

# 建構中學生對幾何證明閱讀理解的模式

## 第一章 緒 論

有關於論證認知特徵的研究，可以大致分為兩種類型：一種是聚焦於研究論證的邏輯演繹，主要透過演繹規則評定推理過程的有效性與否；一種是聚焦於論證的取信層次，將論證視為取信不同對象的活動。前者試著探討演繹邏輯的心理機制、哪些因素造成推理的偏誤、問題內容或情境脈絡的什麼特點會影響推理的結果；而後者將論證視為一種社會活動，透過臆測、證明或反駁的循環模式引起探究驗證的動機和互動的論證過程。雖然兩者切入的角度不同，前者偏向個體認知而後者則屬於社會認知，但是這兩種取向的研究最終都希望解決：如何才能幫助個體從非形式演繹的思考方式成功地過渡到瞭解形式化的論證方法。

關於學生判斷證明有效性以及建構證明的研究，已累積許多學習過程可能遇到的數學證明的學習困難，有錯誤判斷論證規則的有效性，如以舉例的結果來決定命題的有效性，而演繹推理卻不保證命題的有效性；有圖形表徵引起的典型心像所造成的過度一般化，或證明單一圖形的觀念；有的是無法理解如何特殊化一個命題；也有缺少一般化一個證明過程所需的認知單位。更不用說，建構一個完整有效的數學證明所面臨的困境，除了需要許許多多的心像、定義、演繹能力、洞察和技巧，也需要主動地選擇關鍵知識並整合成一致協調的論證過程。為了促進學生數學論證能力的發展，除了瞭解學習者從非形式演繹到形式數學論證的學習困難，也必須發展不同論證內容的教學活動來提昇學生的論證能力。

數學教育的文獻中也有許多探討從非形式到形式論證的教學活動，有從經驗問題情境的動態探索、合理臆測到依照邏輯次序系統化

(Boero et al., 1996), 有從電腦輔助動態幾何論證的教學(Hoyles & Healy, 1999), 有透過構圖理解促進圖形論證理解(Duval, 1995; 李宜芬, 2002), 或從下定義活動來協調圖形概念的內涵與外延之間的邏輯關係(Lin & Yang, 2002), 也有啟蒙例、批判經驗論證、察覺與敘述規律、辨認與分類結構性的文字表徵(Miyazaki, 2000; 林政輝, 2002; 梁蕙如, 2003)等作為過渡到代數論證的學習活動。至今大部分數學論證的研究都在分析學生如何受限於數學知識、推理、信念、課程、教學等因素, 而無法順利的”寫出數學證明”, 或是探討哪些教學策略是有助於提昇學生”寫出數學證明”的能力。但是除了寫出數學證明, ”讀懂數學證明”應該也是有待培養的能力, 由於數學是所有科學的基礎, 其它領域的發展或多或少都需要應用到數學的成果, 應用的啟動與調整過程也有賴於數學證明的閱讀理解, 同時數學語言也應該具備培養學生嚴密思考的功能, 或許讀懂數學證明比寫出數學證明更能達到此學習目標。

從數學論證的認知或教學看來, 我們已經感到現有的論證教學策略仍有所不足, 需要擴大成一個含有聽說讀寫做的觀點來探討數學論證的學習與教學。其中讀的部分仍是一片有待開闢與灌溉的疆土, 而且以閱讀的角度切入時, 除了論證的焦點改以理解的過程為主, 也進而豐富既有的數學論證教學。但無論是讀懂數學證明的心智活動或是透過閱讀來理解數學證明的教學活動還是甚少有人研究的, 更不用說有系統且完整的數學證明閱讀理解之研究成果。因此, 本研究擬先探討數學證明的閱讀理解及其相關因素, 希望本研究成果可以提供透過閱讀來理解數學證明的教學設計之參考、或對照於寫證明的認知特徵來形成另類的論證教學策略等等。

## 第一節 研究動機

聽說讀寫向來就是一般學生必需學習的基本能力，但日常語言的聽說讀寫和數學語言的聽說讀寫無論在學習的脈絡、語言的本質或閱讀理解的技巧上都有所差異。首先，大多數中學以上的數學語言不是一般生活會經常引用或接觸的，也就是數學語言的學習機會主要來自於學校。數學語言的嚴密性也不同於日常用語，數學語言通常具有對錯分明的確切定義，但日常語言則呈現較有彈性的規範。閱讀數學也需要其他的閱讀技巧，Shuard & Rothery (1984)曾把閱讀數學的技巧區分成三類：解碼、獲得意義、和文本互動；其中被解碼的表徵則包含圖形、圖表、圖解、文字符號等非日常語言的記號，並將所解碼的表徵和既有的認知串聯形成具有意義的內在表徵，最後還要主動地回應或繼續探究所理解的。

在小學的階段，雖然學生同時學習讀的技巧和學習數學，而且大多數小學老師也是同時教授語文科和數學科，但語文科閱讀技巧的教學策略似乎也很少應用到閱讀數學的教學。至於中學生就沒有特別的閱讀課，也很少被教導如何讀不同學科的書籍。因此，如果想培養學生可以閱讀數學書籍的能力，也就只有靠上數學課的時候了。在數學教育的研究中，也有許多探討學生閱讀數學的困難來源，但只見閱讀數學字詞或文字題的認知特徵，卻極少出現讀數學證明的相關研究。但是，讀文字題的能力足以順應數學證明的閱讀理解嗎？

早期有關閱讀數學的研究被侷限在數學字彙的瞭解、文字題的轉譯能力、或不同語言文化所造成解讀難易的差異（例如：Cocking & Mestre, 1988）。晚近，已有朝向多種文本的閱讀活動如何增強數學感與促進數學討論的研究，希望藉此加強閱讀在數學教室內的角色（Borasi &

Siegel, 2000)。但至今無論是認知、語言文化或教學等方面的文獻，還是甚少關於讀數學證明的研究成果。

新修訂的九年一貫課程綱要，在數學學習領域裡面，似乎較以往的課程更重視且拉長了數學論證的學習歷程（教育部，1999）。在第一階段具體操作期，學生可以透過操作式解說來論證。接著在第二、三階段，察覺、一般化規律與規律之間的關係等等都是主要的論證活動。至於第四階段非形式化的演繹，則是過渡到形式化證明的前身。台灣目前的課程設計，在每一階段中都突顯數學論證在整個課程綱要裡面的重要地位，但要落實這樣的課程仍有很多問題需要解決。1999年實施的高中課程改革，除了提供學生在實際生活與未來生涯所需的數學知能外，還強調培養學生欣賞數學內涵簡明有效及結構嚴謹優美的特質。雖然國中、小的數學論證已漸漸從結構性邏輯演繹的形式證明，演變成不同取信方式的推理過程，但到了高中還是必須面臨結構化和形式化的證明。

England 和 Wales 的國家數學課程，把數學證明課程放在使用與應用數學的成就目標中。其中包含證明過程的學習層次有：

level 3：能夠找到符合敘述的特殊例子來理解一般性的敘述。

level 4：能夠試著以他們的想法來找出規律(pattern)。

level 5：能夠根據他們提出的證據造出一個一般化的敘述，並解釋他們的推論過程。

level 6：能夠開始對他們的一般化，提出一個數學上的理由，或藉由檢查一些特殊的例子來驗證。

level 7：能夠以一些數學的結構來證明他們的敘述，並賞析數學上的解釋和實例的不同。

level 8：能夠評論檢驗命題時所引用的邏輯和推理方式，也因此能夠

更上層樓。

但是，由於大部份的學生很少有機會來評鑑邏輯論證，以及接觸到形式層次的課程，導致學生認為數學證明只是有關於測量、估計、從一些情形中歸納的過程(Hoyles, 1997)。此外，英國學校課程中缺少定義的介紹，也可能導致學生無法辨別前提是什麼，以及經由演繹推理得到的結論是什麼。

美國的數學課程標準也表明，數學的推理與證明是一種心智的習慣，必須透過長期的數學學習經驗，來培養關於推理和證明的數學觀、製造和探討數學臆測、發展和評估數學論證、選擇和使用不同的推理和證明方法等數學能力。在中、英、美的課程標準中，雖然都表明透過長期的學習過程來培養學生的論證推理能力，而不只以幾何內容作為數學論證教學的重點，但是也都尚未具體指出數學證明的閱讀理解在論證課程中所扮演的角色。

以四組關鍵字: proof, mathematical language (5 篇); mathematical proof, language(6 篇); mathematical proof, reading(5 篇), proof, reading comprehension(15 篇)在 ERIC 資料庫搜尋的結果，發現關於數學語言與證明的研究並不多。進一步分析各篇文章的目的和研究對象後，較常見到數學寫作與閱讀數學字詞或問題的相關研究，極少出現數學證明閱讀理解的相關研究(見表 1-1-1)。大部分數學論證學習或教學的研究都在分析學生如何受限於數學知識、推理、信念等因素，而無法順利的建構數學證明，針對數學證明閱讀理解的心智探討尚未出現完整全觀的文獻，其中 Seldon & Seldon (2003) 應該是首先以文本理論與閱讀理解來探討有效化證明的現象。

表 1-1-1：以數學語言觀點研究數學證明的學習或教學之相關文獻

篇名和出處	研究目的	對象與內容	數學證明教或學的內涵
Language Concepts of Mathematics. Esty, Warren W.; Focus on Learning Problems in Mathematics, v14 n4 p31-54 Fall 1992	突顯數學的語言觀	高中、大一代數	1.邏輯關係 2.數學內的轉譯 3.再組織
A General-Education Course Emphasizing Mathematical Language and Reasoning. Esty, Warren W.; Teppo, Anne R.; Focus on Learning Problems in Mathematics, v16 n1 p13-35 Win 1994	創新教學方法	大一學生 方程式 不等式	1.表達數學過程的方法 2.文字符號的特性 3.邏輯結構
Making the Transition to Formal Proof. Moore, Robert C.; Educational Studies in Mathematics, v27 n3 p249-66 Oct 1994	分析做數學證明的困難	大學	1.概念了解 2.數學語言和記號 3.如何開始證明
Everyday and Mathematical Language in Children's Argumentation about Proof. By: Zack, Vicki. <u>Educational Review</u> , Jun99, Vol. 51 Issue 2, p129, 18p	概念化學童自發性和學校形式化論證的關係	小學 5 年級	強調社會文化以及語言在學生對於數學產生意義，尤其是證明過程中所扮演的角色
Inside and Outside: Spaces, Times and Language in Proof Production. Arzarello, Ferdinando; PME24, July 23-27, 2000, Vol. 1	分析在科技環境中學習數學證明的認知和學習現象	中學生幾何證明	長期透過特定且複雜的心智動態之過程： 隱喻、直接證明、心智計數敘述、牽引的功能、外推、多樣的語言
LETTERS. <u>Mathematics Teaching</u> , Dec2002 Issue 181, p46,	無	中小學	充要性 抽象性
Validations of Proofs Considered as Texts: Can Undergraduates Tell Whether	分析學生有效化正確和錯誤	大學生代數證明	1.概念表徵 2.演算過程 3.邏輯

an Argument Proves a Theorem? By: Selden, Annie; Selden, John. Journal for Research in Mathematics Education, Jan2003, Vol. 34 Issue 1, p4, 33p	的證明過程的特徵		
---	----------	--	--

什麼是有效的證明？證明在不同情境會有不同的方式，在生活中證據就是證明；在陪審團的證明是要超越合理的懷疑(Tall, 1989)；對統計學家來說，確定發生的機率或統計數據則是證明；對於科學家而言，證明來自於實驗調查的結果；即使是數學家，證明的角色和功能也有不同的觀點。相對地，數學證明則是在不同領域可能扮演不同角色。在數學界裡，數學證明是數學家用來取信數學社群的工具，也是確保產品(定理)有效性的方法。在其它科學領域中，數學證明是用來幫助理解和應用數學的過程。在數學教育界中，證明課程是為了培養學生數理邏輯思考的能力與欣賞數學嚴謹有效的特質。

事實上，使用證明的想法不僅充斥在學生的數學學習過程，也融入所有需要下結論或作決策的情境裡。而數學正是對於此想法發展有特殊貢獻的學科，它本質上即是由邏輯所塑造而成的科學。數學證明不只是數學學習的主要目標之一，是促進數學發展的工具之一，也是融合數學與推理的核心。它突顯著有效化合理臆測的過程與方法，更是數學不同於其它經驗科學之處。但是學過邏輯和幾何證明的學生自認為理解的數學證明是什麼？是可以模仿的證明方法嗎？是奇怪而不必要的論證過程嗎？還是可以促進理解敘述內涵的有效化過程？一般中學數學的教學都著重於符號運算的熟練，但演算的流暢性真能帶來多數學生對於數學符號結構與邏輯的深層理解嗎？

學生學習論證必然歷經大量讀論證、做論證、聽老師說、看老師

演、看課本、參考書等等，這些經驗是否讓學生獲得了閱讀數學證明的策略呢？這些經驗是否也加深學生數學概念的瞭解呢？這些經驗是否也自然而然培養了學生邏輯推理的能力呢？這些經驗是否讓學生明白數學證明的功能呢？這些經驗是否讓學生知道如何應用所學得的命題和證明呢？閱讀與建構數學證明的能力有何異同？是否學習如何做、如何寫數學證明就足以引導學生充分理解數學證明呢？教材教法的設計是不是也考慮了這些問題？老師是不是因襲一般知識的教學方法，而沒有教如何抽象化與如何應用證明與閱讀的策略呢？如果想要促進數學證明的閱讀理解時，教師又可以採取哪些有效的教學策略？

要回答這些問題，我們必須先定義閱讀數學證明的理解有哪些目標，針對不同的理解目標如何設計評量理解表現的試題，以後才能用來評鑑什麼是有效的數學論證教學。此外，在設計新的數學論證教學策略之前，也必須試圖找出影響閱讀數學證明的理解表現的重要因素。閱讀數學證明不同於解讀數學史、數學解題過程或數學故事等說明或記述的文體，需要的不只是知識的憶取與問題或文本的歸納、統整與連結。數學證明的閱讀理解會不會是一種將已習得知識進階抽象化的過程？而理解的歷程會不會是需要另一種閱讀的策略呢？因此本研究擬先探討影響數學證明閱讀理解的因素以及各因素間的關係，並進一步分析促進或阻礙數學證明閱讀理解的認知特徵，最後再形成關於幾何證明閱讀理解的預測模式，希望對於讀數學證明在課程中的角色、教學活動的設計和學習歷程的障礙等問題產生一些導引的作用。



## 第二節 研究目的

綜合以上所述，本研究主要探討中學生數學證明閱讀理解的現象。由於國中的數學課程，學生主要的論證學習經驗是和幾何證明相關的內容；而且學生不僅需要學習如何閱讀數學，也要能夠透過閱讀來學習數學。所以本研究先探討在目前的幾何圖形及幾何論證課程的教學下，中學生對幾何證明的閱讀理解。至於影響閱讀理解的因素，由於許多研究主要探討學生的知識、邏輯和信念如何影響其論證的行為，所以本研究也先探討知識和邏輯推理對幾何證明閱讀理解的影響，再藉由閱讀理解的脈絡來探討學生的證明概念。如此，本研究的研究目的為下列二項：

1. 探究中學生在幾何證明閱讀理解認知面向上的特徵。
2. 探究中學生的知識和邏輯推理對幾何證明閱讀理解的影響。

## 第三節 研究問題

閱讀理解的面向和內涵隨著文本內容與結構的改變而有所不同，因此探討幾何證明閱讀理解的現象必須先探討幾何證明閱讀理解的面向(研究問題 1)。接著，就可從這些面向著手瞭解中學生的理解程度及各理解面向的關係(研究問題 2)。此外，一個人對於自己理解狀態的評估屬於監控理解的一部分，而且實際的理解和自我評估的理解兩者之間也會互相作用和影響。所以，探討中學生對幾何證明閱讀理解的自我評估(研究問題 3)，有助於瞭解中學生的幾何證明閱讀理解之實際表現和自我評估間的相關性和差異性。除了靜態地探討幾何

證明閱讀理解的現象，本研究也必須瞭解中學生對於哪些幾何論證是有效證明的想法(研究問題 4)，藉以進一步建構中學生的幾何證明閱讀理解模式(研究問題 5)。

讀者的閱讀理解表現與其既有基模相關，此既有基模的來源有認知的、情感的和意念的等等。本研究先探討認知中知識(研究問題 6)和邏輯推理(研究問題 7)的部分，藉以瞭解中學生利用相關的幾何知識和邏輯來理解幾何證明的情形。至於信念則透過研究問題 4 和 5 來探討中學生的幾何證明概念。如果相關的幾何知識和邏輯是學習幾何證明的先備條件，本研究也想探討這兩種因素在閱讀理解實際表現(研究問題 8)和自我評估(研究問題 9)中的重要性。除了瞭解這兩種因素對於實際表現和自我評估的解釋度，也比較這兩種因素的比重以及此比重在實際表現和自我評估中的差異。

綜言之，依據上述研究目的所衍生的研究問題如下：

### 研究目的 1.之研究問題

1. 幾何證明閱讀理解包含哪些面向？
2. (1)中學生在各面向幾何證明閱讀理解的實際表現為何？  
(2)中學生各面向幾何證明閱讀理解實際表現之間的關係結構為何？
3. (1)中學生在各面向幾何證明閱讀理解的自我評估為何？  
(2)中學生各面向幾何證明閱讀理解自我評估之間的關係結構為何？
4. 中學生對論證有效性之評析的思維特徵為何？
5. 中學生對幾何證明閱讀理解的模式為何？

## 研究目的 2.之研究問題

6. 中學生的幾何知識對其幾何證明閱讀理解實際表現的影響為何？
7. 中學生的邏輯推理對其幾何證明閱讀理解實際表現的影響為何？
8. 中學生的幾何知識、邏輯推理對其幾何證明閱讀理解實際表現的解釋度為何？
9. 中學生的幾何知識、邏輯推理對其幾何證明閱讀理解自我評估的解釋度為何？

## 第四節 名詞界定

### 1. 論點、論證與數學證明

論點主要包含了前提和結論兩個部分(Govier, 1992)，論證即在語言記號系統的脈絡中所呈現的論點(Duval, 1999)，數學證明是以定義、公理、定理為前提的形式論證，也稱為形式證明。雖然幾何證明包含非語言記號系統的圖形，但其內容仍具有語言記號系統的表達，所以幾何證明也是一種形式證明。

### 2. 解說性論證

針對某個主張或命題，提出支持此主張或命題的理由，但未論證此主張或命題的論點是對的(Govier, 1992)。例如：以「平行四邊形是底 $\times$ 高，長方形也是平行四邊形。」的理由來論證「如果三角形面積是二分之一底 $\times$ 高，則長方形面積是底(長) $\times$ 高(寬)。」是對的，則此理由屬於解說性論證。

### 3. 演繹式和演算式幾何證明

幾何證明可依證明的對象分為兩類，其中一類是關於幾何性質的推演，另一類是牽涉幾何量(面積、邊長等)的運算。本研究將前者稱為演繹式證明，後者稱為演算式證明。

### 4. 幾何證明閱讀理解

學生在閱讀給定的幾何命題與論證過程等資訊後，其對於命題和論證的內容、演繹的規則、論證的有效性和特殊性等方面所建構的意義即是該生的幾何證明閱讀理解，閱讀理解也簡稱為解讀。

一般而言，論證的有效性意指辨識論證過程有效證明了什麼命題，以及判斷邏輯上等價的推論是什麼；論證的特殊性意指將命題或論證過程應用在特定的情形下，例如：有具體數字且符合相同條件的問題，有相同性質但已知與求證易位的命題。

### 5. 幾何證明閱讀理解的實際表現

幾何證明閱讀理解的面向和內容，將在現象分析後再給予明確的定義。本研究依據各理解面向的操作型定義發展問卷，來測量受試者在幾何證明閱讀理解各面向問題的表現。受試者得分越高，表示其在各面向的閱讀理解越多且正確。

### 6. 幾何證明閱讀理解的自我評估

幾何證明閱讀理解的面向和內容，將在現象分析後再給予明確的定義。本研究依據各理解面向的操作型定義發展問卷，來測量受試者認為自己在幾何證明閱讀理解各面向的理解程度。受試者的同意度越高，表示其認為自己在各面向的閱讀理解越多。

## 7. 幾何證明閱讀理解模式

模式(model)一詞，其中一個意涵是指，陳述一事項的局部理論，也是理論化過程中的產物之一(張春興，1998；Freudenthal, 1991)。本研究意圖建構的幾何證明閱讀理解模式，是用來闡明幾何證明閱讀理解的現象，分析產生各種現象的成因，呈現閱讀理解的型態，以及彰顯影響閱讀理解的認知因素。此模式是陳述幾何證明閱讀理解的局部理論，希望藉以引導和發展未來關於幾何證明閱讀理解教與學的理論。