第四章 結果與討論

第一節　幾何證明閱讀理解的面向

為了對於幾何證明閱讀理解面向有更完整且深入的探討，本研究透過訪談數學家和中學數學教師，探討關於語文研究和幾何論證認知研究的文獻，以及參考數學史的發展，最後形成六個幾何證明閱讀理解的面向。這六個面向包括表層理解、邏輯定位理解、摘要統整理解、一般性理解、推廣應用理解和賞析理解。

一、數學專家關於讀數學證明的觀點與看法

為了探究幾何證明閱讀理解的面向，先訪談數學家和數學教師關於讀數學證明的觀點和看法，讓研究者初探此現象的樣貌，包括數學家讀不同來源的證明文本時所思考的面向，其中不同來源的文本包含**自己正在運作的論文、書本的證明、和待審查的論文**。訪談後發現，數學家所思考的面向可以歸納成**命題與證明的瞭解、命題與證明的聯結與應用、其他延伸的問題**等三種。數學教師主要以數學證明的教學來思考讀證明的面向，發現數學教師所思考的面向可以歸納成**概念、引用的性質和關鍵想法**。另外，數學家和數學教師也提及關於研究生或中學生讀數學證明的困難，以及讀數學證明與建構數學證明之間的關係。

(一) 數學證明的三種來源

數學家所讀的數學證明可區分為自己正在運作的論文、書本的證明和待審查的論文，數學專家讀不同來源的文本所採用的目的與策略

也有所不同，綜合五位數學家(研究代數的兩位、研究分析的一位、研究幾何的一位、研究統計的一位)的訪談資料，來分析「閱讀」在這三種不同來源中所扮演的角色。

1. 讀自己正在運作的論文

在進行閱讀自己創作的論文之前，是猜測和想證明的過程，是處於跳躍、多頭(挾擠)、分岐的思維狀態，想一想後再寫一點。一開始是寫給自己看的，寫出來的結果就發表而言有些部分過於精簡有些部分又過於繁瑣。最後寫成投稿的論文時，和以往文獻中不同思維的主要想法必須說明清楚。為了避免失焦所以繁瑣的計算過程有些省略或是放到附錄。在發表之前，除了檢驗推導的邏輯性，也必需再想想相關的問題，以免自己的新想法功虧一饋。

由此看來，數學家做證明的過程可大致切割成**臆測構思、寫給自己看、寫給其他專家**看三個步驟。寫給自己看的目的，主要是減少認知負荷。寫給其他專家看的證明，則注重思維主軸的重要性和結構性。閱讀在寫給自己看和寫給其他專家看的兩個步驟中，則分別扮演不同的角色。**當閱讀寫給自己看的證明時，則是一邊檢驗自己所想的，一邊延伸相關的研究問題或證明方法。當閱讀寫給其他專家看的證明時，則是一邊檢驗是否符合演繹規則，一邊判斷是否該刪還是該增些什麼，**而刪增的原則以突顯重要性和結構性為主，並非有益於讀者的閱讀理解。

> “*讀自己論文時，**首先就是你希望自己做出來的東西一定是對的**，而且不只是如此，比如說你證明了 A，也許這麼一下子就可以證明到 B，那你當時也許累了，停下來了，我們會跟學生講你做任何東西有時候是不能停下來的，就*

好像你爬山爬到半山腰，你不能停下來一樣，你停下來是很虧的事情，也許你離一個東西已經很近了，但你停下來，別人看了你的東西，一下子就超過你了。你看你自己東西時候，要從這些點徹底的全盤的去了解掌握。”

“你如果作出一些東西，你要把他寫出來時，你有的時候會故作文章，你要把他寫成最廣，因為你希望涵蓋範圍越廣，所以你有時候會寫的比較抽象，常常有很多定理你想出來跟你寫出來完全不一樣，因為從某個角度來講，你寫出來目的是證明你做了這件事，沒有人能質疑，所以只要你對了，其實別人讀得懂讀不懂並沒有那麼大關係。”

“你做這樣的事情，你並不是那麼會為讀者著想，而且讀者你也很難定位你的讀者在哪裡，因為不同的人背景不一樣，尤其是學術論文的時候，其實你不定位你的讀者，只要你做出東西，是有價值的東西，你就選一個方式把他呈現出來，最主要就是沒有錯，然後其實讀者有時候常常要廢很大的功夫才能看清楚，但你管不了這麼多這事情。這證明本來就是這樣一回事。”

2. 讀書本的證明

當讀書本的證明時，有些數學家會先想想這個定理怎麼證，大致想過後再讀書本的證明；有些數學家會先想想這個定理怎麼用，直觀的解釋是什麼，覺得有必要時再讀證明。而判斷「有必要」的標準也因人而異，有的認為如果知道定理怎麼用了，就沒必要看證明過程

了；也有的認為**對定理有感覺了**，應該比較容易賞析證明的過程，評論此證明過程是為了證明的證明，還是有助於瞭解定理的證明。有些進階專書寫的證明，常常是以顯然、同某某證明、引用什麼定理可得等字眼帶過複雜的檢驗、計算或細部的推導，如果想要仔細**探討這種子證明過程**，其實不見得是一件輕鬆的工作。有時真的一籌莫展，那麼只好再看看其他相關書籍，利用**讀不同版本的證明來刺激自己的思考**。

> “*我比較感興趣這個定理怎麼用，很少先自己想可以怎麼證，除非是那種一看就知道怎麼證的。*”

> “*通常會先想一想可以怎麼證，再看看書上怎麼寫。*”

> “*先自己想怎麼證再看別人的，可能看到不同的點，也可能產生新的問題。不然，我是看了，沒有自己想過不知道好壞。*”

3. 讀待審查的論文

當審查論文時，**先看看問題是否有價值**，所謂的價值可能是來自數學結構之美或是實際的應用性，**再看看解決問題或證明的想法是否創新或技巧性高**。當然價值除了來自於專業主觀的判斷，而且有時候也會考慮到人際因素，如果投稿者名氣顯赫論文品質應該不差，假設投稿者是後起之秀應該給他一些信心或機會，有時投稿者是熟識的好朋友盡量不要拒絕。在進入審查內容時，先做些**初步的合理判斷**，例如：造幾個例子試試看，用過去的經驗評估結果是否好得太離譜，證

明所使用的工具強度夠不夠等等。有的數學家不太檢查細部的推導過程，有的認為減少論文的錯誤也是審查者的義務。最後給審查意見時，可能**提出一些相關的問題、針對證明的改善，或是建議進一步閱讀比較相關文獻的結果**。

“評看看這個定理對或錯是否有重大的影響。…對其他問題的發展有貢獻，或是一種有思考的技巧，是可以拿來活用的技巧。”

“我不太願意花功夫幫作者找錯。”

“…證明沒有目的的繞了一圈，就需要修改；…如果要讓證明漂亮，也要留點想像空間，是正確的想像空間。”

“審查者有責任避免 Journal 出現錯誤的論文。”

(二) 數學家讀數學證明時的思考面向

數學家讀證明時會思考哪些問題呢？除了最基本的瞭解，他們習慣聯結過去所知的，為了就是達到更進階的目標：應用和推廣。以下就**命題與證明內容的瞭解、聯結應用和推廣延伸**三個面向分別描述數學家讀證明的目標或讀證明所思考的問題：

1. 命題與證明的瞭解

閱讀命題時，首先釐清的是現在的資源和目標分別是什麼，也就是定理的已知和求證是什麼。至於閱讀證明過程時，**不要忘記隨時注意證明過程的主要輪廓**：已知什麼、要證什麼、用了什麼定理，尤其是一些複雜的大定理，為了證明可以滿足應用某定理所需的條件就要

花費不少篇幅。看細節推導時，小心釐清每個符號所表達的意義；不是運用直觀就可理解的計算或推論，也要試著證證看。如果真的導不出來的時候，除了再找其他的參考資料，可能需要轉換思考目標並心存懷疑是不是書上寫錯了，不然容易走到死胡同裡。看完後的再回頭想想或是和以前的經驗作比較，思考主要的證明方式或技巧有何異同等等，都可以幫助腦袋執行建檔歸類的動作。

> *”有些書為了之後的證明會先寫一些引理，有時候先看這些引理會不太清楚整個證明的核心問題，所以**先把主要的定理抓出來應該是比較容易瞭解的策略。**”*

> *”書上有 misprint 是很麻煩的，搞了老半天，才發現不是我想錯，是書上漏掉(某個條件)或寫錯了。”*

> *“你讀證明並不是一個人教你證明，因為一個人教你證明，除了有正確答案之外，他嘴巴作解釋他寫這個證明的心路歷程。可是**你讀所以你聽不到等於是無聲證明**，所以你必須從字裡行間去串聯出合理的解釋，其實你也在揣摩寫者的意思，因為他沒有開口講，所以**去揣摩他腦袋是傳達給我什麼事情**，當我完全跟他 MATCH 時，我才有辦法懂，可是有時候我跟他完全 MATCH，可是(如果)這裡是特殊技巧我沒有學過的，我可能還是不懂嘛！”*

2. 聯結應用

當讀完已知定理的證明過程後，應該試著把**證明的骨幹抓出來，也可作為洞察缺點的依據**，例如：如何修改命題或證明的累贅部分、

如何平衡證明過程的可讀性與結構性。一方面思考定理或證明方法的**改善**，另一方面也可思考定理或證明方法的**應用**。在聯結的部分，可思考**不同定理間的關聯性**，或是**不同證明方法的共通性**，藉由相連的認知網絡加深對數學瞭解。如果對定理"產生感覺"，那可靈活應用的範圍更不在話下；而**證明方法的特殊化與一般化，也是應用到其他證明的主要關鍵**。

"首先你當然是先建構跟自己過去知識的聯繫，那 suppose 一個文章他總是有一個新的東西、新的命題，他總是能看出一些證出一些新的東西，那新的東西是別人過去沒有講清楚或沒有講到的東西，所以當然是先從這角度來，可任何東西都不是無中生有，是從過去已有的東西發展來的，那你先看他的脈絡是怎麼來的，那他走到哪裡去。"

"我之所以能夠這樣(提問問題發現學生思考的盲點)，是因為我對這些領域背景比較深的了解，所以我比較容易懂，知道他的盲點。然後還有其實有一個問題是連結，因為數學敘述定理都不是個別獨立的，連結其實是不管學習或理解都佔一個很大的部分。"

3. 推廣延伸

除了聯結既有的知識和應用在其他的問題解決上，數學家最關心的還是新知識的創造。當聯結應用不再限於固有或特殊化的情境中，則需要個體跳昇至更高層次的思考，此思考面向的目標即著重於推廣延伸的作用。一方面推廣現有的結果，例如：如弱化已知條件、得出另一面向的結論等等；一方面也延伸應用的範圍，例如：類比不同維

度的空間，改變條件等等。從訪談的內容中，研究者將數學家所提及的推廣延伸歸結如下，並在各類別中列舉一些思考問題的範例：

(1) 由低維度至高維度：一次因式至二次因式、單變至多變

(2) 由等比例至不等比例：設定不同的比重

(3) 反例變正例：這個反例可以用來形成什麼定理

(4) 不同的假設或模型：獨立變相關、選定不同參數的模型

“有一個也是每個中學生都會的不得了，這也是我常常會問的問題，你會 1+2+3+…+N 公式，1 的平方+2 的平方加到 N 的平方的公式，1 的三方加到 N 的三方，每個學生都會的，幾乎沒有一個學生不會背這個公式，那我的問題是 1 的 4 次方加到 N 的 4 次方、1 的 5 次方加到 N 的 5 次方，他能不能把這個方法一般化，這是第一個問題，然後這個問題跟微積分基本定理有什麼關係，其實你可以問很多很多這種問題，其實數學裡面本來就有太多太多的連結。”

(三) 中學數學教師數學證明教學的思考面向

1. 概念

無論是針對國中的幾何證明或高中的數論證明，數學教師都提及即使已熟悉這些相關知識內容的學生，也不見得能夠證明或瞭解證明，更何況是還不熟悉這些知識的學生。所以在進行證明教學之前，要先喚醒、重整或重建學生的先備知識。在常態編班中，還是有少數的國三學生連什麼是奇數、偶數、質數或什麼是平行四邊形的定義都不清楚，也有受訪教師認為這樣的學生根本是被忽視的一群。不過，

對中等或中上的學生而言，學習課本上的概念對他們來說不是什麼大困難。

“*現在國中越教越少，很多高中要用到的概念還是要再教才行。*”

“*…跟不上的學生很慘的，要他們學證明簡直就像要我們再回去念微分幾何一樣，既痛苦也沒必要。*”

2. 引用的性質

受訪教師認為除了概念之外，與概念相關的性質也是做證明時的重點。尤其現在國中的基本能力測驗都是選擇題，學生只要能夠善用某個性質就比較能想出解題的方法。也有老師設計配對卡，讓學生找符合已知結果的某些條件，或是找符合某些已知條件的結果。例如：如何判斷平行線，什麼是 SAS 全等性質等等。有位受訪老師特別提到課本的已知條件都是剛剛好需要的，有些學生不知道利用這個資訊來評估自己的證明對不對；可是如果會利用這個資訊的學生，給他多餘的條件後，他可能又認為一定要用到所有的條件而想錯方向。

“*…如果證明需要用到三角形全等性質，一開始先複習各種全等性質，再讓學生自己想證明，這樣他們才有感覺。*”

“*…學生不只常常多用了題目沒給的條件，也會遺漏某些條件，其實這些都可以用來幫助自己判斷證明對不對的地方。…我倒還沒多給一些不必要的條件，我想有些學生可能也會受影響。*”

3. 關鍵想法

國中數學教師以課本中的分析路徑為例，解說證明的想法是從求證開始，先設想推得求證的充分條件，再找與此條件相關的性質，通常這性質的先決條件也就是題目的已知條件。所以，證明想法中的充分條件和性質都是關鍵想法。受訪教師表示知道關鍵想法的學生不見得會寫下完整的證明，不過現在的國中基本學力測驗也不需要會寫證明，所以他會把教學的重點放在找出可用來證明的想法。高中數學教師提到與關鍵想法相關的元素以證明方式為主，認為學生如果知道如何使用反證法或數學歸納法，基本上已經完成一半的工作了。

“證明最重要的往往是從求證倒推一步，再來才是會用到的性質是什麼。”

“高中主要的證明方法是反證法和數學歸納法，學生只要能想到用這些證明方法而且清楚證明的起點和終點，其他就是程序性的問題了。”

(四) 學生讀證明的困難

1. 研究生讀證明的困難

如果指定的作業是課本後面的章節，前面某些章節是尚未研讀的，學生則不習慣從後面的章節讀起，再往前找讀不懂且相關的部分，通常是從頭開始讀起，而造成無法在指定的時間內完成作業。讀複雜的證明時，好不容易看懂了每個細節，但卻忘了整個證明的輪廓或找出關鍵的想法。至於對定理的感覺也是非常薄弱，也不會主動找些例子增強直觀。對於自己看不懂的地方，會覺得不好意思想要掩飾自己的弱點，如果老師能讓他感到安全有信心，鼓勵他提出來討論，

是比較理想的教學互動。

“不過有的時候他發生困難你不一定要他馬上過去，其實我覺得學習上發生困難對我(來)講是件好事，你才能找到你的弱點，因為你一定有弱點，沒有人天生是完美。所以你的學習過程是找到你的弱點，然後補強你的弱點，然後你才會進步。所以如果你從來不暴露弱點，反而是有問題的。所以我常常跟學生講，由其是在上課討論時，讓他自己弱點暴露出來。”

2. 中學生讀證明的困難

中學數學教師認為有很多學生自己是看不懂課本的敘述，而且就算看得懂也沒什麼耐心去看。通常是靠老師會把重點整理出來，學生再模仿如何寫證明。讀不懂的原因有很多，有的是國文程度不好，有的是數學概念不清，也有的是課本寫得太冗長，學生就算都看懂了也不知道重點是什麼。

“…例如有個學生有一次問我：「什麼是過三角形的重心？我知道有正三角形、直角三角形，不知道什麼是過三角形。」…”

“課本如果不那樣寫，好像又不夠清楚。…學生看完後我問他們這一段在說什麼，很少學生可以把它的重點講清楚。”

(五) 讀數學證明和建構數學證明能力的關係

基本上，數學家認為建構證明的難度是超越讀證明的難度，但這並不表示會建構證明的人，就一定會讀懂別人的證明，除非所讀的和

所想的是互相吻合的。就培養學生的數學素養而言，有位數學家認為讀的指標是優先於建構的指標，因為並非所有的學生以後都要成為數學專家。如果適當地設計數學論證教學活動，是可以讓學生體驗讀和建構間互相支撐的關係。還有一位數學家認為，真的懂證明還是要經過寫證明這一關。

> *“**合理來講，應該是會建構的人比會讀的人還強，但未必會建構的人就會讀。**…可是我還是覺得說，你要訓練一個人將來有能力，你用建構的方式可能是不錯的，可是**如果說你要讓這個人有數學一定的涵養，我覺得會讀懂證明這個指標比較重。**因為終究你要讀懂證明，你還是要有相當能力才有辦法。”*

> *“對同一種定理和證明過程而言，會建構就能讀懂。”*

> *“讀完不是逐段讀完覺得它有道理去推出正確答案，而是還去反芻說這個證明，作者是怎麼去佈局，用了哪些數學思維，基本上他就是在欣賞一個人在建構數學。所以，**如果你去讀一個證明弄得巧弄得妙，它也是建構數學的一環**嘛！”*

> *“會寫證明不代表真的懂，可是不會寫的離真的懂又更遠了。”*

受訪的中學數學教師認為，(1)能夠寫相信更能夠去看懂；(2)寫過即有思考，思考就是學習的原動力；(3)寫比看讓學生瞭解更多周密

的知識；(4)寫過後再看一次，讓學生有更高的觀點可以去欣賞；(5)透過寫下來才有反思的機會，透過看的過程中會加深印象；(6)數學證明的教學對於錯誤的部分較少去著重。受訪教師的觀點，大都也是抱持寫證明比看證明是更高的認知層次。不過，也有位受訪教師注意到只教如何做或寫證明是不足的。

二、幾何證明閱讀理解的面向

我們從閱讀數學證明的過程中需要理解什麼？參考語文方面閱讀理解的文獻後(程炳林，2001; Gagn’e, Yekovich & Yekovich, 1993)，字面與字義理解(解碼認字與語句整合)、內容理解(可以直接在文章中找到答案者)、推論理解(整合、摘要、精緻化)和理解歷程的監控等都屬於閱讀理解的範疇。當閱讀數學命題和證明時，一開始需要解碼符號和語言以及聯結相對應的既有知識，也就是瞭解表徵的意義**(表層)**；之後可能微觀檢驗命題間的邏輯內涵(**邏輯定位**)或局部推論證明過程中的子證明。前者即可對應於語文的字面和內容理解，後者是由數學證明的特殊性所產生的，也是閱讀數學證明不同於其他文本獨特之處。

另一方面，思考如何應用或推廣某命題不只是數學史上促進數學發展的一環(Lacatos , 1978)，也是增進數學能力的學習目標之一。整合訪談幾位數學家和數學教師讀證明的經驗和對證明的看法後，有些認為除了命題或證明最基本的瞭解，他們習慣統整已知並聯結過去所知的(**統整**)，主要為了達到更進階的目標：**應用和推廣**。有些認為即使不看複雜的證明過程，先透過直觀來瞭解定理的條件和結論，也是有助於在意想不到但又合適的地方應用別人的定理。而且，學生除了概念和引用性質外，也需要進一步理解關鍵想法**(摘要)**。這些面向正

好和語文科的推論理解(統整、摘要、精緻化)形成對應的關係。

瞭解表徵的意義、微觀檢驗、局部推理後，再深入思考聯結統整後的整體組織，進一步瞭解此證明究竟是證出什麼，評估此證明是否是可接受的證明，最後再依據所理解的應用到特殊化的問題或延伸出不同的臆測。除了這些面向，數學家還提到欣賞評鑑、有思想的技巧、實際的應用性、數學結構的美，也就是屬於**賞析理解**的部分。綜合數學家和數學教師的觀點、語言和數學認知研究的相關文獻和數學的發展，研究者析取出幾何證明閱讀理解的六個面向：**表層、邏輯定位、摘要統整、一般性、應用推廣和賞析**。

在考量中學生的學習經驗和知識背景以及哪些面向適合評量中學生幾何證明閱讀理解程度之後，本研究先就表層、邏輯定位、摘要、一般性和應用等五個面向，來評量中學生的幾何證明閱讀理解。表層理解是評量「對字詞或符號意義的理解」，邏輯定位理解是評量「辨識證明過程中前提或結論的地位」和「辨識證明過程所引用的事實或性質」，摘要理解是評量「對命題的已知條件或求證是什麼的理解」或「對證明的重要想法是什麼的理解」，一般性理解是評量「判斷命題或證明過程是否正確」和「辨識證明過程可有效證明什麼命題」，應用理解是評量「應用已證的命題判斷其他類似前提之推論是否正確」。

第二節　幾何證明閱讀理解的實際表現與自我評估

關於中學生幾何證明閱讀理解的實際表現與自我評估分成四個部分呈現，首先報導中學生在各面向幾何證明閱讀理解的表現，初步瞭解學生在表層、邏輯定位、摘要、一般性和應用理解的得分情形，再進一步分析中學生在各面向幾何證明閱讀理解實際表現的關係結構。同樣地，先初步瞭解學生在表層、邏輯定位、摘要、一般性和應用理解的自我評估情形，再進一步分析中學生在各面向幾何證明閱讀理解自我評估的關係結構。最後，比較學生在幾何證明閱讀理解實際表現和自我評估的異同。本研究中學生的樣本包括國中三年級學生以及高一、二學生，以下高一、二學生將簡稱為高中學生。

一、中學生在各面向幾何證明閱讀理解的實際表現

表 4-2-1：中學生在各面向幾何證明閱讀理解實際表現的平均得分

問卷	理解面向	原始滿分	單位化分數之平均數(標準差)	
			國三	高中
一階段幾何證明(甲式)	表層	4	.69 (.33)	.83 (.23)
	邏輯定位	7	.52 (.28)	.65 (.24)
	摘要	6	.54 (.33)	.75 (.26)
	一般性	5	.51 (.35)	.65 (.30)
	推廣應用	5	.48 (.29)	.65 (.26)
二階段幾何證明(乙式)	表層	5	.76 (.33)	.90 (.19)
	邏輯定位	7	.49 (.26)	.62 (.23)
	摘要	6	.41 (.28)	.61 (.26)
	一般性	5	.42 (.28)	.53 (.30)
	推廣應用	5	.35 (.26)	.48 (.30)

表 4-2-1 呈現國高中學生分別在一階段或二階段幾何證明的表層、邏輯定位、摘要、一般性和應用等面向的理解表現，單位化分數

是將學生在各面向的原始得分除以原始滿分。以 T Test 檢驗假設：國三學生和高中學生在一階段(二階段)幾何證明之五種理解面向的表現無顯著差異。結果顯示，**國高中生在一階段或二階段幾何證明之五種理解面向的表現均有顯著差異**(p<.005)。將每位學生各面向分數相加作為幾何證明閱讀理解表現的分數(0-5 分)，表 4-2-2 是國高中學生幾何證明閱讀理解表現的得分分佈。分別有 17.9%國中學生和 33.1%高中生在一階段幾何證明題得 4 分以上；分別有 3.6%國中學生和 15.5%高中生在二階段幾何證明題得 4 分以上。一般說來，前 60%的國三生才得以進入高中就讀，所以本研究的高中生表現優於國三生並不奇怪。

表 4-2-2：中學生的幾何證明閱讀理解實際表現的得分分佈

問卷	得分	國三(%)	高中(%)
一階段幾何證明 (甲式)	$0-1$	9.0	0.5
	1^+-2	19.3	4.0
	2^+-3	26.9	19.3
	3^+-4	26.9	43.1
	4^+-5	17.9	33.1
二階段幾何證明 (乙式)	$0-1$	5.5	0.3
	1^+-2	25.9	6.9
	2^+-3	40.9	38.4
	3^+-4	24.1	38.9
	4^+-5	3.6	15.5

為了探討在相同的幾何證明閱讀理解能力下是否高中生的表現仍優於國三學生，本研究採用 Winsteps 軟體中 IRT(Item Response Theory)的單參數部分給分模式分別估計國高中學生的閱讀理解能力。結果顯示，甲乙式這兩份問卷題目的 Outfit Mean-Squares 都介在.67 和 1.55 之間，表示還可容忍離群值的學生對題目分析的不良影

響；Infit Mean-Squares 都介在.83 和 1.25 之間，表示每一題都有助於估計學生的能力。再以 DIF 方法來判斷在相同能力下的男女學生或國高中學生，是否有些題目可能對於某一群學生有所偏差。

表 4-2-3：中學生在有偏差題目的反應

DIF	題目編號	題目大意	國中學生的反應	高中學生的反應
有利於高中生的題目	乙式 第 10 題	小明的證明過程可以證明下列哪些敘述	引用視覺上呈現的條件。理由有：D 和 M 是兩邊中點，所以平行 $\overline{AC}$，所以垂直 $\overline{BC}$。	先看敘述再畫出其他的圖形。
	乙式 第 3 題	△BMD 和△CMD 全等時，$\overline{DB}$的對應邊是	除了寫出$\overline{DC}$，也寫出$\overline{DA}$。理由有：$\overline{DA}$和$\overline{DB}$也相等，多寫不一定會被扣，少寫就沒分了。	
	乙式 第 9(b)題	(簡述小明證明過程的想法)提問：可以判斷∠DCA=∠DAC(求證)的條件是什麼	忽略題意，找出三角形全等。理由有：國中幾何最重要的就是相似和全等。	符合題意，找出$\overline{DA}=\overline{DC}$。
對國中生有利的問題	乙式 第 6 題	如果某個人認為第 1-5 列和第 6 列交換後，所形成第 6、1、2、3、4、5、7、8 列的證明過是正確的，你同意嗎？	理由有： (1)應該都可以。 (2)換了也看得懂。 (3)知道 $\overline{DA}=\overline{DC}$ 就知道兩角相等。	理由有：第六列的「又因為」的「又」應該刪除，所以勾選有點同意有點不同意。

結果顯示，甲乙式中每一題的難度對相同能力的男女生並無著差異(p>.005)，可是甲式中的第 10 題和乙式中的第 3、6、9(b)、10 題的難度對相同能力的國高中生還是有顯著差異(p<.005)。其中只有乙式

的第 6 題是相同能力的國中生表現比相同能力的高中生佳，其餘皆是相同能力的高中生表現比相同能力的國中生佳。透過數學教師協助訪談幾位個案學生後，本研究整理了學生的反應，請見表 4-2-3。基於這些反應，研究者猜測可能造成這種偏好的原因有：(1)一般國中生比高中生更容易以圖形作為思考的對象，而不是以圖形當成思考的參照；(2)一般國中生的作答行為比高中生更容易受到教師或課程的影響。

為了比較國三生(高中生)在一階段和二階段幾何證明的閱讀理解表現是否有顯著差異，本研究先以 T Test 檢驗假設：回答一階段幾何證明(即甲式)的國三生(高中生)和回答二階段幾何證明(即乙式)之國三生(高中生)在情境邏輯、記號邏輯、概念心像、概念說明和構圖等面向的表現無顯著差異。結果顯示，回答甲式和乙式之國三生在邏輯和知識背景無顯著差異(p>.005)，回答甲式和乙式之高中生在邏輯和知識背景也無顯著差異(p>.005)。本研究依此假定學生在甲乙式不同的表現結果主要是受到不同證明內容和證明結構(一階段或二階段)的影響。

以 Paired T Test 檢驗假設：一階段(二階段)幾何證明，國三(高中)學生在任兩個理解面向間的表現無顯著差異。結果顯示，在一階段幾何證明中，國三學生在表層理解顯著高於其他理解面向；高中學生在表層理解顯著高於其他理解面向且摘要理解又顯著高於除了表層之外的其他理解面向；在二階段幾何證明中，國三學生在表層理解顯著高於邏輯定位理解，邏輯定位理解顯著高於除了表層之外的其他理解面向，一般性理解又顯著高於應用理解；高中學生在表層理解顯著高於邏輯定位理解和摘要理解，邏輯定位理解和摘要理解又顯著高於一般性理解和應用理解(p<.005)。也就是說，**國中生和高中生在一階段**

和二階段幾何證明閱讀理解表現的共通點是：表層理解都顯著優於其他閱讀理解面向。

以 T Test 檢驗假設：回答一階段幾何證明的國三生和回答二階段幾何證明的國三生分別在各理解面向上的表現無顯著差異。結果顯示，國三學生在一階段和二階段幾何證明的閱讀理解表現，只有表層和邏輯定位的表現無顯著異(p>.005)。以 T Test 檢驗假設：回答一階段幾何證明的高中生和回答二階段幾何證明的高中生在各理解面向上的表現無顯著差異。結果顯示，高中學生在一階段和二階段幾何證明的閱讀理解表現，只有邏輯定位的表現無顯著異(p>.005)。也就是說，**無論是國三或高中學生在摘要、一般性和應用等理解面向的表現都是一階段幾何證明題顯著優於二階段幾何證明題，而且無論是國三或高中學生在邏輯定位理解面向的表現在一階段和二階段幾何證明題沒有顯著差異。**

表 4-2-4：國高中學生在邏輯定位理解問題的得分分佈(%)

題號	國三學生						高中學生					
	甲式[*1] (n=223)			乙式[*2] (n=220)			甲式(n=378)			乙式(n=388)		
	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2
4	63.2	36.8		45.5	54.5		48.7	51.3		38.1	61.9	
5	29.1	12.1	58.7	28.6	16.8	54.5	15.6	8.5	75.9	18.0	10.8	71.1
6	39.5	17.0	43.5	55.5	13.6	30.9	32.8	8.7	58.5	51.5	10.8	37.6
7	28.3	48.4	23.3	32.3	40.9	26.8	22.0	41.8	36.2	17.8	33.8	48.5

*1 甲式是一階段的幾何證明題，*2 乙式是二階段的幾何證明題。

整體上，國高中生在邏輯定位理解面向的表現不受到證明內容或結構的影響；可是在邏輯定位內的子問題或許有其他因素影響學生在邏輯定位理解的表現。回顧邏輯定位的試題內容，包含判斷敘述的邏輯次序(第 5 和 6 題)、辨識證明所引用的事實(第 4 題)和辨識證明所引

用的性質(第 7 題)。參考表 4-2-4，國高中生判斷某個子前提和結論交換是否正確(甲式第 5 題)的答對率高於判斷從某個子結論再推得的結論交換後是否正確(甲式第 6 題)的答對率，這個現象可能是有些學生以「因為」、「所以」判斷邏輯次序，以至於當兩個子結論都有「所以」出現時，學生對這兩個子結論間的邏輯次序比較容易產生錯誤的判斷。

同樣地參考表 4-2-4，國高中生判斷某個子前提和結論交換是否正確(乙式第 5 題)的答對率高於判斷可分成兩部分使用的前提交換後是否正確(乙式第 6 題)的答對率，這個現象可能是受到語意的影響而沒有將某些論點壓縮成前提，而且將某些論點壓縮成前提本身就比辨識單一論點中子前提和子結論的邏輯次序需要更多的認知運作，所以當命題中的前提在證明過程中分成兩部分使用時，學生對這兩部分前提間的邏輯次序比較容易產生錯誤的判斷。學生在辨識證明所引用的性質容易犯錯的地方是，混淆了證明過程究竟是引用 $p \rightarrow q$、引用 $q \rightarrow p$ 還是兩者都有。雖然，**國高中學生在整個邏輯定位理解面向的認知運作是比較穩定的，但是在邏輯定位理解面向內的表現還是受到論點前提多寡和地位的影響。**

為什麼高中生在二階段的表層理解表現顯著優於一階段的表層理解表現呢？可能是在一階段幾何證明的表層理解請學生寫出兩個角相等的理由，回答此問題需要學生理解符號意義並將此意義來源以文字表達(資訊內隱的關聯運作或參照運作)；可是在二階段幾何證明有關表層理解的試題，都只需要理解符號意義(資訊外顯的關聯運作或參照運作)。所以，雖然一階段和二階段幾何證明有類似的試題結構，但在表層理解的其中一個試題之認知需求不同，才導致高中生在二階段幾何證明表層理解的表現高於一階段幾何證明表層理解的表現。

二、幾何證明閱讀理解實際表現的關係結構

以 Multidimensional scaling 方法分析幾何證明各理解面向間的結構關係，在設定二維的結構下所得到的結果如圖 4-2-1(Stress=.083，RSQ=.969)、圖 4-2-2(Stress=.097，RSQ=.964)、圖 4-2-3(Stress=.139，RSQ=.936)和圖 4-2-4(Stress=.059，RSQ=.984)。以二維作為基礎結構的原因是假設這幾個理解面向主要是受到知識和邏輯推理兩個非相依的潛在知能所支配，而且在 Stress 皆小於.10 以及 RSQ 皆大於.90 的情形下，這個關係結構還算可以在簡化訊息下適合呈現原始資料的潛在規律。

如果以表層理解作為各面向幾何證明閱讀理解的學習起點，可以將上述分析的結果大致摘要成三種類型：**(1)以摘要和邏輯定位的理解作為從表層發展至應用和一般性理解間的樞紐位置；(2)以邏輯定位的理解作為從表層發展至一般性、應用和摘要理解間的樞紐位置；(3)以摘要理解作為發展至應用理解以及以邏輯定位理解作為發展至一般性理解的樞紐位置**。其中國三學生之一階段幾何證明閱讀理解和高中學生之二階段幾何證明閱讀理解的關係結構都屬於第一種，國三學生之二階段幾何證明閱讀理解的關係結構則屬於第二種，高中學生之一階段幾何證明閱讀理解的關係結構則屬於第三種。

配合國三學生在幾何證明閱讀理解各面向的表現，發現一階段幾何證明中摘要理解和邏輯定位理解的難度對國三學生而言是沒有顯著差異的，而且在這些理解面向間，這兩個理解面向的相關性也是最高的；二階段幾何證明的摘要理解比邏輯定位理解難度更高，可是摘要理解和邏輯定位理解的相關性還是高於摘要理解和其他理解面向的相關性。所以，**國三生學習一階段幾何證明時，不妨設計融合摘要理解和邏輯定位理解的活動；但是學習二階段幾何證明時，則先安排**

在較簡單的情境培養學生的摘要能力，再回到二階段幾何證明題的閱讀理解。

配合高中學生在幾何證明閱讀理解各面向的表現，發現對高中學生而言一階段幾何證明中邏輯定位理解比摘要理解難度更高，而且這兩個理解面向的相關性和其他理解面向間的相關性相差不大；二階段幾何證明中摘要理解和邏輯定位理解的難度對高中學生而言是沒有顯著差異，而且在這些理解面向間，這兩個理解面向的相關性也是最高的。高中生學習幾何證明閱讀理解的重心是朝向一般性理解和應用理解，所以先在一階段幾何證明題設計以邏輯定位理解為基礎的活動來提昇一般性理解，以摘要理解為基礎的活動來提昇應用理解；或許也可以幫助高中生自我學習二階段幾何證明的閱讀理解。

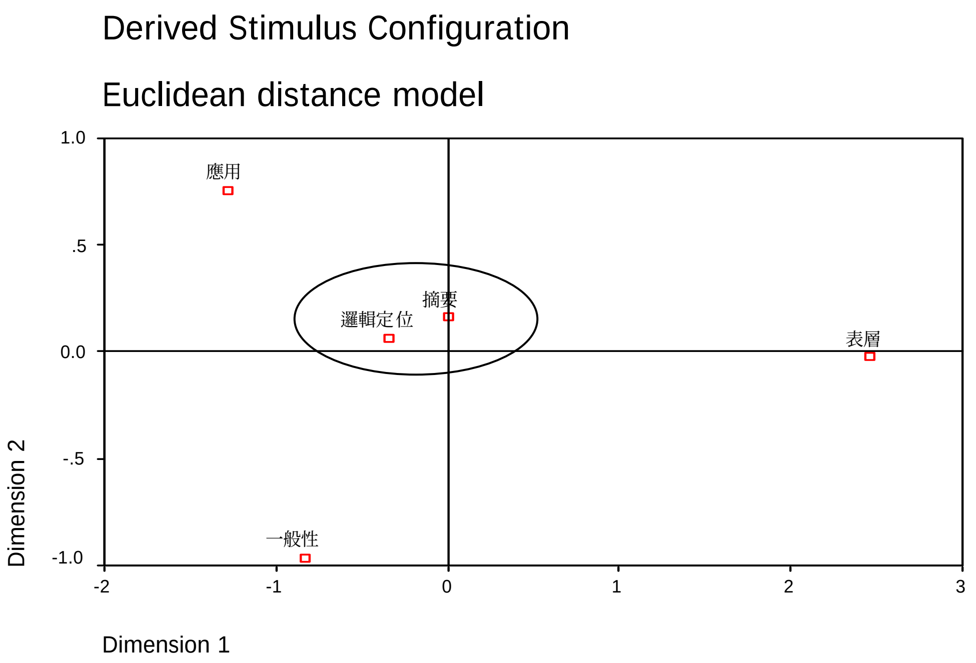


圖4-2-1：國三學生之一階段幾何證明閱讀理解表現的關係結構

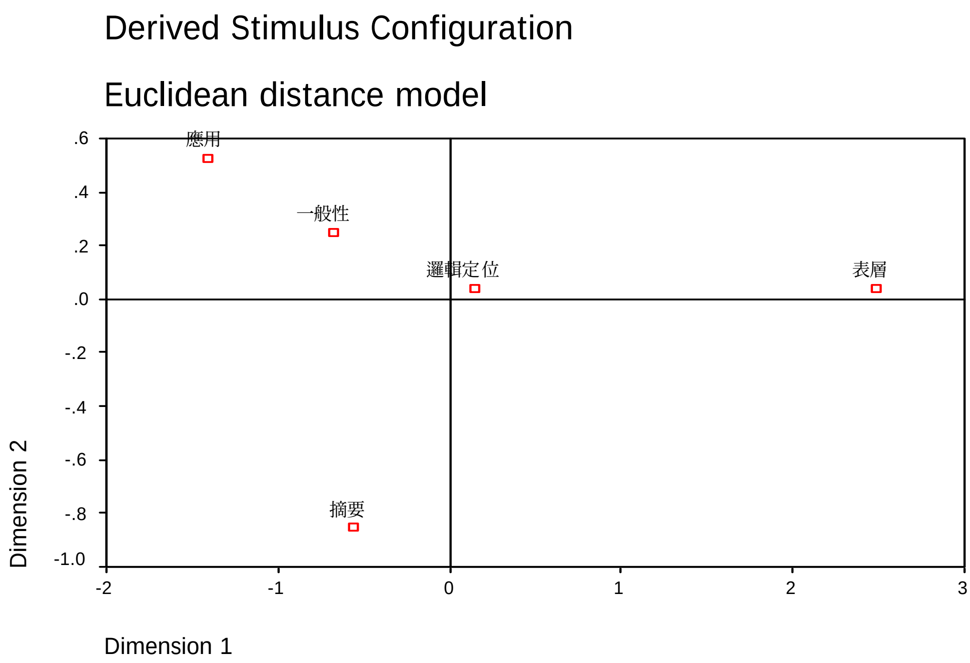


圖4-2-2：國三學生之二階段幾何證明閱讀理解表現的關係結構

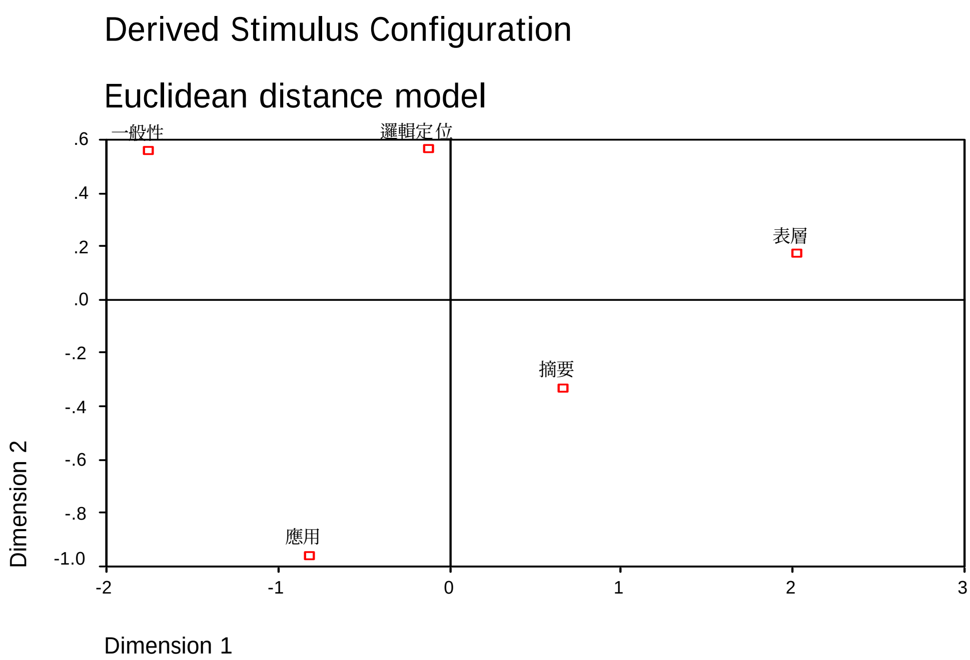


圖4-2-3：高中學生之一階段幾何證明閱讀理解表現的關係結構

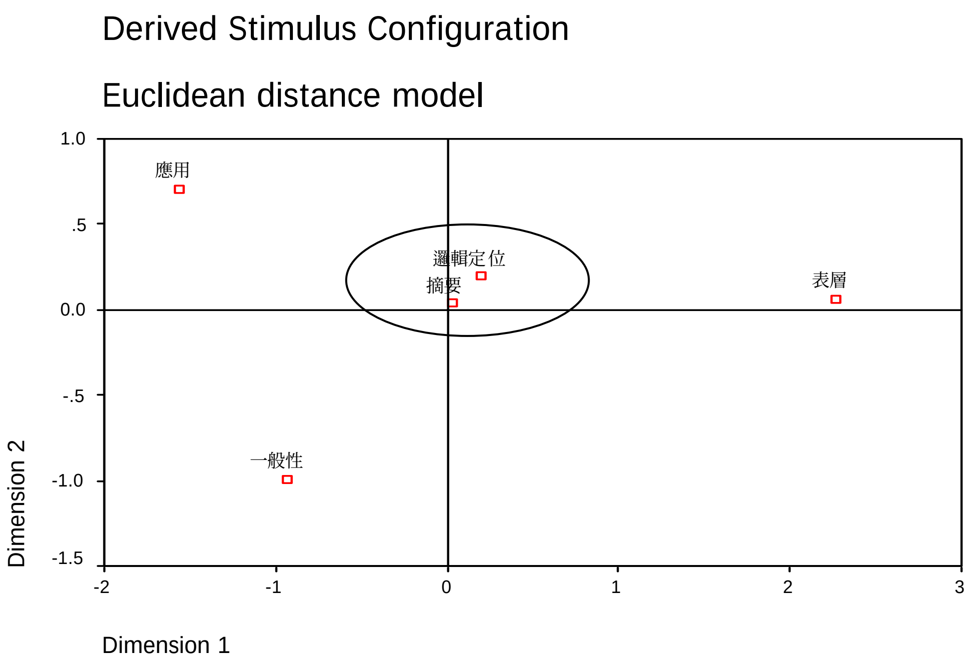


圖4-2-4：高中學生之二階段幾何證明閱讀理解表現的關係結構

研究者依此臆測，當邏輯定位理解和摘要理解的困難度沒有顯著差異時，則這兩個理解面向同時扮演從表層理解發展至一般性理解和應用理解的樞紐位置；當摘要理解的困難度高於邏輯定位理解時，則邏輯定位理解扮演從表層理解發展至一般性理解、應用理解和摘要理解的樞紐位置；當邏輯定位理解的困難度高於摘要理解時，則可透過邏輯定位理解從表層理解發展至一般性理解，以及透過摘要理解從表層理解發展至應用理解。

三、中學生在各面向幾何證明閱讀理解的自我評估

首先，分析學生如何評估表層、邏輯定位、摘要、一般性與應用等面向的理解程度。從表 4-2-5 的結果，發現無論是國三或高中學生，在評估自我理解程度的平均值都是由表層、邏輯定位、摘要、應用與一般性依次遞減；而且評估各面向的理解程度之平均值也都是甲式大於乙式。**在各面向各取代表性的題目為例，學生評估自己的理解程度**

由高至低的題目是「我瞭解第 k 列的意思(評估表層理解)」 > 「我瞭解第 k 列為什麼是正確的(評估邏輯定位理解)」 > 「我瞭解這個證明過程的重點(評估摘要理解)」 > 「我知道如何應用這個結論或證明解決其他問題(評估應用理解)」 > 「我瞭解這個證明過程為什麼可以或不可以證明這個敘述(評估一般性理解)」。

表 4-2-5：中學生評估幾何證明閱讀理解程度的結果

問卷	評估理解程度之面向	納入分析的題號	單位化分數平均數 (標準差)	
			國三	高中
一階段幾何證明(甲式)	表層	1-3	4.54 (.73)	4.84 (.42)
	邏輯定位	4-7	4.33 (.90)	4.77 (.49)
	摘要	8-10	4.12 (.86)	4.42 (.74)
	應用	12、14	3.96 (1.01)	4.17 (.89)
	一般性	16、17	3.86 (1.01)	3.99 (1.01)
二階段幾何證明(乙式)	表層	1-4	4.49 (.85)	4.84 (.40)
	邏輯定位	5-8	4.35 (.88)	4.73 (.55)
	摘要	9-11	3.81 (.99)	4.28 (.80)
	應用	13、15	3.70 (1.12)	4.01 (.93)
	一般性	17、18	3.63 (1.14)	3.94 (.92)

以 Paired T Test 檢驗假設：在一階段(二階段)幾何證明中，國三(高中)學生在評估任兩個理解面向間的理解程度無顯著差異。結果顯示，國三和高中學生都只有在二階段幾何證明中評估應用和一般性的理解程度上，尚未有足夠的證據拒絕這兩個面向的評估理解程度無顯著差異(p>.005)。也就是說，無論是國三生或高中生，除了在二階段幾何證明應用理解和一般性理解的自我評估無顯著差異，在一階段各面向間和二階段其餘面向間的自我評估皆有顯著差異。

進一步做 ANOVA 分析，檢驗假設：在評估一階段(二階段)幾何證明各面向的理解程度時，國三學生和高中學生的評估結果無顯著差異。結果顯示，在一階段幾何證明中，除了評估一般性(p=.150>.005)

和應用(p=.008>.005)的理解程度外，在評估其他各面向的理解程度上高中學生都顯著高於國三學生。對照高中生在各理解面向的表現都顯著高於國三學生後，這個結果表示：**高中學生評估自己在一階段幾何證明之一般性理解和應用理解的相對標準比國三學生評估的相對標準較為嚴格**。在評估二階段幾何證明各面向的理解程度上，高中學生評估理解程度的結果都顯著高於國三學生評估理解程度的結果。

以 ANOVA 方法檢驗假設：國三學生(高中學生)在評估各面向的理解程度時，與評估一階段或二階段幾何證明無關。結果顯示，國三學生只有在摘要理解的評估(p<.005)會受到幾何證明內容或結構的影響；而高中學生在評估各面向的理解程度時都不受到幾何證明內容或結構的影響(p>.005)。綜觀之，**國三學生評估二階段幾何證明比一階段證明難以理解的面向是摘要理解；而高中學生評估一階段證明和二階段證明的理解難度是沒有顯著差的。**

四、幾何證明閱讀理解自我評估的關係結構

以 Multidimensional scaling 方法分析學生評估各面向理解程度間的關係結構，在設定二維的結構下所得到的結果如圖 4-2-5(Stress=.093，RSQ=.950)、圖 4-2-6(Stress=.092，RSQ=.951)、圖 4-2-7(Stress=.064，RSQ=.984)和圖 4-2-8(Stress=.065，RSQ=.981)。以二維作為基礎結構的原因是假設這幾個理解面向的自我評估同實際表現，主要也是受到知識和邏輯推理兩個非相依的潛在知能所支配，而且在 Stress 皆小於.10 以及 RSQ 皆大於.90 的情形下，這個關係結構還算可以在簡化訊息下適合呈現原始資料的潛在規律。

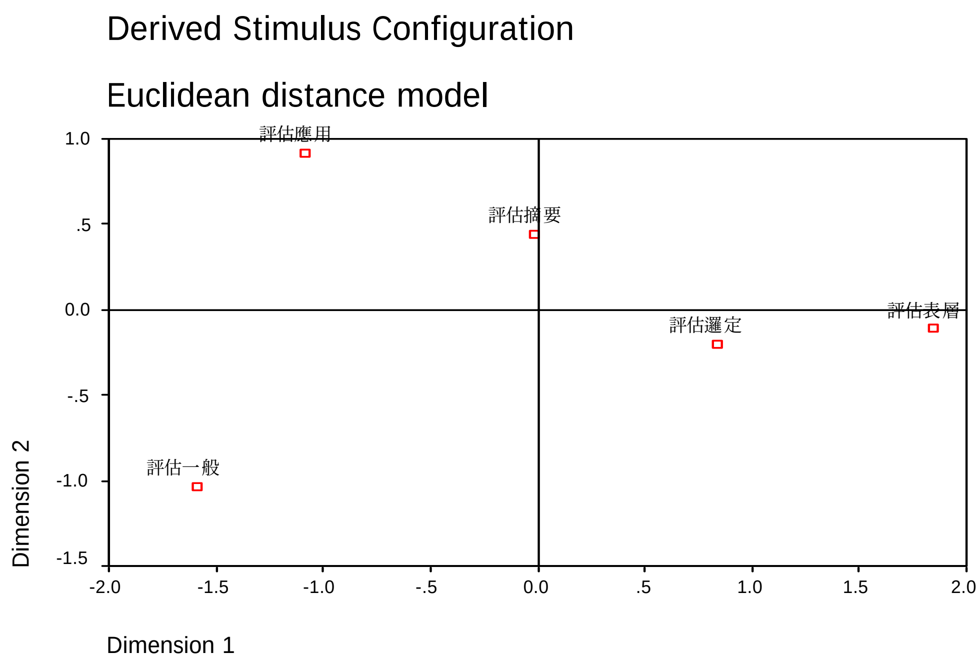


圖 4-2-5：國三學生對一階段幾何證明各理解面向評估的關係結構

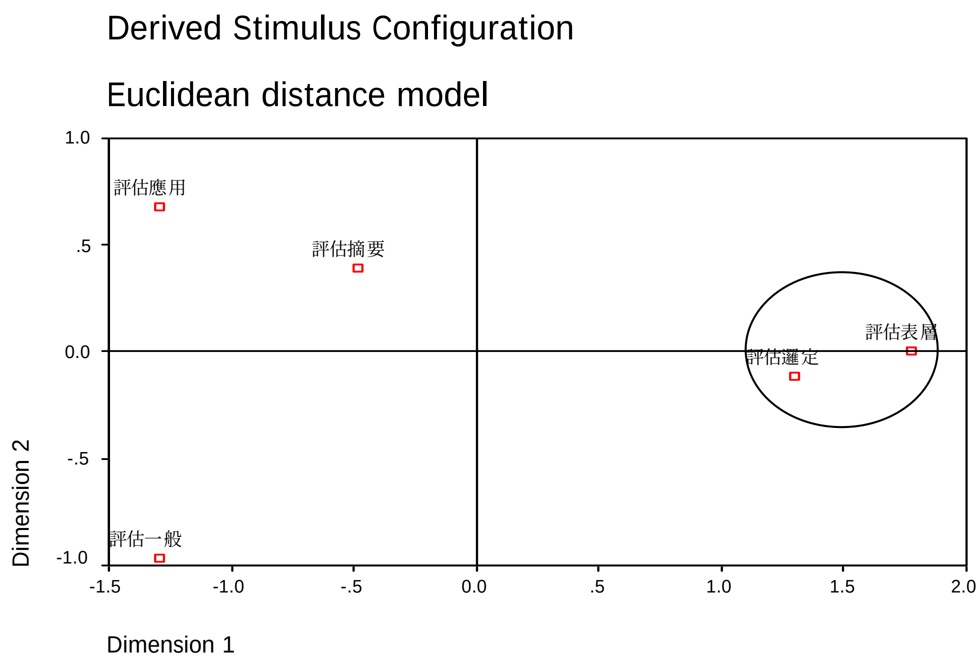


圖4-2-6：國三學生對二階段幾何證明各理解面向評估的關係結構

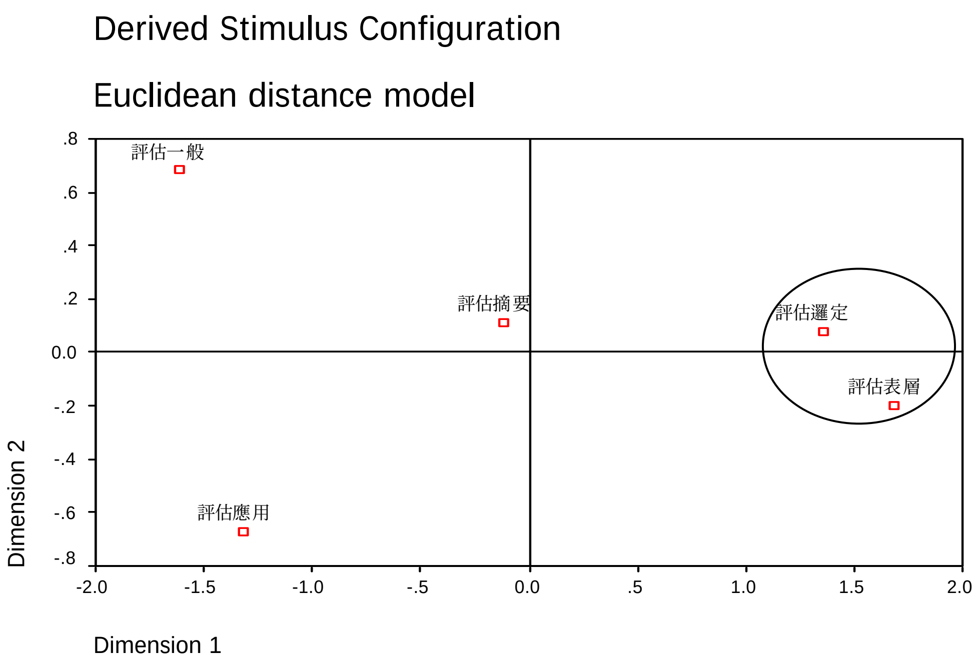


圖 4-2-7：高中生對一階段幾何證明各理解面向評估的關係結構

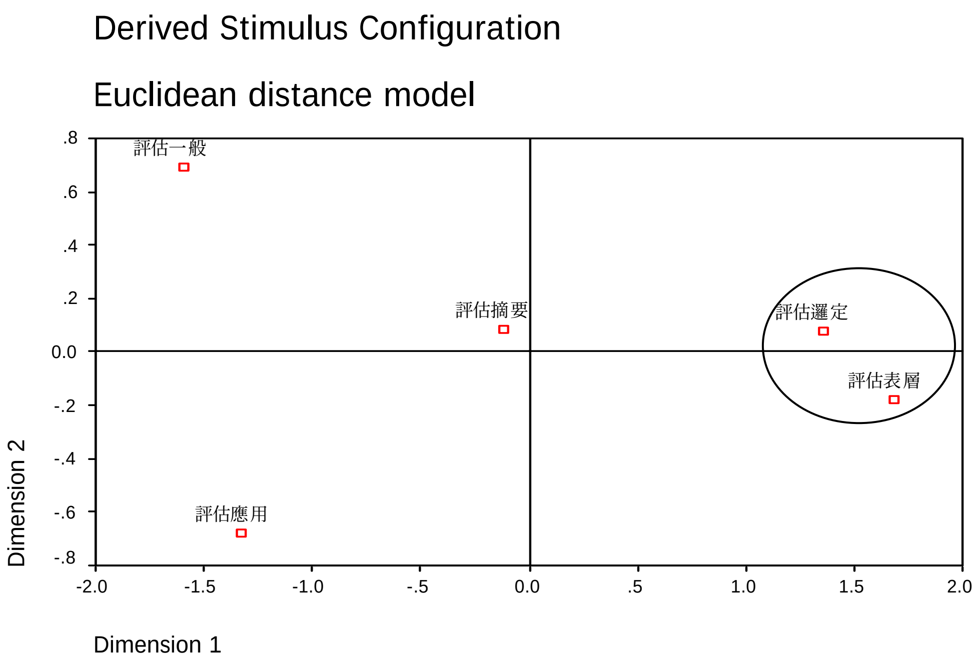


圖4-2-8：高中生對二階段幾何證明各理解面向評估的關係結構

這些圖形顯示，中學生在一階段和二階段幾何證明各理解面向的評估之關係結構大致上可分為兩種：**(1)評估邏輯定位理解和評估表層理解之間的相關性類似於評估邏輯定位理解和評估摘要理解之間的**

相關性；(2)評估邏輯定位理解和評估表層理解的相關性明顯大於評估邏輯定位理解和評估摘要理解的相關性。除了國三學生在一階段幾何證明題的評估結果屬於第一種關係結構外，其餘三種情形都屬於第一種關係結構。

歸納中學生在一階段和二階段幾何證明閱讀理解自我評估的關係結構，所呈現的共同規律有(1)和表層理解自我評估最接近的都是邏輯定位理解自我評估；(2)和表層理解自我評估距離最遠的都是一般性理解和應用理解自我評估。

五、幾何證明閱讀理解實際表現和自我評估的異同

對照學生實際表現和自我評估的結果，發現在實際表現和自我評估出現相同的情形包含：(1)國三生的摘要理解都是一階段幾何證明題顯著高於二階段幾何證明題；(2)國三生的邏輯定位理解在一階段幾何證明題和二階段幾何證明題都沒有顯著差異；(3)高中生的邏輯定位理解在一階段幾何證明題和二階段幾何證明題都沒有顯著差異。(4)在二階段幾何證明題上，高中學生的實際表現和自我評估都是顯著高於國三學生。

出現不同的情形包含：(1)國三生在一般性理解和應用理解的實際表現，都是一階段幾何證明題優於二階段幾何證明題，可是在一般性理解和應用理解的自我評估，一階段和二階段幾何證明題沒有顯著差異；(2)高中生在摘要理解、一般性理解和應用理解的實際表現，都是一階段幾何證明題優於二階段幾何證明題，可是在摘要理解、一般性理解和應用理解的自我評估，一階段和二階段幾何證明題沒有顯著差異；(3)在一階段幾何證明題的一般性理解和應用理解，高中學生的實際表現都是顯著優於國三學生，可是高中學生的自我評估和國三學生

的自我評估沒有顯著差異。

綜言之，邏輯定位理解在學生實際表現出來的和自我評估上佔有不同的地位。**學生主要以偏向評估表層理解的標準來評估「為什麼」某些步驟是正確的，但當以區分邏輯和認識上的真以及辨識所引用的性質或事實來測量學生是否真正理解「為什麼」時，其表現結果和表層理解表現的相對關係就低於學生在這兩個面向上自我評估的相對關係。**這個現象會不會是由於學生輕忽了邏輯定位的問題，認為自己的邏輯定位理解是正確的，而削弱學生對於進一步理解邏輯定位問題的需求？所以在教學上，也需要特別注意學生在邏輯定位上的表現與自我評估間的落差。另一方面，邏輯定位理解也是唯一一個面向，無論是國三學生或高中學生在幾何證明閱讀理解的實際表現或自我評估上，都不受一階段或二階段幾何證明題的影響。這是否表示如果沒有外在介入下，中學生短時間內較難自主提昇對幾何證明的邏輯定位理解？

第三節 知識、邏輯推理與幾何證明閱讀理解

一、知識與幾何證明閱讀理解的關係

(一) 幾何知識

表 4-3-1 呈現國高中學生在概念心像、概念說明與構圖等幾何知識之平均得分與標準差，其中概念說明包含了概念定義、性質與符號意義。以 T Test 檢驗假設：國高中生在概念心像、概念說明與構圖的表現無顯著差異。結果顯示，高中生在幾何知識三種面向上的得分都顯著高於國三學生的得分($p<0.005$)。

表 4-3-1：學生幾何知識的平均得分(標準差)

證明結構	學生	概念心像 (甲式滿分 6 分) (乙式滿分 6 分)	概念說明 (甲式滿分 9 分) (乙式滿分 8 分)	構圖 (甲式滿分 6 分) (乙式滿分 6 分)
與一階段相關的知識(甲式)	國三	5.02(1.71)	6.75(2.46)	3.86(2.25)
	高中	5.77(0.79)	7.78(1.56)	4.94(1.58)
與二階段相關的知識(乙式)	國三	4.08(2.14)	6.00(2.19)	2.80(2.20)
	高中	5.33(1.39)	6.91(1.30)	3.94(2.09)

進一步分析學生書面作答的資料發現，有 12.8%的國三學生以不同的 B 點畫出 $\overline{AB}=\overline{BC}$ 以及以不同的 B 點畫出 $\overline{AB}\neq\overline{BC}$。也有少數學生把「≠」當成不平行，把「//」當成相等或是平行且相等，以及把 L 垂直平分 $\overline{AB}$(1)畫成 $\overline{AB}$ 垂直平分 L；(2)畫出 A、B 是等腰△的兩邊而 L 是中線；(3)畫出 $\overline{AB}$ 同垂直 L 和 L1。本研究進一步檢驗這個現象是否影響學生在幾何證明閱讀理解的實際表現，結果發現以不同的 B 點畫出 $\overline{AB}=\overline{BC}$ 以及畫出 $\overline{AB}\neq\overline{BC}$ 的學生之應用理解表現顯著低於能正確畫出 $\overline{AB}=\overline{BC}$ 以及 $\overline{AB}\neq\overline{BC}$ 的學生。不過，學生的錯誤是來自於對於看似簡單的符號產生另類的解碼，或是來自於不當的參照性運作仍有待進一步的探討。

(二) 幾何知識與幾何證明閱讀理解實際表現

將知識先區分成心像、說明、構圖，表 4-3-2 是各子知識和一階段幾何證明各理解面向間的相關性。其中，綜合理解是指表層、邏輯定位、摘要、一般性和應用等理解表現的總和。結果發現，對國三學生理解一階段幾何證明而言，同時和概念心像、概念說明和構圖間呈現中度相關(0.3 以上，不滿 0.7)的有表層理解、邏輯定位理解和摘要理解；同時和概念說明和構圖間呈現中度相關的有一般性理解和應用

理解。對高中生理解一階段幾何證明而言，沒有任何理解面向和概念心像、概念說明或構圖間呈現中度相關。

表 4-3-2：一階段幾何證明各理解面向和各子知識間的相關性

閱讀理解	知識	心像	說明	構圖
表層	國三	.520	.523	.494
	高中	.050	.096	.195
邏輯定位	國三	.316	.378	.382
	高中	.140	.113	.169
摘要	國三	.430	.509	.496
	高中	.210	.160	.293
一般性	國三	.290	.350	.430
	高中	.197	.172	.226
應用	國三	.293	.341	.343
	高中	.117	.106	.202
綜合理解	國三	.502	.569	.582
	高中	.236	.212	.351

表 4-3-3：二階段幾何證明各理解面向和各子知識間的相關性

閱讀理解	知識	心像	說明	構圖
表層	國三	.402	.529	.355
	高中	.110	.143	.106
邏輯定位	國三	.219	.319	.333
	高中	.115	.086	.095
摘要	國三	.220	.370	.288
	高中	.086	.186	.217
一般性	國三	.159	.318	.245
	高中	.096	.159	.229
應用	國三	.017	.066	.296
	高中	.017	.080	.224
綜合理解	國三	.320	.499	.460
	高中	.135	.218	.305

如同分析一階段幾何證明的方式，表 4-3-3 是各子知識和二階段幾何證明各理解面向間的相關性。對國三學生理解二階段幾何證明而言，同時和概念心像、概念說明和構圖間呈現中度相關(0.3 以上，不

滿 0.7)的只有表層理解；同時和概念說明和構圖間呈現中度相關的只有邏輯定位理解；只和概念說明間呈現中度相關的有摘要理解和一般性理解。對高中生理解二階段幾何證明而言，也和理解一階段幾何證明一樣，不只沒有一個理解面向同時和概念心像、概念說明和構圖間呈現中度相關以上，也沒有任何理解面向和概念心像、概念說明或構圖間呈現中度相關以上。

依照課本的教材安排，都是先學過與命題和證明相關的概念後，再進行幾何論證的教學。所以，如果把相關知識作為學習幾何證明閱讀理解的先備條件，應該有助於表層的理解。可是在 189 位國三學生(全部的 84.8%)答對說明性知識問題「如果△ABC≅△DEF，則∠BAC =______。」當中，有 64 位(189 位的 33.9%)答錯表層理解問題「請在上圖中的∠AMC 內寫上 1，並在上圖中的∠MAC 內寫上 2。」。也就是說，能從△ABC≅△DEF 推得∠BAC =∠EDF(知識)的學生群中，還有三分之一不理解∠AMC 與圖形中的對應關係(表層理解)。。這個比例應該不是只有不小心犯錯的比例，所以教學上也要注意學生**即使能理解較抽象的符號表徵(例如：三角形全等符號的對應角相等)，也不表示他們能辨識較簡單的符號表徵(例如：∠BAC)在圖形上的意義。**

至於邏輯定位理解中「辨識證明引用的事實(甲式和乙式的第 4 題)」，和甲式(一階段幾何證明題)第 4 題相關的概念心像包含第 2、3、6、7 題，和乙式(二階段幾何證明題)第 4 題相關的概念心像包含第 2、3、9-1、10-1 題。表 4-3-4 是國三生在邏輯定位理解之辨識事實和概念心像得分的人數分佈，這個結果表示**在一階段和二階段幾何證明題中，概念心像不足(0-3)的學生是難以辨識證明中引用的事實。**

表4-3-4：國三生在邏輯定位理解之辨識事實和概念心像得分的分佈

辨識事實 概念心像	一階段(甲)		二階段(乙)	
	0	1	0	1
0-3	27	3	51	28
4-6	114	79	69	72

和甲式第 4 題相關的概念說明包含第 1、4、5、8、11-1、11-2、12 題，和乙式第 4 題相關的概念說明包含第 1、4、9-2、10-2、11-1、11-2、12 題。表 4-3-5 是國三生在邏輯定位理解之辨識事實和概念說明得分的人數分佈，這個結果表示**在一階段幾何證明題中，概念說明不足(0-3)的學生是難以辨識證明中引用的事實；在二階段幾何證明題中，概念說明不足(0-4)的學生也是難以辨識證明中引用的事實。**

表 4-3-5：國三生在邏輯定位理解之辨識事實和概念說明得分的分佈

辨識事實 概念說明	一階段(甲)	
	0	1
0-3	25	4
4-6	40	16
7-9	76	62

辨識事實 概念說明	二階段(乙)	
	0	1
0-4	36	10
5-8	84	90

表4-3-6：國三生在邏輯定位理解之邏輯次序和概念說明得分的分佈

邏輯次序 符號意義	一階段(甲)	
	0-2	3-4
0-1	64	20
2	69	70

邏輯次序 概念說明	二階段(乙)	
	0-2	3-4
0-4	36	10
5-8	121	53

至於邏輯定位理解中「辨識敘述的邏輯次序(甲式和乙式的第 5、6 題)」，和甲式(一階段幾何證明題)第 5、6 題相關的概念說明(符號意義)包含第 11-1、12 題，和乙式(二階段幾何證明題)第 5、6 題相關的概念說明包含第 1、4、9-2、10-2、11-1、11-2、12 題。表 4-3-6 是國三生在邏輯定位理解之辨識邏輯次序和概念說明得分的人數分

佈，這個結果表示**在一階段幾何證明題中，符號意義不足(0-1)的學生是難以辨識證明中敘述的邏輯次序；在二階段幾何證明題中，概念說明不足(0-4)的學生是難以辨識證明中敘述的邏輯次序。**

至於摘要理解中「寫出問題和證明過程中的重點(甲式和乙式的第 8 題)」，和甲式(一階段幾何證明題)第 8 題相關的概念心像包含第 2、3、6、7 題，和乙式(二階段幾何證明題)第 8 題相關的概念心像包含第 2、3、9-1、10-1 題。表 4-3-7 是國三生在摘要理解之寫出重點和概念心像得分的人數分佈，這個結果表示**在一階段和二階段幾何證明題中，概念心像不足(0-3)的學生是難以寫出問題和證明過程中的重點。**

表4-3-7：國三生在摘要理解之寫出重點和概念心像得分的分佈

寫出重點 概念心像	一階段(甲)		二階段(乙)	
	0-2	3-4	0-2	3-4
0-3	28	2	63	16
4-6	87	106	100	41

表 4-3-8：國三生在摘要理解之寫出重點和概念說明得分的分佈

寫出重點 概念說明	一階段(甲)		寫出重點 概念說明	二階段(乙)	
	0-2	3-4		0-2	3-4
0-3	26	3	0-4	42	4
4-6	34	22	5-8	121	53
7-9	55	83			

和甲式第 8 題相關的概念說明包含第 1、4、5、8、11-1、11-2、12 題，和乙式第 8 題相關的概念說明包含第 1、4、9-2、10-2、11-1、11-2、12 題。表 4-3-8 是國三生在摘要理解之寫出重點和概念說明得分的人數分佈，這個結果表示**在一階段幾何證明題中，概念說明不足(0-3)的學生是難以寫出問題和證明的重點；在二階段幾何證明題中，概念說明不足(0-4)的學生也是難以寫出問題和證明的重點。**

表 4-3-9 是國三生在一般性理解中「辨識證明過程能有效化的命題(甲式和乙式第 10、13 題)」和「概念心像」、「概念說明」得分的人數分佈，這個結果表示，**在一階段(甲式)和二階段(乙式)幾何證明題中，概念心像越弱的學生越難以正確辨識證明過程能有效化的命題。在一階段(甲式)和二階段(乙式)幾何證明題中，概念說明越弱的學生越難以正確辨識證明過程能有效化的命題。**

表 4-3-9：國三生在一般性理解和概念心像與說明直接得分的分佈

一般性	一階段(甲)			一般性	二階段(乙)		
概念心像	0	1	2	概念心像	0	1	2
0-3	21	7	2	0-3	52	23	4
4-6	77	64	52	4-6	79	51	11
概念說明				概念說明			
0-3	19	8	2	0-4	36	9	1
4-6	30	19	7	5-8	95	65	14
7-9	49	44	45				

綜言之，能辨識證明引用的事實之必要條件有概念心像和概念說明，能辨識敘述的邏輯次序之必要條件有概念說明，能摘要重點之必要條件有概念心像和概念說明，能辨識證明過程能有效化的命題有概念心像和概念說明。為什麼高中生在各面向幾何證明閱讀理解表現和知識的相關性很低？主要的原因應該是高中學生之間在知識發展的一致性比國三學生來得高，有 26.2%和 16.8%的高中生分別在甲式和乙式相關的知識表現達到滿分，但這些在知識得高分的學生在理解表現上仍有不小的差異性。

(三) 幾何知識與幾何證明閱讀理解自我評估

將知識先區分成心像、說明、構圖，表 4-3-10 是各子知識和自我評估一階段幾何證明各理解面向間的相關性。其中，綜合評估是指表層、邏輯定位、摘要、一般性和應用等理解面向評估結果的總和。結

果發現，對國三學生評估一階段幾何證明閱讀理解程度而言，在五個理解面向上的自我評估結果都和概念心像、概念說明和構圖間呈現中度相關(0.3 以上，不滿 0.7)。對高中生評估一階段幾何證明閱讀理解程度而言，沒有任何理解面向上的自我評估結果和概念心像、概念說明或構圖間呈現中度相關以上。

表 4-3-10：自我評估一階段幾何證明理解程度和各子知識間的相關性

知識 閱讀理解評估		心像	說明	構圖
表層	國三	.466	.459	.427
	高中	.097	.110	.084
邏輯 定位	國三	.505	.486	.524
	高中	.179	.201	.140
摘要	國三	.386	.401	.458
	高中	.075	.117	.152
一般性	國三	.345	.465	.345
	高中	-.035	.070	.076
應用	國三	.406	.426	.449
	高中	.035	.080	.141
綜合 評估	國三	.487	.516	.518
	高中	.063	.134	.146

表 4-3-11：自我評估二階段幾何證明理解程度和各子知識間的相關性

知識 閱讀理解評估		心像	說明	構圖
表層	國三	.295	.536	.353
	高中	.054	.106	.191
邏輯 定位	國三	.231	.427	.416
	高中	.073	.156	.195
摘要	國三	.263	.394	.281
	高中	.090	.194	.169
一般性	國三	.242	.340	.326
	高中	.079	.204	.129
應用	國三	.219	.345	.294
	高中	.082	.124	.133
綜合 評估	國三	.332	.494	.399
	高中	.093	.202	.194

如同分析一階段幾何證明的方式，表 4-3-11 是各子知識和自我評估二階段幾何證明各理解面向間的相關性。對國三學生評估二階段幾何證明閱讀理解程度而言，沒有任何理解面向上的自我評估結果同時和概念心像、概念說明和構圖間呈現中度相關(0.3 以上，不滿 0.7)；表層理解、邏輯定位理解和一般性理解的自我評估結果同時和概念說明和構圖間呈現中度相關；摘要理解和應用理解的自我評估結果只和概念說明間呈現中度相關。對高中生評估二階段幾何證明閱讀理解程度而言，也和評估一階段幾何證明閱讀理解程度一樣，沒有任何理解面向的自我評估結果和概念心像、概念說明或構圖間呈現中度相關以上。

二、邏輯推理與幾何證明閱讀理解的關係

(一) 邏輯推理

表 4-3-12 呈現國高中學生在概念情境邏輯中，直接確認、等價確認和非限定確認的得分分佈。假設以答對 7 成以上作為具有各面向邏輯的標準，即直接確認、等價確認、非限定確認分別得 21 分、5 分、5 分以上者，則**分別有 38%、15%、10%的國三學生具有概念情境中直接確認、等價確認和非限定確認的邏輯；分別有 65%、40%、14%的高中學生具有概念情境中直接確認、等價確認和非限定確認的邏輯**。而且，高中生在直接確認的通過率是國三生的 1.7 倍，在等價確認的通過率是國三生的 2.6 倍，在非限定確認的通過率是國三生的 1.3 倍。以 T Test 檢驗假設：國高中生在三種確認的表現無顯著差異。結果顯示，只有在非限定確認上是不拒絕國高中生的表現無顯著差異(p=.025>0.005)。

表 4-3-13 呈現國高中學生在記號情境邏輯中，不同演繹規則的答

對率。直接確認、等價確認和非限定確認的問題分別是第 21 和 24 題、第 23 和 25 題、第 20 和 22 題，以表現較佳的結果來看，**分別有 66%、45%、28%的國三學生具有記號情境中直接確認、等價確認和非限定確認的邏輯；分別有 84%、59%、48%的高中學生具有記號情境中直接確認、等價確認和非限定確認的邏輯**。以 T Test 檢驗假設：國高中生在五種演繹規則的表現無顯著差異。結果顯示，高中生在五種演繹規則上的得分都顯著高於國三學生的得分($p<0.005$)。以 Mann-Whitney U test 檢驗假設：國高中在記號情境的直接、等價和非限定確認的表現無顯著差異。結果顯示，高中生在記號情境中三種邏輯確認的得分都顯著高於國三學生的得分($p<0.005$)。

表 4-3-12：中學生概念情境的直接、等價和非限定確認之得分分佈(%)

得分		0-4	5-8	9-12	13-16	17-20	**21-24**	**25-28**	**29**
直接確認	國三	1.6	7.2	14.9	20.7	17.6	**14.4**	**20.7**	**2.9**
	高中	0.0	2.3	3.8	7.8	20.6	**31.9**	**30.4**	**3.1**
得分		0	1	2	3	4	**5**	**6**	**7**
等價確認	國三	65.3	12.6	2.9	2.9	1.1	**1.8**	**3.4**	**9.9**
	高中	39.9	8.6	3.7	4.0	3.7	**4.7**	**8.2**	**27.2**
非限定確認	國三	64.9	12.4	6.8	3.2	2.7	**3.8**	**1.6**	**4.7**
	高中	61.5	12.3	3.4	5.0	4.0	**4.6**	**2.5**	**6.8**

表 4-3-13：中學生在記號情境的演繹規則之答對率(%)

題號	演繹規則	國三(n=443)	高中(n=766)
20	AC $p \rightarrow q, q$	28.2	47.8
21	MP $p \rightarrow q, p$	65.5	83.6
22	DA $p \rightarrow q, \bar{p}$	26.2	46.0
23	MT $p \rightarrow q, \bar{q}$	39.3	52.0
24	SL $p \rightarrow q, q \rightarrow r, p$	46.0	74.5
25	MT $p \rightarrow q, \bar{q}$	44.5	58.7

綜合上述的結果顯示，高中生雖然在記號情境邏輯的非限定確認表現顯著優於國三學生，可是在概念情境邏輯的非限定確認表現並未顯著優於國三學生。據此，本研究建議高中生的邏輯學習不要僅限於記號情境的邏輯，除了在非限定確認上也有必要引入概念情境邏輯的學習，還要注意記號情境和概念情境間邏輯推理的連結。由國三學生在記號邏輯中直接確認(MP 和 SL 演繹規則)的答對率都大約高於66%，本研究也建議學習邏輯時不妨記號邏輯的直接確認搭配概念情境邏輯的直接確認。

(二) 邏輯推理與幾何證明閱讀理解實際表現

表 4-3-14：一階段幾何證明各理解面向和各子邏輯間的相關性

閱讀理解表現 \ 邏輯		直接確認		等價確認		非限定確認	
		概念	記號	概念	記號	概念	記號
表層	國三	.454	.252	.190	.112	.082	.285
	高中	.251	.070	.064	.151	.026	.135
邏輯定位	國三	.437	.233	.267	.193	.198	.251
	高中	.210	.057	.177	.150	.142	.149
摘要	國三	.501	.207	.259	.214	.178	.271
	高中	.223	.100	.073	.006	.169	.087
一般性	國三	.411	.127	.322	.147	.223	.195
	高中	.227	.122	.179	.107	.103	.109
應用	國三	.390	.216	.226	.147	.188	.147
	高中	.162	.097	.132	.107	.061	.101
綜合理解	國三	.591	.276	.341	.215	.233	.311
	高中	.344	.146	.204	.128	.162	.184

將邏輯區分成概念情境和記號情境，再於各情境中區分出直接、等價和非限定確認，表 4-3-14 是各子邏輯和一階段幾何證明各理解面向間的相關性。結果發現，對國三學生理解一階段幾何證明而言，概

念情境的直接確認和各理解面向間都呈現中度相關(大於 0.3，不滿 0.7)；概念情境的等價確認和一般性理解呈現中度相關。對高中學生理解一階段幾何證明而言，沒有任何理解面向和任何情境的某種確認邏輯呈現中度相關以上。

如同分析一階段幾何證明的方式，表 4-3-15 是各子邏輯和二階段幾何證明各理解面向間的相關性。結果發現，對國三學生理解二階段幾何證明而言，概念情境的直接確認只和表層理解和摘要理解間呈現中度相關(大於 0.3，不滿 0.7)；記號情境的直接確認只和表層理解呈現中度相關。對高中學生理解二階段幾何證明而言，沒有任何理解面向和任何情境的某種確認邏輯呈現中度相關以上。

表 4-3-15：二階段幾何證明各理解面向和各子邏輯間的相關性

邏輯 閱讀理解表現		直接確認		等價確認		非限定確認	
		概念	記號	概念	記號	概念	記號
表層	國三	.429	.362	.088	.188	.090	.115
	高中	.157	.069	.098	.037	.013	.014
邏輯定位	國三	.275	.095	.099	.042	.072	.169
	高中	.160	-.037	.091	.019	.090	.038
摘要	國三	.369	.285	.108	.088	.171	.169
	高中	.199	.028	.151	.012	.011	.131
一般性	國三	.157	.089	.148	-.004	.111	.145
	高中	.179	.058	.170	.118	.094	.089
應用	國三	.193	.077	.093	.039	.206	.150
	高中	.212	.058	.153	.083	.149	.133
綜合理解	國三	.439	.288	.161	.114	.194	.224
	高中	.307	.061	.229	.079	.128	.146

表 4-3-16 是國三生在邏輯定位理解中「辨識證明引用的性質(甲式和乙式的第 7 題)」和記號情境中「直接確認邏輯(邏輯推理第 21 和 24 題)」得分的人數分佈，這個結果表示**在一階段和二階段幾何證明題中，概念情境直接確認邏輯越弱的學生越難以完備辨識證明引用**

的性質；同樣地，記號情境直接確認邏輯越弱的學生也越難以完備辨識證明引用的性質。

表 4-3-16：國三生在辨識性質和概念直接與記號直接得分的分佈

辨識性質 概念直接	一階段(甲)			辨識性質 概念直接	二階段(乙)		
	0	1	2		0	1	2
0(0-9)	12	10	3	0(0-9)	15	10	1
1(10-19)	32	46	25	1(10-19)	37	41	26
2(20-29)	19	52	24	2(20-29)	19	39	32
記號直接				記號直接			
0	15	6	4	0	9	4	2
1	14	18	6	1	14	18	6
2	34	84	42	2	48	68	51

表4-3-17是國三生在一般性理解中「辨識證明過程有效化的命題(甲式和乙式第10、13題)」和概念情境中「直接確認邏輯」、記號情境中「直接確認邏輯(邏輯推理第21和24題)」得分的人數分佈，這個結果表示，**在一階段(甲式)和二階段(乙式)幾何證明題中，概念情境直接確認邏輯越弱的學生越難以正確辨識證明過程有效化的命題；同樣地，記號情境直接確認邏輯越弱的學生也越難以正確辨識證明過程可有效化的命題為何。**

表4-3-17：國三生在一般性理解和概念直接與記號直接得分的分佈

一般性 概念直接	一階段(甲)			一般性 概念直接	二階段(乙)		
	0	1	2		0	1	2
0(0-9)	16	8	1	0	18	8	0
1(10-19)	50	39	14	1	63	29	12
2(20-29)	32	24	39	2	50	37	3
記號直接				記號直接			
0	16	5	4	0	11	4	0
1	18	15	5	1	20	13	5
2	64	51	45	2	100	57	10

綜言之，能辨識證明引用的性質之必要條件有概念情境中和記號情境中的直接確認邏輯；能正確辨識證明過程可有效化的命題為何之必要條件有概念情境中和記號情境中的直接確認邏輯。為什麼高中生在各面向幾何證明閱讀理解表現和邏輯推理的相關性很低？主要的原因應該是高中學生之間在邏輯表現的一致性比國三學生來得高，有 31.8%高中生在概念情境直接確認的表現達到 25 分以上(滿分 27 分)，也有 84%高中生具有記號情境的直接確認邏輯，但這些在邏輯得高分的學生在理解表現上仍有不小的差異性。

(三) 邏輯推理與幾何證明閱讀理解自我評估

表 4-3-18：自我評估一階段幾何證明理解程度和各子邏輯間的相關性

閱讀理解評估 \ 邏輯		直接確認		等價確認		非限定確認	
		概念	記號	概念	記號	概念	記號
表層	國三	.447	.207	.205	.181	.089	.183
	高中	.049	.011	.061	-.058	.057	.018
邏輯定位	國三	.449	.244	.234	.217	.146	.213
	高中	.130	.098	.109	-.031	.074	.083
摘要	國三	.385	.204	.247	.185	.218	.231
	高中	.194	.090	.032	.034	.051	.084
一般性	國三	.447	.226	.242	.153	.088	.219
	高中	.150	.052	.064	.045	.066	.059
應用	國三	.429	.227	.211	.192	.126	.163
	高中	.116	.063	.059	.050	.011	.076
綜合評估	國三	.522	.297	.264	.258	.284	.234
	高中	.175	.067	.083	.017	.058	.092

將邏輯區分成概念情境和記號情境，再於各情境中區分出直接、等價和非限定確認，表 4-3-18 是各子邏輯和一階段幾何證明各理解面向間的相關性。結果發現，對國三學生評估一階段幾何證明閱讀理解

程度而言，概念情境的直接確認和各理解面向間都呈現中度相關(大於 0.3，不滿 0.7)。對高中學生評估一階段幾何證明閱讀理解程度而言，沒有任何理解面向和任何情境的某種確認邏輯呈現中度相關以上。

如同分析一階段幾何證明的方式，表 4-3-19 是各子邏輯和自我評估二階段幾何證明理解程度間的相關性。結果發現，對國三學生評估二階段幾何證明閱讀理解程度而言，表層理解、邏輯定位理解、摘要理解、應用理解的自我評估結果都分別和概念情境的直接確認之間呈現中度相關(大於 0.3，不滿 0.7)；記號情境的直接確認只和摘要理解的評估結果呈現中度相關。對高中學生評估二階段幾何證明閱讀理解程度而言，沒有任何理解面向的評估結果和任何情境的某種確認邏輯呈現中度相關以上。

表 4-3-19：自我評估二階段幾何證明理解程度和各子邏輯間的相關性

邏輯 閱讀理解評估		直接確認		等價確認		非限定確認	
		概念	記號	概念	記號	概念	記號
表層	國三	.345	.297	.084	.063	.033	.075
	高中	.158	.075	.146	.097	.109	-.005
邏輯定位	國三	.345	.290	.102	.073	.040	.057
	高中	.148	.132	.191	.103	.109	.101
摘要	國三	.362	.305	.125	.103	.088	.173
	高中	.144	.106	.120	.145	.024	.045
一般性	國三	.271	.272	.018	.058	.097	.084
	高中	.060	.056	.036	.035	.021	.029
應用	國三	.316	.294	.072	.132	.148	.115
	高中	.084	.041	.119	.049	-.015	.073
綜合評估	國三	.375	.358	.107	.136	.101	.126
	高中	.148	.101	.146	.102	.050	.065

三、幾何證明閱讀理解表現的預測模式

在語文閱讀理解的研究中，將理解所需的內容知識納入理解表現的觀察變項中，但本研究認為具有理解證明所需的內容知識並不見得可以適當地用來理解證明，所以將知識與邏輯從幾何證明的理解面向中抽離，進而分析知識、邏輯以及兩者對於幾何證明的閱讀理解表現的解釋度。此外，本研究也分析知識、邏輯以及兩者對於幾何證明閱讀理解自我評估的解釋度。

表 4-3-20：實際表現、自我評估、知識與邏輯間的相關性

幾何證明結構		實際表現總分		自我評估總分	
		一階段	二階段	一階段	二階段
知識總分	國三	.660	.528	.611	.509
	高中	.356	.326	.164	.237
概念情境*1	國三	.594	.434	.503	.346
	高中	.371	.365	.172	.241
記號情境*2	國三	.408	.319	.402	.308
	高中	.255	.169	.093	.147
邏輯*3	國三	.605	.452	.519	.369
	高中	.386	.374	.175	.203
實際理解	國三	1.00	1.00	.719	.610
	高中	1.00	1.00	.179	.326

*1：概念情境指直接、等價和非限定的概念情境邏輯
*2：記號情境指直接、等價和非限定的記號情境邏輯
*3：邏輯包含概念情境和記號情境各種類型的邏輯

在進行複迴歸分析前，先探討學生閱讀理解的實際表現與自我評估分別和知識總分、概念情境邏輯、記號情境邏輯的相關性。參考表 4-3-20，國三學生在一階段幾何證明和二階段幾何證明中實際表現和自我評估間的相關性分別是.719 和.610。另一方面，國三學生表現在這些變數間的相關性都比高中學生來得高，而且在一階段幾何證明的相關性也高於二階段幾何證明。這顯示學習幾何證明時，知識發展、邏輯發展和各面向理解發展間的差異性是高中學生大於國三學生，較

複雜的幾何證明題大於較簡單的幾何證明題。

表 4-3-21：以知識、概念情境直接確認邏輯預測國三學生閱讀理解表現的迴歸分析

幾何證明結構	反應函數 (Y：閱讀理解表現，X1：知識，X2：概念情境的直接確認邏輯)	R-square (Adjusted R-Square)	離群值個數 (編號)
一階段	Y=.66X1	.44	0
	Y=.59X2	.35	0
	Y=.49X1+.37X2 (VIF=1.266)	.54(.54)	1(213)
二階段	Y=.53X1	.28	2(180,218)
	Y=.44X2	.19	1(180)
	Y=.41X1+.24X2 (VIF=1.309)	.32(.32)	1(180)

表 4-3-22：以構圖、概念情境的三種邏輯預測高中學生閱讀理解表現的迴歸分析

幾何證明結構	受測對象	反應函數 (Y：閱讀理解表現，X1：構圖，X2：概念情境的三種邏輯)	R-square (Adjusted R-Square)	離群值個數 (編號)
一階段	高中	Y=.35X1	.12	2(38,215)
		Y=.37X2	.14	1(215)
		Y=.32X1+.30X2 (VIF=1.028)	.22(.22)	2(38,215)
二階段	高中	Y=.31X1	.09	0
		Y=.37X2	.13	1(223)
		Y=.31X1+.23X2 (VIF=1.065)	.18(.18)	1(223)

以 One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test 檢驗假設：國三學生和高中生在一階段幾何證明或二階段幾何證明的理解表現符合常態分佈。結果 p-value 都大於.05，所以表示符合迴歸分析中依變項是常態分佈的假設。從幾何證明閱讀理解和知識、邏輯的相關分析中，國三學生知識總分和綜合理解的相關性比概念心像、概念說明和構圖等子知識和綜合理解間的相關性大了.05 以上，而且國三學生也學過這些相關的知識；因此，在知識變數上採用心像、說明和構圖三個子知識的總和作為國三學生幾何證明閱讀理解表現的預測變數。但是國三學

生概念邏輯、記號邏輯和綜合理解的相關性比概念情境的直接確認邏輯和綜合理解的相關性相差小於.02；因此，在邏輯變數上只採用概念情境的直接確認作為國三學生幾何證明閱讀理解表現的預測變數。以相同的方式選取預測高中學生幾何證明閱讀理解表現的獨立變數，在知識上以構圖作為預測變數，在邏輯上以概念情境的邏輯作為預測變數。先將各變數標準化後，以迴歸分析的判定係數(R-square)來表示知識、概念情境的直接確認邏輯對於綜合理解的解釋度，表 4-3-21 和表 4-3-22 呈現各預測變項的係數、判定係數以及超過三個標準殘差的個數。另外檢定假設：各係數等於 0，檢定結果都是拒絕此假設(p<.05)。

知識和概念情境中直接確認邏輯分別可以解釋國三學生一階段幾何證明閱讀理解表現總變異數的 44%和 35%，以及解釋國三學生二階段幾何證明閱讀理解表現總變異數的 28%和 19%。構圖和概念情境中三種邏輯分別可以解釋高中學生一階段幾何證明閱讀理解表現總變異數的 12%和 14%，以及解釋高中學生二階段幾何證明閱讀理解表現總變異數的 9%和 13%。

同時納入知識和概念情境的直接確認邏輯兩個預測變數，結果顯示這兩個預測變數可以解釋國三學生一階段幾何證明閱讀理解表現總變異的 54%，其中知識的係數.49 大於概念情境中直接確認邏輯的係數.37；這兩個預測變數可以解釋國三學生二階段幾何證明閱讀理解表現總變異的 32%，其中知識的係數.41 大於概念情境中直接確認邏輯的係數.24。同時納入構圖和概念情境的三種邏輯兩個預測變數，結果顯示這兩個預測變數可以解釋高中學生一階段幾何證明閱讀理解表現總變異的 22%，其中構圖的係數.32 和概念情境中邏輯的係數.30 差不多；這兩個預測變數可以解釋高中學生二階段幾何證明閱

讀理解表現總變異的 18%，其中知識的係數.31 大於概念情境中邏輯的係數.23。觀察解釋度的規律，發現解釋一階段幾何證明閱讀理解表現總變異的比例都高於解釋二階段幾何證明閱讀理解表現總變異的比例。這個結果的意涵有，**閱讀較難的證明內容和結構時，更需要除了知識和邏輯外的其他技能。**

以 One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test 檢驗假設：國三學生(高中生)在一階段(二階段)幾何證明閱讀理解的自我評估符合常態分佈。結果高中學生在一階段幾何證明和二階段幾何證明閱讀理解的評估結果之 p-value 都小於.001，即不符合迴歸分析中依變項是常態分佈的假設。所以，本研究只針對國三學生的自我評估作複迴歸分析。參考選擇幾何證明閱讀理解表現之預測變項的方法；同樣地，在知識變數上採用心像、說明和構圖三個子知識的總和，在邏輯變數上只採用概念情境的直接確認。先將各變數標準化後，以迴歸分析的判定係數(R-square)來表示知識、概念情境的直接確認邏輯對於綜合理解的解釋度，表 4-3-23 呈現各預測變項的係數、判定係數以及超過三個標準殘差的個數。另外檢定假設：各係數等於 0，檢定結果都是拒絕此假設($p<.05$)。

表 4-3-23：以知識、概念情境中直接確認邏輯預測國三學生閱讀理解自我評估的迴歸分析之結果

幾何證明結構	反應函數 (Y：閱讀理解自我評估，X1：知識，X2：概念情境的直接確認邏輯)	R-square (Adjusted R-Square)	離群值個數 (編號)
一階段	Y=.61X1	.37	2(130,190)
	Y=.52X2	.27	1(130)
	Y=.49X1+.32X2 (VIF=1.238)	.45(.45)	2(130,190)
二階段	Y=.51X1	.26	2(117,190)
	Y=.38X2	.14	3(20,117,190)
	Y=.44X1+.18X2 (VIF=1.300)	.28(.27)	2(117,190)

知識的解釋度最高的情形是國三學生評估一階段幾何證明時(37%)，概念情境中直接確認邏輯的解釋度最高的情形也是國三學生理解一階段幾何證明時(27%)。**如果同時納入知識和概念情境的直接確認邏輯兩個預測變數，結果顯示這兩個預測變數解釋度最高的情形是國三學生評估一階段幾何證明時(45%)，其中知識的係數(.49)大於概念情境中直接確認邏輯的係數(.32)。**觀察解釋度的規律，發現知識和概念情境中直接確認邏輯對於幾何證明閱讀理解自我評估的解釋度也是在閱讀一階段幾何證明時高於閱讀二階段幾何證明。

比較知識和邏輯對國三學生在一階段幾何證明閱讀理解實際表現和自我評估的預測模式，發現預測實際表現時知識的係數是邏輯的係數之 1.3 倍，預測自我評估時知識的係數是邏輯的係數之 1.5 倍。比較知識和邏輯對國三學生在二階段幾何證明閱讀理解實際表現和自我評估的預測模式，發現預測實際表現時知識的係數是邏輯的係數之 1.7 倍，預測自我評估時知識的係數是邏輯的係數之 2.4 倍。也就是說，**以知識和邏輯預測實際表現和自我評估時，知識的影響力都比邏輯的影響力大；而且知識和邏輯權重的差異在預測自我評估時大於在預測實際表現時。所以，學生評估理解程度時可能因為太偏重知識層面來判斷自己是否理解，而導致自我評估和實際表現的落差。**

在語文的閱讀理解研究中，以閱讀動機、目標設定、行動控制和閱讀策略等十三個自我調整學習變項聯合預測國中生閱讀理解表現，結果可以解釋閱讀理解總變異的 45% (林清山和程炳林，1995)。但本研究只以知識和概念情境中直接確認邏輯二個變項預測國三學生在一階段幾何證明閱讀理解表現，結果可以解釋總變異的 54%；也以這二個變項預測國三學生在二階段幾何證明閱讀理解表現，結果可以解釋總變異的 32%。這也說明，**基本的數學知能對於幾何論證的學**

習還是具有一定的影響力；相對地，如果缺乏基本的數學知能也很難透過有效的自我調整學習技能來促進幾何論證的學習。

第四節　中學生評析幾何論證的思考特徵

個人閱讀理解的程度和其閱讀過程中所使用的思考和推理息息相關，沒有思考的閱讀自然無法建構資訊的意義，沒有推理的閱讀則失去預測新資訊的可能。當學生在數學學習的過程中需要面對許多的論證時，他們如何評估不一致或不同方式的論證？是什麼樣的因素妨礙了他們的理解？研究者希望透過這些問題的探討，能深入瞭解中學生在閱讀幾何論證時的思考和推理特徵。

Boero, Garuti & Mariotti (1996) 提出以臆測活動來發展學生的數學論證能力，而且在臆測活動中所產生的認知體(Cognitive Unity)可作為數學證明時的具體材料和工具。但 Duval 認為教室的論證活動和數學證明仍存有一道鴻溝，除了數學證明的論點有其特殊性外，展現論點的形式記號系統也是造成論證和數學證明的差異所在。Chazan (1993)的研究也指出，學生在實驗幾何的課程下所獲得的證明觀點還有：(1)證據(測量)就是證明；(2)演繹證明只是證據(測量)。這也確實顯示學生所理解的論證和數學證明想傳達的意涵仍有明顯的差異。

另一方面，雖然 Hersh (1993)曾呼籲教室裡的證明應以具有解釋性為導向，可是如果一般學生還是認為測量的結果、具體的操弄或錯誤的論點具有高度的解釋性，難道在教學上我們真能只提供學生認為具有解釋性的論證？考量數學領域所具有的獨特性，學生在數學領域中特別需要學習些什麼？研究者認為數學學習的目標不只是學會一套又一套的演算分析規則，也有必要學得一種嚴密有系統的思維方

式。因此，數學證明自然是數學學習的目標之一。教育研究的方向應該要想辦法促進學生對形式證明的瞭解，而不是一味簡化這個論證單元。如此，才能真正把數學學習過程中的這個鴻溝彌補起來而不是遮蓋起來。

為了在學生和數學論證間建立起良性的互動關係，我們必須著手探討學生面對數學論證時的認知特徵。在此，先針對兩個問題來探討此現象：(1)學生如何評析幾何論證之有效性？(2)是什麼樣的因素阻檔了他們的理解？結果發現中學生(以 JS 表示國三學生，以 S 表示高職學生，以 HS 表示高中學生)評析幾何論證之有效性的思考特徵有：(1)不當特殊化論證過程；(2)過度一般化論證過程。妨礙學生進一步理解幾何論證的因素有：(1)未意識到自己誤解的可能性；(2)未區辨證明與解說的不同；(3)排斥或不喜歡不瞭解的資訊。

一、中學生對幾何論證有效性的迷思

當 21 位高職學生(以 S 表示)看到一個測量的論證(論點 E)時，有 15 位認為測量不是完全正確的證明，其理由有同 Chazan (1993)所觀察到的

—「例子的特殊性(Every example is special)」

S13：因為有的角度不一定是像他量的。

—「測量不準(Measurement is not exact)」

S11：因為我覺得說，圖應該不能代表真正的答案吧，圖只能當作參考的，覺得不是很準確，那也要出題的人畫的很準確吧！而且在算的過程應該不能用量角器量。

之外，也有 Chazan 的研究未提到的

—「懷疑測量者」

S20：這個角度不是我量，而且我也不知道量的對不對。

—「考試的規約」

S32：量角器？考試好像不能用量角器吧。……因為考試如果用量角器就作弊，所以這題就不算了，整張考卷就沒了。

—「數學的規約」

S37：因為，用量的話，數學上應該沒有人用量的吧！… 然後，其實算數用量的話，其實大部分的數學都是用算的，然後很少人用量的吧！然後感覺對啊。

值得注意的是，卻未發現這群學過國三幾何證明的高職生主動提出，測量的無效性來自於「可能有反例」。雖然這群學生似乎尚未深刻體驗國三幾何證明中所強調的「透過證明來有效化在某些前提下的不變性與一般性」，可是他們又自有一套說服自己相信證明是對或錯的想法。到底學生如何評析不同的證明方式而造成他們誤解幾何論證的有效性？接下來，本研究將綜合所有訪談的資料，詳細說明學生誤解幾何論證有效性的思考特徵：不當特殊化論證過程，過度一般化論證過程。

(一) 不當特殊化論證過程

可能造成不當特殊化論證過程的認知方式有：(1)以數字檢驗形式證明；(2)受限於未畫出來的圖形；(3)把例子中的某種規律視為前提。

1. 以數字檢驗形式證明

當國三學生 JS09 評估論點 C(演繹式證明)為什麼是正確時，把圖中相同的符號代入同一個數字來計算。

T：你認為 C 的說法是可以證明這句話是對的，…？你的理由是什麼？

……

T：你的理由是什麼？
JS09：這兩個同樣都是 90 度，都垂直。然後這個角等於這個角，黑點等於黑點是 30 度，白點等於白點是 45 度。那這兩個加起來剛剛好 180, 180 再加上 30 和 45 剛好也等於這個(180+Z)。
T：你的理由和 C 的說法一樣嗎？
JS09：我就是看著 C 說的。

這個現象有兩種可能，第一種可能是：JS09 所理解的論點 C 已經不是一個具有一般性的形式證明，只是如同證據般的經驗論證；第二種可能是：JS09 只是以數字代入說明 C 是正確的，但是心理還是清楚論證 C 所產生的有效性。從 JS09 在「分類活動」中的反應，將論點 C 和論點 A、B、D 歸為一類，或許已經先排除第二種可能了。

T：C 跟 B 很像？
JS09：C 跟…反正就是跟這一類計算的很像。
T：ABD。就你剛剛的第一類？
JS09：他也是屬於計算，因為他已經圖告訴你了，很明了…
T：很明顯了嗎？
JS09：對，很明顯了。所以這個應該是屬於計算，那…我覺得 E 跟 F 都沒有給你圖，你要自己去思想的。
T：所以你判斷的標準是什麼？
JS09：就計算…跟這些…跟我剛才講的應該沒什麼差別吧！

當 JS09 在思考論證 C 的重點時，認為「兩個標示黑點的角相等，兩個標示白點的角相等。」是最重要的訊息。一般而言，做幾何證明的困難之一即是畫出輔助線，輔助線對圖形所產生的作用也成為整個證明過程中重要的起始資訊，而且此起始資訊的特性是「既不增加也不違背命題的已知條件」。但是，JS09 並不認為產生此資訊的輔助線是重點，而認為此起始資訊才是重點。

T：你為什麼認為這句話是最重要的呢(兩個標示●的角相

等，兩個標示○的角相等)？這一段話是最重要的？
JS09：因為這些都是普通…講角度，然後這個才是重點。不知道怎麼講…

對中學生來說,「辨識畫輔助線是一個重點」是否是一件困難的工作？從訪談的資料發現，仍有受訪的國三學生，例如：JS23，既能辨識輔助線是證明的重點, 也能說出為什麼輔助線才是重點。也就是說, JS09 只把重點放在角度，反觀 JS23 已把重點鎖定在給出角度的前提。

T：那你判斷這句(三條平行線)為最重要的原因是什麼？
JS23：因為他只要畫平行線的話，通過的直線畫過去，他的內錯角是相等的，所以畫平行線才是他的重點。
T：那你是怎麼判斷這個才是重點，這個(第二跟第三行)不是。
JS23：因為你只要畫這個平行線以後，就知道他這個內錯角都相等，所以這句話(第二第三行)算是多餘的吧，等於是用這一個(平行)推算出來這一個(內錯角相等)。
T：可是題目沒給平行線，他怎麼可以用。
JS23：應該沒關係吧！

能不能把輔助線列為重點，是否意味著對於論證 C 有不同層次的理解？雖然從本研究的訪談資料中還不足以給出定論，從下列對話中 JS23 都給論證 C 和 D 滿分的理由中，似乎答案已經呼之欲出。從這裡, 研究者又觀察到 JS23 已明確提到論證 C 和 D 所能推得的一般性, 但 JS09 還認為屬於形式證明的論證 C 和屬於經驗論證的 B 很像。

T：那這兩個(C、D)都給 10 分的原因是什麼？
JS23：因為 C 這個說法，不管什麼三角形都可以應用他這個說法來確定說他是正確的。D 也是一樣的意思。

----

2. 受限於未畫出來的圖形

在乙式第 13 題(a)「你同意”小明的證明過程可以證明敘述甲一定是正確的”嗎？」，學生 JS24 勾選「同意」；但在接下來的(b)「你同意”小明的證明過程可以證明敘述甲有時候是正確的有時候是錯誤的”嗎？」，該生勾選「有點同意有點不同意」。但依照二元邏輯的判斷，如果同意(a)就會不同意(b)，或是如果同意(b)就會不同意(a)。透過測後訪談來瞭解 JS24 的想法時，發現學生思考敘述和證明時有受限於圖形的傾向。JS24 主要有兩種推論，一是認為小明的證明過程可以證明敘述甲(一定)是正確的，二是認為小明的證明過程可以證明敘述甲有時對有時錯。把(一定)括弧起來是想提醒讀者，雖然題目有出現這兩個字，可是學生的心理可能已經忽略了這兩個字，甚至是早就自動跳過這兩個字。

(第一次訪談)

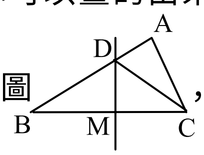
T：那我們來看 13，第一個你同意小明可以用來證明甲的敘述。那為什麼你覺得第二個是有點同意又不同意。

JS24：小明的證明過程是正確的。可是敘述甲沒有圖，畫出來有時候不太一樣。

T：那你覺得甲的敘述會跟這個圖形長的一樣嗎？

JS24：應該有的時候會一樣有的時候會不一樣吧。

T：那你可以畫的出來嗎？

(學生畫圖 

，但忽略已知條件中的 $\overline{DA}=\overline{DB}$)，

JS24：就跟他差這個了($\overline{DA}=\overline{DC}$)。所以就跟他的圖形有點相同又不一樣。

T：那這個(b 小題)為什麼有點同意又不太同意？

JS24：像這個就有時候畫不出圖形，就有點不太同意。

T：是你畫不出來，還是敘述甲的圖形畫不出來。

JS24：敘述…什麼意思？

T：你說畫不出來的意思是什麼？

JS24：……有沒畫出(敘述)甲的圖形…，也是我畫不出甲的圖形。

T：小明的證明過程有證明敘述甲是正確的嗎？
JS24：是。
T：為什麼？
JS24：如果圖形一樣，就是正確的。
T：小明的證明過程有證明敘述甲有時對有時錯嗎？
JS24：(點頭)就像我剛剛畫的圖一樣。

JS24 一方面基於所畫出的圖形和附圖相同時來推論是正確的, 一方面基於畫出一個有誤的圖形當成敘述甲的圖形之一來推論有時對有時錯，這兩者都是以圖形來判斷小明的證明以及敘述甲的一般性。研究者懷疑，如果把敘述甲另一個潛在推論「△ABC 是直角三角形」提示 JS24，是否就能將減少 JS24 對於敘述甲描述的圖形所產生的不確定感。因此，將設計好的問題請教師協助訪談。由第二次訪談的內容也可以更肯定的說：無論有無直角的提示，JS24 都相信「有可能畫出其他圖形符合敘述甲的已知條件」。

(第二次訪談)
T：如果敘述甲的三角形 ABC 改成直角三角形 ABC，小明的證明過程有證明敘述甲有時對有時錯嗎？
JS24：如果要直角，...那個(之前畫的圖)就不是…。可以吧！不對，好像不對，不行！
T：為什麼？
JS24：我覺得怪怪的。
T：哪裡怪？
JS24：敘述甲沒有圖，還有別的圖是我沒畫到的。

另一位學生 JS38 在乙式第 13 題(a)和(b)都勾選不同意，雖然她的理由主要來自於老師說過的規範，但是自己也不確定是否不需要圖形也能判斷小明的證明對不對。無論是否受到教師教學的影響，其實 JS38 對於小明的證明過程是否證明了某一敘述之判斷, 還是受限於沒畫出來的圖形。

T：為什麼你不同意？

JS38：我不知道小明的證明過程有沒有包括圖，如果沒有圖就是錯的。老師說過證明要有圖，不然可能是用背的。

T：你自己認為要不要有圖？

JS38：我不一定…，沒有的話可能真的就不知道小明的證明對不對。

T：你能從小明的證明自己畫圖嗎？

JS38：不一定畫出來會不一樣。

在「分類活動」中，S24 判斷論證 A 和 F 是錯的，他判斷的理由也是受限於沒畫出來的圖形(F 沒有圖)。但是論證 F 的錯不在於沒有圖形，而是 F 根本不是以論點來證明敘述是對的，只是用一個已知事實來解說敘述的合理性。

T：好，那 F 呢？

(學生思考)

T：為什麼給他 0 分？

S24：因為他這只是，呃…這只是他的敘述，如果證明的話要有圖。這種不能列為證明的方法之一，所以這只是單純的敘述，沒有圖沒辦法證明。

JS24 以視覺化轉換的不確定性來判定證明過程的特殊性以及敘述的一般性，JS38 和 S24 以需要視覺化的圖形才能判斷證明過程是否證明了某敘述。這些思維又不同於典型心像，典型心像通常由於學生對圖形產生過多的潛在假設或性質而減少圖形可變的元素。相對地，這些學生基於圖形外觀的多樣性而增加圖形可變的元素。例如：JS24 懷疑視覺化轉換的不確定性，或是其他兩位需要視覺化才有確定感，這些反應都可能是由於學生感受到有其它未知或可變的元素。研究者猜測這種感受的來源，可能是學生將文字轉譯成圖形時，不過，這個猜測仍有待進一步的檢驗。

3. 把例子中的某種規律視為前提

在「分類活動」中，學生會以論證 A 中的三個角是相等的，來說明為什麼論證 A 是錯誤的，例如：S24、S13 和 S33。

S24：因為他(A)這個設定的 170 度並不代表那個 XYZ 就代表 170，可是他這個設定的數就證明說他是錯的，他符合他設定的 170。

……

T：所以 A 的證明方法裡面可能有地方是做錯的，那你要不要稍微再看一下他或許是在哪個地方有做錯。

S24：呃…可能題目沒有講到說這三個角度相等嘛。

T：題目沒有說三個角度相等？

S24：對，這只是他自己假設的。

T：那你覺得他的假設有沒有問題？

S24：因為題目沒有講說三個角度相等，所以他不應該把三個角度都設為 170。

T：那你覺得 A 講的也對。B 講的也對。可是他一個認為它敘述錯，一個認為它敘述對，這樣不會怪怪的嗎？

……

S13：…對ㄏㄡ(突然想到什麼的樣子)

T：你現在講對ㄏㄡ，你是突然想到什麼，你要不要把它講出來。

S13：我的意思是說，他說是錯的，我就說他這證明是對的。就是可能是因為他假設的方法是這樣，所以結果就是錯的。

T：你覺得錯在哪裡？

S13：就那些角不一定是相等的啊。

T：B 的那三個角也相等。

(S13 找出其他角度的度數。)

T：那有沒有可能是這樣？

S13：應該沒可能吧。

T：為什麼你會覺得沒可能？

S13：因為..這個 170 的話，這個是 10 度，這個也是 10 度，然後 20+170 就變成 190 了，所以這些角度是錯的。

T：所以你現在覺得 A 講的對嗎？

S13：錯的吧。

T：那你剛剛為什麼覺得 A 對？
S13：沒有想到說他的角度的問題。
T：那 B 呢？
……
T：B 的三個角也是相等的。
S13：B 的假設錯，可是證明對。

實際上論證 A 是一個非例的理由, 不在於他假設的三個角是相等的，而在於他不滿足「三角形內角和 180 度的性質」。但是，S24 認為 A 引用了一個命題沒有的已知條件，所以 A 不足以推翻此敘述。雖然 S13 後來察覺了論證 A 不滿足「三角形內角和 180 度的性質」，可是當訪談者提出 B 中的三個角也是相等的時候, S13 又懷疑起 B 的假設, 即使她之前已經判斷 B 的說法是正確的。另一位學生 S33 的情形和 S13 類似，但是對於 B 的三個角相等有不同的反應。S33 認為三個角不一定相等的關係只是局限於 XYZ 三個角，所以並不表示三角形的內角不能相等，但仍相信反例是存在的。也就是說，S33 相信是有反例的, 只是論證 A 的例子多用了題目沒給的條件, 所以不是反例只是非例。

S33：A 是錯的，三個角不一定會相等。
T：為什麼 B 的三個角也相等，你認為 B 對？
S33：B 的三個角和 A 的不同。
T：哪裡不同？
S33：A 是指 XYZ 的三個角。
T：你認為有沒有可能找到一個三個角不相等？
S33：應該可以，只是我還沒找到。
T：請你現在找找看。
……
T：你要找什麼反例？
S33：三個角不一樣，…，套進去又不會一樣。

不論 S24、S13 和 S33 細部的想法有何差異，但他們都先以論證

A 的三個角相等來否定 A。其實每個例子本來就具有個別的特殊性，只是三個角相等的特殊性是容易被認為具有特別意義的規律，進而將此規律視為不合法的已知條件，也就是原敘述沒有的已知條件。雖然學生已能注意到檢驗論點的前提，可是卻把不是前提的規律錯當前提，而誤解了論證 A 為什麼是錯的。這個研究發現也提醒研究者在設計數學論證的教學時，必需考量如何幫助學生有效評估一個例子是否足以反駁一個命題，尤其是「學生把例子中的規律錯當前提而否定例子的合法性」在文獻上是比較少被注意的。

簡而言之，上述三種不當特殊化論證過程的情形：(1)以數字檢驗形式證明；(2)受限於畫出來與未畫出來的圖形；(3)把例子中的某種規律視為前提，其不當特殊化的對象都在於論證過程的有效性。例如：JS09 把論證過程中使用的記號視為未知數而非一般數，但並未意識此舉已窄化了證明的有效性。JS24 把證明過程中圖形的明確性對照只有敘述沒有圖形的不確定性後，有意識地認為有圖的證明過程所產生的有效性只是局部的。S24 把例子中的規律視為前提，而誤解論證 A 為什麼是錯誤的。

(二) 過度一般化論證過程

可能造成過度一般化論證過程的認知方式有：(1)擴充演算法或動態圖形的有效性； (2)強化圖形或數字的效用；(3)開放前提或結論的位置；(4)增加前提或結論的強度。

1. 擴充演算法或動態圖形的有效性

在「分類活動」中，論證 B 和論證 E 都是經驗論證的例子，可

是學生並不認為這兩種論證方式是一樣的，S22 認為論證 B 可以證明 $x + y = 180 + z$，是因為任何三角形照著 B 的說法再算一次都是對的。而且除了認為論證 E 用量的是不能證明 $x + y = 180 + z$ 是對的，也把使用量角器當成是數學實力不好的表現。

T：那你覺得這幾個人的說法，哪些人的可以說 $x+y=180+z$ 是對的？

S22：B 然後 C，D，F，可是 F 還是沒有給結論耶。這樣好奇怪喔！

T：為什麼 B 可以？

S22：B 先說 60 度是怎麼來的，然後再去驗算。

T：E 為什麼不可以？

S22：他的數學實力不是很好，還需要拿量角器。

……

T：B 只算了 60 度的情形，你還是給他滿分？

S22：只要 P 點動一下，就知道這三個角。照著 B 說的再算一次，這樣算都是對的。

T：B 和 E 有什麼不同？

S22：B 是假設的，他(E)用量的才能發現。

S16 對於論證 B 可以證明 $x + y = 180 + z$ 的看法和 S22 不同，S16 主要是因為覺得可以動可以變的說法，可以用來證明 $x + y = 180 + z$ 是對的。而且，S16 認為屬於經驗論證的 B 和屬於解說性論證的 F 才是既正確的又可以證明 $x + y = 180 + z$ 是對的。特別的是，S16 認為論證 C 的輔助線好像可以變也可以不變。研究者猜測 S16 所想的變可能是三條平行線一起移動，不變可能是指三角形變但三條平行線還是不變。如果是這樣的話，我們必須考量三條平行線的不同限制會對學生評析幾何論證之有效性造成哪些影響？之前的論證研究大都著重於探討輔助線對於學生做證明時所造成的困難，至於學生如何評估輔助線在幾何論證中的角色仍有待更多研究的探討。

T：嗯，好，我們再來看 B 的說法，一樣啊，你來看 B 的敘述，如果說滿分是 10 分的話你要給他幾分？

（學生看圖思考）

S16：嗯，好像對耶。...移動...10 分。

T：你為什麼給他 10 分呢？

S16：因為我覺得他證明滿正確的，因為他說他可以移動 P 點嘛，因為他剛剛前面提到說 P 可以移動嘛，然後，他的證明都對嘛，這個外角加這個外角會等於 180 加 60 度，就是 z 角，所以我覺得他應都會了吧。

……

S16：分類喔！這邊一個，因為他講的是錯的，這四個一類。

T：哪四個？

S16：BDEF。

T：為什麼？

S16：因為他們都用角度來測驗。

T：用角度來測驗？

S16：ㄟ，其實這(C)也是用角度，可是我覺得他應該要分一類啊，因為他有用線。

T：所以結論就是你分成三類，A 一類，BDEF 一類，C 一類。

……

T：為什麼 E 比 B 少 2 分？B 也是用一個例子，有比 E 詳細嗎？

S16：移動，他(B)說 P 可以移動。他(E)講的是正確的，可是證明不夠多。

T：這些人的說法都可以說 x+y=180+z 是對的？

S16：B…F 可以。…C 不確定。

T：為什麼只有 BF？

S16：都可以動，可以變。

T：F 哪裡可以動？

S16：他說任給，就是隨便都可以。

T：那 C 哪裡不確定？

S16：他的線也可以變，可是變了就不確定會不會相等。…如果線不變，…不確定…。

依據上述兩個個案的訪談結果，研究者發現 S22 認為應用相同演

算法就可得到相同結果的論證 B 是有效的證明，但 S22 未察覺這樣的想法事實上已經先認定此敘述一定是對的，否則如何確認演算法的結果都是相同的。S16 認為論證中感覺可動或可變的才是證明，所以選擇論證 B(移動 P)和論證 F(任給)可以用來證明敘述是正確的。為什麼 S16 不認為論證 D(形式證明)的 X、Y、Z 也是可變的呢？從該生把論說 D 和 E 分成同一類的動作，我們或許可以猜測這又是一名把變數當未知數思考的學生。

2. 強化圖形和數字的效用

S25 在「分類活動」中，先以有圖和沒有圖作為分類的標準。再刪除錯誤的論證 A 後，把有圖且驗證正確的論證視為正確的證明。當訪談者再確認 S25 究竟認為 B、C、D、E 這些論證可以證明了這個圖，還是可以證明這個敘述，結果 S25 的反應是都可以。這表示 S25 以對偶的關係來看敘述和圖，卻因此忽略了圖的虛構性(視覺上的虛擬)，而把屬於經驗論證的 B 和 E 都當成是正確的證明。

T：...，請你將這六個人的說法分類，隨便你用什麼標準，...，然後告訴我你為什麼這麼分。
S25：沒有圖的和有圖的。
T：ABCDE 一類？
S25：他都有圖，…，也有數字。
T：E 有嗎？
S25：他是用題目給的圖。
T：哪些說法可以證明 X+Y=180+Z？
S25：有圖的就可以驗證。
T：哪些說法可以？
S25：BCDE。
T：可以做什麼？是證明了圖？還是這個敘述？
S25：都可以，圖的敘述，圖的 XYZ…，敘述也要有圖才知道。

……

T：那你認為老師會給誰最高分？

S25：他(C)吧，他寫很多。

T：只有他嗎？沒有別的？…

S25：這個吧(B)。

……

T：為什麼 B 也會和 C 一樣清楚？為什麼老師也會給 B 高分？

S25：因為他有畫圖，看起來是對的。

T：那 E 呢？E 也對啊，為什麼老師不給他高分？

S25：因為老師有說考試不能用量的。

S36 在「分類活動」中，將屬於經驗論證的 B 和屬於正確的形式論證的 C、D 分成同一類，但另一個屬於經驗論證的 E 卻歸到錯誤的一類。S36 區分論證 B 不同於論證 E 的原因是數字的角色，B 的數字是假設而 E 的數字是舉例，所以論證 B 以及也有假設的論證 C 和 D 是同一類的證明。

T：你為什麼給他(B)10 分呢？

S36：因為 P 可以移動，…。假設這是正三角形，那 x+y 等於 240 啊，那 180 嘛，加上裡面假設的是 60，180+60=240。

……

T：給 8 分(E)，為什麼呢？

S36：因為我覺得他舉例證明不夠詳細，說不定還有很多別的角度會一樣(使敘述成立)。

T：好，那現在看過 6 個人的做法後，你可以幫他們分類嗎？可以分成幾類？

……

S36：肯定正確跟不正確的。

……

T：那哪些是肯定正確的啊？

S36：B、C、D。那不正確的要寫嗎？

T：嗯。…那分完之後你最喜歡誰的說法？

S36：這個(B)。

T：為什麼最喜歡他的呢？

……

S36：我覺得這證明很清楚，然後可以給人家相信。給人家確定那個答案。

T：B 不是和 E 一樣只有一個例子嗎？

S36：B 是假設，E 是舉例。

T：假設？…和舉例有什麼不同？

S36：像 C、D 也是假設，…。A 是假設錯了。

T：那接下來你認為誰的說法是正確的？

S36：正確的只能選一個？

T：不一定呀，你覺得正確就可以選。

S36：BCD。

就幾何論證而言，圖形是一種抽象的參照物。如果學生過度強化此參照物，就會像 S25 把屬於經驗論證的 B 和 E 都當成正確的證明。另一方面，S36 以不同的方式來評析測量出來的數字和給定的數字。這個現象是否受到教師教學的影響？例如：學習解聯立方程式時，教師通常先示範以已知數作為係數的方程式為例，再引入以文字符號作為係數的方程式。如此可見，當學生把數學教室中偏向解說性論證的過程視為數學證明，還是把數學證明當成是解說性論證時，是否又造成學習時另一種認識上的困擾？

3. 開放前提或結論的位置

在「偵錯問題」方法一是從已知直角三角形和面積等於四分之一斜邊平方，利用畢氏定理推得此三角形也是等腰三角形。當高中學生(以 HS 表示)回答「這個證明過程證明了什麼？」的摘要問題時，HS12 認為此方法「證明了 $\frac{1}{4}z^2$ 等於面積是對的，要在直角三角形才可以。」。

HS12：證明了 $\frac{1}{4}z^2$ 等於面積是對的，要在直角三角形才可以。

T：為什麼？

HS12：(指著步驟三說)因為前面說 $x^2+y^2=z^2$，所以它是直角三角形，才有畢氏定理，後來(步驟三)用步驟一說原本的面積是 $\frac{1}{2}xy$，$\frac{1}{4}z^2$ 也是面積，就相等，所以得證。

T：步驟四不管了嗎？

HS12：也可以，不過從步驟三也就可以知道兩股等長了。

T：所以你認為這個證明過程證明了什麼？

HS12：在直角三角形的情況下面積會等於 $\frac{1}{4}z^2$。

HS12 的想法主要是利用直角三角形邊長關係和面積關係，然後推得到面積 $\frac{1}{4}z^2$。如果以合理化的觀點來分析這個論證過程時，HS12 的推論過程有兩種可能。一種是把直角三角形的邊長關係當成 $1:1:\sqrt{2}$，來推得來推得此三角形的面積是 $\frac{1}{4}z^2$。另一種是 HS12 把直角三角形和其面積關係 $\frac{1}{2}xy=\frac{x^2+y^2}{4}$ 當前提，來推得此三角形的面積是 $\frac{1}{4}z^2$。第一種情形他所犯的錯誤就是把結論當前提，第二種情形的錯誤則是把子結論當前提。兩種情形都是把原來的前提之一($\frac{1}{4}z^2$)當結論，也就是推得的結果。不過，從 HS12 在方法二中非常注重單一論點的前提，可以推斷他應該不是把直角三角形當成等腰直角三角形。

(方法二)

T：請問你完全不同意步驟一的意思，請問哪裡有問題？

HS12：因為他只說是等腰三角形，沒有說直角，這個性質應該是直角等腰三角形才有的。

T：請問你不了解步驟二的什麼地方？

HS12：因為它之前沒有說直角，所以不成立。

在「分類活動」中，JS19 將六種論證分成兩類：ABCDF 一類，E 一類。認為 D 說法中的∠1＋∠2＋∠z＝180°既是提示、又是計算、也是證明。也認為證明是有給提示，而提示又有點像是證明。而且提出 E 不同於(A)BCDF 的原因是，E 不用真的去算。從 JS19 的反應中，不難看出他專注論證的焦點在於需不需要計算，而不是這些論證所引用的前提是什麼，又推得了什麼不同的結論。

T：你這樣 ABCDF 同一類？
JS19：對啊，因為都有提示又有證明。
……
T：…，那 D 呢？
JS19：D…
T：他的提示在哪裡？
JS19：提示…這一個吧(因為∠1＋∠2＋∠z＝180°)。
T：就是“<u>因為∠1＋∠2＋∠z＝180°</u>”，你認為那是提示？
JS19：嗯。
T：那證明呢？
JS19：…我也覺得是這一句話。
T：就是“∠1＋∠2＋∠z＝180°”，那計算呢？
JS19：計算…也是這些（“∠1＋∠2＋∠z＝180°”）啊！
T：什麼是證明？
JS19：F 是證明。
T：你證明的意思是什麼？
JS19：他(F)有點給提示，但又沒做出圖案。他有告訴…有一點提示。
T：你認為提示是什麼？
JS19：…這個就像是提示(F)，有一點像是…有點像是證明。
T：F 證明了什麼？
JS19：需要自己去驗證，他說的不一定準，但是我覺得，你經過計算之後就知道他一定準，但是我覺得我沒有計算過我就知道它是正確的。
T：為什麼 E 不和 BCDF 同一類？

JS19：E 不需要驗證。
T：E 不需要計算驗證嗎？
JS19：E 用看的就知道答案對不對，不用真的去算。

而且 JS19 在回答關於乙式的問題：「△BMD 和△CMD 全等時，$\overline{DB}$的對應邊是什麼？」時，提出$\overline{DC}$和$\overline{DA}$(事實上$\overline{DB}=\overline{DA}$是敘述中的前提)。在回答問題：「證明過程證明了什麼？」時，也把等腰當成前提(事實上是結論才對)來說明他認為可以推得 D 是斜邊中點。可見，JS19 對於各論點中的前提和結論是不清不楚的。

T：你認為小明想要得到什麼？
JS19：這應該是等腰三角形，然後這是中垂線，這一段等於這一段($\overline{DB}=\overline{DC}$)，等腰這一段等於這一段($\overline{DA}=\overline{DC}$)，所以這一段等於這一段(即 D 是斜邊中點)。
T：這是小明想要得到的嗎？
JS19：算！…我不太確定。這很難說。

但是 JS19 的想法和 HS12 又有些不同，他把前提和結論互換可能不是前提和結論混淆，而是在多個論點的證明中他腦中壓根兒就沒有想到或不知道需要區分前提和結論，這個看法也可以從他錯誤判斷直接確認的邏輯問題得到一些支持。對於 JS19 沒有析取前提和結論以及 HS12 雖析取了前提和結論但又重新排列這兩種情形，本研究將此現象稱為開放前提或結論的位置。

4. 增加前提或結論的強度

在上述「偵錯活動」方法一的摘要問題中，問學生「這個證明過程證明了什麼」？HS09 以一個符號化的式子作為已知條件，而且一開始他也為了避免麻煩未對符號加以說明！

T：方法一證明了如果什麼則什麼？

HS09 寫下：(如果)$\frac{xy}{2}=\frac{z^2}{4}$；(則)兩股等長。

T：如果是怎麼來的？

HS09：直角三角形。

T：如果為什麼不寫直角三角形什麼的？

HS09：比較麻煩。

T：用你寫的命題去考同學，他們會怎麼證？

HS09：看不懂吧！我再加上…x、y 是直角三角形的兩股。

T：z 是什麼呢？

HS09：z 是斜邊。

不過，之後再問其從這個證明過程中他學到了什麼，該生的回答卻不是此證明過程所證得的命題，而是等同於該命題的逆命題「等腰直角三角形面積是四分之一 z 平方」。

T：從證明過程中，你學到什麼？

HS09：等腰直角三角形(面積)可以用四分之一 z 平方。

T：為什麼不說直角三角形的面積是四分之一 z 平方時則兩股相等。

HS09：也可以，不過這樣比較好記，也比較有用吧！

在方法一的一般性理解問題的訪談中，HS09 雖然知道從面積相等推演出邊相等($p \rightarrow q$)，但同時「以因為其他的算不出這個答案來判斷可以證得 $\sim q \rightarrow \sim p$」、「以只有等腰(直角)三角形才有這種關係來判斷可以證得 $\sim p \rightarrow \sim q$」、「以步驟 3 算出兩股等長來判斷可以證得 $q \rightarrow p$」。此時，他主要把焦點放在面積和兩股相等之間的關聯性，而把 $\frac{z^2}{4}$ 的面積關係的影響力放大。HS09 可能就是因為這樣的思考方式，而以逆命題($q \rightarrow p$)作為他從證明過程中學到的結果。

T：方法一可以證明下列四個敘述($p \rightarrow q, \sim q \rightarrow \sim p, \sim p \rightarrow \sim q, q \rightarrow p$)中哪一個是正確的？
HS09：.......
T：請問敘述一($p \rightarrow q$)為什麼是對的？
HS09：它就是對的！
T：敘述二($\sim q \rightarrow \sim p$)呢？
HS09：......
T：如果它不是等腰，面積就不會是四分之一 z 平方嗎？
HS09：對！
T：為什麼對？
HS09：因為其他的算不出這個答案。
T：為什麼敘述三($\sim p \rightarrow \sim q$)是可以的？
HS09：只有等腰三角形才有這種關係。
T：方法一有證這件事嗎？
HS09：都用這些算式。
T：第四($q \rightarrow p$)的為什麼有證明到？
HS09：因為兩股等長是用這個算式(指著步驟 3)來算！

HS12 也認為方法一的證明過程可以證明敘述四($q \rightarrow p$)，其理由是沒有步驟 1 就沒有步驟 3。簡單地說，HS12 以「沒有$\frac{1}{4}z^2$就證不出來」來說明方法一可以推得「等腰直角三角形的面積等於$\frac{1}{4}z^2$」。假設 HS12 的邏輯是正確的，那麼支持他得到這個推論的潛在定理就是「直角三角形只有面積是四分之一斜邊平方才會兩股等長」。

HS12：等腰直角三角形的面積等於$\frac{1}{4}z^2$是對的，要在等腰直角三角形才可以。
T：為什麼？
HS12：沒有步驟 1 就沒有步驟 3。

無論是 HS09 或 HS12 所提出的理由都有個共通的特點，那就是

增加了$\frac{1}{4}z^2$(前提之一)的強度。這樣的推理模式也符合生活語言的表達方式，就好比媽媽說：「如果考 100 分就可以玩電動 3 小時。」，也隱含著「如果沒有 100 分就不可以。」。但從邏輯的角度切入，前面的論點是沒有隱含後面的論點。

這些學生在同年級學生中是屬於數學程度較好的一群，理應不是缺乏正確的邏輯推理能力，這點也可以從他們能正確回答邏輯定位的問題得到佐證。使得他們過度放大敘述意義的原因是什麼？究竟是什麼因素阻礙他們啟動邏輯思考？或是什麼情境才能喚起他們的邏輯思考？在數學論證的教學上，這些都是值得進一步探討的議題。

簡而言之，上述四種過度一般化論證過程的情形：(1)擴充演算法或動態圖形的有效性；(2)強化圖和數字的代表性；(3)開放前提或結論的位置；(4)增加前提或結論的強度，其過度一般化的對象都在於論證過程的有效性。例如：HS12 既錯把$\frac{z^2}{4}$當成結論也增加$\frac{z^2}{4}$的強度，而過度一般化論證過程的有效性。S22 將演算過程視為程式中的迴圈般只是代入的數字不同，而過度一般化演算的結果都是相同的。S36 認為數字是假設時，可以當成有效的證明。

二、妨礙學生解讀幾何論證的因素

除了在預測模式的量化研究中，本研究找到以知識和概念情境的邏輯作為預測變數外，希望透過訪談研究的部分找到其他因素，來彌補知識和邏輯不足以解釋的部分。為什麼學生解讀幾何論證的結果就是如此呢？從訪談資料中，本研究找出三種妨礙學生進一步理解幾何論證的因素：(1)未意識到自己誤解的可能性；(2)未區辨證明與解說

的不同；(3)排斥或不喜歡不瞭解的資訊。

(一) 未意識到自己誤解的可能性

如果想要讓理解有改進的空間，第一步就是要先覺知困難。Dewey (1910)也曾在 How We Think 這本書提及思想是由五個步驟所引導：(1) a felt difficulty; (2) its location and definition; (3) suggestion of possible solution; (4) development by reasoning of the bearings of the suggestion; (5) further observation and experiment leading to its acceptance or rejection. 可是，在本研究的「分類活動」和「偵錯活動」中，都可發現學生因為覺得自己已經瞭解了或相信自己的判斷而未在心中存疑，導致即使已經有些推論是互相矛盾的仍不自覺。

在「分類活動」中關於未意識自己誤解的例子，就是學生認為拒絕敘述的論證和接受敘述的論證都是正確的。S15 判斷拒絕敘述的論證 A 是正確的，接受敘述的論證 B、C、D、F 也都是正確的。在判斷論證 D 時，她認為 D 的敘述和課本很像，所以「覺得」比較容易懂。接著，她對論證 A 的評估是，如果角度是假設的話論證 A 是對的，如果是用量的話論證 A 是錯的。是什麼原因讓 S15 認為一個命題「可以既對且錯」？除了可能是由於 S15 對於命題的信念即是如此之外，最後再從 S15 把證明視為「解題」的看法中，研究者推論她也很有可能把論點 A 當成在解另一個問題，才使得她未能意識這些推理過程中潛在的不一致性。

T：好，那你覺得 D 這個敘述是對的還是錯的？
S15：對的。
T：好，那為什麼要給他 8 分呢？
S15：因為他敘述的就很像課本講的那樣。
T：嗯，那你給他了解的把握度為什麼給他 6 分呢？
S15：就是印象中課本都會舉這樣的…什麼角 1 加角 2 啊會

等於這樣子的舉例方法，所以就覺得好像比較懂。

……

T：嗯，那你認為哪些人的說法可以是正確的證明？…現在你要不要再判斷一次？

S15：A 不正確 B 正確 C 應該也是正確的吧，因為覺得他有點複雜，但是他講的應該是對的吧！D 我覺得是，E 我覺得不是，F 是。

T：你剛剛說 A 好像也是正確的？

S15：A 的角度我不確定是假設還是量的。

T：差別在哪裡？

S15：如果量的就和 E 一樣是錯的。

T：可是只有 A 認為敘述是錯的。

S15：他假設了。

T：你的意思是…？

S15：把他的假設代進去算就是錯的嘛！

……

T：好，現在你可以說說看什麼是證明嗎？

S15：什麼是證明...（思考）就是用他題目上有的條件，或者是自己…假設...就是，比如說，他給你一個直角三角形，你知道直角是 90 度這樣子，就用你已知的條件，然後去做出題目要的東西這樣子。

S21 在閱讀這六種論證之前，先以舉例的方式判斷這個敘述是正確的，可是評估論證 A 時仍判斷是正確的。而且，他不只主動比較了 A 和 B 的說法，也再次確認 A 的說法是對的。即使訪談者介入引導他把焦點放在圖形上，S21 所想的還是論證 A 表面的敘述。為什麼 S21 一直沒有產生懷疑論證 A 的需求感？這原因除了 S21 認為敘述可能有時對有時錯，也可能是 S21 認為他已經都瞭解論證 A 的每一個論點。

(S21 先以舉例方式的證明認為這個敘述是正確的。)

S21：9 分吧。

T：為什麼給他(A)9 分？你剛才已經有稍微證明說他是正確的，但他證明說是錯的。

S21：他(A)證明的沒有錯啊。
T：你覺得他證明的沒錯？
S21：可能是這個圖形，還要再…可能是我剛好矇到吧。
T：你覺得你剛才的只是特殊的實例，不一定每個角度都會符合。
S21：嗯。
……
S21：我是把他(B)拿來跟 A 比較，他們既然都有自己的答案，再加上他們的敘述都是對的。
T：可是一個說是錯的，一個說是對的？
S21：他們證明出來他們說的這兩個答案都符合啊。
……
S21：我不知道他怎麼弄出來跟其他的不一樣。
T：…你覺得他圖形有沒有問題？
S21：圖形，我覺得應該是不會有問題。他敘述都對都了解，但就是不知道跟哪些不太一樣。

在「偵錯活動」中關於未意識誤解可能性的例子，就是學生認為方法一和方法二的證明都可以證明這四種敘述($p \rightarrow q, \sim q \rightarrow \sim p, q \rightarrow p, \sim p \rightarrow \sim q$)是正確的。HS41 從方法一的證明過程中，推論如果是等腰則直角三角形面積才是 $\frac{z^2}{4}$。依據 HS41 在應用問題的反應，也可以看出他直接把等腰的底邊當成斜邊，再利用此等腰直角三角形為前提算出面積符合 $\frac{1}{4}\times 10^2$。學生未意識自己已經誤解的來源可能有二，一是不清楚這個問題「什麼是證明過程可以證明的」的意思，二是將「證明過程的前提或結論都視為對等且分離的條件」。前者讓學生把自己依據證明所作的其他推論也當成此證明過程可以證明的，後者使得學生只依據證明過程其中幾個條件可以檢驗出其餘條件時，就認為這樣的結果也是此證明過程可以證明的。

T：為什麼方法一可以證明這四個敘述是正確的？
HS41：如果是等腰三角形也是對的，不是等腰不行。
……
T：為什麼你認為一個等腰三角形底邊是 10 公分，面積是 $\frac{1}{4}\times 10^2$ 平方公分，這個三角形就是直角三角形(應用問題)？
HS41：底可以當直角三角形的斜邊來看，…。面積符合題目給的條件，所以是！
……
T：方法二你認為可以證明全部都正確？
HS41：對！
T：為什麼？
HS41：他的證明都有提到。
T：提到什麼？
HS41：有證明 1 和證明 2 更完整才對。
……
T：如果每一種證明的滿分都是五分，你會給第一種幾分？第二種幾分？
HS41：第一個證明五分，第二個證明四分。
T：為什麼？
HS41：因為第一個證明用直角三角形三邊的平方關係，比較簡單；第二個還要有三邊長度的關係。

(二) 未區辨證明與解說的不同

針對一個命題，當以一些論點來論證它是否正確時我們稱為證明，當以一些解說來敘述它的意義、因果關係或相關性質時我們稱為解說。例如：「分類活動」的論證 F 即屬於解說，而其他的論證都算是證明；證明當中又可分為經驗證明(論證 B 和 E)和形式證明(論證 C 和 D)。從訪談的個案中，研究者發現有些學生將屬於解說的論證 F 誤以為是證明，可以證明敘述是正確的；也有些學生將屬於證明的論證 C 或 D 理解成解說性論證，只看到他們的解說性卻忽略了他們的

有效性。

S17 一方面認為論證 F 可以證明敘述是正確的，另一方面也因為論證 B、C、D、E、F 都使用了角度而歸成一類。從 S17 所看到論證的共通特徵中，研究者推論該生把容易理解的角度運算當成論證的重點。也就是說，S17 所關注的不在於這些論證如何或是否證明了敘述是正確的，而在於他個人從這些論證中所能理解的意義：角度的運算。當學生未區辨證明和解說的差異時，不僅難以賞析數學證明的功能，也難以產生建構數學證明的需求。

T：你覺得他(F)講的對不對？
S17：對啊。
T：那他用這個講法來說什麼？
S17：就是，講什麼..就是給他角度的話，就可算出這兩個角，然後算出這兩個的話，就可以算出這一個。
T：然後他用這個來說什麼？
S17：說他是對的。
T：那這個他指的是什麼？
S17：那個推論(指著敘述)。
……
T：你說 B、C、D、E、F 通通都同一類？
S17：對。
T：理由是⋯
S17：因為他全部都是用角度去想的啊。
……
T：C 呢？
S17：然後 C 他一樣是用，就是用平行四邊形⋯。然後所以他也是用⋯，就是 90 度加黑圈圈然後反正就是這樣算，所以我覺得他這個是一樣的。
T：嗯哼，D 呢？
S17：D 也是用角度啊。

雖然 S32 的反應不同於 S17，他已經把屬於解說的論證 F 和其他論證區分開來，可是他的理由並非真正瞭解 F 為什麼沒有證明此敘

述。在評析不同的論證時，還是把重點放在可不可以算出答案，然後再思考算出此答案是否需要其他題目沒給的條件，例如角度；以及算出此答案的不同方法，例如：設未知數或畫平行線。

T：好，那最後一個(F)。
S32：給 1 分吧。
T：為什麼？
S32：因為雖然這句話是對的，可是題目這樣出，他不可能把那兩個角的度數給你，所以他這樣的話等於他算不出答案來。
……
T：好，你是怎麼分的？
S32：有設數字(ABE)的分這個，雖然他有得證，可是，他需要別人給他，需要一些東西，沒辦法從題目算出來。然後這個(F)是用自己的方式去算這兩個，用自己的方式算。然後這個是…一個是設未知數(D)；一個是用平行線來算(C)，所以分成兩個。

在「偵錯活動」中，也觀察到高中生在推廣應用的過程中把證明當成解說而產生解題上的障礙。HS35 看到問題時，不是先釐清問題的前提，而是直接用了直角三角形的邊長關係，並提到這是剛剛證明中有用到的。為什麼學生將證明後所留下的深刻印象直接套用在另一個有點類似又不盡相同的情境上？有可能是 HS35 以為題目本身就有直角三角形這個前提嗎？可是題目的目標卻清楚地寫著這是不是直角三角形，而且最後 HS35 也說他看不出這是不是直角三角形，從這些事實或許可以判斷這個可能性應該很低。所以，極有可能是 HS35 不知不覺地用了直角三角形的條件，然後又不知不覺地忽略曾經用過它。雖然從其他的研究結果得知已有半數以上的中學生具有特殊化一個命題的能力，可是與應用類似的論證方式至其他問題上還是有一段差距，而且 HS35 還把原始命題的前提當成新題目的前提。研究者認

為這類學生在應用時著重於理解論證過程中所提及的屬性或性質之間的關聯性，而忽略析取論證過程中各論點的前提和結論。

T：一個等腰三角形的底邊是 10，面積是 $\frac{1}{4}\times 10^2$，則這個三角形是不是直角三角形？

(HS35 寫下 $x^2+y^2=z^2$，$x^2+x^2=10^2$，$x=\sqrt{50}$)

T：你為什麼這麼算？

HS35：剛剛的證明有用到三邊長的關係，然後等腰。

T：算出 x，然後呢？

HS35：感覺怪怪的！我真的搞不清底邊是哪一邊。我只求到 $\sqrt{50}$，但我不知道到底是 $x=\sqrt{50}$ 還是 $y=\sqrt{50}$。

T：所以你能不能判斷它是直角三角形？

HS35：看不出來！

本研究在中學生誤解幾何論證的思考特徵中，也曾提出 JS19 在理解各種論證時並未析取前提和結論，把屬於解說性論證的 F 當成證明，也認為 F 和屬於形式證明的 C 和 D 是同一類，他所面臨的障礙即是一種透過解說的觀點來評估證明的有效性。本研究特別把這樣的情形析取出來，是想提醒大家重新審視真正理解證明的意涵，讓真正理解證明也能包含區分不是證明的論證。如此，不僅有助於學生賞析證明的本質，還能應用到其他學科的學習：區分、評析與協調不同理論與各種證據間的理性關係。

(三) 排斥或不喜歡不瞭解的資訊

如果學生因看不懂論證而抱持排斥或不喜歡的態度，會使他們減少許多需要思考和推理的動力，也會因此喪失從他人論證中獲得新知的可能。從本研究的個案訪談中也發現，即使學生可以透過對自己或對該論證的調整和修正而獲得不同的理解，他也會因為排斥或不喜歡

不瞭解的資訊而沒有進一步推測或合理化不瞭解的資訊。

表 4-3-1：HS12 和 HS35 處理不瞭解資訊的對照表

T：請問你不了解步驟三的什麼地方？	
HS12：斜邊上的高為什麼是 $\frac{xy}{z}$。	HS35：我自己不會去證明說三角形斜邊上的高是 $\frac{xy}{z}$。
T：步驟四呢？	
HS12：因為步驟三的 $\frac{xy}{z}$ 我不懂，所以步驟四也不懂。	HS35：上述的條件是對的的話，就可以把之前的條件拿進去算，就是 $\frac{1}{2}$ 底$\times$高，就等於另一個底$\times$高。
T：你了解 $x=y=\frac{z}{\sqrt{2}}$ 的意思嗎？	
HS12：了解！但要直角等腰才可以用。	HS35：這表示說 x、y、z 的關係。
T：你了解 $\frac{1}{2}xy=\frac{1}{4}z^2$ 的意思？	
HS12：了！可是也是直角等腰才可以！	HS35：就是面積跟斜邊的關係！
T：這個證明中，還有什麼是你不懂的？	
HS12：斜邊上的高為什麼是 $\frac{xy}{z}$？	HS35：第 2 個斜邊上的高！
T：請你幫方法二的證明改成對的？	
HS12：我不知道它的意思，不會改。	HS35：它應該是對的，只是步驟 3 我自己想不到。

在受訪個案的五位高中生當中，只有 HS12 和 HS35 提到不瞭解方法二的步驟三。比較 HS12 和 HS35 的反應(表 4-3-1)，發現 HS12 因為排斥不瞭解的資訊對於方法二沒有進一步的瞭解，而 HS35 雖然會假設步驟 3 是對的情形繼續瞭解方法二的其他論點，可是他的理解也不見得比 HS12 更為深入，這點也可以從他們認為瞭解某些步驟的反應上得到支持。HS12 會以該步驟成立的前提來回答瞭解該步驟的意思，HS35 則以單就該步驟的內容來說明他所瞭解的。HS12 在局部

的推論上似乎會注意到什麼是前提和結論，而且用符號算出斜邊上的高對他來說應該也不是一件困難的事。從訪談的過程中，研究者感受到如果 HS12 不排斥去思考斜邊上的高為什麼是 $\frac{xy}{z}$，或許他有機會察覺方法 2 中兩個論點的循環關係。至於 HS35 是否因為他的思考是比較不縝密的，所以比較容易能夠依據自己不瞭解的步驟 3 繼續瞭解步驟 4 的意思？這個現象的猜測還有待往後研究的探討，而且如何讓學生同時兼具思考的深度和彈性也是值得注意的問題之一。希望能透過加強學生思考的深度來培養他們的批判能力，以及透過促進學生思考的彈性來培養他們的創造能力。

另外，S34 剛開始因為他看不懂論證 C 才判斷 C 是錯的，而他看不懂 C 是由於不明白輔助線的功能，並非他覺得不瞭解論證 C 的推導內容。

T：好，那我們來看 C。
(S34 生看內容中)
S34：我覺得他錯了吧。
T：你覺得他錯，哪邊錯了？
S34：因為 x 加 y，咦…x 是哪兒？看不懂。
T：題目圖中的 x？
S34：為什麼他要畫平行線把 x 分開？
T：你認為呢？
S34：我看不懂。…對啊！
T：什麼對啊？
S34：我還是不知道為什麼他要畫平行線。
T：好，那一樣滿分是十分，你會給他幾分？
S34：給他十分啊。
T：為什麼呢？
S34：因為他好像都說對了啊。

一般說來，學生喜歡的證明應該是正確容易瞭解的證明。但 S34

不同，即使他已經找出論證 A 的錯誤：「三角形內角和不是 180 度」，他仍喜歡論證 A，喜歡的理由就是「簡單」。他不喜歡的證明是論證 C，不喜歡的理由主要是不知道要畫平行線的原因是什麼。

T：那這六個裡面啊你最喜歡誰的說法？
S34：A。
T：為什麼呢？
S34：因為他寫的很簡單。
T：可是你不是說他錯的嗎？
S34：對呀。
T：你喜歡錯的？
S34：我喜歡簡單的啊。
T：所以你的理由是簡單囉。那你最不喜歡誰的說法，在這六個裡面？
S34：不喜歡 C 的說法。
T：為什麼呢？
S34：不知道為什麼蹦出平行線。

接下來，S34 認為「解答」可能會有令人滿意的證明，而且是一種簡單的證明。S34 理解證明時的重點幾乎都在於證明是否簡單，如果遇到他看不懂的證明他也傾向先判斷此證明是錯的。另一方面，他也想從解答中找到更滿意也就是更簡單的證明。照常理判斷，學生企圖想要找出更簡單的答案是一件好事，可是 S34 是透過「看」解答找出更簡單的答案而不是自己想出簡單的答案。這些現象是否反應學生的學習習慣是較少動腦筋，倒是寄望以速成的方式來解決問題。當學生排斥或不喜歡他所不瞭解的資訊時，不僅會造成學生學習意願低落，也可能會造成學生無法自主的學習。如何幫助學生正面看待不瞭解的資訊勇於接受挑戰？這個問題恐怕不是靠講述式的數學證明教學所能克服的。

T：那你有沒有想到其他更滿意的證明？

S34：看解答啊。
T：我是說你有沒有想到？
S34：我喔，沒想到。
T：那如果沒有解答呢？
S34：沒有解答喔，那這個題目就沒人解的出來，就不好啦，那就錯了，就不好啦。
T：搞不好他有很多種答案啊。
S34：那就寫一種啊，寫簡單的啊。

第五節　中學生對幾何證明閱讀理解的模式

一、幾何證明閱讀理解的層次

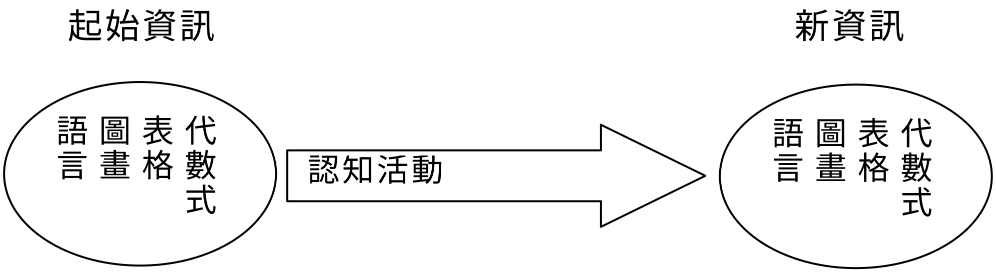


圖 4-5-1：探討幾何證明閱讀理解層次的基本模式

調整 Tabachneck 和 Simon (1996) 所詮釋的表徵後，可簡化成如圖 4-5-1 的分析模式，此模式即是本研究描述幾何證明閱讀理解歷程與認知運作的基本模式。把個體閱讀文本資訊所形成的心理表徵當成起始資訊，則此起始資訊是一種可以不斷遞迴更新的資訊。針對同一個命題和證明過程，後來的階段都可能成為讀者解讀前面某個階段後所產生的新資訊。本研究依據非形式邏輯學關注的焦點：論點中前提和結論的關係(Blair & Johnson, 1987)，可將起始資訊所認知的新資訊區分為四個層次：(1)表層理解；(2)辨識元件理解；(3)鏈結元件理解和(4)膠囊化理解。表層理解層次是尚未涉及論點分析；辨識元件理解

層次是已區分論點內的元素，即前提或結論；鏈結元件理解層次進一步理解論點間的邏輯關係；膠囊化理解層次是把命題和證明內化成整體的大論點。圖 4-5-2 將各層次的特徵視覺化，希望有利於讀者的理解。

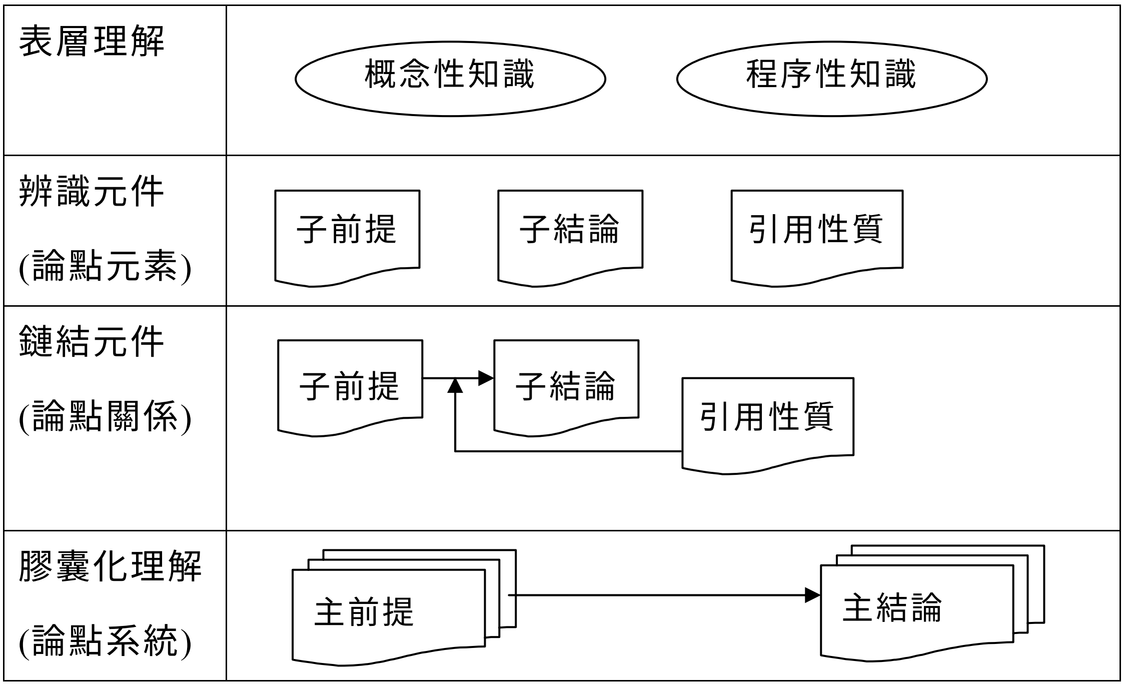


圖 4-5-2：各理解層次的示意圖

接著，配合幾何證明閱讀理解面向的定義：(1)表層理解包含理解數學語言的意義；(2)邏輯定位理解包含辨識敘述間的邏輯次序、辨識證明引用的事實或性質；(3)摘要理解包含辨識命題或證明過程的重點；(4)一般性理解包含辨識命題和證明的正誤和辨識證明可有效化的命題；(5)應用理解包含把已證的命題應用到其他類似的問題情境；研究者進一步闡述各理解層次的認知行為。表層理解以知識基模為主，需要學生將文本的資訊對應到既有的概念性或程序性知識基模，或透過文本的資訊建立更完備的知識基模。因此，設定通過 70%表層理解測驗的受試者已經超越表層理解。

從辨識元件理解、鏈結元件理解到膠囊化理解層次，評析的焦點

已放在前提、結論或前提結論兩者間的關係。在辨識元件理解可分成「析取重要性質」和「析取前提或結論」，析取重要性質的認知行為是(1)能辨識引用的性質；(2)能察覺潛在性質。析取前提或結論的認知行為是(1)能辨識前提或結論；(2)能察覺潛在前提或結論。在鏈結元件理解層次可分成「理解論點的有效性」和「協調論點和圖形」，兩者之認知行為分別是同時關照論點的前提和結論，以及意識到圖形是論點的參照物。在膠囊化理解層次是「把命題和該命題之證明過程內化成整體」，其認知行為有(1)能正確應用命題或證明過程解決問題；(2)能從類似情境中析取出和命題不同的條件。綜合辨識元件和鏈結元件理解層次的認知行為，設定通過 70%邏輯定位理解測驗和摘要理解測驗的受試者已經從辨識元件理解邁向鏈結元件理解層次。綜合鏈結元件和膠囊化理解層次的認知行為，設定通過 70%一般性理解測驗和應用理解測驗的受試者已經從鏈結元件理解層次邁向膠囊化理解層次。

以(a,b,c)表示每位受測者的理解狀態，通過 70%表層理解測驗的受試者則 a=1 否則 a=0，通過 70%邏輯定位理解和摘要理解測驗的受試者則 b=1 否則 b=0，通過 70%一般性理解和應用理解測驗的受試者則 c=1 否則 c=0。以同樣地的方式，分析學生在自我評估的評估結果，只是把 70%的通過標準改成各面向內的評估結果平均≧4.0。表 4-5-1 是學生實際表現與自我評估狀態的分佈。四種理解層次間的實際表現都通過的國三學生，在一階段幾何證明題有 23.8%，在二階段幾何證明題只有 4.1%；四種理解層次間的實際表現都通過的高中學生，在一階段幾何證明題有 36.5%，在二階段幾何證明題只有 15.7%。四種理解層次間的自我評估都通過的國三學生，在一階段幾何證明題有 47.1%，在二階段幾何證明題也有 40.5%；四種理解層次間的自我評

估都通過的高中學生，在一階段幾何證明題有 60.3%，在二階段幾何證明題也有 56.7%。

表 4-5-1：中學生理解層次實際表現和自我評估類型的分佈

	國三學生(%)				高中學生(%)			
	一階段 (N=223)		二階段 (N=220)		一階段 (N=378)		二階段 (N=388)	
理解層次類型	表現	評估	表現	評估	表現	評估	表現	評估
超越鏈結元件 (1,1,1)	23.8	47.1	4.1	40.5	36.5	60.3	15.7	56.7
超越辨識元件 (1,1,0)	6.7	15.2	12.7	18.6	18.8	25.4	20.6	27.3
超越表層(1,0,0)	28.7	15.2	37.7	17.7	18.5	7.7	33.2	9.0
表層(0,0,0)	27.8	10.3	35.9	10.9	5.8	2.9	14.2	2.3
未過辨識-鏈結 (1,0,1)	6.7	3.6	6.8	4.1	10.8	0.5	7.5	2.1
未過表層(0,1,1)	3.1	1.3	0.5	0.9	4.5	0.8	0.8	0.8
只過辨識-鏈結 (0,1,0)	2.2	1.8	1.8	0.5	2.1	0.8	6.2	0.3
只過鏈結-膠囊化 (0,0,1)	0.9	0.4	0.5	0.9	2.9	0.0	1.8	0.3
不支持率*	6.2	3.5	2.8	2.3	9.5	1.6	8.8	1.4

*不支持率包含未過表層、只過辨識-鏈結、只過鏈結-膠囊化三種類型。

分析各理解層次間的實際表現，發現**幾何證明閱讀理解層次的發展可能有兩類(請見圖 4-5-3)，一是從表層理解、辨識元件理解、鏈結元件理解至膠囊化理解層次循序漸進地發展，本研究稱為「關係性理解型態」；二是從表層理解跳至膠囊化理解層次，再回到辨識元件理解和鏈結元件理解間的發展，本研究稱為「工具性理解型態」**。超越辨識元件者(1,1,0)一定是屬於前者，未過辨識-鏈結(1,0,1)者一定是屬於後者。配合之前各理解面向間的關係結構，和表層理解關係較近都是邏輯定位理解和摘要理解，所以推論大部分的學生應該都屬於「關係性理解型態」。

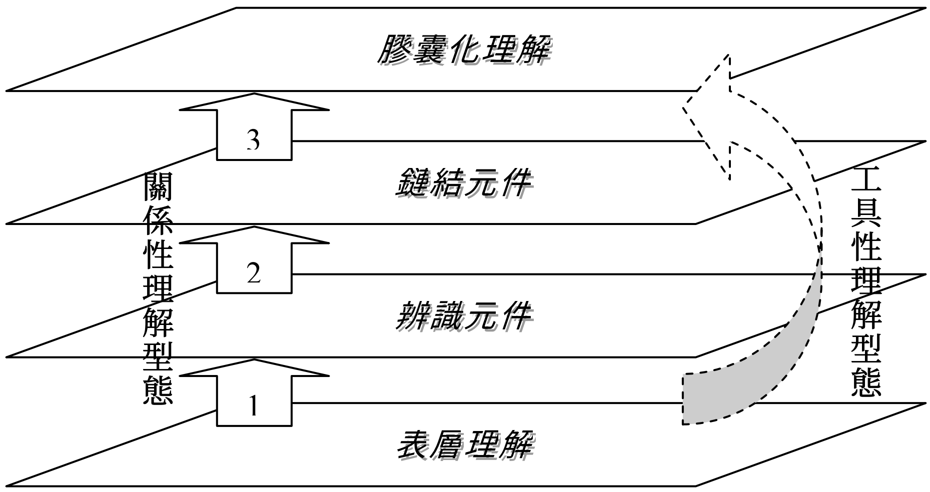


圖 4-5-3：幾何證明閱讀理解層次與理解型態

二、發展幾何證明閱讀理解層次可能面臨的障礙

綜合中學生評析幾何論證之有效性的思考特徵與各理解層次的認知行為，研究者提出各理解層內可能面臨的障礙。在表層理解層次，學生可能未意識證明的機制或功能，而單就概念性知識或程序性知識來理解證明過程，所以導致學生以另類架構來評估證明的正誤。從本研究的個案中剖析出三種類型的另類架構，包含圖形認知、可演算性和可解說性。

圖形認知的特徵有(1)操弄動態圖形，例如：S16 把圖形可以變可以動當成證明的有效性，而且其信念可能是「相信圖形論證具有一般性」；(2)圖形為主的啟論式理解，例如：S25 把有圖且驗證正確的論證都視為正確的證明，而且其信念可能是「相信圖形的存在性」。

可演算性的特徵有(1)以數字計算，例如：S22 認為應用相同演算法就可以得到相同結果的經驗論證也是有效的證明，或 S36 基於假設的數字不同於測量的數字而把數字計算過程當成有效的證明；(2)以數字代入符號計算，例如：JS09 把數字代入文字符號來說明形式證明是正確的。以數字計算或代入符號計算者，雖然把可演算性當成有效

性，可是卻也反對測量的有效性，所以他們共通的信念可能是「相信具有(主觀)任意性的證據是證明」。

可解說性的特徵是敘述中不分前提和結論，一方面可能是把證明當解說，例如：JS09 透過數字計算判斷形式證明是正確的；一方面也可能會把解說當證明，例如：S17 把解說命題合理性的論證 F 當成正確的證明。無論是把證明當解說或是把解說當證明，其潛在的信念可能都是「相信對命題合理性的解說就已經是證明」。表 4-5-2 呈現三種另類架構的概述，具有圖形認知、可演算性或可解說性等另類架構的學生，主要都不是以前提或結論來評析論證的有效性，而是從其他元素來判斷論證的正確性。另一方面，從這些特徵析取的潛在信念並非可接受的證明概念，所以這些信念也是學生學習論證時可能面臨的障礙。

表 4-5-2：幾何論證概念的另類架構

類別	圖形認知	可演算性	可解說性
認知特徵	(1)操弄動態圖形； (2)圖形為主的啟論式理解	(1)以數字計算； (2)以數字代入符號計算	(1)敘述中不分前提和結論；
可能面臨的障礙	相信圖形的一般性和存在性	相信具有(主觀)任意性的證據是證明	相信對命題合理性的解說已經是證明

表 4-5-3 呈現辨識元件、鏈結元件至膠囊化理解層次的類別、認知行為與可能面臨的障礙。在辨識元件理解層次可能面臨的障礙是「把原本鏈結在一起的前提和結論拆開來看」，例如：過度一般化論證過程的思維中，HS12 雖然析取了前提和結論可是又重新排列成不同的論證過程。在鏈結元件理解層次之理解論點的有效性中可能面臨的障礙有：(1)「把不是前提的某種規律當前提」，例如：S24 把例子中的規律視為前提而否定它的合理性；(2)「增加前提或結論的強度」，

例如：HS09 把從前提包括直角三角形和此三角形面積是四分之一斜邊平方推得等腰三角形的證明過程，當成也可以證明面積不是四分之一斜邊平方的直角三角形就不是等腰三角形。在鏈結元件理解層次之協調論點和圖形中可能面臨的障礙有：(1)「相信命題可對可錯」，例如：S15 認為推得命題錯的論證 A 和推得命題對的論證 B 都是對的；(2)「受限於未畫出來的圖形」，例如：JS24 以可能沒畫出來或畫出不同於甲所描述的圖形來推論證明可能有時對有時錯。雖然膠囊化理解層次已經將命題和其證明過程視為整體物件，可是學習是無止境的，所以仍有可能面臨的障礙，此障礙是「缺乏有彈性的推廣」，例如：這 5 位受訪的高中生中都無法在看過「直角三角形的面積是四分之一斜邊長平方時，則此三角形也是等腰三角形」的證明後，推廣至論證「一個等腰三角形面積為多少則其亦為一直角三角形？」。

表 4-5-3：辨識元件、鏈結元件、膠囊化理解層次可能面臨的障礙

<table>
<tr><td colspan="3">理解層次：辨識元件</td></tr>
<tr><td>類別</td><td>析取重要性質</td><td>析取前提或結論</td></tr>
<tr><td>認知行為</td><td>(1)能辨識引用的性質
(2)能察覺潛在性質</td><td>(1)能辨識前提或結論
(2)能察覺潛在前提或結論</td></tr>
<tr><td>可能面臨的障礙</td><td colspan="2">把原本鏈結在一起的前提、結論或性質拆開來看。</td></tr>
<tr><td colspan="3">理解層次：鏈結元件</td></tr>
<tr><td>類別</td><td>理解論點的有效性</td><td>協調論點和圖形</td></tr>
<tr><td>認知行為</td><td>能同時關照論點的前提和結論</td><td>能把圖形視為論點的參照物</td></tr>
<tr><td>可能面臨的障礙</td><td>(1)把例子中的規律視為前提
(2)增加前提或結論的強度</td><td>(1)相信命題可對可錯
(2)受限於未畫出的圖形</td></tr>
<tr><td colspan="3">理解層次：膠囊化理解</td></tr>
<tr><td>類別</td><td colspan="2">把命題和該命題的證明內化成整體物件</td></tr>
<tr><td>認知行為</td><td colspan="2">(1)能正確應用命題和證明過程解決問題
(2)能從類似情境中析取出和命題不同的條件</td></tr>
<tr><td>可能面臨的障礙</td><td colspan="2">缺乏有彈性的推廣</td></tr>
</table>

分別以學生的幾何證明概念與理解層次類型將受訪的學生分類，其分類結果請見表 4-5-4。可接受的證明概念是指學生能分辨什麼是正確的形式證明，以及察覺經驗論證和形式證明的不同。如果先忽略 S34 和 S12，則可看到證明概念和理解層次的對角關係，也就是具有可接受的證明概念之學生，其理解層次都已達到超越鏈結元件理解層次邁入膠囊化理解層次的階段。雖然 S12 暫時被歸在具有可接受的證明概念，可是從其反應「E、F 也是證明法」中還是透露著些許的另類架構，而且她認定多少例子都不夠可能源自於學習經驗，或許還尚未理解經驗論證的局限性。至於 S34 把屬於經驗論證的 B 也當成正確的證明，可是在幾何證明閱讀理解層次上卻能達到超越鏈結元件理解層次邁入膠囊化理解層次的階段。這是否表示，有一群學生雖然能夠理解形式證明的論點內容、關係與一般性，但仍未真正理解什麼是證明？

表 4-5-4：學生的證明概念與理解層次

證明概念 / 理解層次	具有另類架構的證明概念	具有可接受的證明概念
表層	JS09,S13,S18	S12
超越表層	JS38,JS19,S16,S22,S25	
超越辨識元件	JS23,JS24,S11,S15,S17,S20 S21,S24,S32,S33,S36,S37	
超越鏈結元件	S34	S14,S23,S30

T：最後一個(屬於解說性論證的 F)為什麼給他 1 分？
S12：因為他可能記錯了，因為有一個算式是給兩個角，可是這裡不適用。
T：不適用？
S12：不能用來證明這個。
……
T：AB 為一類？

S12：因為我們先固定一個角，再推其他的角。
T：然後 CD 為一類，為什麼？
S12：他們是用證明法。
T：EF 兩個為一類，為什麼
S12：因為他們，雖然他們也是證明法，但是他們證明方法很奇怪。
……
T：好，然後，你覺得這六個裡面啊，哪一個可以當作是正確的證明
S12：CD。
T：CD 可以當作正確的證明？好，然後，就你以前從國中一直到現在學的啊，你覺得什麼是”證明”。
S12：CD，因為他就是，因為他們沒有套數字，就是有條有理的列出來。
T：為什麼 E(屬於測量論證)不是？
S12：一個例子不夠。
T：要多少才夠？
S12：都不夠。

T：好，那你認為哪些人的說法是正確的證明呢？
S34：那就是 BCD。
T：你為什麼覺得他們正確的啊？
S34：因為內心這麼想。
T：那除了內心之外呢？
S34：敘述對呀，我也覺得他對，圖也畫對。
