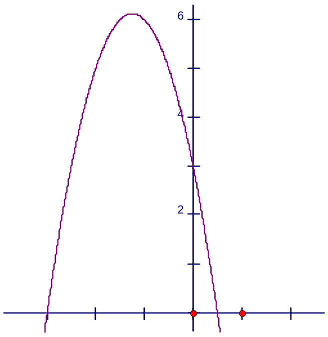
因此，許多學生就記憶上述兩個公式來解一元二次不等式。且根據研究者和辦公室裡的同仁討論得知，許多老師為了幫助學生記憶或增快其解題速度，往往會編製如下口訣：「解一元二次不等式時，就先解一元二次方程式，得一元二次方程式兩根後，小於 0 的不等式其解在兩根之間，大於 0 的不等式其解在兩根外。」但是，往往許多學生只記得公式或口訣，至於如何使用或在什麼情況可以用，什麼情況不能用，常常搞不清楚，造成解題錯誤。

(五) 將領導係數恆當成正數

以下為學生的作答情形:

1. 在二、3. 解不等式 $-3x^2+5x\geq 0$ 的解題中，有 30 位學生其作答的過程為 $-3x^2+5x\geq 0 \Rightarrow x(-3x+5)\geq 0 \Rightarrow x\geq\frac{5}{3} or\ x\leq 0$ 或 $x>\frac{5}{3} or\ \ x<0$，完全不考慮此時二次項的係數為負數。

2. 在三、2.「$y=ax^2+bx+c$ 的圖形為圖(二)，求不等式 $ax^2+bx+c\leq 0$ 的解 $x$ 之範圍為？」




(-3,0)　　$(\frac{1}{2},0)$

圖(二)

在此題的解題中，有高達 48 位學生，直接由圖形找出不等式的解，而將答案寫為 $-3 \le x \le \frac{1}{2}$ 或 $-3 < x < \frac{1}{2}$。這些學生似乎沒注意到此時不等式二次項係數為負數。從上可明顯地看出學生犯了「將領導係數恆當成正數」的錯誤，而這樣的錯誤類型往往起因於學生死背一元二次不等式的解題公式。

此錯誤類型雖與上述的「產生虛數比大小的謬誤」錯誤類型不同，但深究其原因發覺皆是受到老師教學口訣、及不當記憶公式的影響。這造成許多學生在解題時憑著公式或口訣胡亂作答，同時也產生了一些令老師們始料未及的錯誤。

(六) 過度使用「無解」的概念

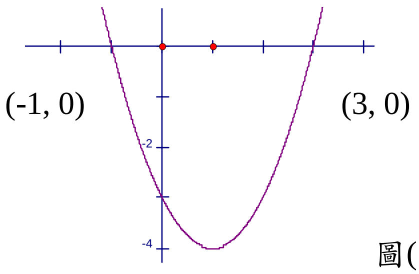
在二、7.解不等式 $x^2-2x+4<0$ 的解題中，發現有 16 位學生在作答的過程寫著：因為產生虛數，如 $x^2-2x+4<0 \Rightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{-12}}{2}$，所以答案為無解。顯然學生在解一元二次不等式時，常將其視為在國中時期解一元二次方程式一般，只要一元二次方程式的兩根為虛數時，即認為此一元二次不等式必為無解。

從上節學生的錯誤類型分析及訪談中，發現這種過度使用「無解」概念的錯誤類型，實因受到國中時解一元二次方程式產生無解時的影響。學生在國中時期對於一元二次方程式 $ax^2+bx+c=0$，曾建立如此的概念：當 $b^2-4ac<0$ 時，一元二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 無解。而學生在解一元二次不等式時又常當成一元二次方程式一般來處理，也造成將一元二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 無解的情況錯誤類推至解一元二次不等式。

(七) 不會由二次函數圖形直接看出一元二次不等式的解

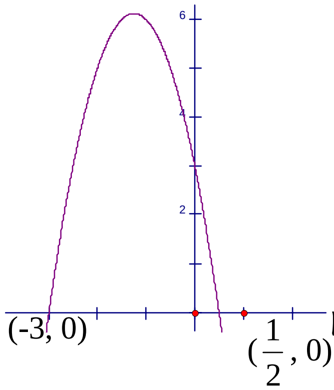
以下四題為與二次函數圖形密切相關的題目：

1. 三、1. 「$y=ax^2+bx+c$ 的圖形為圖(一)，求不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解 $x$ 之範圍為？」



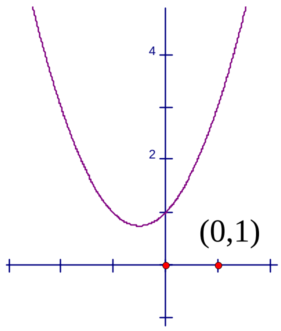

圖(一)

2. 三、2.「$y = ax^2 + bx + c$ 的圖形為圖(二)，求不等式 $ax^2 + bx + c \leq 0$ 的解 $x$ 之範圍為？」



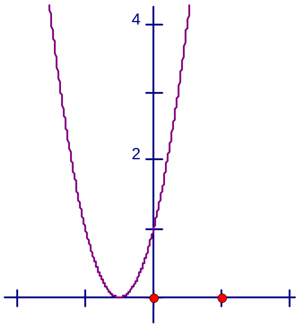

圖(二)

3. 三、3.「$y = ax^2 + bx + c$ 的圖形為圖(三)，求不等式 $ax^2 + bx + c \leq 0$ 的解 $x$ 之範圍為？」




圖(三)

4. 在三、4.「$y = ax^2 + bx + c$ 的圖形為圖(四)，求不等式 $ax^2 + bx + c > 0$ 的解 $x$ 之範圍為？」



圖(四)

$(-\frac{1}{2},0)$

以上 4 題是有關「給定二次函數圖形去找出一元二次不等式解」的試題，且是多數老師們認為屬於簡單且不需經過計算就可直接寫答案的問題。分析學生答錯的情形(如下表 4-2-2)，發覺學生面對這種問題，有些學生不知如何下手而空白，因此空白率不低。至於在作答的學生中，有相當多比例的學生仍習慣選擇以代數操作的方法來解題，試圖由二次函數圖形與 $x$ 軸交點，找出該二次函數 $y=ax^2+bx+c$ 的係數 $a$、$b$、$c$，然後再求出不等式的解，因計算過程複雜，導致答案容易出錯。此外，當二次函數圖形與 $x$ 軸無交點或僅有一交點時，學生將不容易求出 $y=ax^2+bx+c$ 的係數 $a$、$b$、$c$，面對這類型的問題也就顯得束手無策，這也是三、3. 及三、4.小題空白率特別高的原因。

歸納學生的犯錯主因在於許多學生無法由二次函數圖形看出一元二次不等式的解。學生不知道將 $ax^2+bx+c>0$ (或 $ax^2+bx+c\le 0$ )轉化成 $y=ax^2+bx+c>0$ (或 $y=ax^2+bx+c\le 0$ )來看，即無法將變數 $x$ 和一元二次不等式值，對應成函數關係，因此不能由二次函數圖形中看出一元二次不等式的解，即無法將一元二次不等式和二次函數的圖形作正確的聯結。

**【表 4-2-2】第三大題答題空白人數與代數法解題人數**

| 題目 | 空白人數 | 選擇從圖形上的點解題作答人數/選擇從圖形上的點解題答錯人數 |
|---|---|---|
| 三、1 | 6 | 47/22 |
| 三、2 | 18 | 26/23 |

| | | |
|---|---|---|
| 三、3 | 31 | 14/12 |
| 三、4 | 27 | 18/15 |

(八) 不知$ax^2+bx+c$恆為正數或恆為負數的充要條件

學生在第四大題第 2、第 3 個小題的作答情形如下：

1. 四、2.「設 $m$ 為實數，$f(x)=x^2-2mx+2m+3$，若對所有實數 $x$，$f(x)>0$ 恆成立，求 $m$ 的範圍＝？」

完全空白者有 12 位。此外，有 10 位學生誤以為 $f(x)=ax^2+bx+c$ 恆大於 0 的條件為$\begin{cases} a>o \\ b^2-4ac>0 \end{cases}$，而得錯誤答案：

$\begin{cases} a>o \\ b^2-4ac>0 \end{cases} \Rightarrow (-2m)^2-4\cdot1\cdot(2m+3)>0 \Rightarrow m>3$ 或 $m<-1$。

2. 在四、3.「設二次函數 $y=x^2-2mx+3m$ 的圖形在直線 $y=-2$ 上方，則 m 之範圍＝？」的解題中完全空白者有 19 位，錯誤類型主要有三種：

(1) 有 14 位同學以$\begin{cases} a>0 \\ b^2-4ac<-2 \end{cases}$為條件列式，而得錯誤答案：

$$\begin{cases} a>0 \\ b^2-4ac<-2 \end{cases} \Rightarrow (2m)^2-4\cdot1\cdot3m<-2 \Rightarrow \frac{3-\sqrt{7}}{2}<m<\frac{3+\sqrt{7}}{2}$$ 。

(2) 有 11 位同學忽略「圖形在直線 $y=-2$ 上方」的條件，直接以二次函數 $y=x^2-2mx+3m$ 圖形在 $x$ 軸上方的情況來解，而得錯誤答案：

$$\begin{cases} a>0 \\ b^2-4ac<0 \end{cases} \Rightarrow (2m)^2-4\cdot1\cdot3m<0 \Rightarrow 0<m<3$$

(3) 有 9 位學生誤以為 $f(x)=ax^2+bx+c$ 恆大於 0 的條件為

$\begin{cases} a>o \\ b^2-4ac>0 \end{cases}$，而得錯誤答案：

$$x^2-2mx+3m>-2 \Rightarrow x^2-2mx+(3m+2)>0 \Rightarrow \begin{cases} a>o \\ b^2-4ac>0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$(-2m)^2-4(3m+2)>0 \Rightarrow m>\frac{3+\sqrt{17}}{2} \text{ 或 } m<\frac{3-\sqrt{17}}{2}$$

綜合學生在上面 2 題有關 $f(x)=ax^2+bx+c$ 恆大於 0 的題目，顯見許多學生不會判斷$ax^2+bx+c$恆為正數的條件為何。而錯誤的產生原因，在於他

們不知道用二次函數 $y=ax^2+bx+c$ 的圖形來判斷二次式 $ax^2+bx+c$ 恆為正數或恆為負數的充要條件，無法將一元二次不等式和二次函數的圖形作正確的聯結只是記憶公式及規則來解題或隨意湊個算式了事，而沒有理解其所學的教材背後所隱藏的概念。

(九) 認為不等式的解只包含整數的情形

在一、4.「若 $x$ 為實數、滿足 $x^2-4x-5<0$ 的 $x$ 有多少個解？」的解題中，有 51 位學生其作答的答案為 $-1<x<5$，$x=0$、1、2、3、4 五個解。由學生答題的過程中，發現大多數的學生都能求出不等式 $x^2-4x-5<0$ 的解為 $-1<x<5$，卻認為介於 $-1<x<5$ 的實數只有 $x=0$、1、2、3、4 五個整數，深究原因得知學生先備知識缺乏以致於對於實數和整數的定義混淆不清，所以當題目問「滿足該不等式時的 $x$，有多少個解？」時就有取整數的趨向，總認為答案必為有限個，常以 $x$ 為整數作答。

## 二、一元二次不等式主要錯誤類型的產生原因

綜上所述，學生在各主要錯誤類型其產生的原因可歸納為下面幾點：

(一) 將先前學習過的知識作錯誤的類推

學生的學習會受到以前的學習經驗所影響，常將以前學過的規則使用在新的情境中，如果以前學過的材料與現在的學習內容原則、條件和限制不相同時，便會發生錯誤。本研究發現學生在解一元二次不等式時即常出現如此的情形，因此詳細的情形說明如下：

1. 認為解不等式和解方程式一樣，只是改個符號並沒多大差別。學生把解一元二次不等式當成一元二次方程式來操作，特別是遇到完全平方型的一元二次不等式求解時，常先求一元二次方程式的兩根，最後在把等號改成不等號就得到一元二次不等式的解，也就產生「任意開方」、「變號處理錯誤」等錯誤。

2. 將「解一元二次方程式$ax^2+bx+c=0$，當$b^2-4ac<0$時，產生虛根，則方程式無解」的概念類推到一元二次不等式。認為只要$b^2-4ac<0$時$ax^2+bx+c=0$產生虛根，此時對應的一元二次不等式$ax^2+bx+c<0$(或$ax^2+bx+c>0$或$ax^2+bx+c\le 0$或$ax^2+bx+c\ge 0$)也為無解。因而產生「過度使用無解概念」的錯誤。

3. 受到「去除根號必須平方」觀念的影響。我們發現學生在解係數具有根號的一元二次不等式時，常將舊經驗---「去除根號必須平方」不當類推此型式的不等式，而產生「任意平方」的錯誤。如先前例子：

$\sqrt{3}x^2-x-\sqrt{3}>0 \Rightarrow 3x^4-x^2-3>0$，因任意平方造成運算上的錯誤。

(二) 受到老師教學口訣、教材編排、不當記憶公式的影響

此研究中，我們發現學生最常使用解題策略是採用記憶規則及公式來求解一元二次不等式，而非理解其解題的原理。究其原因除了學生個人的因素外，最主要可能來自於老師不當的教學或教材編排，教師為了幫助學生學習，讓學生解題更快速、記得更久，於課堂上編製教學口訣或是在教材上編排呈現公式讓學生記憶及背頌，結果反而適得其反，造成學生「虛數比大小」與「將領導係數當成正數」等錯誤。

(三) 先備知識的不足

從前面的研究中，我們發現學生許多錯誤的產生來自於其先備知識的不足所產生的。例如，不懂實數和整數的定義上的區別，以致於當解出一不等式解的範圍後，若題目問滿足該不等式且$x$為實數的解有多少個時，則因為對於「實數」與「整數」的意義混淆不清，而產生錯誤。

(四) 無法將一元二次不等式和二次函數的圖形作正確的聯結

從學生主要錯誤類型的探討中，我們發現學生對於「給二次函數的圖形求一元二次不等式解的問題」及有關「二次式恆為正數或恆為負數的充要

條件」的問題錯誤情形相當嚴重。同時從學生答題過程中發現，錯誤的原因來自於他們習慣於使用代數的方法來解一元二次不等式，而非使用解題成功率高的「圖解法」來處理，以致學生常未能將一元二次不等式和二次函數的圖形作正確的聯結。再細分其原因，有下列 3 點：

1. 學生無法由 $ax^2+bx+c<0$ (或 $ax^2+bx+c>0$ 或 $ax^2+bx+c\le 0$ 或 $ax^2+bx+c\ge 0$)，將其轉化成 $y=ax^2+bx+c<0$ (或 $y=ax^2+bx+c>0$ 或 $y=ax^2+bx+c\le 0$ 或 $y=ax^2+bx+c\ge 0$)來看，即無法將變數 $x$ 和一元二次不等式值，對應成函數關係，因此無法由二次函數圖形中看出一元二次不等式的解。
2. 不懂二次函數的圖形上點坐標的意義，因此無法由二次函數圖形中看出一元二次不等式的解。
3. 不知道二次函數 $y=ax^2+bx+c$ 的圖形恆在 $x$ 上方的條件，進而利用此條件判斷出 $ax^2+bx+c$ 恆為正數或恆為負數的充要條件。

(五) 對不等式的運算邏輯不清楚

從學生的答題的過程及事後訪談中，可以發現許多學生的錯誤，是由於學生對於不等式的運算法則不熟悉所造成。例如：任意開方、任意平方、變號處理錯誤，也就是因為不清楚不等式的運算法則和等式的運算法則之間的差異，造成其在一元二次不等式解題上的錯誤。

(六) 受到直觀的影響

從前一節學生主要錯誤類型的分析和討論中，我們發現許多學生對於一元二次不等式，特別是可分解成完全平方型的一元二次不等式，其解題時的錯誤是來自於未經思考或反省的推理歷程而直接對該式子作立即而直接的判斷所產生的錯誤，這種錯誤我們稱為「直觀的錯誤」。

Stavy & Tirosh (1999)曾提出的三大直觀法則(intuitive rules) ：“More A—More B”，“Same A—Same B”，及 “Everything can be divided”。此三大法則中的“More A—More B”，我們發現能有效並合理的解釋一些學生對可

分解完全平方型的一元二次不等式所犯的「任意開方」錯誤。當學生遇到不等式$a^2 > b^2$ 時，內心就啟動 “More A—More B”的直觀法則，此時的 A 代表平方以後的數，B 代表著底數，當學生看到平方以後的數比較大時，便直觀地認為其底數也必定比較大。例如，學生在解不等式$x^2 > 6$時，學生看到$x^2 > 6 = (\sqrt{6})^2$，因為平方以後比$x^2$比$(\sqrt{6})^2$大，馬上就直觀地認為底數$x$比$\sqrt{6}$大，也就因為學生未經仔細思考便直觀地寫下如此答案，因而犯了任意開方的錯誤。